Домашнее задание 4

Задача 1

- Вероятность $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot (0.5)^k \cdot (0.5)^{10-k}$

Обозначу $Y = X - 3$. Значения Y и их вероятности:

Завершённая таблица:

Y	$P(Y)$
-3	0.00098
-2	0.00977
-1	0.04395
0	0.11719
1	0.20508
2	0.24609
3	0.20508
4	0.11719
5	0.04395
6	0.00977
7	0.00098

Задача 2

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

1. $P(X = 1) = F(1^+) - F(1^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
2. $P(X = 2) = F(2^+) - F(2^-) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$
3. $P(X = 3) = F(3^+) - F(3^-) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

4. $P(X < 2) = F(2^-) = \frac{3}{4}$
5. $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
6. $P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0^+) = \frac{11}{12} - 0 = \frac{11}{12}$

Задача 3

- Пиво: $P = 0.7$
- Вино: $P = 0.4$

Составляем закон распределения количества покупок:

Покупки	Вероятность
0	$P(\text{нет покупок}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$
1	$P(\text{только пиво}) + P(\text{только вино}) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.54$
2	$P(\text{оба}) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$

Задача 4

$$P(\xi = k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \, k = 1, 2, \dots$$

Решение:

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{4}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \Rightarrow$$

$$M = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$M = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Ответ: $M = 2$

Задача 5

Случайная величина ξ — число появлений события A в 3 независимых испытаниях, $P(A) = 0.4$

- ξ имеет биномиальное распределение: $P(\xi = k) = \binom{3}{k}(0.4)^k(0.6)^{3-k}$, $k = 0, 1, 2, 3$

Таблица распределения:

ξ	**Вероятность** $P(\xi = k)$
0	$P(\xi = 0) = \binom{3}{0}(0.6)^3 = 0.216$
1	$P(\xi = 1) = \binom{3}{1}(0.4)^1(0.6)^2 = 0.432$
2	$P(\xi = 2) = \binom{3}{2}(0.4)^2(0.6)^1 = 0.288$
3	$P(\xi = 3) = \binom{3}{3}(0.4)^3 = 0.064$

Математическое ожидание:

$$M = n \cdot p = 3 \cdot 0.4 = 1.2$$

Дисперсия:

$$D = n \cdot p \cdot (1 - p) = 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.72$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0.72} \approx 0.85$$

Ответы:

- $P(\xi = 0, 1, 2, 3) = 0.216, 0.432, 0.288, 0.064$
- $M = 1.2$, $D = 0.72$, $\sigma = 0.85$

Задача 6

Пусть $E\xi = 2$ **и** $D\xi = 4.5$**. Найти:**

1. $E((25 + 2\xi)^2)$
2. $D(1 + 3\xi)$

Решение:

1.

$$E[(25 + 2\xi)^2] = E[625 + 100\xi + 4\xi^2] = 625 + 100 \cdot E[\xi] + 4 \cdot E[\xi^2]$$
$$D[\xi] = E[\xi^2] - (E[\xi])^2 \Rightarrow$$
$$E[\xi^2] = D[\xi] + (E[\xi])^2 = 4.5 + 4 = 8.5$$

$$E[(25 + 2\xi)^2] = 625 + 100 \cdot 2 + 4 \cdot 8.5 = 625 + 200 + 34 = 859.$$

2.

$$D[1 + 3\xi] = 9 \cdot D[\xi] = 3^2 \cdot 4.5 = 40.5.$$

Ответы:

- $E[(25+2\xi)^2] = 859$,
- $D[1+3\xi] = 40.5$.

Задача 7

Вычислить дисперсию X, если $P(X=a) = p = 1 - P(X=b)$

$$E(X) = a \cdot P(X=a) + b \cdot P(X=b) = a \cdot p + b \cdot (1-p)$$

$$E(X^2) = a^2 \cdot P(X=a) + b^2 \cdot P(X=b) = a^2 \cdot p + b^2 \cdot (1-p)$$

Дисперсия определяется как:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \implies$$

$$D(X) = \left(a^2 p + b^2(1-p)\right) - (ap + b(1-p))^2$$

$$(E(X))^2 = (ap + b(1-p))^2 = a^2p^2 + 2abp(1-p) + b^2(1-p)^2$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \left(a^2 p + b^2(1-p)\right) - \left(a^2p^2 + 2abp(1-p) + b^2(1-p)^2\right) \\ &= a^2p(1-p) + b^2(1-p)p - 2abp(1-p) \\ &= \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) p(1-p) \end{aligned}$$

$$D(X) = (a-b)^2\, p(1-p)$$

Ответ:

$$D(X) = (a-b)^2\, p(1-p)$$

Задача 8

Сравнить приближение Пуассона с правильной биномиальной вероятностью:

1. $P(X=0)$, если $n = 10$, $p = 0.1$
2. $P(X=4)$, если $n = 9$, $p = 0.2$

Решение:

1. $P(X=0)$

Биномиальная вероятность:

$$P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} = (0.9)^{10} \approx 0.3487.$$

Приближение Пуассона:

Пуассоновский параметр $\lambda = n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$.

$$P(X=0) \approx \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = e^{-1} \approx 0.3679.$$

Ответ:

- Биномиальное: 0.3487,
- Пуассоновское: 0.3679.

2. $P(X=4)$:

Биномиальная вероятность:

$$P(X=4) = \binom{9}{4} \cdot (0.2)^4 \cdot (0.8)^5 = 126 \cdot 0.0016 \cdot 0.32768 \approx 0.066.$$

Приближение Пуассона:

Пуассоновский параметр $\lambda = 9 \cdot 0.2 = 1.8$.

$$P(X=4) \approx \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^4}{4!} = \frac{e^{-1.8} \cdot 1.8^4}{24} \approx 0.067$$

Ответ:

- Биномиальное: 0.066,
- Пуассоновское: 0.067.

Задача 9

Предположим, что вероятность того, что изделие, произведенное определенной машиной, будет дефектным, составляет 0.1. Найдите вероятность того, что в выборке из 10 изделий будет не более 1 дефектного изделия.

Решение:

Обозначим:

- $n = 10$ — размер выборки.
- $p = 0.1$ — вероятность того, что изделие дефектно.
- X — число дефектных изделий в выборке.

$$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Вероятность того, что нет дефектных изделий ($k = 0$)

$$P(X=0) = C_{10}^0 \cdot (0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} = 1 \times 1 \times (0.9)^{10} = 0.3487$$

Вероятность того, что есть одно дефектное изделие ($k = 1$)

$$P(X=1) = C_{10}^1 \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^9 = 10 \times 0.1 \times (0.9)^9 = 0.3874$$

Итого

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.3487 + 0.3874 = 0.7361$$

Ответ:

$$P(X \leq 1) \approx 0.73$$

Задача 10

Люди входят в казино со скоростью 1 человек каждые 2 минуты.

1. Какова вероятность того, что никто не войдет в казино с 12:00 до 12:05?
2. Какова вероятность того, что хотя бы 4 человека войдут в казино за этот период времени?

Интенсивность потока:

$$\lambda = \frac{1 \text{ человек}}{2 \text{ минуты}} = 0.5 \text{ человека в минуту}$$

- **Период наблюдения**: с 12:00 до 12:05, то есть $t = 5$ минут.

- **Среднее число входов за период:**

$$\mu = \lambda t = 0.5 \cdot 5 = 2.5$$

1. Вероятность того, что никто не войдет в казино с 12:00 до 12:05

Найдем $P(X = 0)$ по формуле распределения Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

Подставляем $k = 0$:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2.5} \cdot (2.5)^0}{0!} = e^{-2.5} \cdot 1 = e^{-2.5} \approx 0.0821$$

Ответ:

$$P(X = 0) \approx 0.0821$$

2. Вероятность того, что хотя бы 4 человека войдут в казино за этот период времени

Требуется найти $P(X \geq 4)$.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-2.5} \cdot (2.5)^1}{1!} = e^{-2.5} \cdot 2.5 \approx 0.0821 \cdot 2.5 = 0.2052$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-2.5}\cdot(2.5)^2}{2!}=e^{-2.5}\cdot\frac{(2.5)^2}{2}\approx 0.0821\cdot\frac{6.25}{2}=0.2565$$

$$P(X=3)=\frac{e^{-2.5}\cdot(2.5)^3}{3!}=e^{-2.5}\cdot\frac{(2.5)^3}{6}\approx 0.0821\cdot\frac{15.625}{6}=0.214$$

$$\begin{gathered}P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\\ \approx 0.0821+0.2052+0.2565+0.214\\ =0.7578\end{gathered}$$

$$P(X\geq 4)=1-P(X\leq 3)\approx 1-0.7578=0.2422$$

Ответ

$$P(X\geq 4)\approx 0.2422$$

Задача 11

Задача:

Случайная величина X имеет биномиальное распределение с математическим ожиданием $M(X)=6$ и дисперсией $D(X)=2.4$. Найти $P(X=5)$

Для биномиального распределения с параметрами n и p:

- Математическое ожидание:

$$M(X)=np$$

- Дисперсия:

$$D(X)=np(1-p)$$

Значит,

$$\begin{cases}np=6\\ np(1-p)=2.4\end{cases}$$

$$6(1-p)=2.4$$

$$1-p=\frac{2.4}{6}=0.4\implies p=1-0.4=0.6$$

$$n=\frac{6}{p}=\frac{6}{0.6}=10$$

- $n=10$
- $p=0.6$

$$\begin{gathered}P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=C_{10}^5\cdot p^5\cdot(1-p)^5=\\ \frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot(0.6)^5\cdot(0.4)^5\approx 0.2006581248\end{gathered}$$

Ответ:

$$P(X = 5) \approx 0.2007.$$