Проверка гипотезы о дисперсии нормально распределенной случайной величины

Принятие того или иного решения в экономике часто связано с анализом возможных результатов, точнее, разброса возможных результатов. Например, при покупке акций какой-либо компании весьма важно оценить риск от такого вложения, который определяется рассеиванием годовых дивидендов по данным акциям за продолжительный период времени. Такую оценку можно осуществлять на базе анализа дисперсии случайной величины – размера дивидендов. Следовательно, при изучении многих экономических проблем приходится иметь дело с выдвижением и проверкой гипотез о величине дисперсии. Одной из самых распространенных является гипотеза о величине дисперсии нормальной случайной величины.

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение, математическое ожидание m и дисперсия σ^2 которой неизвестны. Проверяется гипотеза о равенстве дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности X гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2. Тогда строятся следующие гипотезы:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

$$H_1^{(1)}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \ \left(H_1^{(2)}: \sigma^2 > \sigma_0^2;\ H_1^{(3)}: \sigma^2 < \sigma_0^2\right).$$

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n: $x_1, x_2, \dots, x_n$; вычисляются выборочное среднее $\bar{x}_\text{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_\text{в})^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$. Тогда критерий проверки H_0 имеет вид: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$. При справедливости H_0 построенная статистика χ^2 имеет χ^2 – распределение с $v = n - 1$ степенями свободы.

!!!! В контексте статистики χ^2 (хи-квадрат) степень свободы (degrees of freedom) обозначает количество независимых переменных, используемых для вычисления статистики χ^2 и определяет форму распределения этой статистики.

В случае проверки гипотезы о дисперсии или распределении, степень свободы в статистике χ^2 обычно определяется как количество групп или категорий минус один. В данном случае, если имеется n наблюдений, то степень свободы будет равна n минус один (v = n - 1).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. При $H_1^{(1)}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ по таблице критических точек χ^2 – распределения (!!!!!!) по заданному уровню значимости a и числу степеней свободы $v = n - 1$ находим критические точки $\chi^2_{1-\frac{a}{2},n-1}$ и $\chi^2_{\frac{a}{2},n-1}$ двусторонней критической области.

Если $\chi^2_{1-\frac{a}{2},n-1} < \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\frac{a}{2},n-1}$– нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2_{\text{набл}} \leq \chi^2_{1-\frac{a}{2},n-1}$ или $\chi^2_{\text{набл}} \geq \chi^2_{\frac{a}{2},n-1}$– отклоняется в пользу $H_1^{(1)}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

2. При $H_1^{(2)}: \sigma^2 > \sigma_0^2$ определяют критическую точку $\chi^2_{a.n-1}$ правосторонней критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{a,n-1}$– нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{a,n-1}$– H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)}: \sigma^2 < \sigma_0^2$ находят критическую точку $\chi^2_{1-a.n-1}$ левосторонней критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{1-a,n-1}$ – нет оснований для отклонения H_0.

Если $\chi^2_{\text{набл}} \leq \chi^2_{1-a,n-1}$ – H0 отклоняется в пользу $H_1^{(3)}$.

ЗАДАЧИ

Пример 1. Допустимая погрешность измерительного прибора по паспорту составляет $\sigma_0^2 = 5$. В результате 10 измерений найдено фактическое значение погрешности $S^2 = 6$. Требуется на уровне значимости 0,05 проверить, соответствуют ли экспериментальный результат заявленной точности прибора. Или, попросту говоря, исправен ли этот прибор.

Решение. Полагая, что погрешность измерений распределена нормально, проверим гипотезу о том, что генеральная дисперсия действительно равна $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 5$ против конкурирующей гипотезы $H_0: \sigma^2 > 5$. Это, кстати, самый популярный вид альтернативной гипотезы – когда есть превышение нормы, и требуется проверить, случайно оно или нет.

Используем критерий $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, где S^2 – случайное значение исправленной дисперсии.

Найдём правостороннюю критическую область. Для уровня значимости $a = 0{,}05$ и количества степеней свободы $v = n - 1 = 10 - 1 = 9$ по таблице критических точек распределения хи-квадрат: $\chi^2_{a,n-1} = \chi^2_{0{,}05{,}9} \approx 16{,}92$.

При $\chi^2 < \chi^2_{a,n-1}$ нулевая гипотеза принимается, а при $\chi^2 > \chi^2_{a,n-1}$ – отвергается.

Вычислим наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{9*6{,}2}{5} = 11{,}16 < \chi^2_{a,n-1}$, поэтому **на уровне значимости 0,05 нет оснований отвергать гипотезу** $H_0: \sigma^2 = 5$. Таким образом, выборочный более высокий результат $S^2 = 6$ с большой вероятностью обусловлен случайностью.

Могло сложиться впечатление, что значения 5 и 6,2 различаются существенно, но это иллюзия – ведь дисперсия имеет квадратичную размерность, и стандартные отклонения действительно довольно близки́ друг к другу: $\sigma_0 = \sqrt{5} \approx 2{,}24; S = \sqrt{6{,}2} \approx 2{,}4$.

Ответ: на уровне значимости 0,05 точность прибора соответствует норме.

Пример 2. Партия изделий принимается, если дисперсия контролируемого размера значимо не превышает 0,2. Исправленная выборочная дисперсия, найденная по выборке объема $n = 100$, оказалась равной $s^2 = 0{,}25$. Можно ли принять партию на уровне значимости 0,05?

Решение: полагая, что погрешности размера выпускаемых изделий распределены нормально, проверим гипотезу $H_0\colon \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0{,}2$ против конкурирующей гипотезы $H_0\colon \sigma^2 > 5$.

Используем критерий $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$, где S^2 – случайное значение исправленной дисперсии.

Так как в конкурирующей гипотезе речь идёт о бо́льших значениях дисперсии, то критическая область будет правосторонней. Для уровня значимости $a = 0{,}05$ и количества степеней свободы $v = n - 1 = 100 - 1 = 99$ по таблице критических точек распределения хи-квадрат: $\chi^2_{a,n-1} = \chi^2_{0{,}05{,}99} \approx 123{,}24$.

При $\chi^2 < \chi^2_{a,n-1}$ нулевая гипотеза принимается, а при $\chi^2 > \chi^2_{a,n-1}$ – отвергается.

Вычислим наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{\text{набл}} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{99*0{,}25}{0{,}2} = 123{,}75 > \chi^2_{a,n-1}$, поэтому **на уровне значимости 0,05 отвергать гипотезу** $H_0\colon \sigma^2 = 0{,}2$ **отвергаем**.

Иными словами, выборочный результат $S^2 = 0{,}25$ статистически значимо отличается от нормативного значения 0,2.

Ответ: на уровне значимости 0,05 партию изделий принять нельзя.

Проверка гипотезы о доле признака генеральной совокупности

Пусть в генеральной совокупности производятся независимые испытания Бернулли, в каждом из которых некоторый признак A может появиться с неизвестной вероятностью p. Пусть из этой совокупности извлечена выборка объема n и найдена выборочная доля:

$$\omega = \frac{m}{n},$$

где m – число членов выборки, обладающих признаком A.

!!!! Независимые испытания Бернулли – это серия экспериментов, в которых каждый эксперимент имеет два возможных исхода: успех (обычно обозначается как "1") или неудача (обычно обозначается как "0"). Каждый эксперимент является независимым от предыдущих и имеет постоянную вероятность успеха.

Важной характеристикой независимых испытаний Бернулли является вероятность успеха (обычно обозначается как p). Эта вероятность остается постоянной для каждого эксперимента и не зависит от предыдущих исходов.

Количество успехов в серии независимых испытаний Бернулли может быть моделировано с помощью биномиального распределения, где количество испытаний обозначается как n, а вероятность успеха в каждом испытании обозначается как p.

В качестве оценки неизвестной вероятности примем выборочную долю. Так как выборочная доля имеет асимптотически нормальное распределение ($w \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$) предположим, что взята выборка достаточно большого объема. Пусть есть основания предполагать, что неизвестная вероятность равна p_0. Тогда $H_0: p = p_0$, $H_1: p \neq p_0$ (или $H_0: p < p_0$, или $H_1: p > p_0$). В качестве критерия выберем статистику

$$Z = \frac{\omega - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Известно, что $Z \sim N(0,1)$.

При альтернативной гипотезе $H_1: p \neq p_0$ критические точки определяются по таблице функции Лапласа из условия $\Phi_0\left(z_{\frac{a}{2}}\right) = \frac{1-a}{2} \Rightarrow$ $z_{\frac{1-a}{2}} = -z_{\frac{a}{2}}$. Если $|Z_{\text{набл}}| < z_{\frac{a}{2}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0. Если $|Z_{\text{набл}}| \geq z_{\frac{a}{2}}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной гипотезы H_1.

При $H_1: p < p_0$ критическую точку правосторонней области находят из равенства $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2a}{2}$. Если $Z_{\text{набл}} < z_a$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $Z_{\text{набл}} < z_a$, то нулевую гипотезу отвергают.

Пусть $H_1: p > p_0$, тогда критическая точка левосторонней критической области $z_{1-a} = -z_a$, где $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2a}{2}$. Если $Z_{\text{набл}} > -z_a$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если $Z_{\text{набл}} < -z_a$, то нулевую гипотезу отвергают.

На данной странице представлен краткий алгоритм, необходимый для решения задач.

Гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: $p = p_0$, для H_1 есть 3 случая:

1. $p \neq p_0$ – критическая область двусторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-a}{2}$;

2. $p < p_0$ – критическая область правосторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$;

3. $p > p_0$ – критическая область левосторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сформулировать гипотезы. Выбрать уровень значимости α.
2. Найти эмпирическое значение критерия по формуле $Z = \frac{\omega - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$..
3. Найти критическое значение критерия по таблице функции Лапласа:

- в первом случае (конкурирующая гипотеза: $p \neq p_0$): $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-a}{2}$,

- во втором и третьем случаях (конкурирующая гипотеза: $p > p_0$ или $p < p_0$): $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$, где $\Phi(L)$ – интегральная функция Лапласа.

4. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия. Если $z_{\text{эмп}} < z_{\text{крит}}$, то на уровне значимости α принимается нулевая гипотеза H_0, иначе – альтернативная (H_1).

ЗАДАЧИ

Пример 1. В результате длительных наблюдений установлено, что вероятность полного выздоровления больного, принимавшего лекарство A, равна 0,8. Новое лекарство B назначено 800 больным, причём 660 из них полностью выздоровели. Можно ли считать новое лекарство значимо эффективнее лекарства A на пятипроцентном уровне значимости?

Решение. В результате использования нового лекарства получена относительная частота полного выздоровления $\omega = \frac{m}{n} = \frac{660}{800} = 0{,}825$ и возникает вопрос: этот результат случаен или лекарство B действительно эффективнее? Проясним эту ситуацию статистическим методом.

На уровне значимости $a = 0{,}05$ проверим гипотезу $H_0\colon p = p_0 = 0{,}8$ о том, что новое лекарство имеет такую же эффективность против конкурирующей гипотезы $H_0\colon p > 0{,}8$, что оно более эффективно. Используем критерий $Z = \frac{\omega - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Критическое значение правосторонней критической области найдём из соотношения $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2a}{2}$, в данном случае $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2*0{,}05}{2} = 0{,}45.$

По таблице значений функции Лапласа определяем, что этому значению функции соответствует аргумент $z_a \approx 1{,}64$.

При $Z_{\text{набл}} < z_a$ нулевая гипотеза принимается, а при $Z_{\text{набл}} > z_a$ – отвергается.

Вычислим $Z_{\text{набл}}$ наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{\text{набл}} = \frac{(\omega - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{(0{,}825 - 0{,}8)\sqrt{800}}{\sqrt{0{,}8 * 0{,}2}} \approx 1{,}78 > z_a,$$

Поэтому на уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0\colon p = 0{,}8$ отвергаем в пользу конкурирующей гипотезы $H_1\colon p > 0{,}8$. Таким образом, выборочный результат $\omega = \frac{660}{800} = 0{,}825$ вряд ли объясним случайностью.

Ответ: на пятипроцентном уровне значимости новое лекарство эффективнее лекарства A.

Пример 2. Завод рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемое изделие, равна 0,08. Завод разослал 1000 каталогов новой улучшенной формы и получил 98 заказов. Можно ли считать, что новая форма рекламы значимо эффективнее? Примите уровень значимости 0,05 и проверьте это предположение.

Решение: на уровне значимости $a = 0{,}05$ проверим гипотезу $H_0: p = p_0 = 0{,}08$ о том, новая рекламная кампания имеет такую же эффективность против конкурирующей гипотезы $H_0: p > 0{,}08$. Используем критерий $Z = \frac{\omega - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Критическое значение правосторонней критической области найдём из соотношения $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2a}{2}$, в данном случае $\Phi_0(z_a) = \frac{1-2*0{,}05}{2} = 0{,}45$.

По таблице значений функции Лапласа определяем, что этому значению функции соответствует аргумент $z_a \approx 1{,}64$.

При $Z_{набл} < z_a$ нулевая гипотеза принимается, а при $Z_{набл} > z_a$ – отвергается.

Вычислим $Z_{набл}$ наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{набл} = \frac{(\omega - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} = \frac{(0{,}098 - 0{,}08)\sqrt{1000}}{\sqrt{0{,}08 * 0{,}92}} \approx 2{,}1 > z_a,$$

Поэтому на уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0: p = 0{,}08$ отвергаем в пользу конкурирующей гипотезы $H_1: p > 0{,}08$.

Ответ: на уровне значимости 0,05 новая форма рекламы значимо эффективнее

Сравнение двух средних генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (большие независимые выборки)

??? Для чего нужно сравнивать средние генеральных совокупностей? - На практике такая задача может возникнуть в научных (и не только!) исследованиях, медицине, экономике, социологии.

Пример 1. Например, у нас есть два метода лечения одного и того же заболевания. Исследователи проводят клиническое исследование, в ходе которого сравнивают эффективность двух различных лекарств для лечения одного и того же заболевания. Одна группа пациентов получает лекарство A, а другая группа - лекарство B. После завершения исследования сравниваются средние результаты, такие как время восстановления, снижение симптомов и побочные эффекты, чтобы определить, какое из лекарств является более эффективным.

Пример 2. Университет проводит исследование для оценки эффективности новой программы обучения. Студенты, которые проходят обучение по новой программе, сравниваются со студентами, проходящими обучение по старой программе. После окончания семестра сравниваются средние оценки студентов и процент успешных сдач экзаменов, чтобы определить, влияет ли новая программа обучения на успеваемость студентов.

Пример 3. Компания сравнивает два различных метода управления проектами, например, Agile и Waterfall. Проекты, управляемые по методу Agile, сравниваются с проектами, управляемыми по методу Waterfall, по таким показателям, как скорость выполнения проектов, качество результата и удовлетворенность клиентов. По результатам сравнения принимается решение о том, какой метод управления проектами более эффективен для компании.

Обозначим через n и m объемы больших $(n > 30, m > 30)$ независимых выборок X и Y, по которым найдены соответствующие выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Генеральные дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ известны (например, из предшествующего опыта или найдены теоретически).

В таком случае генеральные совокупности X и Y можно считать нормально распределенными с параметрами $(\bar{x}, D(X))$, $(\bar{y}, D(Y))$.

??? Почему? – Об этом гласит центральная предельная теорема: «Если генеральная совокупность сильно отличается от нормального распределения, то чтобы получить нормальное распределение, хорошо описывающее распределение выборочного среднего, необходим размер выборки намного больше 30.».

Нулевая гипотеза. Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, то есть

$$H_0 : M(X) = M(Y).$$

Учитывая, что выборочные средние являются несмещенными оценками генеральных средних, то есть $M(\bar{x}) = M(X)$ и $M(\bar{y}) = M(Y)$, нулевую гипотезу можно записать следующим образом:

$$H_0: M(\bar{x}) = M(\bar{y}).$$

Таким образом, требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий выборочных средних. Как правило, выборочные средние оказываются различными и возникает вопрос о значимости такого различия.

Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, то есть генеральные средние одинаковы, то различие выборочных средних незначимо и объясняется случайными причинами и, в частности, случайным отбором объектов выборки.

Если нулевая гипотеза отвергнута, т.е. генеральные средние неодинаковы, то различие выборочных средних значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а объясняется тем, что сами генеральные средние (математические ожидания) различны.

Рассмотрим статистический критерий, который используется для сравнения генеральных средних двух больших независимых выборок (в некоторых источниках его называют **критерий Лапласа**):

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma(\bar{x} - \bar{y})} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}}.$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ принимают различные, наперед неизвестные значения.

??? Как из левой части формулы получилась правая?

1) По определению среднего квадратического отклонения, $\sigma(\bar{x} - \bar{y}) = \sqrt{D(\bar{x} - \bar{y})}$

2) На основании свойства дисперсии $D(\bar{x} - \bar{y}) = D(\bar{x}) + D(\bar{y})$.

3) $D(\bar{x}) = \frac{D(X)}{n}, D(\bar{y}) = \frac{D(Y)}{m}$, следовательно $\sigma(\bar{x} - \bar{y}) = \sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}$.

Критерий Z – нормированная нормальная случайная величина, так как является линейной комбинацией нормально распределенных величин; сами эти величины распределены нормально как выборочные средние, найденные по выборкам, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей; Z – нормированная величина потому, что $M(Z) = 0$; при справедливости нулевой гипотезы, поскольку выборки независимы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

??? Критической областью называется область значений статистики критерия, при которых отвергается H_0.

Конкурирующая гипотеза. Всего есть 3 вида конкурирующих гипотез H_1. Первый случай:

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна α/2:

$$P\left(Z < z_{\text{лев.кр}}\right) = \frac{\alpha}{2}, P\left(Z < z_{\text{прав.кр}}\right) = \alpha/2. \qquad (*)$$

Ранее было сказано, что Z – нормированная нормальная величина. Распределение такой величины симметрично относительно нуля, а значит и критические точки симметричны относительно нуля.

Обозначим тогда $z_{\text{лев.кр}} = -z_{\text{кр}}$ и $z_{\text{прав.кр}} = z_{\text{кр}}$. Достаточно будет найти только правую границу, и тогда мы получим область принятия нулевой гипотезы $(-z_{\text{кр}},\ z_{\text{кр}})$.

Чтобы найти $z_{\text{кр}}$, воспользуемся тем, что функция Лапласа определяет вероятность попадания нормированной нормальной случайной величины (которой является Z), в интервал $(0,\ z)$:

$$P(0 <\ Z < z) = \Phi(z).$$

Тогда будет справедливо равенство:

$$P\left(0 <\ Z < z_{\text{кр}}\right) = \Phi(z_{\text{кр}}). \qquad (**)$$

Так как распределение Z симметрично относительно нуля, вероятность попадания Z в интервал $(0,\ \infty)$ равна 1/2. Этот интервал содержит в себе точку

$z_{кр}$, а значит его можно разбить на интервалы $(0,\ z_{кр})$ и $(z_{кр},\ \infty)$. Тогда по теореме сложения вероятностей:

$$P(0 < Z < z_{кр}) + P(z_{кр} < Z) = \frac{1}{2}.$$

Что равносильно:

$$\Phi(z_{кр}) + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\boxed{\Phi(z_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}.}$$

??? Как мы от суммы двух вероятностей перешли к функции Лапласа и α?
Согласно (**) $P(0 < Z < z_{кр}) = \Phi(z_{кр})$ и согласно (*) $P(Z < z_{прав.кр}) = P(Z < z_{кр}) = \alpha/2$.

Двусторонняя критическая область определяется неравенством $|Z| > z_{кр}$. Область принятия нулевой гипотезы имеет вид $-z_{кр} < Z < z_{кр}$ или $|Z| < z_{кр}$. Если наблюдаемое значение критерия Z не попадает в критическую область, то принимается нулевая гипотеза. Иначе нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

<u>Второй случай</u>:

$$H_1 : M(X) > M(Y).$$

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha. \qquad (***)$$

Аналогично первому случаю получим, что:

$$P\left(0 < Z < z_{кр}\right) + P\left(z_{кр} < Z\right) = \frac{1}{2}.$$

Что равносильно

$$\Phi\left(z_{кр}\right) + \alpha = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\boxed{\Phi\left(z_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}.}$$

??? Как это получилось?

Согласно (**) $P\left(0 < Z < z_{кр}\right) = \Phi\left(z_{кр}\right)$ и согласно (***) $P\left(Z > z_{кр}\right) = \alpha$.

Правосторонняя критическая область определяется неравенством $Z > z_{кр}$. Если наблюдаемое значение критерия Z не попадает в критическую область, то есть $Z < z_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза. При попадании в критическую область нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

<u>Третий случай</u>:

$$H_1 : M(X) < M(Y).$$

В данном случае строится левосторонняя критическая область, которая полностью симметрична правосторонней, поэтому аналогично второму случаю:

$$\boxed{\Phi\left(z_{кр}\right) = \frac{1-2\alpha}{2}.}$$

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $Z < -z_{кр}$. Если наблюдаемое значение критерия Z не попадает в критическую область, то есть $Z > -z_{кр}$, то принимается нулевая гипотеза. При попадании в критическую область нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

На данной странице представлена краткая выжимка информации, необходимая для решения задач.

Гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: генеральные средние равны $\bar{x} = \bar{y}$, для H_1 есть 3 случая:

1. $\bar{x} \neq \bar{y}$ – критическая область двусторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-a}{2}$;

2. $\bar{x} > \bar{y}$ – критическая область правосторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$;

3. $\bar{x} < \bar{y}$ – критическая область левосторонняя, $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сформулировать гипотезы. Выбрать уровень значимости α.
2. Найти эмпирическое значение критерия Лапласа по формуле $z_{\text{эмп}} = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\frac{D_x}{n}+\frac{D_y}{m}}}$.
3. Найти критическое значение критерия по таблице Лапласа:

- в первом случае (конкурирующая гипотеза: $\bar{x} \neq \bar{y}$): $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-a}{2}$,
- во втором и третьем случаях (конкурирующая гипотеза: $\bar{x} > \bar{y}$ или $\bar{x} < \bar{y}$): $\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1-2a}{2}$, где $\Phi(L)$ – интегральная функция Лапласа.

4. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия. Если $z_{\text{эмп}} < z_{\text{крит}}$, то на уровне значимости α принимается нулевая гипотеза H_0, иначе – альтернативная (H_1).

ЗАДАЧИ

Пример 1. Необходимо исследовать на возможную высокую урожайность два сорта пшеницы. Для этого составляют две выборки: равномерно и случайным образом со всей площади посева каждого изучаемого сорта берут на исследование по 50 или более растений. Пусть для анализа сорта пшеницы выбран хозяйственно важный признак – число колосков в колосе. Пусть собрано по 100 колосьев со 100 разных растений каждого сорта, далее подсчитывается число колосков (X для первого и Y для второго сортов, их объёмы n и m) в каждом колосе и составляются два вариационных ряда для первого и второго сортов. Выполнить с надежностью 99%.

X	n
12	3
13	8
14	16
15	19
16	21
17	17
18	9
19	5
20	2

Y	m
11	1
12	4
13	4
14	7
15	12
16	18
17	22
18	15
19	8
20	6
21	3

Решение. Сформулируем гипотезы.

Нулевая гипотеза H_0: существенных различий между исследуемыми сортами нет ($\bar{x} = \bar{y}$).

Конкурирующая гипотеза H_1: второй сорт существенно превосходит первый по изучаемому признаку (третий случай $\bar{x} < \bar{y}$).

Для более полного представления об изменчивости изучаемых сортов пшеницы по числу колосков вычислим среднее арифметическое ($\bar{x}$, $\bar{y}$ для первого и второго сортов соответственно) и соответствующие им дисперсии:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{9} x_i - n_i = 15{,}71 \text{ и } \bar{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{11} y_i - m_i = 16{,}56.$$

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - 15{,}71)^2\, n_i}{100} = 3{,}24 \text{ и } D_y = \frac{\sum_{i=1}^{11}(y_i - 16{,}56)^2\, m_i}{100} = 4{,}58.$$

Определим существенность различия сравниваемых величин, то есть существенность различий двух сортов пшеницы по числу колосков в колосе.

$$z_{\text{эмп}} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{D_x}{n} + \frac{D_y}{m}}} = \frac{|15{,}71 - 16{,}56|}{0{,}1 * \sqrt{3{,}24 + 4{,}58}} \approx 3{,}04.$$

Для уровня значимости $a = 0{,}01$ определим критическое значение критерия по статистической таблице функции Лапласа (третий случай).

$$\Phi(z_{\text{крит}}) = \frac{1 - 2a}{2} = \frac{1 - 2 * 0{,}01}{2} = 0{,}49 \text{ и } z_{\text{крит}} = 2{,}33.$$

Таким образом, $z_{\text{эмп}} > z_{\text{крит}}$, так как $3{,}04 > 2{,}33$, и на уровне значимости $0{,}01$ принимаем альтернативную гипотезу, то есть второй сорт существенно превосходит первый по изучаемому признаку, при этом различие количества колосков имеет место не только в данных выборках, но и в генеральных совокупностях в целом (с надёжностью 0,99).

Если учесть, что увеличение числа колосков в колосе, как правило, сопровождается увеличением числа зёрен, то при прочих равных характеристиках от этого сорта мы вправе ожидать более высокой урожайности по сравнению с другим сортом.

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 60$ и $m = 50$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 1250$ и $\bar{y} = 1275$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 120$, $D(Y) = 100$. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0\colon M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе $H_1\colon M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D_x}{n} + \frac{D_y}{m}}} = \frac{1250 - 1275}{\sqrt{\frac{120}{60} + \frac{100}{50}}} = -12{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$, поэтому критическая область – двусторонняя (первый случай).

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-a}{2} = \frac{1-0{,}01}{2} = 0{,}495.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $Z_{\text{кр}} = 2{,}58$. Так как $|Z_{\text{набл}}| > Z_{\text{кр}}$ – нулевая гипотеза отвергается. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Пример 3. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 10$ и $m = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние $\bar{x} = 14{,}3$ и $\bar{y} = 12{,}2$. Генеральные дисперсии известны: $D(X) = 22$, $D(Y) = 18$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0{:}\, M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе $H_1{:}\, M(X) > M(Y)$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z_{\text{набл}} = \frac{14{,}3 - 12{,}2}{\sqrt{\frac{22}{10} + \frac{18}{10}}} \approx 1{,}05.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) > M(Y)$, поэтому критическая область – правосторонняя (второй случай).

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2a}{2} = \frac{1-2*0{,}05}{2} = 0{,}45.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $Z_{\text{кр}} = 1{,}64$. Так как $|Z_{\text{набл}}| < Z_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо.

Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Например, по выборкам малого объема нельзя получить хорошие оценки генеральных дисперсий. По этой причине метод сравнения средних из прошлого пункта применить нельзя.

Однако если дополнительно предположить, что неизвестные генеральные дисперсии равны между собой, то можно построить критерий Стьюдента сравнения средних.

??? Критерий Стьюдента (t-критерий) для сравнения средних используется, когда дисперсии генеральных совокупностей неизвестны. Он основан на том, что если выборки взяты из нормально распределенных генеральных совокупностей, то распределение разности выборочных средних будет иметь t-распределение с некоторым числом степеней свободы.

При этом, если дополнительно предположить, что дисперсии генеральных совокупностей равны между собой (гомогенны), то оценка дисперсии разности выборочных средних будет являться взвешенным средним двух оценок дисперсий (выборочных дисперсий) с учетом объемов выборок.

Если же нет оснований считать дисперсии одинаковыми, то, прежде чем сравнивать средние, следует, пользуясь критерием Фишера-Снедекора, предварительно проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

??? Гипотеза о равенстве двух дисперсий нормально распределённых генеральных совокупностей.

В данном случае при уровне значимости α нужно проверить гипотезу $H_0: D(X) = D(Y)$. Статистикой служит случайная величина $F = \frac{S_b^2}{S_i^2}$, имеющая распределение Фишера – Снедекора с $f_1 = n_б - 1$ и $f_2 = n_м - 1$ степенями свободы ($S_б^2$ – большая дисперсия (максимальная из двух), объём её выборки $n_б$). Определяется соответствующее экспериментальное (наблюдаемое) значение $F_{экс}$. Критическое значение $F_{кр}$ при альтернативной гипотезе $H_1: D(X) > D(Y)$ находится из таблицы критических точек распределения Фишера – Снедекора по уровню значимости α и числу степеней свободы f_1 и f_2. Нулевая гипотеза принимается, если $F_{экс} < F_{кр}$.

Итак, в предположении, что генеральные дисперсии одинаковы, требуется проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$. Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$, найденные по независимым малым выборкам объемов n и m.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} * \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Доказано, что при выполнении нулевой гипотезы величина T имеет t-распределение Стьюдента с $k = n + m - 2$ степенями свободы.

Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.

Конкурирующая гипотеза.

Все три случая конкурирующих гипотез в данной теме практически аналогичны соответствующим случаям из предыдущей темы (в которой рассматривался критерий Лапласа).

Первый случай:

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости α.

Наибольшая мощность критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна α/2:

$$P(T < t_{\text{лев.кр}}) = \frac{\alpha}{2}, P(T < t_{\text{прав.кр}}) = \alpha/2.$$

Ранее было сказано, что величина T имеет распределение Стьюдента. Распределение такой величины симметрично относительно нуля, а значит и критические точки симметричны относительно нуля.

Обозначим тогда $t_{\text{лев.кр}}(\alpha, k) = -t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ и $t_{\text{прав.кр}}(\alpha, k) = t_{\text{кр}}(\alpha, k)$. Достаточно будет найти только правую границу, и тогда мы получим область принятия нулевой гипотезы $(-t_{\text{кр}}(\alpha, k),\ t_{\text{кр}}(\alpha, k))$.

Двусторонняя критическая область определяется как $|T| > t_{\text{кр}}(\alpha, k)$. Область принятия нулевой гипотезы имеет вид $|T| < t_{\text{кр}}(\alpha, k)$.

Если наблюдаемое значение критерия T не попадает в критическую область, то принимается нулевая гипотеза. Иначе нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

<u>Второй случай</u>:

$$H_0 : M(X) > M(Y).$$

В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости

$$P(T > t_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Правосторонняя критическая область определяется неравенством $T > t_{\text{кр}}$.

Если наблюдаемое значение критерия T не попадает в критическую область, то есть $T < t_{\text{кр}}$, то принимается нулевая гипотеза. При попадании в критическую область нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

Третий случай:

$$H_0 : M(X) < M(Y).$$

В данном случае строится левосторонняя критическая область, которая полностью симметрична правосторонней, поэтому все аналогично второму случаю, за исключением знака.

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $T < -t_{\text{кр}}$.
Если наблюдаемое значение критерия Z не попадает в критическую область, то есть $T > -t_{\text{кр}}$, то принимается нулевая гипотеза. При попадании в критическую область нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей.

На данной странице представлена краткая выжимка информации, необходимая для решения задач.

Гипотезы. Нулевая гипотеза H_0: генеральные средние равны $\bar{x} = \bar{y}$, для H_1 есть 3 случая:

1. $\bar{x} \neq \bar{y}$ – критическая область двусторонняя;

2. $\bar{x} > \bar{y}$ – критическая область правосторонняя;

3. $\bar{x} < \bar{y}$ – критическая область левосторонняя.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сформулировать гипотезы. Выбрать уровень значимости α.
2. Найти эмпирическое значение критерия Стьюдента для случая несвязанных, независимых выборок по формуле: $T_{\text{эмп}} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}} * \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$
3. Найти число степеней свободы по формуле: $k = n + m - 2$.
4. Определить критическое значение t-критерия Стьюдента по таблице Стьюдента.
5. Сравнить эмпирическое и критическое значения критерия Стьюдента, учитывая, что t-критерий двусторонний. Если $|T_{\text{эмп}}| < |t_{\text{крит}}|$, принимается нулевая гипотеза, иначе принимается альтернативная.

ЗАДАЧИ

Пример 1. Измерено 10 колосьев суперэлиты и 12 колосьев элиты озимой ржи определённого сорта. Для каждой репродукции была вычислена средняя длина колосьев и средние оценки дисперсий. Для суперэлиты они соответственно равны $x = 10{,}24$ см и $S_x^2 = 0{,}0169$ см^2, для элиты – $y = 9{,}69$ см и $S_y^2 = 0{,}0256$ см^2. Выяснить, действительно ли различия в длинах колосьев обусловлены принадлежностью к элите (суперэлите) или же это различие является случайным, не существенным.

Решение. В качестве нулевой принимаем гипотезу: различия в средних длинах колосьев суперэлиты и элиты обусловлены случайностями выборки.

Определим эмпирическое значение критерия $T_{\text{эмп}}$ по формуле:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} * \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} =$$

$$= \frac{|10{,}24 - 9{,}69|}{\sqrt{(10-1) * 0{,}0169 + (12-1) * 0{,}0256}} * \sqrt{\frac{10 * 12 * (10+12-2)}{10+12}} =$$

$$= \frac{0{,}55}{\sqrt{0{,}4337}} * \sqrt{\frac{2400}{22}} \approx 8{,}72.$$

Найдём для уровня значимости 0,05 и степени свободы $k = 10 + 12 - 2 = 20$ критическое значение критерия $t_{\text{крит}}(0{,}05;\ 20) = 2{,}09$.

Таким образом, $T_{\text{эмп}} > t_{\text{крит}}$, так как $8{,}72 > 2{,}09$. На уровне значимости принимаем альтернативную гипотезу, то есть различия в средних длинах колосьев значимы и не обусловлены случайными причинами.

Пример 2. По двум независимым малым выборкам, объемы которых соответственно равны $n = 5$ и $m = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\bar{x} = 3{,}3$, $\bar{y} = 2{,}48$ и исправленные дисперсии $S_x^2 = 0{,}25$ и $S_y^2 = 0{,}108$. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$, при конкурирующей гипотезе $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = \frac{0{,}25}{0{,}108} = 2{,}31.$$

Дисперсия S_x^2 значительно больше дисперсии S_y^2, поэтому в качестве конкурирующей примем гипотезу $H_0: M(X) > M(Y)$. В этом случае критическая область – правосторонняя. По таблице, по уровню значимости $a = 0{,}05$ и числом степеней свободы $k_1 = 5 - 1 = 4$, $k_2 = 6 - 1 = 5$ находим критическую точку $F_{\text{кр}}(0{,}05; 4; 5) = 5{,}19$.

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, тогда сравним средние. Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$T_{\text{набл}} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{nS_x^2 + mS_y^2}} * \sqrt{\frac{nm(n + m - 2)}{n + m}}.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в эту формулу, получим $T_{\text{набл}} = 3{,}27$.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M(X) \neq M(Y)$ поэтому критическая область – двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы $k = 5 + 6 - 2 = 9$ находим по таблице критическую точку $t_{\text{двуст.кр}}(0{,}05; 9) = 2{,}26$.

Так как $T_{\text{набл}} > t_{\text{двуст.кр}}$ – нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Пусть двумерная генеральная совокупность (X, Y) распределена нормально. Из этой совокупности извлечена выборка объема и по ней найден выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности $r_{\text{г}}$ также отличен от нуля. В конечном счете нас интересует именно этот коэффициент, поэтому возникает необходимость при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0\colon r_{\text{г}} = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1\colon r_{\text{г}} \neq 0$.

Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (кратко говоря, значим), а X и Y коррелированны, т. е. связаны линейной зависимостью.

Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а X и Y некоррелированны, т. е. не связаны линейной зависимостью.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину:

$$T = r_{\text{в}} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}}.$$

Величина при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с $k = n - 2$ степенями свободы. Поскольку конкурирующая гипотеза имеет вид критическая область – двусторонняя.

Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через $T_{\text{набл}}$ и сформулируем правила проверки нулевой гипотезы.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе, надо вычислить наблюдаемое значение критерия: $T_{\text{набл}} = r_{\text{в}} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}}$ и по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости и числу степеней свободы найти критическую точку $t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ для двусторонней критической области.

Если $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Если $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{кр}}$ – нулевую гипотезу отвергают.

ЗАДАЧИ

Пример 1. Выборочная корреляция между месячной доходностью британского фунта (GBP) к японской иене (JPY) и канадскому доллару (CAB) составляет 0.5132 за период с января 2011 по декабрь 2017 года. Можно ли отклонить нулевую гипотезу о том, что корреляция по совокупности равна 0 при уровне значимости 0.05?

Решение. Для периода в 84 месяца с января 2011 года по декабрь 2017 года, мы используем следующую статистику, чтобы проверить нулевую гипотезу $H_0\colon r_{\text{г}} = 0$ о том, что истинная корреляция по совокупности равна 0, против альтернативной гипотезы $H_1\colon r_{\text{г}} \neq 0$ о том, что корреляция по совокупности отличается от 0:

$$T = r_{\text{в}} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{в}}^2}} = \frac{0{,}5132 * \sqrt{84-2}}{\sqrt{1-0{,}5132^2}} = 5{,}4146.$$

В таблице распределения Стьюдента мы найдем, что при уровне значимости 0.05, критическим значением для этой тестовой статистики будет 1.99 ($n = 84$, значение степеней свободы = 82).

Если наблюдаемое значение либо больше 1.99, либо меньше -1.99, мы можем отвергнуть гипотезу о том, что корреляция по совокупности равна 0. Наблюдаемое значение равно 5.4146, поэтому мы можем отклонить нулевую гипотезу.