Домашнее задание 5

Задача 1

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 1 \implies$$

$$\int_{-1}^{1}c\cdot(1-x^2)dx = \int_{-1}^{1}1dx - \int_{-1}^{1}x^2dx = 2-(\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}) = 2-(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \implies$$

$$c\cdot\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

Функция распределения F(x):

- Для $x < -1$:

$$F(x) = 0$$

- Для $x \in [-1, 1]$

$$F(x) = \int_{-1}^{x}\frac{3}{4}\cdot(1-t^2)dt \implies F(x) = \frac{3}{4}[t-\frac{t^3}{3}]_{-1}^{x}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\cdot((x-\frac{x^3}{3})-(-1-\frac{-1}{3})) = \frac{3}{4}(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}) =$$

$$= \frac{-x^3}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}$$

- Для $x > 1$:

$$F(x) = 1$$

Задача 2

1. $f(x) \geq 0 \ \ \forall\, x$

   При $x \in [0, 5/2]$:

$$2x - x^3 = x(2-x^2) \implies \text{При x} = 1,\, f(x) > 0 \implies$$
$$\text{найдем все решения и посмотрим где } f(x) \text{ переходит ноль} \implies$$
$$x(2-x^2) = 0 \implies x = 0$$
$$2-x^2 = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2} \implies 0 < \sqrt{2} < 2.5$$

   $f(x)$ не может быть плотностью вероятности

Задача 3

$$Ex = \frac{3}{5}$$

$$\int_0^1 (a+bx^2)dx = 1 \implies a + b\frac{x^3}{3}|_0^1 = a + \frac{b}{3} = 1$$

$$Ex = \int_0^1 x(a+bx^2)dx = \int_0^1 (ax+bx^3)dx = \frac{3}{5}$$

$$\int_0^1 axdx = a\frac{x^2}{2}|_0^1 = \frac{a}{2} \quad \int_0^1 bx^3dx = b\frac{x^4}{4}|_0^1 = \frac{b}{4} \implies$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{4} = \frac{3}{5} \quad a + \frac{b}{3} = 1 \implies$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{4} = 0.5 + \frac{b}{12} = 0.6 \implies b = 1.2 \implies a = 0.6$$

Задача 4

Сначала найти плотность $f(x)$:

$$f(x) = (0.4x^{1.5} + 0.6x)' = 0.4 \cdot 1.5x^{0.5} + 0.6 = 0.6x^{0.5} + 0.6$$

$$Ex = \int_0^1 xf(x) = 0.6\int_0^1 x^{1.5} + x = 0.6 \cdot \frac{x^{2.5}}{2.5}|_0^1 + 0.6 \cdot \frac{x^2}{2}|_0^1 = 0.6(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}) = 0.54$$

$P(X < 9/16|X > 1/4) = \frac{P(\frac{1}{4}<X<\frac{9}{16})}{P(X>\frac{1}{4})}$

$$P(X > \frac{1}{4}) = 1 - F(1/4) = 1 - (0.4 \cdot 0.25^{1.5} + 0.6 \cdot 0.25) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(\frac{1}{4} < X < \frac{9}{16}) = F(9/16) - F(1/4) = 0.4 \cdot (9/16)^{1.5} + 0.6 \cdot (9/16) - 0.2 =$$
$$= 0.50625 - 0.2 = 0.30625$$

Ответ:

$$P(X < 9/16|X > 1/4) = \frac{P(\frac{1}{4} < X < \frac{9}{16})}{P(X > \frac{1}{4})} = \frac{0.30625}{0.8} \approx 0.383$$

Задача 5

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \text{Стандартизация } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

1. $P\{X > 5\}$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$$

Стандартизуем:

$$Z = \frac{5 - 10}{6} = -5/6 \approx -0.8333$$

$$P(X \leq 5) = \Phi(-0.833) = 1 - \Phi(0.833) = 0.2033$$

$$P(X > 5) = 1 - 0.2033 = 0.7967$$

2. $P(4 < X < 16)$

$$P(X < 16) = \Phi(Z) = \Phi(\frac{16 - 10}{6}) = \Phi(1) \approx 0.8413$$

$$P(X \leq 4) \implies Z = \frac{4 - 10}{6} = -1 \implies \Phi(-1) = 0.1587$$

$$P(4 < X < 16) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

3. $P(X < 8)$

$$Z = \frac{8 - 10}{6} \approx -0.333$$

$$P(X < 8) = \Phi(-0.333) = 1 - \Phi(0.333) \approx 1 - 0.6293 = 0.3707$$

4. $P(X < 20)$

$$P(X < 20) = \Phi(Z) = \Phi(\frac{20 - 10}{6}) \approx \Phi(1.6666) \approx 0.9515$$

5. $P(X > 16)$

$$P(X > 16) = 1 - P(x \leq 16) \text{ что посчитано ранее} = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Задача 6

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \implies$$

$$P(X > c) = 1 - P(X \leq c) \implies Z = \frac{c - \mu}{\sigma} \implies$$

$$1 - \Phi(Z) = 0.1 \implies \Phi(Z) = 0.9 \implies Z \approx 1.28 \implies$$

$$1.28 = \frac{c - 12}{2} \implies c = 14.56$$

Задача 7

Плотность распределения X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Для $Y = 2X - 2$:

$$Y = 2X - 2 \implies Y \in [-4, 0]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -4 \le y \le 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Для $Z = -X$

  Интервал остался тем же $\implies$ плотность осталась та же

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \le z \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Задача 8

1. $P(-0.5 \le X \le -0.1)$

   $$P(-0.5 \le X \le -0.1) = \Phi(-0.1) - \Phi(-0.5) = 1 - 0.5398 - 1 + 0.6915 = 0.1517$$

2. $P(1 \le X \le 2)$

   $$P(1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.97725 - 0.8413 = 0.13595$$

Ответ: $P(-0.5 \le X \le -0.1) > P(1 \le X \le 2)$

Задача 9

- Мат. ожидание Y =

$$E(e^X) = \int_0^\infty e^x \cdot 3e^{-3x} dx = 3 \int_0^\infty e^{-2x} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

- Дисперсия Y =

$$E[Y^2] = E[e^{2X}] = \int_0^\infty e^{2x} \cdot 3e^{-3x} dx = 3 \int_0^\infty e^{-x} dx = 3 \cdot 1 = 3 \implies$$

$$\text{Дисперсия } Y = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 3 - 1.5 \cdot 1.5 = 3 - 2.25 = 0.75$$