1. Жёсткие системы ОДУ. Динамика популяций

1. Система ОДУ, описывающая изменение численности популяций двух видов и эволюцию некоего генетического признака α, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - 0{,}5x - \dfrac{2}{7\alpha^2}y\right) \\ \dot{y} = y(2\alpha - 3{,}5\alpha^2 x - 0{,}5y) \\ \dot{\alpha} = \varepsilon(2 - 7\alpha x) \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$0 < \varepsilon \le 10^{-2}, \qquad 0 \le x_0 \le 3, \qquad 0 \le y_0 \le 15, \qquad \alpha_0 = 0$$

Из последнего уравнения системы видно, что генетический признак изменяется медленней, чем численность популяций, то есть решение – **релаксационные колебания**.

2. Пусть теперь численность двух популяций зависит от взаимодействия между ними и двух медленно меняющихся генетических признаков:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2\alpha_1 - 0{,}5x - \alpha_1^2\alpha_2^{-2}y) \\ \dot{y} = y(2\alpha_2 - \alpha_1^{-2}\alpha_2^2 x - 0{,}5y) \\ \dot{\alpha_1} = \varepsilon(2 - 2\alpha_1\alpha_2^{-2}y) \\ \dot{\alpha_2} = \varepsilon(2 - 2\alpha_1^{-2}\alpha_2 x) \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$0 < \varepsilon \le 10^{-2}, \qquad 0 \le x_0 \le 40, \qquad 0 \le y_0 \le 40, \qquad \alpha_1(0) = 0, \qquad \alpha_2(0) = 10$$

3. Другой вариант той же задачи:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2\alpha_1 - 0{,}5x - \alpha_1^3\alpha_2^{-3}y) \\ \dot{y} = y(2\alpha_2 - \alpha_1^{-3}\alpha_2^3 x - 0{,}5y) \\ \dot{\alpha_1} = \varepsilon(2 - 3\alpha_1^2\alpha_2^{-3}y) \\ \dot{\alpha_2} = \varepsilon(2 - 3\alpha_1^{-3}\alpha_2^2 x) \end{cases}$$

Параметры задачи те же, что и в пункте 2.

<u>Задание.</u> а) Исследовать изменения двух видов, то есть изменения соответствующих численностей x, y и их генетических признаков $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ в зависимости от времени t, построить графики зависимостей $x(t), y(t), \alpha(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t)$.

б) Использовать для численного решения систем явные методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности и неявный метод Рунге-Кутты (Хаммера-Холлинсворта).

в) Исследовать разностные схемы на сходимость по сетке.

Расчеты проводить при $0 \le t \le 2000$.

2. Жесткие задачи Коши. Уравнения типа Ван-дер-Поля

Рассмотрим автономные и неавтономные уравнения Ван-дер-Поля, а также уравнение Рэлея, описывающие колебательные процессы в электрических цепях.

а) Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -a\left(\dfrac{y_1^3}{3} - y_1\right) - ay_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 \end{cases}$$

б) Уравнение Бонгоффера – Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -a\left(\dfrac{y_1^3}{3} - y_1\right) + ay_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - by_2 + c \end{cases}$$

в) Неавтономное уравнение Ван-дер-Поля, траектория-«утка»:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -a\left(\dfrac{y_1^3}{3} - y_1\right) + ay_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + A\cos\omega t \end{cases}$$

г) Уравнение Рэлея:

$$\ddot{x} - a(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0$$

В пунктах а), б), в) считать $1 \le a \le 10^3, (y_1)_0 = 2, (y_2)_0 = 0.$

В пункте в) рассмотреть два случая:

$$0 < A < 1 \text{ и } 1 < A < \sqrt{1 + \frac{1}{64\omega^2}}, \qquad 0 \le t \le 200, \qquad 0 < c < 1$$

<u>Задание.</u> 1) Провести исследование поведения численных решений систем а)-г) в зависимости от «большого» параметра a; в пункте в) – в зависимости от ω.

2) Построить зависимости $y_1(t), y_2(t), y_2(y_1)$.

3) Использовать явные методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности, неявный метод (Хаммера-Холлинсворта).

4) Исследовать зависимость численного решения от шага интегрирования τ (сходимость в сетке).

3. Жесткие системы ОДУ. Уравнения химической кинетики.

Изучите поведение концентраций веществ в химических реакциях Белоусова-Жаботинского (модель Филдса-Нойса), Робертсона и $E5$.

X.9.7. Пример жесткой системы — модель химических реакций Робертсона

Один из первых и самых популярных примеров жесткой системы ОДУ принадлежит Робертсону (1966) и имеет вид, типичный для моделей химической кинетики — в правой части системы стоят полиномы второй степени от концентраций (сравните с «орегонатором», следующая задача).

Система Робертсона имеет вид [5]:

$$\dot{y}_1 = -0.04 y_1 + 10^4 y_2 y_3,$$

$$\dot{y}_2 = 0.04 y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2,$$

$$\dot{y}_3 = 3 \cdot 10^7 y_2^2.$$

Начальные условия для системы таковы: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$. Рассматриваются следующие величины отрезка интегрирования: $T_k = 40$ (в работе Робертсона рассматривался именно такой отрезок интегрирования), $T_k = 100, 1000, \ldots, 10^{11}$. О свойствах задачи см. [5].

X.9.8. Модель Филда–Нойса «орегонатор»

Простейшая математическая модель периодической химической реакции Белоусова–Жаботинского состоит из трех уравнений:

$$\dot{y}_1 = 77{,}27(y_2 + y_1(1 - 8{,}375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)),$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{77{,}27}(y_3 - (1 + y_1) y_2),$$

$$\dot{y}_3 = 0{,}161(y_1 - y_3).$$

На то, что система жесткая, указывают большие различия в константах скоростей реакций — есть процессы быстрые и есть медленные.

Так как переменные системы — концентрации ($HBrO_2$, Br^- и Ce(IV) соответственно), то начальные условия для системы следует выбирать положительными, как правило, близкими к 0. Конечное время интегрирования системы $T_k = 800$.

О системе подробнее, например, в [5, 7, 13].

<u>X.9.9.</u> Задача E5

Еще одна модель химической реакции из [5], получившая свое название E5 в более ранних публикациях:

$$\dot{y}_1 = -Ay_1 - By_1y_3,$$

$$\dot{y}_2 = Ay_1 - MCy_2y_3,$$

$$\dot{y}_3 = Ay_1 - By_1y_3 - MCy_2y_3 + Cy_4,$$

$$\dot{y}_4 = By_1y_3 - Cy_4.$$

Начальные условия: $y_1(0) = 1,76 \cdot 10^{-3}$, а все остальные переменные равны 0. Значения коэффициентов модели следующие: $A = 7,89 \cdot 10^{-10}$, $B = 1,1 \cdot 10^{7}$, $C = 1,13 \cdot 10^{3}$, $M = 10^{6}$. Первоначально задача ставилась на отрезке $T_k = 1000$, но впоследствии было обнаружено, что она обладает нетривиальными свойствами вплоть до времени $T_k = 10^{13}$ (подробнее см. [5]).

Обратить особое внимание, что в процессе расчетов приходится иметь дело с очень малыми концентрациями реагентов (малы значения y_2, y_3 и y_4). Как «подправить» постановку задачи E5?

<u>Задание.</u>

1. Постройте графики зависимостей параметров от времени и зависимости $y_i(y_j)$ при $i \neq j$.

2. Исследуйте сходимость численного решения по сетке.

3. Используйте явный и неявный методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

4. Задача Коши для ОДУ. Уравнения колебаний

Уравнение Ван-дер-Поля (описывает нелинейные колебания в различных системах):

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(y^2 - 1) + \dot{y} + y = 0, \\ y(0) = y_0 > 0, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \le t \le 30, \quad 1 \le a \le 1000 \end{cases}$$

Уравнение Эйлера (описывает колебания в системе, где возвращающая сила и коэффициент вязкого трения убывают со временем):

$$\ddot{y} + t^{-1}\dot{x} + 10^2 t^{-2} x = 0, \quad 10 \le t \le 10^2, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 1$$

Уравнение Капицы (описывает колебания «перевернутого» маятника):

$$L\ddot{\Theta} + (g - A\omega^2 \sin \omega t) \sin \Theta = 0$$

При $\sin \Theta \approx \Theta$ получается уравнение Матье, при при $A = 0$ получается уравнение колебания маятника $\ddot{\Theta} = \frac{g}{2} \sin \Theta$. Здесь L – длина маятника, Θ – угол отклонения от вертикали.

Уравнение Минорского (встречается в механических и электромеханических задачах с запаздыванием и нелинейностью):

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + \omega^2 y + 2q\dot{y}(t-1) = \varepsilon \dot{y}^3 (t-1)$$

$$r = -1, \quad q = -1, \quad \omega = \pi n$$

Начальные данные задаются на $t \in [-1; 0]$.

Задание. **1.** Исследовать зависимость численных решений от параметров процессов.

2. Исследовать сходимость по сетке.

3. Использовать схемы Рунге-Кутты порядка не менее $O(r^4)$, сравнить с численными решениями, полученными по методу Эйлера ($\Theta(\tau)$).

4. Представить зависимости параметров от времени и фазовые портреты.

Параметры для уравнения Капицы:

L	A	ω	$\Theta(0)$
10	0,5	5,3	3,1
10	10	100	3,1
10	10	100	0,1
10	2	100	0,1
10	0,5	200	0,05

5. Баллистические задачи

1. Ракета. *Ракета (или снаряд), запускаемая под малым углом $\Theta(0) = \Theta_0$ к горизонту, стартует с начальной скоростью $v(0) = v_0$. Определить траекторию, если на ракету действуют сила тяжести mg, реактивная тяга $T(t)$ в направлении вектора скорости, аэродинамическое сопротивление $D(t)$, сила ветра $W(t)$, действующая в направлении оси O_x.*

Соответствующие условиям задачи уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\Theta + W \\ \dot{y} = v\sin\Theta \\ \dot{\Theta} = -\dfrac{g}{v}\cos\Theta \\ m\vec{u} = \vec{T} - \vec{D} - \vec{P} \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$D(f) = c\cdot\rho\cdot S\frac{v^2}{2}, \qquad c \approx 0{,}2, \qquad \rho = 1{,}29\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$S = 0{,}25\ \text{м}^3, \qquad y = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \qquad v_0 = 50\,\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$m = 15\ \text{кг}, \qquad 0{,}3 \le \ \Theta_0 \le 1{,}5$$

<u>Задание.</u> Определить траекторию и построить ее график в трех случаях:

$$\text{а) } T(t) = 0, \qquad W(t) = 0$$

$$\text{б) } T(t) = 0, \qquad W(t) = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\text{в) } T(t) = 0 \text{ и } T(t) = 0{,}5\cdot D(t), \qquad W(t) = 50\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

2. Спутник. *Вокруг Земли вращается спутник на круговой орбите радиуса $r_c = 10^4$ км. Проработав короткое время, двигатель сообщил спутнику скорость u в направлении, противоположном движению. Рассчитайте новую траекторию спутника. При какой u спутник коснётся поверхности Земли?*

Уравнение движения спутника:

$$\ddot{x} = -\gamma\frac{M}{r^3}x, \qquad \ddot{y} = -\gamma\frac{M}{r^3}y, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x(0) = r_c, \qquad r_c = 10^4\ \text{км}, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = v_c - u, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Параметры задачи:

$$M = 5{,}99 \cdot 10^{24}\ \text{кг (масса Земли)}, \qquad \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2},$$

$$R = 6380\ \text{км (радиус Земли)}$$

<u>Задание.</u> а) Построить график траектории в плоскости (x, y).

б) Проверить третий закон Кеплера:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}$$

3. Задача трех тел (Земля, Луна, спутник).

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} + x - \dfrac{\bar{\mu}(x+\mu)}{r_1^3} - \dfrac{\mu(x-\bar{\mu})}{r_2^3} - f\dot{x} \\ \dot{y} = -2\dot{x} + y - \dfrac{\bar{\mu}y}{r_1^3} - \dfrac{\mu y}{r_2^3} - f\dot{y} \end{cases}$$

Здесь $\mu = \frac{1}{82{,}45}$ (отклонение масс Луны и Земли); Земля и Луна находятся в точках $(1 - \mu, 0)$ и $(-\mu, 0)$ соответственно, масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массами Земли и Луны (координаты спутника – (x, y)); первые производные появляются вследствие вращения системы координат и трения, пропорционального скорости с коэффициентом пропорциональности f.

Параметры задачи:

$$\bar{\mu} = 1 - \mu, \qquad r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \qquad r_2^2 = (x-\bar{\mu})^2 + y^2,$$

$$x(0) = 1{,}2, \qquad \dot{x}(0) = 0, \qquad y(0) = -1{,}05$$

При $f = 0$ периодическое движение с периодом $T \approx 6{,}2$.

<u>Задание.</u> а) Провести расчеты с $f = 0, f = 1/10, f = 1$ при $0 \le t \le 8$ методами Рунге-Кутты порядков $O(\tau)$ и $O(t^k), k \ge 4$.

б) Провести исследования сходимости численного решения по сетке.

6. Сингулярно-возмущенные системы

1. Рассмотрим систему:

$$\varepsilon y'' = (y')^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1$$

а) Получите точное решение, сделав замену переменных $y' = p(y)$.
б) Численно исследуйте поведение решения при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$ и сравните полученное решение с точным.

2. Рассмотрим систему:

$$\varepsilon y'' = [y - u(x)]^{2q+1}, \qquad y(-1) = A, \qquad y(1) = B, \qquad q \in N, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Решить задачу для случаев: а) $u(x) = |x|, A = 1, B > 1$; б) $u(x) = x^2, A > 1, B > 1$;
в) $u(x) = |x|, A > 1, B > 1$.

Что происходит при увеличении q?

При $u(x) = |x|$ образуется пограничный слой вблизи $x = 0$.

3. Вычислите решение системы при данных значениях параметра ε («пичковые структуры»):

$$\varepsilon y'' = y - y^3, \qquad y(0) = A, \qquad y(1) = B, \qquad |A| < \sqrt{2}, \qquad |B| < \sqrt{2},$$
$$0 < \varepsilon \ll 1, \qquad \varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$$

4. Вычислите решение системы (внутренний пограничный слой $x = 1/2$) и исследуйте зависимость толщины пограничного слоя от ε:

$$\varepsilon y'' = y^3 - q, \qquad y(0) = A < -1, \qquad y(1) = B > 1$$

5. Рассмотрите поведение системы при $\varepsilon \to 0$:

$$\varepsilon y'' = -y[y + a(x)], \qquad y(0) = y_0, \qquad y(1) = y_1, \qquad a'(0) = 0$$

Удалось ли получить пограничный слой типа всплеска?

6. Численно решить задачу на нахождение собственных значений и собственных функций волнового уравнения методами стрельбы и прогонки:

$$y'' = -k^2 y, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Сравнить численные решения между собой и с точными решениями: $k_n = \pi n,\ y_n \approx \sin(\pi n x), n > 0$. Рассмотрите случай больших k.

Задание. а.) Использовать явный и неявный методы не ниже 4-го порядка точности, сравнить полученные решения с численным решением, полученным по методу (любому) 1-го порядка точности.

б.) Для получения численного решения задач из п. 1-5 используйте методы стрельбы и прогонки (квазилинеаризации). Какой из этих двух методов предпочтительнее?

7. Двумерное линейное уравнение теплопроводности

1. *Получите численное решение уравнения теплопроводности:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1$$

$$u(0,x,y) = 0, \qquad u(t,0,y) = 0, \qquad u(t,1,y) = 1, \qquad u(t,x,0) = 2, \qquad u(t,x,1) = 3,$$

используя разностные схемы расщепления:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 \tilde{u}_{ml} \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1} \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \dfrac{u_{ml}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 \left[\xi u_{ml}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\xi) u_{ml}^{n}\right] \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1} - u_{ml}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 \left[\xi u_{ml}^{n+1} + (1-\xi) u_{ml}^{n+\frac{1}{2}}\right], \qquad \xi = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^{n}\right) \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1 \tilde{u}_{ml} + \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}\right) \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{ml} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n} \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1} - \tilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 \tilde{u}_{ml} \end{cases}$$

Здесь Λ_1, Λ_2 – разностные операторы (h_x, h_y – шаги по направлениям x, y):

$$\Lambda_1 u_{ml}^{n} = \frac{u_{m+1,l}^{n} - 2u_{m,l}^{n} + u_{m-1,l}^{n}}{h_x^2}, \qquad \Lambda_2 u_{ml}^{n} = \frac{u_{m,l+1}^{n} - 2u_{m,l}^{n} + u_{m1,l-1}^{n}}{h_y^2}$$

<u>Задание.</u> а) Сравните полученные численные решения (по u в нескольких точках)

б) Исследуйте сходимость численного решения по сетке.

8. Нестационарное уравнение теплопроводности. Задача Стефана

Рассматривается среда, находящаяся в начальный момент времени в жидком состоянии при температуре $T(x,0) > T_p$ (T_p – температура плавления). Поверхность среды при $x = 0$ поддерживается при $T(0,t) < T_p$ и при $x = 1$: $T(1,p) > T_p$. В предположении, что плотность среды не изменяется при фазовом превращении, процесс затвердевания описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \rho c_s \dfrac{\partial T}{\partial t} = a_s \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 0 \le x \le y(t) \\ \rho c_f \dfrac{\partial T}{\partial t} = a_f \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & y(t) \le x \le 1 \end{cases}$$

Здесь $y(t)$ – положение фазового фронта, индексы s и f относятся к твердой и жидкой фазам соответственно. Уравнение дополняется начальными и граничными условиями, а также условиями на фазовом фронте (условие баланса энергии при движении фазового фронта):

$$\begin{cases} u(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0,t) = f_1(t), \quad u(1,t) = f_2(t), \\ a_s \dfrac{\partial T}{\partial x}(y-0) - a_f \dfrac{\partial T}{\partial x}(y+0) = \rho L \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

Параметры (вода-лед):

$$x = 0 \text{ (поверхность водоема)}, \qquad x = L = 1 \text{ м (дно водоема)}, \qquad g(x) = \frac{7x}{L} + 273^\circ \text{ К}$$

$$f_1(t) = \{273 - 13[1 - \exp(-10^{4t})]\}^\circ \text{ К}, \qquad f_2(t) = 280^\circ \text{ К}, \qquad l = 1 \text{ м}, \qquad \rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\text{теплоемкость воды } 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \qquad \text{льда } 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$\text{коэффициент теплопроводности воды } 0{,}56 \ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \qquad \text{льда } 2{,}25 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}},$$

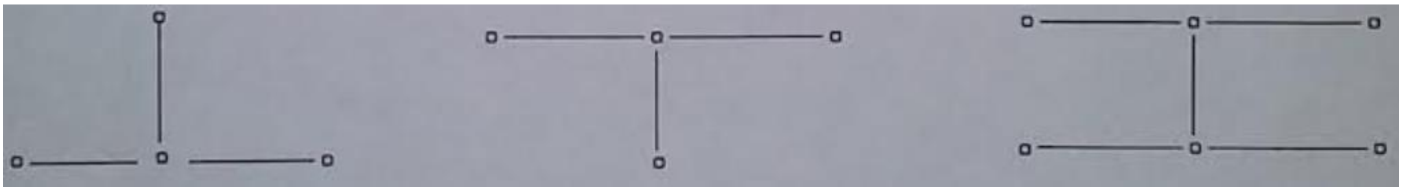
$$\text{коэфф. температуропроводности воды } 1{,}33 \cdot 10^{-7} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \qquad \text{льда } 1{,}08 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

$$\text{удельная теплота плавления льда } 3{,}3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \qquad \text{температура плавления } 273^\circ \text{ К}$$

1. Рассчитайте профили $T(x)$ в различные моменты времени и изобразите графики.

2. Рассчитайте положение фронта фазового перехода и изобразите график.

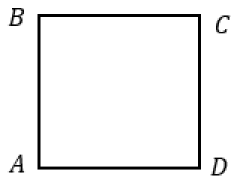
3. Используйте три разностных схемы (см. рис.)



4. Исследуйте сходимость численного решения по сетке.

9. Стационарные задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу о нагревании балки квадратного сечения, бесконечной по одной оси координат (O_z).



Пусть температура грани AB, BC, CD, DA поддерживается постоянной: 1 на AB, 2 на BC, 3 на CD и 4 на DA (температура приведена в относительных единицах, $T_* = 100^\circ\ C$). Размер грани $AB = BC = CD = AD = 0{,}1$ м.

1. Получите численное решение стационарной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с приведенными граничными условиями, используя итерационные методы:

а) Якоби:

$$\frac{u_{m+1,l}^{i} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m-1,l}^{i}}{h_x^2} + \frac{u_{m,l+1}^{i} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m,l-1}^{i}}{h_y^2} = f_{m,l}$$

б) Зейделя:

$$\frac{u_{m+1,l}^{i} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m-1,l}^{i+1}}{h_x^2} + \frac{u_{m,l+1}^{i} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m,l-1}^{i+1}}{h_y^2} = f_{m,l}$$

в) верхней релаксации ($h_x = h_y$):

$$\frac{u_{m-1,l}^{i+1} - u_{m,l-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1,l}^{i} - u_{m,l+1}^{i}}{h^2} - \frac{4}{h^2}\left[\frac{u_{m,l}^{i+1}}{\tau} + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) u_{ml}^{k}\right] = f_{m,l}$$

2. Сравните эти методы по скорости сходимости (численно и теоретически).

3. Проверьте сходимость численного решения по сетке (то есть при $h_x, h_y \to 0$).

4. Исследуйте численно зависимость скорости сходимости для схемы верхней релаксации от величины итерационного параметра τ.

5. Результаты численного решения представьте в виде изолиний $T(x, y) = const$ и в виде одномерных графиков $T(x)$ при разных значениях y и $T(y)$ при разных значениях x.

10. Численные методы решения уравнения переноса. Задача распада разрыва

Рассмотрим одномерное линейное и нелинейное уравнение переноса (в характеристической и дивергентной форме):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad a = const, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0, \qquad (3)$$

Параметры задачи:

$$t \in [0;T], \qquad x \in [-X;X]$$

$$u(0,x) = \begin{cases} u_1, & x > 0 \\ u_2, & x \le 0 \end{cases}$$

$$T = 100, \qquad X = 10, \qquad a = 1, \qquad N\tau = T, \qquad Mh = 2X, \qquad M = 10^{-3}$$

Здесь h – шаг по координате, τ – шаг по времени.

<u>Задание.</u> Получите численные решения уравнений (1), (2), (3) с помощью разностных схем:

а) Куранта-Изаксона-Риса;

б) Лакса-Вендроффа;

в) гибридной схемы Федоренко;

г) схемы Хартена (TVD);

д) метода коррекции потоков Бориса-Брука;

е) Колгана;

ж) ENO-схемы.

Об этих схемах можно подробнее узнать в книге И.Б. Петров, А.И. Лобанов «Лекции по вычислительной математике», лекция 15.

11. Численные методы решения системы уравнений газовой динамики

Получите численное решение одномерной задачи о распаде разрыва в идеальном газе, используя систему нестационарных уравнений газодинамики:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + A\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} = 0, \qquad \vec{U} = \{\rho, u, \varepsilon\}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial\rho} & u & \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial\varepsilon} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix}$$

Здесь ρ – плотность, u – скорость газа, ε – удельная внутренняя энергия газа, $\{t, x\}$ – независимые координаты; $\rho(0,x) = \rho_0, u(0,x) = 0$.

Уравнение состояния:

$$p - \rho\varepsilon(\gamma - 1) = 0, \qquad \gamma = 1{,}4,$$

$$p(0,x) = \begin{cases} p_1, & x \le 0, \\ p_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$t \in [0; T], \qquad x \in [-X; X], \qquad N\tau = T, \qquad Mh = 2X, \qquad M = 20; 100; 1000$$

Использовать сеточно-характеристический метод $\left(\sigma = \frac{\tau}{h}\right)$:

$$\overrightarrow{U_m^{n+1}} = \overrightarrow{U_m^n} - \sigma\left[(\Omega^{-1}\Lambda^+\Omega)_m^n\left(\overrightarrow{U_{m-1}^n} - \overrightarrow{U_m^n}\right) - (\Omega^{-1}\Lambda^-\Omega)_m^n\left(\overrightarrow{U_{m+1}^n} - \overrightarrow{U_m^n}\right)\right]$$

Здесь $\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|)$, Λ – диагональная матрица: $\Lambda = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1 = u + c, \lambda_2 = u, \lambda_3 = u - c$ (собственные числа матрицы A),

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial\rho} & \rho c & \frac{\partial p}{\partial\varepsilon} \\ p & 0 & -\rho^2 \\ p & -pc & \frac{\partial p}{\partial\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\omega_1} \\ \overrightarrow{\omega_2} \\ \overrightarrow{\omega_3} \end{pmatrix}$$

(это матрица из собственных векторов матрицы A. При этом $A = \Omega^{-1}\Lambda\,\Omega$, собственные векторы находятся из условия $\omega_i A = \lambda_i\omega_i$)

Здесь c – адиабатическая скорость звука, $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$.

Дополнительную информацию см. в книге И.Б. Петров, А.И. Лобанов «Лекции по вычислительной математике», лекция 14; п.14.3.

12. Задача нестационарной теплопроводности

Одна из постановок задачи взаимодействия лазерного излучения с веществом имеет вид (задача физики горения):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad r \geq 0, z \geq 0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = I(r) + e^{\left(-\frac{1}{u}\right)} - \eta u, \qquad r \geq 0, z \geq 0,$$

$$u(r, z, 0) = u_0(r, z) \geq 0, \qquad u \to 0 \text{ при } \sqrt{r^2 + z^2} \to \infty$$

Здесь $e^{\left(-\frac{1}{u}\right)}$ описывает энерговыделение реакции на поверхности образца, $(-\eta u)$ – теплопотери, $I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)$, где $r_0 = 2$ мм.

1. Получите численное решение задачи с помощью локально-одномерной разностной схемы.

2. Исследуйте распределение температуры u по r и z в различные моменты времени.

3. Покажите сходимость решения по сетке (т.е. при $h_x \to 0, h_y \to 0$).

4. Получите численное решение при помощи явной разностной схемы. Какой шаг по времени необходимо для этого выбрать?

5. Исследуйте поведение рассматриваемой среды в зависимости от параметра η.

13. Движение частицы в магнитном поле

Движение частицы заряда q и массы m в магнитном поле описывается системой ОДУ:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{mc}\vec{v}\times\vec{B}, \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \qquad \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}, \qquad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

1. Получить численное решение задачи об отражении заряженной частицы от магнитного зеркала. В этом случае:

$$B_x = -\frac{x}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{\pi l}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-L)^2}{l^2}}, \qquad B_y = -\frac{y}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{\pi l}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-L)^2}{l^2}},$$

$$B_z = B_0 + (B_1 - B_0)\left(\frac{\pi}{2} + arctg\frac{z-L}{l}\right)\cdot\frac{1}{\pi}$$

Начальные данные:

$$x(0) = \frac{V_1}{\omega_0}, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0, \qquad \omega_0 = \frac{qB_0}{mc} \text{ (ларморова частота)},$$

$$v_x(0) = 0, \qquad v_y(0) = -V_1, \qquad v_z(0) = -V_1\cdot ctg\,\alpha, \qquad \omega_0 = 1, \qquad \frac{B_1}{B_2} = 2,$$

$$V_1 = 1, \qquad l = 10, \qquad L = 40, \qquad \alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$$

2. Получить численное решение задачи о движении заряженной частицы в магнитной ловушке. В этом случае:

$$B_x = -\frac{x}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{2l}\cdot\pi\cdot\sin\frac{\pi z}{l}, \qquad B_y = -\frac{y}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{2l}\cdot\pi\cdot\sin\frac{\pi z}{l},$$

$$B_z = B_0 + \frac{B_1 - B_0}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{l}\right)$$

Начальные условия:

$$x(0) = \frac{V_1}{\omega_0}, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0, \qquad v_x(0) = 0, \qquad v_y(0) = -V_1,$$

$$v_z(0) = -V_1\cdot ctg\,\alpha, \qquad \omega_0 = 1, \qquad \frac{B_1}{B_2} = 2,$$

$$V_1 = 1, \qquad l = 20, \qquad \alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$$

<u>Задание.</u> а) Использовать методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности.

б) Исследовать сходимость численных решений по сетке (при $\tau\to 0, \tau$ – шаг по времени).

14. Нелинейное уравнение теплопроводности

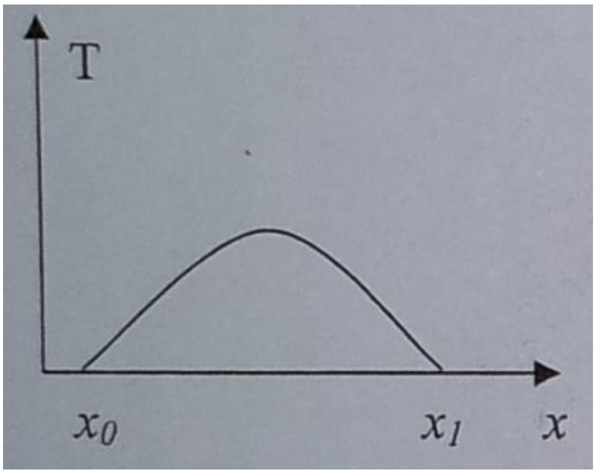
Некоторые процессы в плазме, в биосистемах и в химических реакциях описываются нелинейным уравнением теплопроводности вида:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + Q(T),$$

где $T(t,x)$ – температура среды, $\{t,x\}$ – независимые переменные, $k(T)$ – нелинейный коэффициент теплопроводности, $Q(T)$ – нелинейная функция (например, моделирующая процессы горения, детонации). Обычно:

$$k(T) = k_0 T^\alpha, \qquad Q(T) = q_0 T^\beta, \qquad k_0, q_0, \alpha > 0, \qquad \beta > 1$$

При $\beta > \alpha + 1$ реализуется так называемый $\boldsymbol{LS}$**-режим с обострением**, при $\beta < \alpha + 1$ – $\boldsymbol{HS}$**-режим с неограниченным ростом температуры**, при $\beta = \alpha + 1$ – $\boldsymbol{S}$**-режим** (полуширина профиля температуры постоянна). При $\beta > \alpha + 1$ полуширина профиля сокращается, процесс локализуется, формируется так называемая **диссипативная структура**, а при $\beta < \alpha + 1$ наблюдаются тепловые волны, амплитуда которых растет. Профиль задается в виде:



1. Проверьте эти выводы численно, используя **неявную схему**. Положите:

а) $k_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad \beta = 3, \quad \alpha = 2,$

б) $k_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad \beta = 3{,}18, \quad \alpha = 2,$

в) $k_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad \beta = 1{,}667, \quad \alpha = 2.$

2. Проверьте сходимость численных решений по сетке (то есть при $h \to 0$, где h – шаг по координате).

3. Выведите профили $T(x)$ в различные моменты времени.

15. Аттракторы в системах ОДУ (задача Коши)

Множество точек на фазовой плоскости, к которым стремится решение ОДУ, называется **аттрактором**. Представьте численное решение следующих задач на фазовой плоскости и исследуйте эти задачи на наличие аттракторов.

1. Аттрактор Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$x(0) > 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0, \qquad (y_0 = z_0 = 1)$$

$$\sigma = 10, \qquad r = 28, \qquad b = \left\{\frac{8}{3}, 10, 20\right\}, \qquad t_k = 20, \qquad \tau = \{10^{-3}, 10^{-2}\}$$

Здесь σ – число Прандтля, r – число Рэлея.

2. Аттрактор Реслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \dfrac{y}{5} \\ \dot{z} = \dfrac{1}{5} + z(x - \mu) \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0, \qquad 0 < \mu \le 10$$

3. Аттрактор Рикитаки:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + yz \\ \dot{y} = -\mu y + xr \\ \dot{z} = 1 - xy - \gamma_1 z \\ \dot{r} = 1 - xy + \gamma_2 r \end{cases}$$

Параметры задачи:

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0, \qquad 0{,}2 \le \mu \le 2$$

$$\gamma_1 = [0{,}002; 0{,}004], \qquad \gamma_2 = 0{,}002$$

Задание. а) Проведите исследования свойств систем ОДУ из п. 1-3 в зависимости от параметров процессов $(\sigma, r, b, \gamma_1, \gamma_2)$.

б) Исследуйте сходимость численного решения по сетке.

в) Используйте методы Рунге-Кутты 1-го и 4-го порядков точности.

16. Различные виды метода прогонки

1. Для численного решения краевой задачи для ОДУ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \qquad u(0) = U_1, \qquad u(L) = U_2, \qquad (*)$$

воспользуйтесь тремя вариантами трехточечной прогонки (предварительно получив прогоночные соотношения):

а) прямая прогонка (слева направо);
б) обратная (справа налево);
в) встречные прогонки.

Параметры задачи:

$$f(u) = e^{\alpha u}, \qquad f(u) = \sin(\omega u)$$

2. Исследуйте поведение численного решения в зависимости от параметров α, ω.

3. Пусть теперь краевые условия в $(*)$ являются периодическими. Получите формулы для трехточечной периодической прогонки и численно решите уравнение $(*)$.

4. Для аппроксимации краевой задачи получите формулы пятиточечной прогонки и численно решите эту задачу:

$$u_x^{IV} = f(x), \qquad x \in [0; L],$$

$$u(0) = 0, \qquad u(L) = 0, \qquad u'(0) = 1, \qquad u'(L) = 1, \qquad f(x) = const$$