PARIS PANTHÉON-ASSAS UNIVERSITÉ

Introduction à la recherche opérationnelle

Année 2023/2024 - Semestre 6 - L3 - L3BN

Table des matières

Chapitre 1

Problèmes de transport

Intuitivement, un problème de transport est le problème d'optimisation suivant : nous avons n fournisseurs ayant dans leur stock un nombre total de N_n objets et m clients ayant commandé un nombre total de N_m objets. De plus, nous connaissons le prix de transport d'un objet depuis un fournisseur vers un client. L'objectif est de trouver la meilleure façon de transporter les objets depuis les fournisseurs vers les clients en minimisant le coût de transport total.

1.1 Exemple d'introduction

Le dernier livre de la maison d'éditions *Vrin* sortira à la vente Lundi prochain. Les premiers 1400 exemplaires du livre ont été commandés par trois grandes librairies indépendantes L_1, L_2 et L_3, chacune ayant commandé respectivement 500, 600 et 300 livres. D'autre part, *Vrin* utilise trois locaux différents S_1, S_2 et S_3 pour imprimer les nouveaux exemplaires. La capacité de production de chaque local est respectivement de 450, 600 et 350 livres. Enfin, le tableau ci-dessous montre le coût de transport d'un livre d'un local donné à une librairie donnée (en centimes d'euro) :

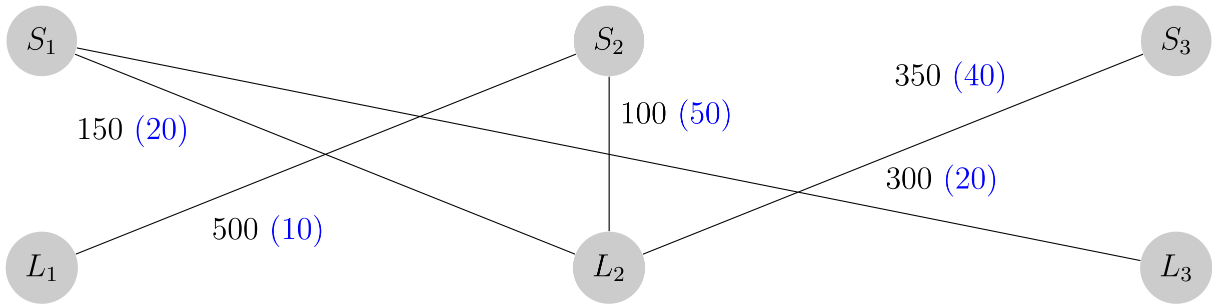
	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30

Par exemple, la case 1-1 de cette table dit que le transport d'un exemplaire depuis le local S_1 vers la librairie L_1 coûte 30 centimes.

Un exemple de proposition de transport est reporté dans le tableau ci-dessous. En bleu, on a laissé les prix unitaires de transport. En noir, on a inscrit les quantités transportées d'un local à une librairie. Remarquez que, dans chaque ligne, la somme des trois quantités est égale à la quantité totale de production du local en question. De même, dans chaque colonne, la somme des trois quantités coïncide avec la quantité totale commandée par la librairie respective.

x	L_1	L_2	L_3	**Provisions**
S_1	30	20	20	
	0	150	300	450
S_2	10	50	20	
	500	100	0	600
S_3	50	40	30	
	0	350	0	350
Commande	500	600	300	1400

Alternativement, l'information de cette proposition de transport peut être reportée dans un graphe biparti[1] comme suit :



Le coût total de cette proposition de transport est :

$$c(x) = 20 \times 150 + 10 \times 500 + 50 \times 100 + 350 \times 40 + 300 \times 20 = 33000 = 330€.$$

La question est : **peut-on modifier cette proposition de transport de sorte à diminuer le coût total de transport ou bien cette proposition est optimale ?**

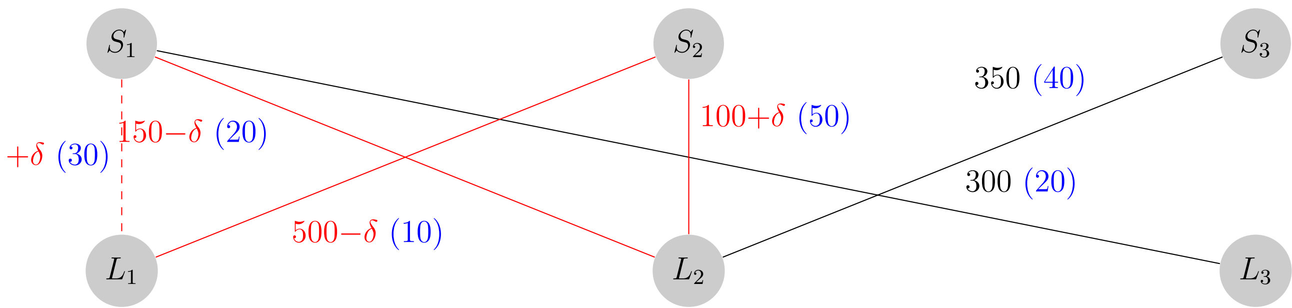
Pour comprendre la méthode qui permettra de résoudre ce **problème de transport**, le plus simple est de regarder ce qui se passerait si l'on modifiait la proposition. Par exemple, supposons que l'on veuille ouvrir une nouvelle "route de transport" entre S_1 et L_1 de sorte qu'une certaine quantité δ d'exemplaires y soit envoyée. Cette modification entraîne nécessairement avec elle d'autres modifications qui permettent de rééquilibrer l'offre et la demande. En effet, puisque tous les livres imprimés en S_1 sont envoyés soit à L_2 ou L_3, la seule façon d'envoyer δ livres de S_1 vers L_1 est donc de décider de diminuer de δ la quantité de livres envoyée à L_2 et/ou L_3. Mais, par le même raisonnement, cette diminution de livres arrivant à L_2 et/ou L_3 devra être compensée par une augmentation des exemplaires envoyés par les deux autres sites d'impression. Or, S_1 étant le seul fournisseur de la librairie L_3, une diminution de la quantité $x_{13} : S_1 \longrightarrow L_3$ impliquerait la nécessité d'ouvrir encore une deuxième route de transport supplémentaire, ce

1. Un graphe (V, E), où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes, est dit être *biparti* s'il existe une partition (L, R) de V telle que, pour toute arête $(u, v) \in E$, on ait $u \in L$ et $v \in R$.

qui l'on voudrait éviter si possible. La seule solution est donc de diminuer $x_{12} : S_1 \longrightarrow L_2$, ce qui force à son tour d'augmenter $x_{22} : S_2 \longrightarrow L_2$ et de diminuer $x_{12} : S_2 \longrightarrow L_1$. Le résultat est enregistré dans le tableau ci-dessous :

x'	L_1	L_2	L_3	**Provisions**
S_1	30 $+\delta$	20 150 $-\delta$	20 300	450
S_2	10 500 $-\delta$	50 100 $+\delta$	20 0	600
S_3	50 0	40 350	30 0	350
Commande	500	600	300	1400

Il se trouve que cette modification possible de la proposition de transport est beaucoup plus simple à comprendre d'un point de vue géométrique en utilisant les graphes bipartis. Elle est simplement la conséquence du fait qu'ajouter l'arête $(S_1 L_1)$ entraîne la **création d'un cycle** :

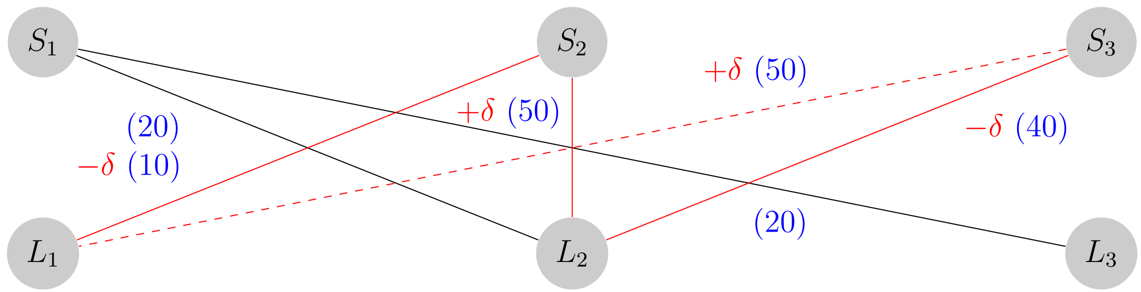


La différence entre les coûts de transport de la modification $\mathcal{T}'$ et de la proposition initiale $\mathcal{T}$ est :

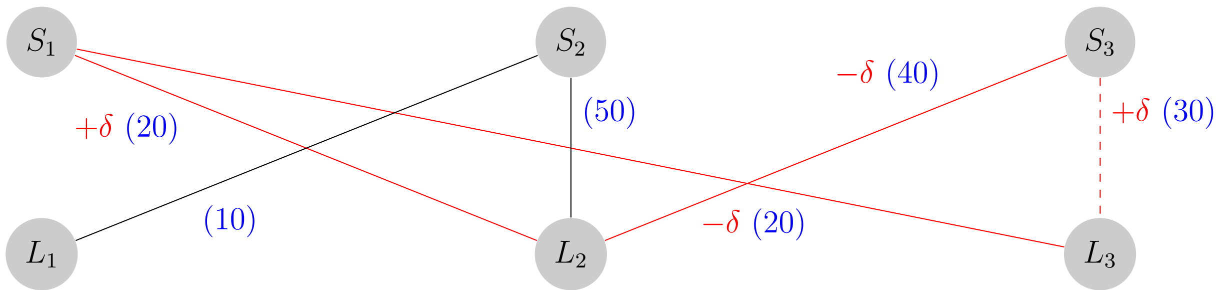
$$c(x') - c(x) = \delta(+30 - 20 + 50 - 10) = 50\,\delta.$$

La différence étant positive, cela indique que la modification de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ augmente le coût total et est donc une mauvaise idée.

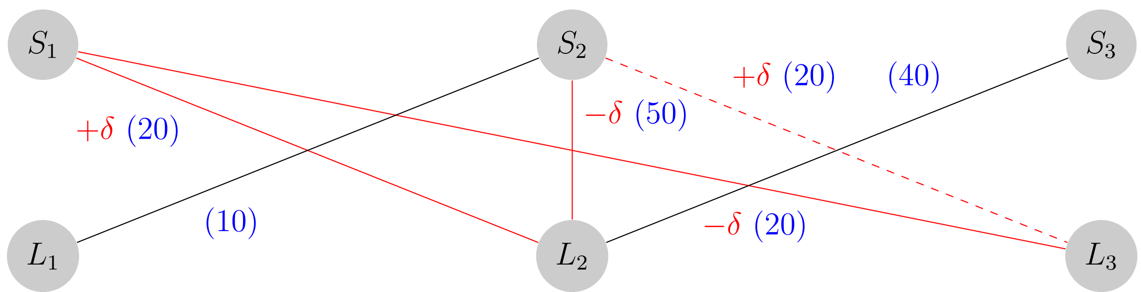
Répétons maintenant la même analyse pour les autres façons de modifier la proposition de transport initiale, c'est-à-dire en essayant d'ouvrir une des trois routes parmi $(S_3 L_1)$, $(S_3 L_3)$ ou $(S_2 L_3)$. On a :



$$c(x') - c(x) = \delta(+50 - 10 + 50 - 40) = 50\,\delta.$$



$$c(x') - c(x) = \delta(+30 - 40 + 20 - 20) = -10\,\delta.$$



$$c(x') - c(x) = \delta(+20 - 50 + 20 - 20) = -30\,\delta.$$

On voit que les deux dernières modifications permettent de réduire le coût de transport. La proposition initiale n'est donc pas optimale. Pour résoudre les problèmes de transport, on retient l'idée centrale suivante :

Pour évaluer si une proposition est optimale,
on rajoute des arêtes et on cherche des cycles.

1.2 Formulation du problème de transport

Définition 1.1 (Réseau de transport).
Un réseau de transport est un quintuplé $\mathcal{T} = (S, T, c, q_S, q_T)$ où :

i) S est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les *sources*,

ii) T est un ensemble fini dont les éléments sont appelés les *cibles*,

iii) $c : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction *coût de transport unitaire*,

iv) $q_S : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction de *quantités pourvues*,

v) $q_T : T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction de *quantités commandées*.

De plus, si $\sum_{s \in S} q_S(s) = \sum_{t \in T} q_T(t)$, on dit que le problème est *équilibré* .

Dans l'exemple précédent, S est l'ensemble des sites d'impression, T est l'ensemble des librairies, $q_S(S_1) = 450, q_S(S_2) = 600, q_S(S_3) = 350$ et $q_T(L_1) = 500, q_T(L_2) = 600, q_T(T_3) = 300$.

Définition 1.2 (Proposition de transport).
Etant donné un réseau de transport (S, T, c, q_S, q_T), une proposition de transport est une fonction $x : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

1) $\forall s \in S, \sum_{t \in T} x(s,t) \leq q_S(s)$ (**contrainte de provision**),

2) $\forall t \in T, \sum_{s \in S} x(s,t) \leq q_T(t)$ (**contrainte de commande**).

3) $\sum_{(s,t) \in S \times T} x(s,t) = \min\left(\sum_{t \in T} q_t(T), \sum_{s \in S} q_S(S)\right)$ (**contrainte de transport**).

De plus, on appelle **coût total** de la proposition de transport la quantité

$$c(x) := \sum_{(s,t) \in S \times T} x(s,t)c(s,t).$$

La première condition traduit le fait que la quantité d'objets transportée en partant de s ne peut pas dépasser la quantité d'objects pourvue par s. De son côté, la deuxième condition assure que chaque cible (ou client) reçoive la quantité exacte d'objets commandée. Enfin, la troisième condition assure que le nombre total d'objets transportés soit égal à la commande totale ou à la provision.

> **Problème de transport :** étant donné un réseau de transport $\mathcal{T} = (S, T, c, q_s, q_t)$, trouver une proposition de transport x pour laquelle le coût $c(x)$ est minimal.

1.3 Trouver une proposition initiale

Dans l'exemple d'introduction, nous avons dégagé la technique fondamentale qui va permettre d'améliorer les propositions de transport. Mais comment fait-on pour trouver une première proposition ?

1.3.1 La méthode du coin Nord-Ouest

La méthode est extrêmement simple : étant donné un réseau de transport $\mathcal{T}$ présenté sous la forme d'un tableau, commencez par attribuer autant d'objets que possible à la case du coin Nord-Ouest (le coin d'en haut à gauche). Puis, répétez l'opération pour la deuxième case de la première ligne, puis la troisième, ..., jusqu'à ce que le total des provisions de la source s_1 soit utilisé. Recommencez avec la deuxième source dans la deuxième ligne du tableau et ainsi de suite.

Pour comprendre la méthode du coin Nord-Ouest, le mieux est de la voir à l'oeuvre sur exemple. Prenons le réseau de transport de la section 1.1. On commence donc avec le tableau vide suivant :

x_{NO}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20	
				450
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20	
				600
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30	
				350
Commande	500	600	300	1400

Pour simplifier la notation, dorénavant nous utiliserons la notation x_{ij} pour nous référer à la quantité $x(S_i, L_j)$. La méthode nous dit de commencer par remplir la case $1-1$ autant que possible. Puisque L_1 a commandé 500 exemplaires et que S_1 peut en pourvoir 450, on fixe $x_{11} = 450$. Cela épuise les provisions de S_1 ce qui force les autres cases de la première ligne à être nulles.

x_{NO}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20	
	450	0	0	450
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20	
				600
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30	
				350
Commande	500	600	300	1400

On recommence la procédure avec la deuxième ligne. La librairie L_1 a déjà reçu 450 des 500 exemplaires commandés. Pour compléter la commande, le site d'impression S_2 envoie donc les 50 exemplaires manquants. Les autres 550 exemplaires imprimés par S_2 sont tous envoyés à L_2. Enfin, S_3 envoie 50 livres à L_2 pour compléter sa commande et envoie le reste à L_3. On arrive ainsi à la proposition de transport suivante :

x_{NO}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20	
	450	0	0	450
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20	
	50	550	0	600
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30	
	0	50	300	350
Commande	500	600	300	1400

Le coût total de la proposition est

$$c(x_{NO}) = 450 \times 30 + 50 \times 10 + 550 \times 50 + 50 \times 40 + 300 \times 30 = 52500 = 525€.$$

La méthode du coin Nord-Ouest est de loin la plus simple. Pourtant, elle est en général très inefficace. En effet, *à aucun moment cette méthode prend en compte le coût unitaire de transport des sources vers les cibles*. Souvent, la proposition de transport construite avec cette méthode sera très éloignée des propositions optimales.

1.3.2 La méthode de Balas-Hammer

La méthode de Balas-Hammer (aussi appelée la méthode d'approximation de Vogel ou la méthode de la différence maximale) permet de construire des propositions de transport qui sont très proches d'une proposition optimale puisqu'elle prend en compte les coûts unitaires de transport.

Comme pour la méthode du coin Nord-Ouest, la méthode de Balas-Hammer nécessite que le réseau de transport $\mathcal{T}$ soit présenté comme un tableau. Le fonctionnement est le suivant :

Méthode de Balas-Hammer

1. Pour chaque ligne et chaque colonne, calculer la différence Δ entre les deux coûts unitaires les plus petits. Δ est parfois appelée la "pénalité".
2. Choisir la ligne ou la colonne où Δ est maximale. En cas d'égalité, choisir la ligne ou colonne dont la case de coût minimal a une plus grande capacité. Si l'égalité persiste, choisir arbitrairement.
3. Dans la ligne ou colonne sélectionnée, attribuer la quantité maximale permise à la case avec le plus petit coût de transport.
4. Recommencer le processus avec les cases vides restantes.

Regardons sur le même exemple comment fonctionne la méthode de Balas-Hammer. On commence par calculer les six pénalités :

x_{BH}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**	Pénalité
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20	450	0
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20	600	10
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30	350	10
Commande	500	600	300	1400	
Pénalité	$\boxed{20}$	20	0		

Les plus grandes pénalités se trouvent dans la première et deuxièmes colonnes. Si l'on choisissait la première colonne, nous remplirions la case 2-1 qui peut contenir 500 exemplaires. De l'autre côté, si l'on choisissait la deuxième colonne, nous remplirions la case 1-2 qui peut contenir 450 exemplaires. Ainsi, on décide de commencer par remplir la case S_2L_1. Cela couvre toute la commande de la librairie L_1 donc les cases 1-1 et 3-1 sont automatiquement nulles. On recalcule les pénalités avec les cases restantes :

x_{BH}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**	Pénalité
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20		0
	0			450	
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20		$\boxed{30}$
	500			600	
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30		10
	0			350	
Commande	500	600	300	1400	
Pénalité	–	20	0		

La plus grande pénalité est maintenant dans la deuxième ligne. On remplit donc la case 2-3 autant que possible (100 exemplaires) et cela épuise les provisions de S_2. On recalcule les pénalités avec les cases restantes :

x_{BH}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**	Pénalité
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20		0
	0			450	
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20		–
	500	0	100	600	
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30		10
	0			350	
Commande	500	600	300	1400	
Pénalité	–	$\boxed{20}$	10		

La plus grande pénalité est cette fois-ci dans la deuxième colonne. On remplit alors la case 1-2 autant que possible (450 exemplaires) et cela nous laisse une unique façon de remplir le reste du tableau :

x_{BH}	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	30	20	20	
	0	450	0	450
$\boldsymbol{S_2}$	10	50	20	
	500	0	100	600
$\boldsymbol{S_3}$	50	40	30	
	0	150	200	350
Commande	500	600	300	1400

Le coût total de cette proposition est

$$c(x_{BH}) = 500 \times 10 + 450 \times 20 + 150 \times 40 + 100 \times 20 + 200 \times 30 = 28000 = 280€.$$

Comparez ce coût avec celui trouvé grâce à la méthode du coin Nord-Ouest !

1.4 Améliorer une proposition : la méthode du marche pied [2]

On en vient maintenant au problème principal : étant donnée une proposition de transport initiale, comment l'améliorer pour arriver à construire une proposition optimale ? Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le graphe biparti associé à la proposition de transport.

Définition 1.3 (Graphe biparti d'une proposition de transport).
Soit x une proposition de transport sur le réseau de transport $\mathcal{T} = (S, T, c, q_S, q_T)$. Alors le graphe biparti (V, E) associé à x est défini par :

— l'ensemble des sommets est $V = S \sqcup T$,

— les arêtes sont les paires source-cible (s, t) pour lesquelles s envoie une quantité non nulle d'objets à t : $E = \{(s, t) \in S \times T \mid x(s, t) \neq 0\}$,

— le poids de chaque arête est le coût unitaire de transport.

1.4.1 Idée principale

Comme illustré dans l'exemple d'introduction, l'idée fondamentale pour résoudre les problèmes de transport est la création de cycles dans le graphe biparti. La proposition suivante capture cette idée, que l'on peut énoncer de deux façons :

- Les cycles fournissent un moyen d'améliorer les propositions de transport.
- Une proposition ayant des cycles n'est pas optimale.

2. En anglais : “the stepping stone method”.

Proposition 1.1

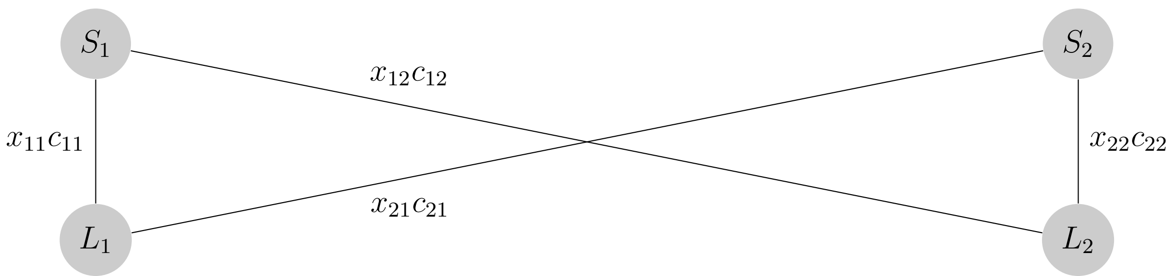
Soit $\mathcal{T} = (S, T, c, q_S, q_T)$ un réseau de transport et soit x une proposition de transport. Si le graphe biparti associé à x contient des cycles, alors il existe une proposition de transport x' telle que :

i) le graphe biparti associé est acyclique,

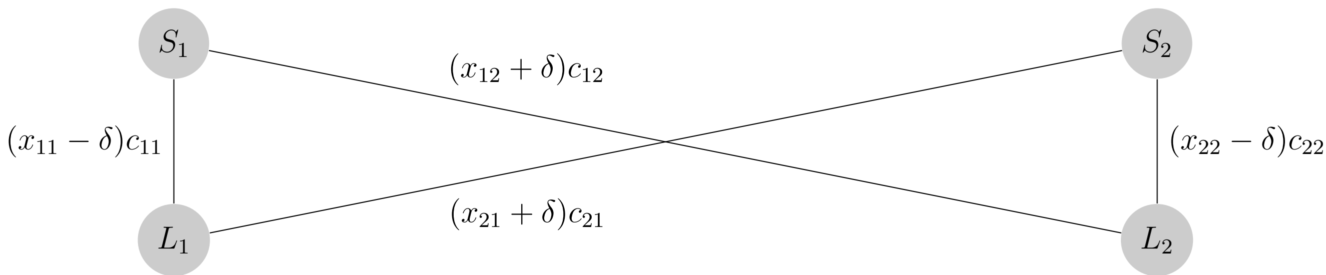
ii) $c(x') \leq c(x)$.

En d'autres mots, tout problème de transport admet nécessairement une proposition de transport optimale dont le graphe biparti associé ne contient pas de cycles [3].

Démonstration. Pour comprendre l'idée de la preuve, il suffit de considérer le cas le plus simple avec juste deux sources et deux cibles



Le coût de cette proposition de transport est $c(x) = x_{11}c_{11}+x_{12}c_{12}+x_{21}c_{21}+x_{22}c_{22}$. Considérons maintenant la modification suivante de cette proposition :



où δ est une quantité qui peut être positive ou négative. Clairement, la fonction x' ainsi définie est aussi une proposition de transport. De plus, en choisissant δ de façon que (au moins) une des quatre quantités $x_{ij} \pm \delta$ s'annule, le nouveau graphe biparti devient acyclique. Enfin, on a :

$$c(x') - c(x) = \delta(c_{12} - c_{11} + c_{21} - c_{22}).$$

Il y a donc trois cas en fonction du signe de la quantité $c_{12} - c_{11} + c_{21} - c_{22}$:

— si elle est positive, alors $c(x') \leq c(x)$ pour δ négative,

3. La réciproque est bien sûr fausse : il ne suffit pas de remarquer qu'une proposition de transport donnée est telle que son graphe biparti associé ne contient pas de cycles pour pouvoir en conclure qu'elle est optimale ! Pour le voir, prenez l'exemple de l'introduction qui ne contenait pas de cycles et pourtant pouvait être améliorée.

— si elle est négative, alors $c(x') \leq c(x)$ pour δ positive,

— si elle s'annule, alors $c(x') = c(x)$ pour tout choix de δ.

Dans tous les cas, on voit que, sans augmenter le coût total de transport, l'on peut modifier la proposition de transport x en une proposition x' sans cycles. □

Puisque les cycles dans un graphe biparti fournissent un moyen d'améliorer les propositions de transport, la stratégie générale pour résoudre les problèmes de transport va être :

Stratégie de résolution des problèmes de transport : étant donnée une proposition de transport x sur un réseau de transport (S, T, c, q_S, q_T), chercher des arêtes additionnelles créant des cycles qui permettraient de diminuer le coût total de transport.

1.4.2 Le cas non-dégénéré

On commence par traiter le cas le plus simple.

Définition 1.4 (Proposition de transport non-dégénérée).
Une proposition de transport x sur un réseau de transport $\mathcal{T} = (S, T, c, q_S, q_T)$ est dite être *non-dégénérée* si le graphe biparti associé est un arbre.[4]

Pour déterminer si un graphe est un arbre, on rappelle sans preuve la proposition suivante[5] :

Proposition 1.2

Etant donné un graphe non orienté (V, E), les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) (V, E) est un arbre,

ii) (V, E) est acyclique et $|E| = |V| - 1$,

iii) (V, E) est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Dans le cas non-dégénéré, la méthode du marche pied est très simple : pour chaque arête manquante du graphe biparti, trouvez l'unique cycle que l'ajout de cette arête formerait (appelé le "cycle du marche pied")[6] et calculez le coût total le long de ce cycle. Si aucune arête ne

4. Pour rappel, un graphe (V, E) est un *arbre* s'il est maximalement acyclique (c'est-à-dire que l'addition de n'importe quelle arête entraîne la création d'un cycle).
5. Pour une preuve, voir par exemple Cormen & al, *Introduction to Algorithms*, p. 1085.
6. BONUS : Prouvez l'unicité du cycle du marche pied !

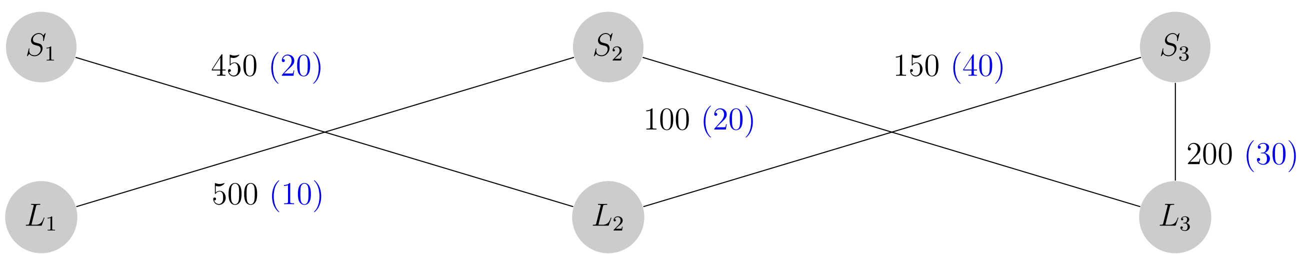
produit un cycle de coût total négatif, alors la proposition de transport est optimale. Si, au contraire, une ou plusieurs arêtes permettent de créer des cycles de coût négatif, alors choisissez l'arête dont le coût de cycle est minimal (ie, la valeur la plus grande dans le sens des négatifs) et modifiez la proposition de transport comme dans la Proposition 1.1. Ensuite, recommencez avec la nouvelle proposition.

```
MÉTHODE DU MARCHE PIED (x, S, T, c, q_S, q_T)
Δ ← 0
a ← NIL
Pour chaque couple (s,t) ∈ (S,T) tel que x(s,t) = 0
    Faire trouver l'unique cycle dans le graphe (S ⊔ T, E ∪ {(s,t)})
          calculer le coût total c(s,t) en suivant ce cycle
          si c(s,t) < Δ
              alors Δ ← c(s,t)
                    a ← (s,t)
Si Δ = 0
  Alors retourner "La proposition de transport est optimale"
  Sinon retourner "Améliorer la proposition en utilisant l'arête a".
```

Exemple : Résolvons complètement le problème de transport donné dans l'introduction de ce chapitre. On commence par utiliser la méthode de Balas-Hammer pour trouver une proposition initiale. On trouve :

x_V	L_1	L_2	L_3	**Provisions**
S_1	30	20	20	
	0	450	0	450
S_2	10	50	20	
	500	0	100	600
S_3	50	40	30	
	0	150	200	350
Commande	500	600	300	1400

Le graphe biparti associé à cette proposition est :



Ce graphe est formé de 6 sommets, 5 arêtes et ne contient pas de cycles. D'après la proposition 1.2, le graphe est donc un arbre et la proposition est non-dégénérée. On regarde maintenant les cycles qui se forment en rajoutant des arêtes supplémentaires :

— Si l'on ajoute l'arête (S_1L_1), cela crée le cycle $(S_1L_1S_2L_3S_3L_2S_1)$ et le coût le long de ce cycle est

$$c(S_1L_1S_2L_3S_3L_2S_1) = c_{11} - c_{21} + c_{23} - c_{33} + c_{32} - c_{12} = 30 - 10 + 20 - 30 + 40 - 20 = 30.$$

— Si l'on ajoute l'arête (S_1L_3), cela crée le cycle $(S_1L_3S_3L_2S_1)$ et le coût le long de ce cycle est $c(S_1L_3S_3L_2S_1) = c_{13} - c_{33} + c_{32} - c_{12} = 20 - 30 + 40 - 20 = 10$.

— Si l'on ajoute l'arête (S_2L_2), cela crée le cycle $(S_2L_2S_3L_3S_2)$ et le coût le long de ce cycle est $c(S_2L_2S_3L_3S_2) = c_{22} - c_{32} + c_{33} - c_{23} = 50 - 40 + 30 - 20 = 20$.

— Si l'on ajoute l'arête (S_3L_1), cela crée le cycle $(S_3L_1S_2L_3S_3)$ et le coût le long de ce cycle est $c(S_3L_1S_2L_3S_3) = c_{31} - c_{21} + c_{23} - c_{33} = 50 - 10 + 20 - 30 = 30$.

Les coûts de tous les cycles du marche pied sont positifs ce qui veut dire que la proposition de transport initiale trouvée par la méthode de Balas-Hammer est en fait la proposition optimale. Ainsi, le coût minimal de transport pour ce problème est

$$\boxed{280€}.$$

1.4.3 Le cas dégénéré

Définition 1.5 (Proposition de transport dégénérée).
Une proposition de transport x sur un réseau de transport $\mathcal{T} = (S, T, c, q_S, q_T)$ est dite être *dégénérée* si son graphe biparti associé n'est pas un arbre. En d'autre mots, *au moins* une de ces deux propriétés est vérifiée :

1. Le graphe contient moins de $|V| - 1$ arêtes ($|V|$ étant le nombre de sommets).
2. Le graphe contient un cycle.

Dans le cas d'une proposition de transport dégénérée, la méthode du marche pied ne peut pas être appliquée directement. Deux situations peuvent se présenter :

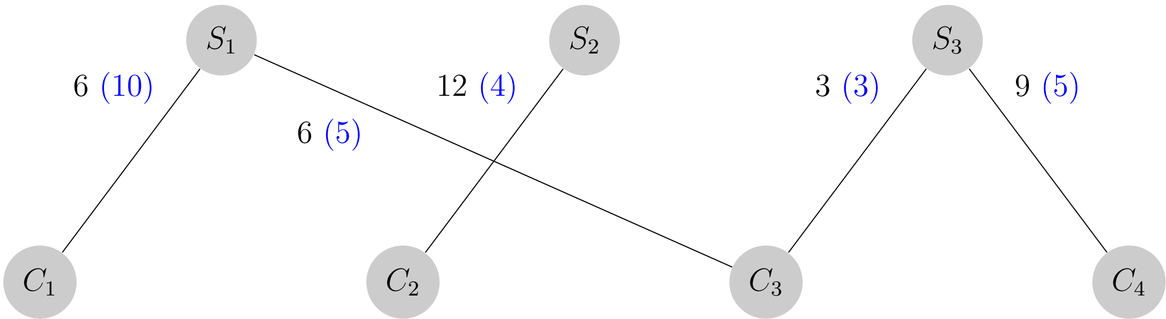
⋆ **Si le graphe contient des cycles**, on utilise la méthode décrite dans la proposition 1.1 (page 12) pour modifier la proposition de transport en une proposition acyclique avec un coût total plus bas.

⋆ **Si le graphe contient** $|V| - p$ **arêtes** (avec $p > 1$), on va artificiellement rajouter les $p - 1$ arêtes ayant les plus petits coûts de transport permettant de former un graphe maximalement acyclique.

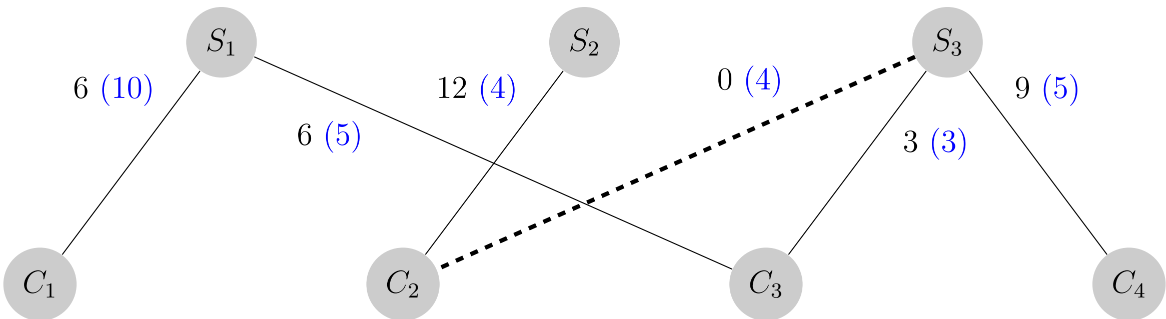
Exemple : considérons la proposition de transport suivante :

x'	C_1	C_2	C_3	C_4	**Provisions**
S_1	10	5	5	3	
	6	0	6	0	12
S_2	10	4	5	5	
	0	12	0	0	12
S_3	4	4	3	5	
	0	0	3	9	12
Commande	6	12	9	9	36

Le graphe biparti associé est :



On remarque que le graphe n'est pas un arbre puisqu'il contient 7 sommets et seulement 5 arêtes (les sommets S_2 et C_2 ne sont pas reliés au reste du graphe). Pour le transformer dans un graphe maximalement acyclique, il faut donc ajouter une arête supplémentaire. Parmi les possibilités, l'arête (S_1C_4) est celle avec le coût de transport minimal. Cependant, cela entraînerait l'apparition du cycle $S_1C_4S_3C_3S_1$ et ne convient donc pas. Les arêtes suivantes (en ordre croissant du coût) sont (S_3C_1) et (S_3C_2), mais seulement la dernière ne rajoute pas de cycle au graphe. On modifie donc le graphe initial en :



Avec ce nouveau graphe, on peut maintenant utiliser la méthode du marche pied de la section précédente.

1.4.4 La méthode du marche pied avec des potentiels

Etant donné un problème de transport avec n sources et p cibles, il y a np arêtes possibles de type source-cible. Or seulement $n + p - 1$ arêtes sont utilisées dans une proposition non dégénérée. Cela veut dire que, pour vérifier si une proposition de transport non-dégénérée est optimale, la méthode du marche pied doit explorer $O(np)$ arêtes et, pour chacune d'entre elles, chercher le cycle correspondant et calculer le coût le long de ce cycle. Autant dire que, lorsque n et p sont grands, la méthode du marche pied devient une tâche extrêmement laborieuse et chronophage.

Heureusement, il se trouve que l'on peut améliorer la méthode de sorte à ne pas devoir chercher explicitement tous les cycles. L'idée est d'utiliser une analogie physique et *penser les coûts unitaires comme des différences en énergie potentielle.* On réussit alors à diminuer considérablement la complexité de la méthode du marche pied.

Définition 1.6 (Potentiels).
Soit x une proposition de transport non-dégénérée sur un réseau de transport (S, T, c, q_S, q_T). Alors, un *potentiel* associé à x est une fonction $E : S \sqcup T \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, $\underline{\text{lorsque } x(s,t) \neq 0}$, on ait

$$c(s,t) = E(s) - E(t).$$ [7]

Pour toute proposition de transport non-dégénérée, il est toujours possible de définir une fonction 'potentiel' satisfaisant la condition requise. En effet, la fonction E est la donnée de $n + p$ variables soumises à un système de $n + p - 1$ équations linéaires. Ainsi, non seulement, la fonction 'potentiel' existe bien, mais, en outre, on a la liberté de choisir arbitrairement la valeur du potentiel d'un des $n+p$ sommets (cela correspond à la liberté habituelle en physique à choisir de façon arbitraire le point d'énergie potentielle nulle).

Définition 1.7 (Coûts marginaux).
Etant donnée une proposition de transport x sur un réseau de transport (S, T, c, q_S, q_T), les *coûts marginaux* sont les quantités définies par

$$d(s,t) := c(s,t) - (E(s) - E(t)) \text{ où } s \in S \text{ et } t \in T.$$

7. Dans les différentes présentations de la méthode du marche-pied, il est habituel d'utiliser une notation différente pour les potentiels des sources (notées avec des v_j) et les potentiels des cibles (notées avec des u_k). De plus, on utilise une convention de signe différente pour les potentiels des cibles, de sorte que l'équation $c(s,t) = E(s) - E(t)$ est généralement écrite $c(s,t) = v(s) + u(t)$. De part cette notation, la méthode des potentiels est parfois appelée (en anglais) "the u-v method". Nous préférons cependant ne pas suivre la notation habituelle pour souligner l'intuition physique à la base de la méthode.

Remarque : Par définition des potentiels, pour toutes les arêtes utilisées dans la proposition de transport x, les coûts marginaux sont nuls.

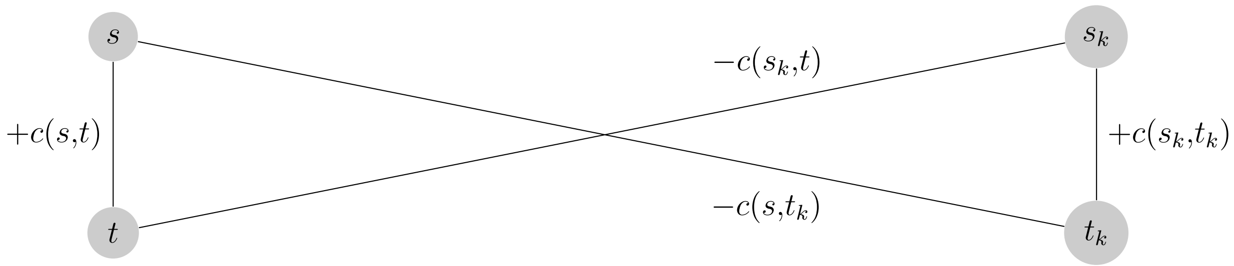
L'efficacité d'avoir introduit les potentiels est capturée dans le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.3 : Critère d'optimalité

Une proposition de transport non-dégénérée est optimale si tous les coûts marginaux sont strictement positifs.[8]

Démonstration. Soit x une proposition non-dégénérée sur un réseau de transport (S, T, c, q_S, q_T). De plus, notons F_x l'ensemble des routes qui ne sont pas utilisées par la proposition : $F_x = \{(s,t) \in S \times T \mid x(s,t) = 0\}$. On sait que x est optimale si et seulement si pour chaque arête $(s,t) \in F_x$ le coût le long du cycle créé par l'ajout de (s,t) est positif.

Pour simplifier les calculs, supposons que le cycle du marche pied ne contienne que quatre arêtes sts_kt_ks :



Alors, le coût le long du cycle est

$$\begin{aligned} c(sts_kt_ks) &= c(s,t) - c(s_k,t) + c(s_k,t_k) - c(s,t_k) \\ &= c(s,t) - (E(s_k) - E(t)) + (E(s_k) - E(t_k)) - (E(s) - E(t_k)) \\ &= c(s,t) - (E(s) - E(t)) \\ &= d(s,t). \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que **le coût marginal d'une arête donnée correspond au coût de transport le long du cycle du marche pied créé par l'ajout de cette arête !** □

En résumé, voici donc la méthode à utiliser pour résoudre les problèmes de transport :

8. Bien sûr, si l'objectif est de *maximiser* plutôt que de minimiser le coût total, alors une proposition de transport non-dégénérée est optimale si tous les coûts marginaux sont strictement *négatifs*.

Méthode du marche pied avec potentiels (S, T, c, q_S, q_T)

Etant donné un réseau de transport équilibré (S, T, c, q_S, q_T),

1. Trouver une proposition initiale en utilisant la méthode du coin Nord-Ouest ou la méthode de Balas-Hammer.

2. Etant donnée une proposition de transport,

  i) Si la proposition est non-dégénérée, passer à l'étape **3**.

  ii) Si la proposition est dégénérée car elle contient un cycle, modifier la proposition de transport en utilisant la méthode de la proposition 1.1 page 12.

  iii) Si la proposition est dégénérée car il n'y a pas assez d'arêtes, ajouter à la main autant d'arêtes que nécéssaire en commençant par celles de coût le plus bas et en s'assurant que le graphe reste acyclique.

3. Etant donnée une proposition de transport non-dégénérée, calculer les potentiels de tous les sommets et les coûts marginaux de toutes les arêtes.

4.i) Si tous les coûts marginaux sont positifs, la proposition de transport est optimale (le coût de transport est minimal).

4.ii) Si certains coûts marginaux sont négatifs, choisir l'arête de coût marginal le plus petit (donc la valeur la plus grande dans le sens des négatifs), utiliser le cycle du marche pied pour améliorer la proposition de transport, puis revenir à l'étape **2**.

1.5 Exemple complet

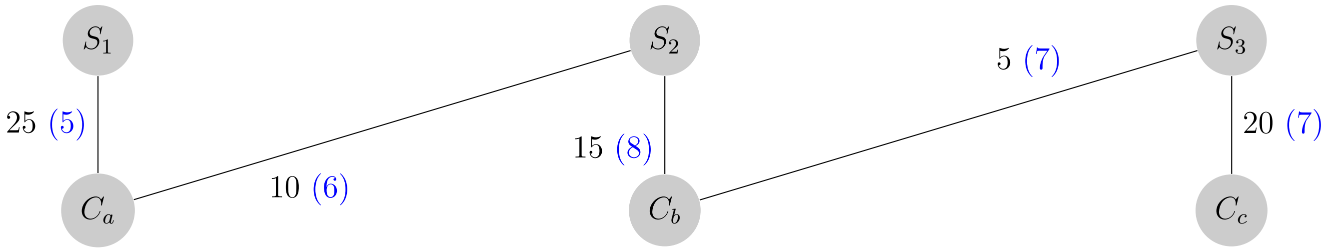
On considère le problème de transport défini par le tableau suivant (dans chaque case, on marque en bleu le coût de transport unitaire) :

x	C_a	C_b	C_c	**Provisions**
S_1	5	7	8	25
S_2	6	8	5	25
S_3	6	7	7	25
Commande	35	20	20	75

On décide d'utiliser ici la méthode du coin Nord-Ouest pour trouver une proposition initiale. Cela donne :

x	C_a	C_b	C_c	**Provisions**
S_1	5	7	8	
	25	0	0	25
S_2	6	8	5	
	10	15	0	25
S_3	6	7	7	
	0	5	20	25
Order	35	20	20	75

Le graphe associé est :



La proposition de transport obtenue est clairement non-dégénérée et on peut donc passer au calcul des potentiels. On doit donc résoudre le système linéaire suivant (on fixe de façon arbitraire $E(2) = 0$) :

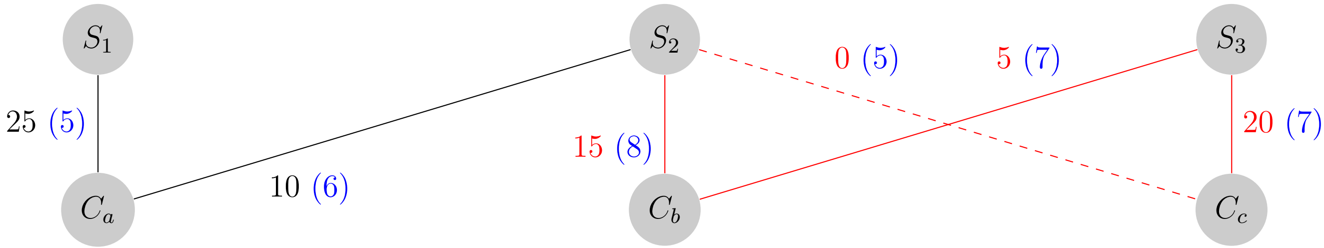
$$\begin{cases} E(1) - E(a) = 5 \\ E(2) - E(a) = 6 \\ E(2) - E(b) = 8 \\ E(3) - E(b) = 7 \\ E(3) - E(c) = 7 \\ E(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} E(1) = -1 \\ E(2) = 0 \\ E(3) = -1 \\ E(a) = -6 \\ E(b) = -8 \\ E(c) = -8 \end{cases}.$$

Puis on calcule les coûts potentiels et les coûts marginaux :

Coûts potentiels		
5	7	7
6	8	8
5	7	7

Coûts marginaux		
0	0	1
0	0	-3
1	0	0

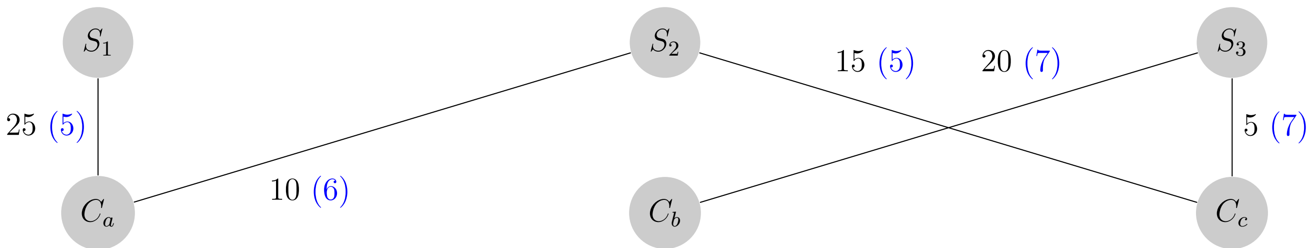
Le coût marginal de la case (2c) est négatif. On rajoute donc cette arête au graphe, ce qui crée le cycle du marche pied $(S_2C_cS_3C_bS_2)$:



La quantité la plus grande que l'on peut envoyer le long de la nouvelle route (S_2C_c) est 15. On trouve ainsi la nouvelle proposition de transport

x	C_a	C_b	C_c	**Provisions**
S_1	5	7	8	
	25	0	0	25
S_2	6	8	5	
	10	0	15	25
S_3	6	7	7	
	0	20	5	25
Order	35	20	20	75

dont les graphe est



Cette proposition contient 5 arêtes pour 6 sommets et ne contient pas de cycles donc elle est à nouveau non-dégénérée. On applique la méthode du marche pied, en commençant par les calculs des potentiels (cette fois-ci, on décide de fixer $E(a) = 0$) :

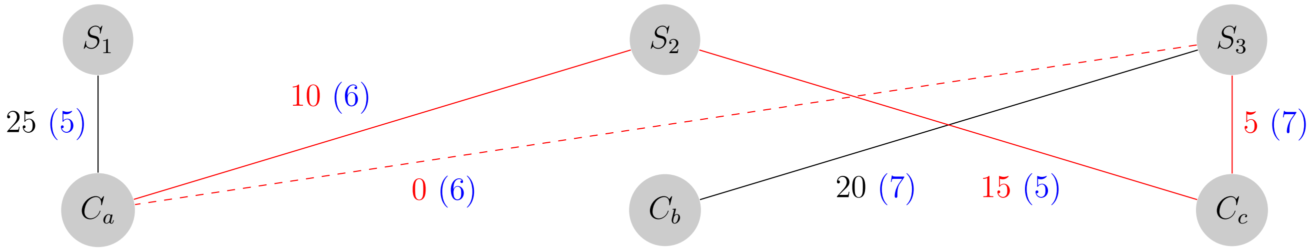
$$\begin{cases} E(1) - E(a) = 5 \\ E(2) - E(a) = 6 \\ E(2) - E(c) = 5 \\ E(3) - E(b) = 7 \\ E(3) - E(c) = 7 \\ E(a) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} E(1) = 5 \\ E(2) = 6 \\ E(3) = 8 \\ E(a) = 0 \\ E(b) = 1 \\ E(c) = 1 \end{cases}.$$

D'où les nouveaux coûts potentiels et marginaux :

Coûts potentiels		
5	4	4
6	5	5
8	7	7

Coûts marginaux		
0	3	4
0	3	0
−2	0	0

La nouvelle proposition de transport n'est donc pas optimale et peut être améliorée en utilisant la route (S_3C_a). Cette arête crée le cycle du marche pied $(S_3C_aS_2C_cS_3)$:



La quantité maximale qui peut être envoyée par la route (S_3C_a) est 5, ce qui donne la nouvelle proposition de transport :

x	C_a	C_b	C_c	**Provisions**
S_1	5	7	8	
	25	0	0	25
S_2	6	8	5	
	5	0	20	25
S_3	6	7	7	
	5	20	0	25
Order	35	20	20	75

La nouvelle proposition de transport est toujours non-dégénérée. On calcule les potentiels en fixant $E(a) = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} E(1) - E(a) = 5 \\ E(2) - E(a) = 6 \\ E(2) - E(c) = 5 \\ E(3) - E(a) = 6 \\ E(3) - E(b) = 7 \\ E(3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} E(1) = 5 \\ E(2) = 6 \\ E(3) = 6 \\ E(a) = 0 \\ E(b) = -1 \\ E(c) = 1 \end{cases}.$$

D'où les nouveaux coûts potentiels et marginaux :

Coûts potentiels		
5	6	4
6	7	5
6	7	5

Coûts marginaux		
0	1	4
0	1	0
0	0	2

Cette fois-ci, il n'y a pas de coûts marginaux négatifs donc la proposition de transport obtenue est optimale. **Le coût de transport minimal pour ce problème est donc de 425€**.

1.6 Exercices

* = application directe du cours (il faut être capable de le résoudre sans aide) ;
** = plus difficile (mais il faut savoir le résoudre après avoir été aidé éventuellement) ;
*** = difficile (exercice bonus pour les plus motivés).

Exercice 1 (*).
Trouver une proposition de transport optimale pour le problème ci-dessous, où S_1, S_2, S_3 sont les fournisseurs, C_1, C_2, C_3, C_4 sont les commanditaires et les coûts unitaires de transport sont montrés en bleu.

	C_1	C_2	C_3	C_4	**Provisions**
S_1	11	12	10	10	60
S_2	17	16	15	18	30
S_3	19	21	20	22	90
Commande	50	75	30	25	180

Exercice 2 (*).
Même question pour le problème de transport ci-dessous :

	C_a	C_b	C_c	C_d	**Provisions**
S_1	90	70	110	60	75
S_2	120	60	50	70	40
S_3	80	100	70	80	70
Commande	65	40	50	30	185

Exercice 3 (*).

On considère le problème de transport donné par tableau suivant, où S_1, S_2, S_3 sont les sources, C_a, C_b, C_c, C_d sont les cibles et le nombre de la case $(S_j C_\rho)$ représente le coût de transport unitaire depuis S_j vers C_ρ.

	C_a	C_b	C_c	C_d	**Provisions**
S_1	3	5	8	7	
					25
S_2	5	6	8	4	
					40
S_3	4	7	10	4	
					35
Commande	15	30	25	30	100

a) Utilisez la méthode de Balas-Hammer pour trouver une proposition initiale. La proposition est-elle non-dégénérée ?

b) On donne maintenant la proposition de transport suivante :

	C_a	C_b	C_c	C_d	**Provisions**
S_1	3	5	8	7	
	15	10	0	0	25
S_2	5	6	8	4	
	0	20	20	0	40
S_3	4	7	10	4	
	0	0	5	30	35
Commande	15	30	25	30	100

Utilisez la méthode du marche pied avec potentiels pour modifier cette proposition jusqu'à atteindre une proposition optimale.

Exercice 4 (*).

On considère le problème de transport suivant :

x	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	2	2	3	25
$\boldsymbol{S_2}$	1	5	2	25
$\boldsymbol{S_3}$	3	3	4	25
Commande	25	25	25	75

Utilisez la méthode du coin Nord-Ouest pour construire une proposition initiale, puis utilisez la méthode du marche pied autant de fois que nécessaire jusqu'à atteindre une proposition optimale.

Exercice 5 (**).

Trouver une proposition de transport optimale pour le problème ci-dessous, où S_1, S_2, S_3 sont les fournisseurs, T_a, T_b, T_c sont les commanditaires et les coûts unitaires de transport sont montrés en bleu.

	$\boldsymbol{T_a}$	$\boldsymbol{T_b}$	$\boldsymbol{T_c}$	**Provisions**
$\boldsymbol{S_1}$	3	1	1	2000
$\boldsymbol{S_2}$	6	2	2	6000
$\boldsymbol{S_3}$	1	9	12	6000
Commande	5000	3000	2000	

Exercice 6 (**).
Un petit vigneron indépendant produit du vin naturel sur deux terrains différents. Les données de production sont enregistrées dans le tableau ci-dessous :

Terrain	Capacité de production (en bouteilles)	Coût de production (en €/bouteille)
A	2500	9,2
B	2100	10

Quatre restaurants hors de la France veulent acheter du vin au vigneron. Les demandes et prix que chaque restaurant propose sont :

Restaurant	Demande maximale (en bouteilles)	Prix d'achat proposé (en €/bouteille)
1	1800	16
2	2300	15
3	550	17
4	1750	14

Enfin, les prix de transport (en €) pour une bouteille, depuis chaque terrain vers chaque restaurant, sont :

	Rest 1	Rest 2	Rest 3	Rest 4
Terrain A	2,4	3,2	4,2	3,6
Terrain B	4,8	2,4	3,2	2,2

Trouver le plan de distribution qui maximise le profit du vigneron.

Exercice 7 (**).
On considère le problème de transport suivant :

	X	***Y***	***Z***	***T***	**Provisions**
a	5	2	6	5	60
b	7	12	5	6	30
c	8	7	7	8	90
Commande	50	75	30	25	180

i) Résoudre le problème.

ii) On remplace le coût de la case (bT) par 2. Trouver avec un minimum de calculs une solution optimale.

iii) Jusqu'à quelle valeur le coût unitaire de la case (aY) peut-il croître sans modifier la solution du **i)** ?

Exercice 8 (**).

Une compagnie possède quatre usines U_1, U_2, U_3 et U_4 et trois magasins de vente M_a, M_b, M_c. Les quatre usines fabriquent le même produit mais les coûts de production et des matières premières diffèrent d'une usine à l'autre et sont indiqués dans les deux premières lignes du tableau ci-dessous. Les coûts de transport entre les usines et les magasins sont également indiqués. Enfin, le tableau montre les prix de vente, les besoins de chaque magasin et la capacité de production de chaque usine.

Déterminez la meilleure politique de production et distribution des produits de sorte à maximiser le profit de la compagnie.

	U_1	U_2	U_3	U_4		
Coût de production/unité	13	15	16	11		
Coût du matériel/unité	5	3	7	4	**Prix de vente/unité**	**Besoins**
Coût de transport vers S_1	2	6	3	2	31	150
Coût de transport vers S_2	1	5	3	3	29	200
Coût de transport vers S_3	4	6	2	5	28	150
Capacité de production	150	180	100	120		

Exercice 9 (**).

Soit $f : \mathbb{N}^9 \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie par

$$f(x_1, \dots, x_9) = 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 9x_8 + 12x_9.$$

Trouver la valeur minimale de f sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 6 \\ x_7 + x_8 + x_9 \leq 6 \\ x_1 + x_4 + x_7 = 5 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 3 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 2. \end{cases}$$