

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный национальный исследовательский
университет»

Кафедра теоретической физики

**КОНВЕКЦИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКИХ
СМЕСЕЙ В СВЯЗАННЫХ КАНАЛАХ**

Дипломная работа

Исполнитель:

студент 5 курса физического факультета специальности «Физика»
специализации «Теоретическая физика»

М. С. Солодовников

К защите допускаю:

и. о. зав. кафедрой теоретической физики, д.ф.-м.н., профессор

Т. П. Любимова

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор
В. А. Демин

Пермь 2012

Содержание

Введение	3
1 Обзор литературы	4
1.1 История изучения гидродинамической неустойчивости	4
1.2 Бинарные смеси	6
1.3 Диффузия взвешенных в жидкости частиц	9
1.4 Актуальность работы	11
2 Постановка задачи	13
2.1 Геометрия задачи	13
2.2 Математическая модель	13
3 Методика решения	16
3.1 Состояние механического равновесия	16
3.2 Аналитическое решение стационарной задачи	17
3.3 Численное решение нестационарной задачи	23
4 Заключение	35
5 Список литературы	36

Введение

В дипломной работе была разработана новая модель, описывающая конвективное течение коллоидной жидкости, как трехкомпонентной среды. В рамках предложенного подхода предполагалось, что смесь представляет собой бинарную молекулярную жидкость с примесью твердых частиц. Ранее, различными авторами, феррожидкости рассматривались как бинарные среды, состоящие из однородной жидкости-носителя с твердыми феррочастицами. Так как характерный размер таких частиц составляет порядка 10 нм, считалось, что их вклад в конвективное движение является главным. Для описания конвективного поведения феррожидкостей принимались во внимание седиментация, термодиффузия и другие эффекты, связанные только с наличием коллоидных частиц, однако, в этом случае оценки и результаты расчетов неудовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Отличие предлагаемой модели от предыдущих состоит в том, что феррожидкость рассматривается как более сложная среда, состоящая из бинарной жидкости-носителя, молекулярные компоненты которой перераспределяются за счет термодиффузии, и взвешенных частиц, способных осаждаться за счет эффекта седиментации.

В рамках предложенной модели аналитически была решена стационарная задача о тепловой конвекции феррожидкости в связанных каналах, при подогреве снизу в приближении прямолинейных траекторий. Численно, методом конечных разностей, исследованы нестационарные режимы, а именно, получены распределения полей концентрации молекулярных компонентов жидкости-носителя в поперечном сечении каналов, амплитуда и период колебаний в зависимости от надкритичности, поля скорости и температуры для разных параметров в случае нормальной и аномальной термодиффузии.

1 Обзор литературы

1.1 История изучения гидродинамической неустойчивости

В неравномерно нагретой жидкости, находящейся в поле тяжести, при определенных условиях возможно механическое равновесие. Если неоднородность температуры достаточно велика, то равновесие становится неустойчивым и в результате развития возмущений сменяется конвективным движением. В тех условиях, когда равновесие невозможno, конвекция возникает при сколь угодно малой неоднородности температуры. Однако и в этом случае увеличение разности температур приводит к кризису, связанному с неустойчивостью самого конвективного движения. Обе указанные ситуации представляют собой разные стороны одного из наиболее интересных явлений, изучаемых современной гидродинамикой, — явление гидродинамической неустойчивости.

Началом систематического изучения конвективной неустойчивости можно считать эксперименты Бенара (1900 г.), наблюдавшего возникновение регулярной пространственно-периодической конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости (ячейки Бенара). Рэлей (1916 г.) теоретически исследовал устойчивость равновесия в горизонтальном слое при подогреве снизу и определил порог конвекции для модельного случая слоя с обеими свободными границами. Дальнейшее развитие теории продвигалось весьма медленно из-за значительных вычислительных трудностей. В ряде работ рассматривались лишь некоторые усложнения задачи о горизонтальном слое, связанные с различными условиями на ограничивающих плоскостях. В 1946 г. Г. А. Остроумов теоретически и экспериментально исследовал условия возникновения конвекции в вертикальном круговом канале. Вскоре после этого рядом авторов была изучена конвективная неустойчивость равновесия в полостях различной формы, а также В. С. Сорокиным были исследованы некоторые общие свойства спектра характеристических возмущений.

Начиная с шестидесятых годов, исследования развивались бурными

темпами под влиянием необычайно возросшего интереса к проблемам гидродинамической неустойчивости, а также в связи с многочисленными приложениями в области науки о теплообмене, геофизике и астрофизике. Было подробно изучено влияние на конвективную устойчивость различных осложняющих факторов — магнитного поля, вращения, диффузии, модуляции параметров системы, внутренних источников тепла, просачивания через проницаемые границы, капиллярных эффектов и др. Значительные успехи были достигнуты в нелинейном анализе устойчивости относительно конечных возмущений и структуры конечно — амплитудных движений, возникающих в результате кризиса равновесия. Существенные результаты получены в исследовании устойчивости стационарных конвективных движений. Заметный прогресс имеется также в экспериментальном изучении различных аспектов конвективной устойчивости.

После работ Бенара и Рэлея в течение длительного времени изучалась теоретически и экспериментально лишь конвективная неустойчивость плоского горизонтального слоя жидкости. В 1946 г. работами Остроумова было положено начало систематическому исследованию явлений конвективной неустойчивости в полостях других форм. Наиболее обстоятельно исследованы конвективные явления (в частности, условия возникновения конвекции) в вертикальных круговых каналах.

В последующие годы была проанализирована конвективная устойчивость в вертикальных каналах других сечений — в плоском вертикальном слое, в каналах эллиптического, кольцевого и прямоугольного сечения, а также в системе двух параллельных связанных каналов.

В случае системы вертикальных каналов, тепловые возмущения, возникающие в одном из каналов, проникают в другой. К этому добавляется эффект гидравлической связи каналов, которые предполагаются сообщающимися. Наличие гидравлической и тепловой связи каналов существенно влияет на устойчивость [1].

1.2 Бинарные смеси

Состояние двухкомпонентной молекулярной смеси можно описать, задавая гидродинамическую скорость элемента жидкости \vec{v} , давление p , температуру T , а так же концентрацию C одной из компонент (Далее в этом разделе будем обозначать через C концентрацию легкой компоненты).

Запишем уравнения гидродинамики смеси. Будем рассматривать смесь как несжимаемую жидкость; уравнение Навье – Стокса и непрерывности тогда будут иметь обычный вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость смеси. К (1.1), (1.2) необходимо добавить еще два уравнения для определения температуры и концентрации. Они получаются из законов сохранения массы рассматриваемой компоненты и энергии. Уравнение сохранения легкой компоненты имеет вид

$$\rho \left[\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C \right] = -\operatorname{div} \vec{j}, \quad (1.3)$$

где \vec{j} — плотность диффузационного потока вещества легкой компоненты. Уравнение энергии для смеси в пренебрежении вязкой диссиляцией можно записать так:

$$\rho T \left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) s \right] = -\operatorname{div} \vec{q} + \mu \operatorname{div} \vec{j}. \quad (1.4)$$

Здесь s — энтропия единицы массы смеси, T — абсолютная температура, \vec{q} — плотность молекулярного потока тепла, а μ — эффективный химический потенциал, связанный с химическими потенциалами компонент μ_1 и μ_2 соотношением

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2},$$

где m_1 и m_2 — массы молекул соответственно легкой и тяжелой компонент.

Входящие в уравнения (1.3), (1.4) плотности потоков \vec{j} и \vec{q} выражаются в общем случае через градиенты температуры, концентрации и давления.

Если в жидкости отсутствуют значительные градиенты давления, то можно записать

$$\vec{j} = -\rho D(\nabla C + \frac{k_T}{T} \nabla T), \quad (1.5)$$

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T + (\mu - (\frac{\partial \mu}{\partial T})_{C,p} T + k_T (\frac{\partial \mu}{\partial C})_{T,p}) \vec{j}. \quad (1.6)$$

В эти формулы входят три кинетических коэффициента: коэффициенты теплопроводности κ , и диффузии D , и термодиффузионное отношение k_T . Формулы (1.5), (1.6) удобнее переписать в несколько иной форме:

$$\vec{j} = -\rho D(\nabla C + \alpha \nabla T), \quad \vec{q} = -(\kappa + \alpha D N') \nabla T - D N' \nabla C. \quad (1.7)$$

Здесь обозначено

$$\alpha = \frac{k_T}{T}, \quad N' = \rho(\mu - (\frac{\partial \mu}{\partial T})_{C,p} T + k_T (\frac{\partial \mu}{\partial C})_{T,p}), \quad (1.8)$$

где α — коэффициент термодиффузии.

Таким образом, диффузионный поток вещества возникает в смеси не только при наличии градиента концентрации (диффузия), но и при наличии градиента температуры (термодиффузия). В свою очередь, тепловой поток обусловлен как градиентом температуры (теплопроводность), так и градиентом концентрации (диффузионная теплопроводность).

Уравнения (1.1) – (1.4) вместе с формулами для потоков (1.7) дают полную систему уравнений гидродинамики бинарной несжимаемой смеси.

Получим теперь уравнения свободной термоконцентрационной конвекции смеси. В неоднородной жидкости конвекция вызывается пространственными неоднородностями температуры и концентрации. Будем считать, что температура и концентрация мало отличаются от некоторых средних значений, а плотность зависит от температуры и концентрации линейно:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_t T - \beta_c C). \quad (1.9)$$

Здесь ρ_0 — плотность смеси, соответствующая средним значениям температуры и концентрации, а через T и C теперь обозначаются отклонения

от этих средних значений. Коэффициент β_t есть обычный коэффициент теплового расширения смеси, а $\beta_c = -\frac{1}{\rho_0}(\frac{\partial \rho}{\partial C})_{T,p}$ определяет зависимость плотности от концентрации. Через C обозначена концентрация легкой компоненты, и потому $\beta_c > 0$.

Подставляя (1.9) в уравнение Навье – Стокса, линеаризуя по конвективным добавкам и считая, что неоднородность плотности существенна лишь в подъемной силе (приближение Буссинеска), получим уравнение движения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + g(\beta_t T + \beta_c C) \vec{\gamma}. \quad (1.10)$$

Здесь p — конвективное давление, отсчитываемое от гидростатического, соответствующего средней плотности ρ_0 .

Преобразуем уравнения диффузии и теплопроводности. Подставим потоки (1.7) в уравнения (1.3), (1.4). При этом ввиду малого изменения температуры и концентрации вдоль жидкости можно считать коэффициенты при ΔT и ΔC в (1.7) постоянными. Пользуясь термодинамической формулой изменения энтропии смеси

$$ds = (\frac{\partial s}{\partial T})_{C,p} dT + (\frac{\partial s}{\partial C})_{T,p} dC = \frac{c_p}{T} dT - (\frac{\partial \mu}{\partial T})_{C,p} dC, \quad (1.11)$$

получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C = D \Delta C + \alpha D \Delta T, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = (\chi + \alpha^2 D N) \Delta T + \alpha D N \Delta C. \quad (1.13)$$

Здесь $\chi = \kappa / \rho_0 c_p$ — коэффициент температуропроводности смеси, а

$$N = (\frac{T}{c_p} (\frac{\partial \mu}{\partial C})_{T,p})_0 \quad (1.14)$$

— термодинамический параметр (величины в скобках берутся при средних значениях температуры и концентрации).

Уравнения (1.10), (1.12), (1.13) и уравнение непрерывности поисывают

конвекцию двухкомпонентной смеси [1].

1.3 Диффузия взвешенных в жидкости частиц

Под влиянием молекулярного движения в жидкости взвешенные в ней частицы совершают беспорядочное броуновское движение. Пусть в начальный момент времени в некоторой точке (начале координат) находится одна такая частица. Ее дальнейшее движение можно рассматривать как диффузионное, причем роль концентрации играет вероятность нахождения частицы в том или ином элементе объема жидкости. Возможность такого рассмотрения связана с тем, что при диффузии в слабых растворах частицы растворенного вещества практически не взаимодействуют друг с другом, и потому можно рассматривать движение каждой частицы независимо от других.

Пусть $w(r, t)dr^1$ есть вероятность нахождения частицы в момент времени t на расстоянии между r и $r + dr$ от исходной точки.

$$w(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} e^{-r^2/4Dt} r^2 dr \quad (1.15)$$

Определим средний квадрат расстояния, на которое частица удалится от исходной точки в течение времени t . Имеем:

$$\bar{r^2} = \int_0^\infty r^2 w(r, t) dr \quad (1.16)$$

Вычисление с помощью (1.15) дает

$$\bar{r^2} = 6Dt. \quad (1.17)$$

Таким образом, среднее расстояние, проходимое частицей в течение некоторого интервала времени, пропорционально квадратному корню из этого времени.

¹Полный вывод можно найти в книге Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, т. 6. Гидродинамика, §§ 59 – 60

Коэффициент диффузии взвешенных в жидкости частиц может быть вычислен по их так называемой подвижности.

Предположим, что на эти частицы действует некоторая постоянная внешняя сила \vec{f} (например, сила тяжести). В стационарном состоянии сила, действующая на каждую частицу, должна уравновешиваться силой сопротивления, испытываемой движущейся частицей со стороны жидкости. При не слишком больших скоростях сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. Написав ее в виде \vec{v}/b , где b — постоянная, и приравнивая внешней силе \vec{f} , получим:

$$\vec{v} = b\vec{f}, \quad (1.18)$$

т. е. скорость, приобретаемая частицей под влиянием внешней силы, пропорциональна этой силе. Постоянная b называется подвижностью и может быть, в принципе, вычислена с помощью гидродинамических уравнений. Так, для частиц, имеющих форму шариков (радиуса R), сила сопротивления равна $6\pi\eta Rv$ (формула Стокса), а потому подвижность

$$b = \frac{1}{6\pi\eta R}. \quad (1.19)$$

Подвижность b связана с коэффициентом диффузии D простым соотношением. С целью получения связи между b и D напишем выражение для диффузионного потока \vec{j} , который содержит наряду с обычным членом $-\rho D \nabla \phi$, где ϕ — концентрация твердых частиц, связанным с градиентом концентрации (температуру предполагаем постоянной), также и член, связанный со скоростью, приобретаемой частицей под влиянием внешних сил. Этот последний член равен $\rho\phi\vec{v} = \rho\phi b\vec{f}$. Таким образом:

$$\vec{j} = -\rho D \nabla \phi + \rho\phi b\vec{f}. \quad (1.20)$$

Перепишем это выражение в виде

$$\vec{j} = -\frac{\rho D}{(\partial\mu/\partial\phi)_{T,p}} \nabla \mu + \rho\phi b\vec{f}, \quad (1.21)$$

где μ теперь — химический потенциал взвешенных частиц (играющих роль растворенного вещества). Зависимость этого потенциала от концентрации (в слабом растворе) дается выражением

$$\mu = T \ln \phi + \psi(p, T), \quad (1.22)$$

так что

$$\vec{j} = -\frac{\rho D \phi}{T} \nabla \mu + \rho \phi b \vec{f}. \quad (1.23)$$

В состоянии термодинамического равновесия диффузия отсутствует и поток \vec{j} должен обращаться в нуль. С другой стороны, при наличии внешнего поля условие равновесия требует постоянства вдоль раствора суммы $\mu + U$, где U — потенциальная энергия взвешенной частицы в этом поле. Тогда $\nabla \mu = -\nabla U = -\vec{f}$ и из равенства $\vec{j} = 0$ получим

$$D = Tb. \quad (1.24)$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью (соотношение Эйнштейна).

Подставляя (1.19) в (1.24), найдем следующее выражение для коэффициента диффузии шарообразных частиц [2]:

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R} \quad (1.25)$$

1.4 Актуальность работы

В работе [3] экспериментально исследована тепловая конвекция магнитной жидкости в связанных каналах. Результаты качественно схожи с результатами опытов с бинарными смесями, но есть важные особенности конвективных течений, которые не были до конца объяснены.

Тепловая конвекция в магнитных жидкостях исследуется обычно в предположении однородной концентрации магнитных частиц. При этом авторы опираются на оценки, из которых следует, что для коллоидных частиц размером в сотни ангстрем, характерных для магнитных жидкостей, градиенты гравитационного происхождения проявляются, когда вы-

сота контейнера больше сантиметра. В полостях такой высоты, в силу малости коэффициента диффузии коллоидных частиц, время установления равновесного барометрического распределения очень велико – несколько месяцев и более. Однако, как показывают эксперименты, гравитационная седimentация твердой фазы может создавать разности плотностей, превышающие тепловые, и способна заметно влиять на конвективные процессы.

В работе [4] обсуждаются результаты сравнительных экспериментов по конвекции магнитных жидкостей и молекулярных жидких бинарных смесей в связанных вертикальных каналах при подогреве снизу. Вблизи порога устойчивости равновесия в обеих средах наблюдается течение в виде специфических перебросовых колебаний. Результаты эксперимента служат обоснованием построения трехкомпонентной модели конвекции магнитной жидкости, учитывающей процессы термодиффузационного разделения компонентов дисперсионной среды и слабую седimentацию магнитных частиц. Сопоставляются результаты численного моделирования конвекции и эксперимента. Полученные экспериментальные результаты [3 – 4] дают основания для вывода уравнений конвекции магнитной жидкости как трехкомпонентной среды, состоящей из бинарного носителя наполненного магнитными частицами.

2 Постановка задачи

2.1 Геометрия задачи

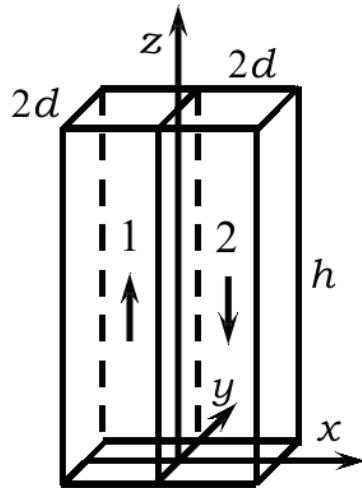


Рис. 2.1. Система координат

Связанные каналы имеют твердые границы высокой теплопроводности, однако, далее будем пренебречь тепловым взаимодействием левого и правого каналов. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось z была направлена вдоль канала рис. 2.1. В этой системе координат $\vec{\gamma}(0, 0, 1)$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Конвективная петля подогревается снизу так, что на вертикальных границах каналов поддерживается линейное распределение температуры [5].

2.2 Математическая модель

2.2.1 Уравнения в приближении Буссинеска

Для описания конвективных течений рассматриваемой многокомпонентной смеси воспользуемся уравнениями для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, в которых учитывается термодиффузия компонентов жидкой фазы и седиментация твердых частиц.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + g(\beta_t T - \beta_c C - \beta_\phi \phi) \vec{\gamma} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)T = \chi \Delta T \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)C = D(\Delta C + \alpha \Delta T) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\phi = D_\phi \Delta \phi + \frac{D_\phi(\rho_\phi - \rho)gV_0}{k_b T} \nabla \phi \cdot \vec{\gamma} \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.5)$$

Здесь \vec{v} , T , p , C , ϕ – поля скорости, температуры, давления, концентрации тяжелого компонента несущей жидкости и концентрация твердых частиц. Константы β_c и β_ϕ – концентрационные коэффициенты плотности, описывающие зависимость плотности элемента жидкости от концентрации тяжелой компоненты жидкости и твердых частиц:

$$\beta_c = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T,p}, \quad \beta_\phi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right)_{T,p},$$

где ρ – средняя плотность жидкости.

Эффекты, связанные с неоднородностью состава несущей жидкости, характеризуются коэффициентами молекулярной диффузии D и термодиффузии α . Параметр D_ϕ – коэффициент диффузии частиц. В рамках приближения (2.1) – (2.5), предполагается, что потоки вещества и тепла в несущей жидкости обусловлены градиентами концентрации и температуры следующим образом: $\vec{j} = -\rho D(\nabla C + \alpha \nabla T)$, $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, где κ – коэффициент теплопроводности. Возможность рассмотрения «молекулярного» потока вещества отдельно от потока твердых частиц обусловлена предположительно слабым перекрестным влиянием распределения компонентов жидких и твердой фаз [5].

2.2.2 Процедура обезразмеривания, безразмерные критерии

При обезразмеривании уравнений (2.1) – (2.5) в качестве единицы длины выберем полутолщину канала d , времени – $\frac{d^2}{\nu}$, скорости – $\frac{\nu}{d}$, температуры – θ , концентрации жидкой фазы – $\theta \frac{\beta_t}{\beta_c}$, концентрации твердой фазы – $\theta \frac{\beta_t}{\beta_\phi}$

, давления – $\frac{\rho\nu^2}{d^2}$. Ведем для удобства проведения расчетов новую переменную $F = C + \varepsilon T$, получим, с учетом выбранных единиц измерения, систему уравнений

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \frac{RaH}{Pr}((1+\varepsilon)T - F - \phi)\vec{\gamma} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) F = \frac{1}{Sc} \Delta F + \frac{\varepsilon}{Pr} \Delta T \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \phi = \frac{1}{Sc_\phi} (\Delta \phi + Bl \nabla \phi \cdot \vec{\gamma}) \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.10)$$

В уравнения входят безразмерные параметры

$$Ra = \frac{g\beta_t \theta d^3}{\nu \chi}, \quad Sc = \frac{\nu}{D}, \quad Sc_\phi = \frac{\nu}{D_\phi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Bl = \frac{d(\rho_\phi - \rho)gV_0}{k_B \bar{T}}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha \beta_c}{\beta_t},$$

где Ra , Sc , Sc_ϕ , Pr , Bl – числа Рэлея, Шмидта (для жидкости и твердой фазы соответственно), Прандтля, Больцмана; ε – термодиффузионный параметр, H – безразмерная высота каналов.

2.2.3 Границные условия

На твердых границах каналов ставится условие прилипания для скорости и равенство нулю нормальной компоненты потока вещества:

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial C}{\partial \vec{n}} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)|_{\Gamma} = 0.$$

В дополнение стенки каналов считаются идеально теплопроводными, поэтому возмущения температуры на вертикальных границах расчетной области равны нулю и накладывается условие нулевого расхода через сечение обоих каналов [5].

3 Методика решения

3.1 Состояние механического равновесия

Высота канала велика по сравнению с его толщиной, что позволяет использовать приближение прямолинейных траекторий, в результате чего уравнение (2.6) автоматически линеаризуется:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \frac{RaH}{Pr}((1+\varepsilon)T - F - \phi)\vec{\gamma} \quad (3.1)$$

В жидкости возможно состояние механического равновесия, при условии $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \vec{v} = 0$. Введем обозначения для равновесных полей температуры, давления и концентрации (тяжелой примеси в жидкой фазе и твердой фазы соответственно) — T_0, p_0, C_0, ϕ_0 . Применим к уравнению (3.1) операцию *rot*.

$$(\nabla T_0 - \nabla C_0 - \nabla \phi_0) \times \vec{\gamma} = 0 \quad (3.2)$$

$$\Delta T_0 = 0, \Delta C_0 = 0 \quad (3.3)$$

$$\Delta \phi_0 + Bl\nabla \phi_0 \cdot \vec{\gamma} = 0 \quad (3.4)$$

В результате имеем систему уравнений для смеси, находящейся в состоянии механического равновесия.

При подогреве снизу, распределение температуры линейно и имеет вид $T_0 = -z/H$. Решая оставшиеся уравнения, с учетом граничных условий, получаем линейное распределение для концентрации тяжелой примеси жидкой фазы, и экспоненциальное для концентрации твердой фазы [5]: $C_0 = \varepsilon z/H, \phi_0 = \xi_0 e^{-Bl \cdot z}$

3.2 Аналитическое решение стационарной задачи

3.2.1 Решение стационарной задачи

Предполагая справедливость приближения прямолинейных траекторий, имеем $\vec{v} = (0, 0, u(x, y, t))$, где $u(x, y, t)$ — скорость вдоль оси z. Для того чтобы исключить градиент давления из (3.1), проинтегрируем это уравнение по замкнутому контуру. В результате уравнение Навье – Стокса принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{Ra}{2Pr} \left((1 + \varepsilon) \int_0^H (T_1 - T_2) dz - \int_0^H (F_1 - F_2) dz - \int_0^H (\phi_1 - \phi_2) dz \right), \quad (3.5)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют левому и правому каналам. Для решения уравнений (3.5), (2.7), (2.8), (2.9) используем метод Галеркина. Для скорости и температуры выберем аппроксимации поперек каналов, удовлетворяющие граничным условиям

$$v_z = u(z) \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2), \quad (3.6)$$

$$T = \theta(z) \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2). \quad (3.7)$$

Базисные функции для F и ϕ сконструируем в виде линейных комбинаций тригонометрических функций, таким образом, чтобы выполнялось условие нечетности профиля по x и граничные условия для потока вещества на боковых стенках.

$$S_{13}(x) = \sin(\pi x/2) - \frac{1}{3} \sin(3\pi x/2), \quad C_{13}(x) = \cos(\pi x/2) + \frac{1}{3} \cos(3\pi x/2) \quad (3.8)$$

С учетом определения новых специальных функций, разложение для F и ϕ запишем в виде

$$F = f(z)C_{13}(y)S_{13}(x), \quad \phi = \varphi(z)C_{13}(y)S_{13}(x). \quad (3.9)$$

Подставляя разложения (3.6) — (3.9) в уравнения (3.5), 2.7, 2.8, 2.9,

выполним процедуру осреднения с соответствующим весом по сечению каналов. В стационарном приближении для амплитуд $u(z), \theta(z), f(z), \varphi(z)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{Pr} \theta_{1,2}'' \mp \frac{64}{9\pi^2} u \theta_{1,2}' - \frac{\pi^2}{2Pr} \theta_{1,2} \pm \frac{u}{H} = 0 \quad (3.10)$$

$$f_{1,2}'' \mp \frac{8.56Sc}{\pi^2} u f_{1,2}' - \frac{9\pi^2}{10} f_{1,2} = \frac{81\varepsilon Sc}{100Pr} \left(\frac{\pi^2}{2} \theta_{1,2} - \theta_{1,2}'' \right) \quad (3.11)$$

$$\varphi_{1,2}'' + \left(Bl \mp \frac{8.56Sc_\phi u}{\pi^2} \right) \varphi_{1,2}' - \frac{9\pi^2}{10} \varphi_{1,2} \pm \frac{81\xi_0 Bl Sc_\phi}{100} u e^{-Blz} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\pi^2}{2} u - \frac{Ra}{2Pr} \left((1 + \varepsilon) \int_0^H (\theta_1 - \theta_2) dz - \int_0^H (f_1 - f_2) dz - \int_0^H (\varphi_1 - \varphi_2) dz \right) = 0 \quad (3.13)$$

ξ_0 — характеризует неоднородность концентрации тяжелой фазы в равновесии.

Оценим значение числа Больцмана. Полутолщина каналов d равна 1.5 мм, диаметр частиц порядка 10 нм, плотность железа $\rho_\phi = 7800$ кг/м³, плотность керосина $\rho = 800$ кг/м³, ускорение свободного падения 9.8 м/с², постоянная Больцмана $1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, температура порядка 300 К.

$$Bl = \frac{d(\rho_\phi - \rho)gV_0}{k_B \bar{T}}$$

$$Bl = \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot (7800 - 800) \cdot 9.8 \cdot 4\pi (10 \cdot 10^{-9})^3}{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \cong 0.013$$

В расчетах использовалось значение числа Больцмана 0.02.

В уравнениях (3.12) для концентрации частиц φ , будем пренебрегать седиментационным вкладом $Bl\varphi'$ в конвективной добавке, в силу малости этого слагаемого. В силу незначительного изменения с высотой e^{-Blz} , найдем эффективное значение этой величины, усреднив ее по длине канала

($H = 30.5$):

$$\frac{1}{H} \int_0^H e^{-Blz} dz = \frac{1 - e^{-BlH}}{HBl} \cong 0.75$$

Тогда уравнение (3.12) принимает вид аналогичный (3.10):

$$\varphi''_{1,2} \mp \frac{8.56 Sc_\phi u}{\pi^2} \varphi'_{1,2} - \frac{9\pi^2}{10} \varphi_{1,2} \pm 0,75 \frac{81\xi_0 Bl Sc_\phi}{100} u = 0 \quad (3.14)$$

Для системы уравнений (3.10), (3.11), (3.14), (3.13) сформулируем граничные условия на верхнем и нижнем концах каналов:

$$z = 0, H : \theta_1 = \theta_2, f_1 = f_2, \varphi_1 = \varphi_2, \theta'_1 = -\theta'_2, f'_1 = -f'_2, \varphi'_1 = -\varphi'_2. \quad (3.15)$$

Условия (3.15) означают, что перемычки между каналами считаются достаточно короткими и смесь, проходя соединительные участки, не успевает изменить температуру и концентрацию в результате взаимодействия со стенками [5].

3.2.2 Распределения температуры, концентрации тяжелой примеси и твердой фазы по высоте

Решение неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.10), (3.11), (3.14), (3.13) будем искать в экспоненциальной форме. Ведем обозначения для констант, связанных с корнями характеристических уравнений:

$$d = \frac{buPr + q}{2}, \gamma = \frac{buPr - q}{2}, \delta = \frac{suSc + l}{2}, \epsilon = \frac{suSc - l}{2},$$

$$\alpha = \frac{214uSc_\phi - \sqrt{(214uSc_\phi)^2 + (45\pi)^2}}{50\pi^2},$$

$$\beta = \frac{214uSc_\phi + \sqrt{(214uSc_\phi)^2 + (45\pi)^2}}{50\pi^2},$$

$$R = \frac{27\xi_0 Sc_\phi Bl}{40\pi^2} u.$$

Здесь $q = \sqrt{(buPr)^2 + a}$; $a = \pi^2/2$; $l = \sqrt{(suSc)^2 + g}$; $g = 9\pi^2/10$; $b = 32/(9\pi^2)$; $s = 0.434/\pi^2$.

При спивании общих решений для левого и правого каналов в зависимости от вертикальной координаты z для θ , f , и φ получаем следующие распределения:

$$\theta_1 = \frac{Pru}{aqH} \left(\frac{2\gamma e^{2dz}}{e^{2dH} + 1} - \frac{2de^{2\gamma z}}{e^{2\gamma H} + 1} + q \right), \quad \theta_2 = -\theta_1(H - z); \quad (3.16)$$

$$f_1 = \frac{Ae^{2\delta z}}{e^{2\delta H} + 1} + \frac{Be^{2\epsilon z}}{e^{2\epsilon H} + 1} + \frac{\xi e^{2dz}}{e^{2dH} + 1} + \frac{\eta e^{2\gamma z}}{e^{2\gamma H} + 1} + \chi, \quad f_2 = -f_1(H - z); \quad (3.17)$$

$$\varphi_1 = \frac{2R}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta e^{\alpha z}}{e^{\alpha H} + 1} - \frac{\alpha e^{\beta z}}{e^{2\beta H} + 1} + 1 \right), \quad \varphi_2 = -\varphi_1(H - z); \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ra(1 + \varepsilon)u}{Ha^2q} (4d^2 \operatorname{th}(\gamma H) - 4\gamma^2 \operatorname{th}(dH) + Haq) - \\ & - \frac{Ra}{2Pr} \left(\frac{A}{\delta} \operatorname{th}(2\delta H) + \frac{B}{\epsilon} \operatorname{th}(2\epsilon H) + \frac{\xi}{d} \operatorname{th}(2dH) + \frac{\eta}{\gamma} \operatorname{th}(2\gamma H) + 2\chi H \right) - \\ & - \frac{4R}{2Pr\alpha(\alpha - \beta)} (\beta^2 \operatorname{th}(\alpha H/2) - \alpha^2 \operatorname{th}(\beta H/2)) - au = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В (3.17), (3.19) константы имеют следующие значения:

$$\xi = \frac{0.81\varepsilon\gamma Scu(\pi^2 - 8d^2)}{aqH(4d - 4sdScu - g)}, \quad \eta = -\frac{0.81\varepsilon dScu(\pi^2 - 8\gamma^2)}{aqH(4\gamma^2 - 4s\gamma Scu - g)}, \quad \chi = -\frac{0.45\epsilon Scu}{aH}.$$

Амплитуды A и B выражаются через константы ξ, η, χ :

$$A = [\eta(\epsilon - \gamma) + \xi(\epsilon - d) + 2\chi\epsilon]/l, \quad B = [\eta(\delta - \gamma) + \xi(\delta - d) + 2\chi\delta].$$

Соотношение (3.19) определяет зависимость амплитуды скорости u от числа Рэлея. В предельном случае, при $u \rightarrow 0$, для произвольных значений термодиффузационного параметра, чисел Шмидта и Прандтля выражение

для критического числа Рэлея имеет вид:

$$R_c = \frac{\pi^4}{4} \left[(1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{z_1} \operatorname{th}(z_1) \right) + \frac{\varepsilon Sc}{Pr} \left(0.45 - \frac{1}{z_2} \operatorname{th}(z_2) \right) \right]^{-1}, \quad (3.20)$$

где $z_1 = \pi H / (2\sqrt{2})$, а $z_2 = 3\sqrt{10}\pi H / 20$. Значение критического числа Рэлея для трехкомпонентных жидкких смесей в точности совпадает со значением для бинарных смесей. Седиментация, в рамках данной модели, не вносит вклад в критическое число Рэлея.

3.2.3 Амплитудные кривые

На рис. 3.1 представлены зависимости амплитуды скорости от числа Рэлея для положительной термодиффузии. На левом рисунке построены кривые при различных значениях числа Больцмана. Рост числа Больцмана означает увеличение скорости седиментации частиц. Видно, что при учете седиментации, с ростом числа Больцмана, увеличивается амплитуда ско-

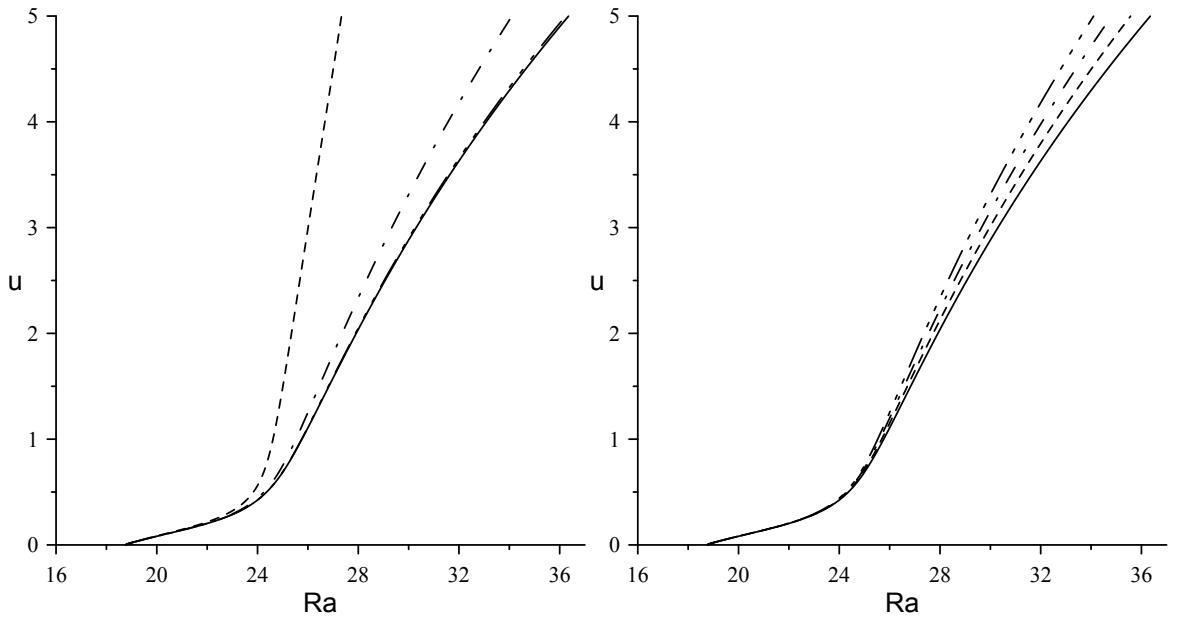


Рис. 3.1. Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея для положительной термодиффузии: левый рисунок — при различных значениях числа Bl ($Sc_\phi = 3000, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0.01$): — без учета седиментации, - - $Bl = 0.1$, - · - $Bl = 0.02$, - · · - $Bl = 0.001$; правый рисунок — при различных значениях числа Sc_ϕ ($Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0.01$): — без учета седиментации, - - $Sc_\phi = 1000$, - · - $Sc_\phi = 2000$, - · · - $Sc_\phi = 3000$

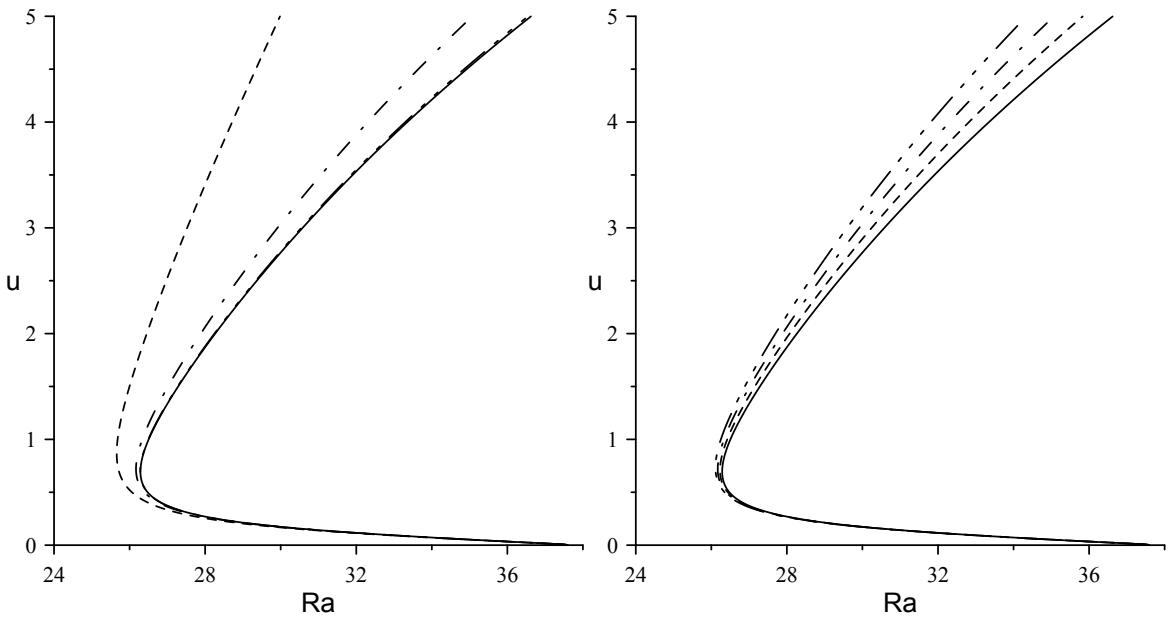


Рис. 3.2. Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея для отрицательной термодиффузии: левый рисунок — при различных значениях числа Bl ($Sc_\phi = 3000, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = -0.01$): — без учета седиментации, $-- Bl = 0.1, -\cdot- Bl = 0.02, -\cdots Bl = 0.001$; правый рисунок — при различных значениях числа Sc_ϕ ($Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = -0.01$): — без учета седиментации, $-- Sc_\phi = 1000, -\cdot- Sc_\phi = 2000, -\cdots Sc_\phi = 3000$

ности. Рост амплитуды, вероятно, связан с тем, что в канале с подъемным течением, из элемента смеси будут утекать твердые частицы, ввиду действия на них сил седиментации, делая тем самым элемент феррожидкости легче, в результате увеличивается подъемная сила. В канале с опускным течением, за счет седиментации увеличивается скорость оседания частиц, что так же должно приводить к росту амплитуды скорости элемента смеси.

На правом рисунке построены кривые при различных значениях числа Шмидта для твердых частиц. Рост числа Шмидта приводит к увеличению амплитуды скорости.

На рис. 3.2 представлены зависимости амплитуды скорости от числа Рэлея для отрицательной термодиффузии. На левом рисунке построены кривые при различных значениях числа Больцмана. На правом рисунке построены кривые при различных значениях числа Шмидта для твердых частиц. Для отрицательной термодиффузии увеличение чисел Больцмана и Шмидта так же приводит к увеличению амплитуды скорости течения.

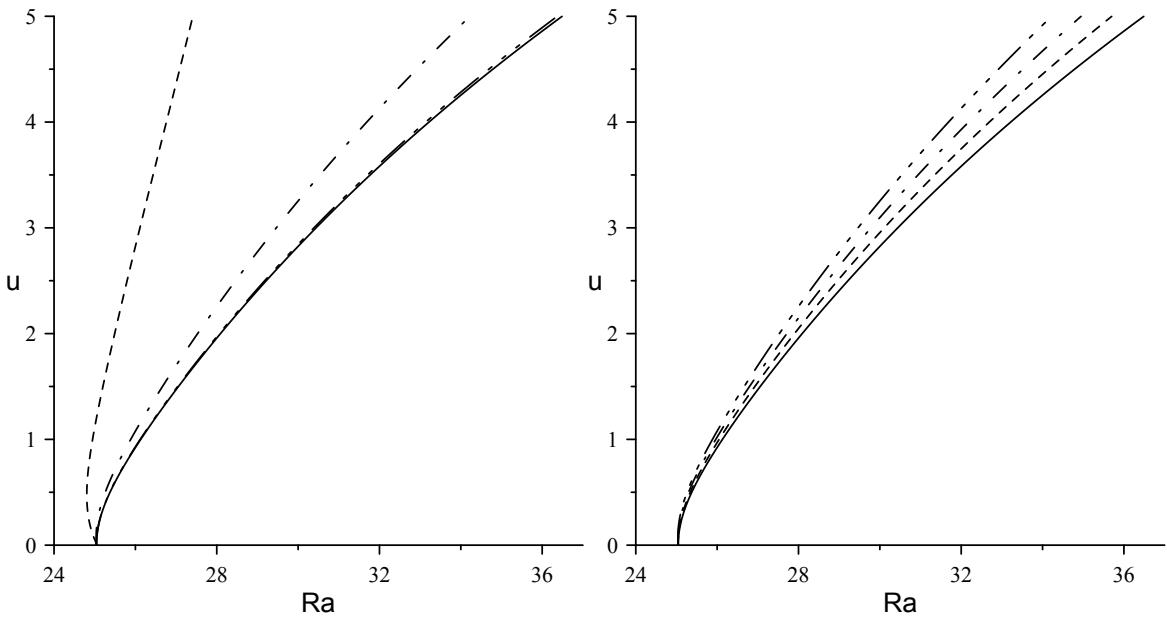


Рис. 3.3. Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея без термодиффузии: левый рисунок — при различных значениях числа Bl ($Sc_\phi = 2000, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0$): — без учета седиментации, $-- Bl = 0.1$, $--\cdot Bl = 0.02$, $--\cdots Bl = 0.001$; правый рисунок — при различных значениях числа Sc_ϕ ($Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0$): — без учета седиментации, $-- Sc_\phi = 1000$, $--\cdot Sc_\phi = 2000$, $--\cdots Sc_\phi = 3000$

Наблюдается жесткое возбуждение конвекции.

На рис. 3.3 представлены зависимости амплитуды скорости от числа Рэлея без термодиффузии. На левом рисунке построены кривые при различных значениях числа Больцмана. На правом рисунке построены кривые при различных значениях числа Шмидта для твердых частиц. Увеличение чисел Больцмана и Шмидта приводит к росту амплитуды скорости течения. При больших значениях числа Больцмана наблюдается жесткое возбуждение конвекции.

3.3 Численное решение нестационарной задачи

3.3.1 Решение нестационарной задачи

Уравнения (3.5), (2.7), (2.8), (2.9) решаются численно методом конечных разностей в сочетании с процедурой Галеркина – Канторовича по вертикальной координате. В первом приближении распределение температуры

может быть аппроксимировано двумя гармоническими функциями

$$T = T_1(x, y, t) \sin(\pi z/H) + T_2(x, y, t) \cos(\pi z/H). \quad (3.21)$$

Поля F и ϕ представим в виде разложений

$$F = F_1(x, y, t) + F_2(x, y, t) \cos(\pi z/H) + F_3(x, y, t) \cos(2\pi z/H), \quad (3.22)$$

$$\phi = \Phi_1(x, y, t) + \Phi_2(x, y, t) \cos(\pi z/H) + \Phi_3(x, y, t) \cos(2\pi z/H). \quad (3.23)$$

Подставив разложения T , F и ϕ в исходные уравнения (3.5), (2.7), (2.8), (2.9), после применения процедуры Галеркина – Канторовича, получим амплитудные уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{2RaH}{Pr\pi}((1+\varepsilon)T_1 - \frac{\pi}{2}F_1 - \frac{\pi}{2}\Phi_1) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\pi}{H}uT_2 = \frac{1}{Pr}\Delta_1 T_1 - \frac{\pi^2}{PrH^2}T_1 + \frac{4}{\pi H}u \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\pi}{H}uT_1 = \frac{1}{Pr}\Delta_1 T_2 - \frac{\pi^2}{PrH^2}T_2 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} - \frac{2}{H}uF_2 = \frac{1}{Sc}\Delta_1 F_1 - \frac{2\varepsilon}{\pi Pr}\Delta_1 T_1 - \frac{2\pi\varepsilon}{PrH^2}T_1 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{16}{3H}uF_3 = \frac{1}{Sc}\Delta_1 F_2 + \frac{\varepsilon}{Pr}\Delta_1 T_2 - \frac{\pi^2}{ScH^2}F_2 - \frac{\pi^2\varepsilon}{PrH^2}T_2 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{4}{3H}uF_2 = \frac{1}{Sc}\Delta_1 F_3 - \frac{4\varepsilon}{3\pi Pr}\Delta_1 T_1 - \frac{4\pi^2}{ScH^2}F_3 + \frac{4\pi\varepsilon}{3PrH^2}T_1 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{2}{H}u\Phi_2 = \frac{1}{Sc_\phi}\Delta_1 \Phi_1 - \frac{2Bl}{Sc_\phi H}\Phi_2 + \frac{\xi_0}{H}u(1 - e^{-BlH}) \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{16}{3H} u \Phi_3 = \frac{1}{Sc_\phi} \Delta_1 \Phi_2 - \frac{\pi^2}{Sc_\phi H^2} \Phi_2 - \frac{16Bl}{3Sc_\phi H} \Phi_3 + \frac{2\xi_0}{H} u \frac{(1 + e^{-BlH})}{(1 + \frac{\pi^2}{Bl^2 H^2})} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + \frac{4}{3H} u \Phi_2 = \frac{1}{Sc_\phi} \Delta_1 \Phi_3 - \frac{4\pi^2}{Sc_\phi H^2} \Phi_3 + \frac{4Bl}{3Sc_\phi H} \Phi_2 + \frac{2\xi_0}{H} u \frac{(1 - e^{-BlH})}{(1 + \frac{4\pi^2}{Bl^2 H^2})} \quad (3.32)$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.33)$$

Уравнения (3.24) — (3.32), совместно с граничными условиями

$$x = 0, -2; \quad y = \pm 1 : \quad u = 0, \quad T_1 = T_2 = 0, \quad F'_1 = F'_2 = F'_3 = 0,$$

$$\Phi'_1 = \Phi'_2 = \Phi'_3 = 0,$$

решались численно, методом конечных разностей. Алгоритм был разработан в соответствии с явной схемой решения уравнений и реализован на языке программирования FORTRAN-90. При аппроксимации производных по времени и производных по координатам использовались, соответственно, односторонние и центральные разности. Рабочее количество узлов в сечении канала было равно 33×33 [5].

3.3.2 Результаты численного счета

На рис. 3.4 представлены зависимости максимума амплитуды θ от времени, для значений $\xi_0 = 10^{-5}, 10^{-4}$, при значении числа $Bl = 0.1$. Аналогичные зависимости представлены на рис. 3.5 для значения числа $Bl = 0.02$. В ходе расчетов использовались значения безразмерных параметров $Ra = 33$, $Sc = 100$, $Pr = 7$, $Sc_\phi = 500$, $\varepsilon = 0.04$. При значении числа $Ra = 33$ наблюдаются перебросовые колебания.

Механизм перебросовых колебаний для трехкомпонентных жидкостей смесей в системе связанных каналов, вероятно, заключается в том, что в канале с подъемным течением за счет термодиффузии со временем накапливается тяжелая молекулярная примесь, в то время как в канал с опускным движением обедняется примесью.

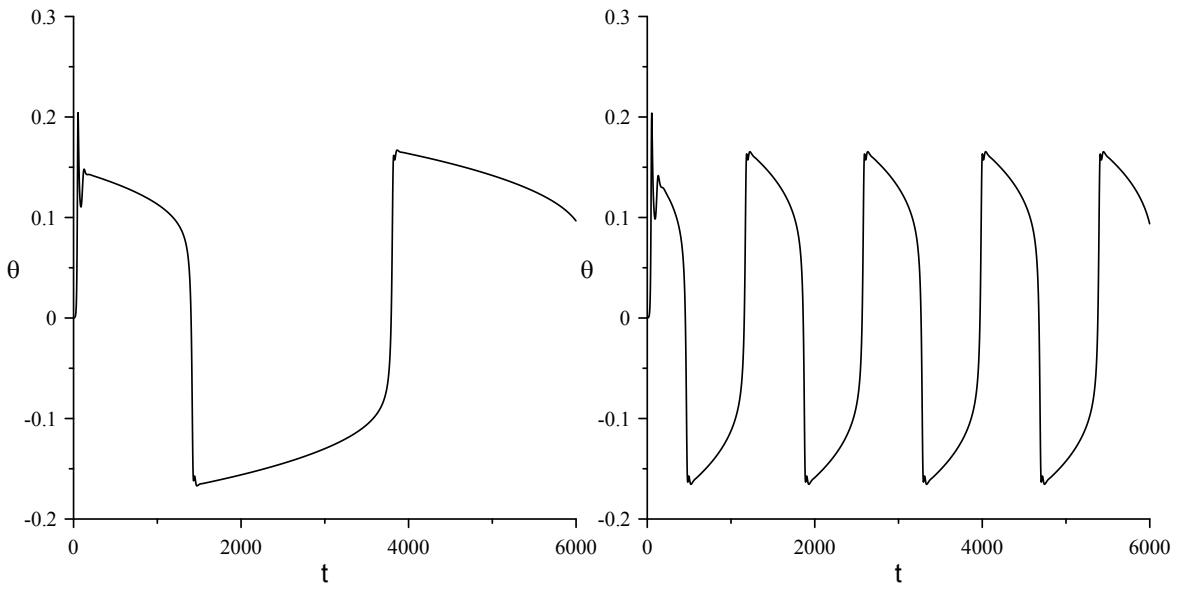


Рис. 3.4. Временная зависимость амплитуды θ ($Bl = 0.1$, $Ra = 33$) : левый график — $\xi_0 = 10^{-5}$, правый график — $\xi_0 = 10^{-4}$

Из рис. 3.4, рис. 3.5 видно, что с ростом неоднородности равновесного распределения концентрации ξ_0 , период перебросовых колебаний уменьшается. Уменьшение периода колебаний связано с тем, что при увеличении неоднородности концентрации по высоте, скорость нарастания количества

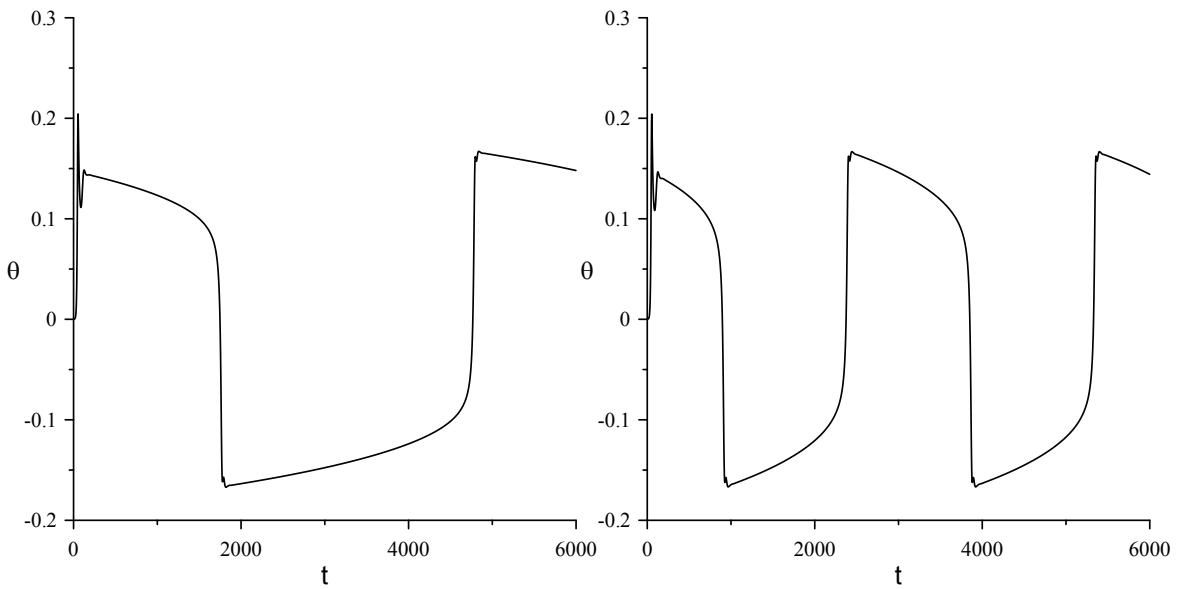


Рис. 3.5. Временная зависимость амплитуды θ ($Bl = 0.02$, $Ra = 33$) : левый график — $\xi_0 = 10^{-5}$, правый график — $\xi_0 = 10^{-4}$

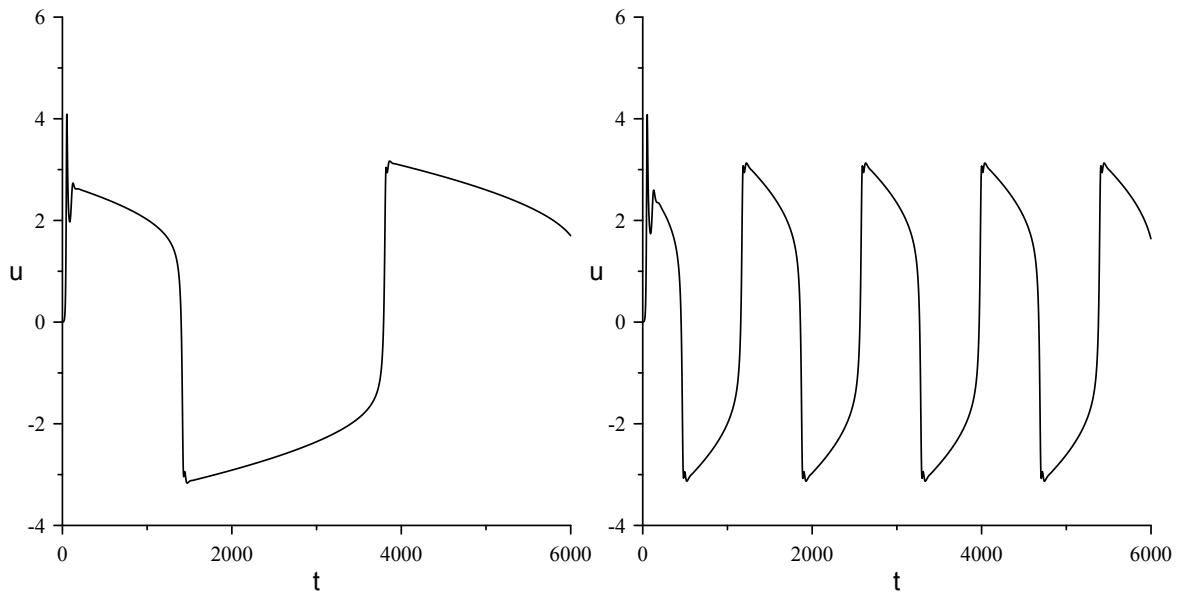


Рис. 3.6. Временная зависимость скорости ($Bl = 0.1$, $Ra = 33$) : левый график — $\xi_0 = 10^{-5}$, правый график — $\xi_0 = 10^{-4}$

частиц твердой фазы в канале с подъемным течением увеличивается. Рост числа Больцмана так же как амплитуды ξ_0 приводит к увеличению неоднородности распределения концентрации твердых частиц в канале, а сле-

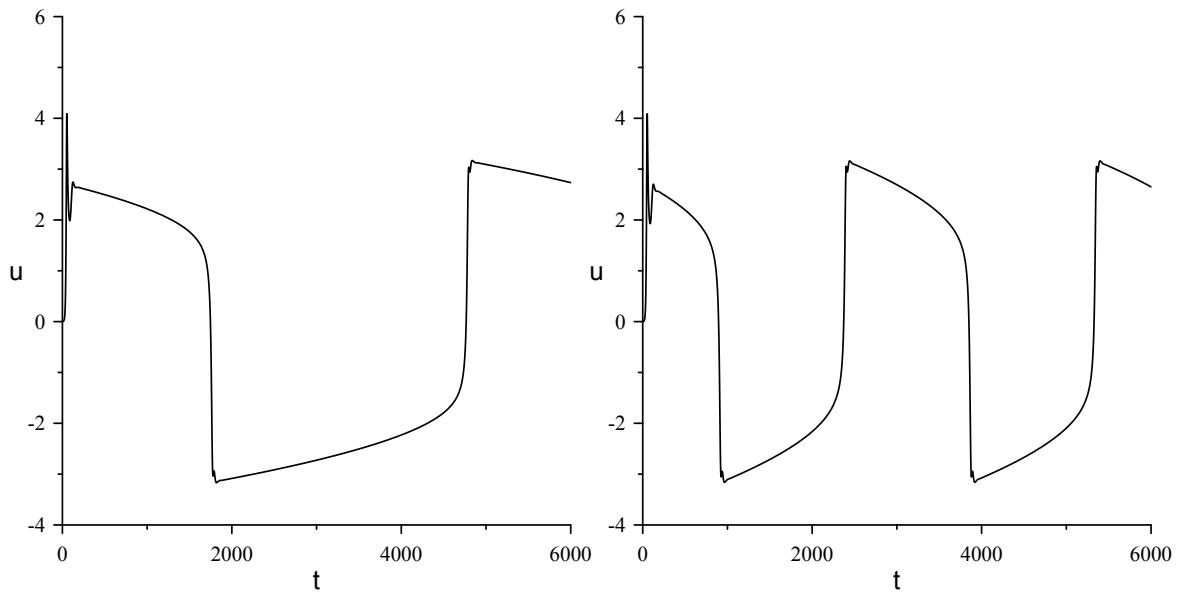


Рис. 3.7. Временная зависимость скорости ($Bl = 0.02$, $Ra = 33$) : левый график — $\xi_0 = 10^{-5}$, правый график — $\xi_0 = 10^{-4}$

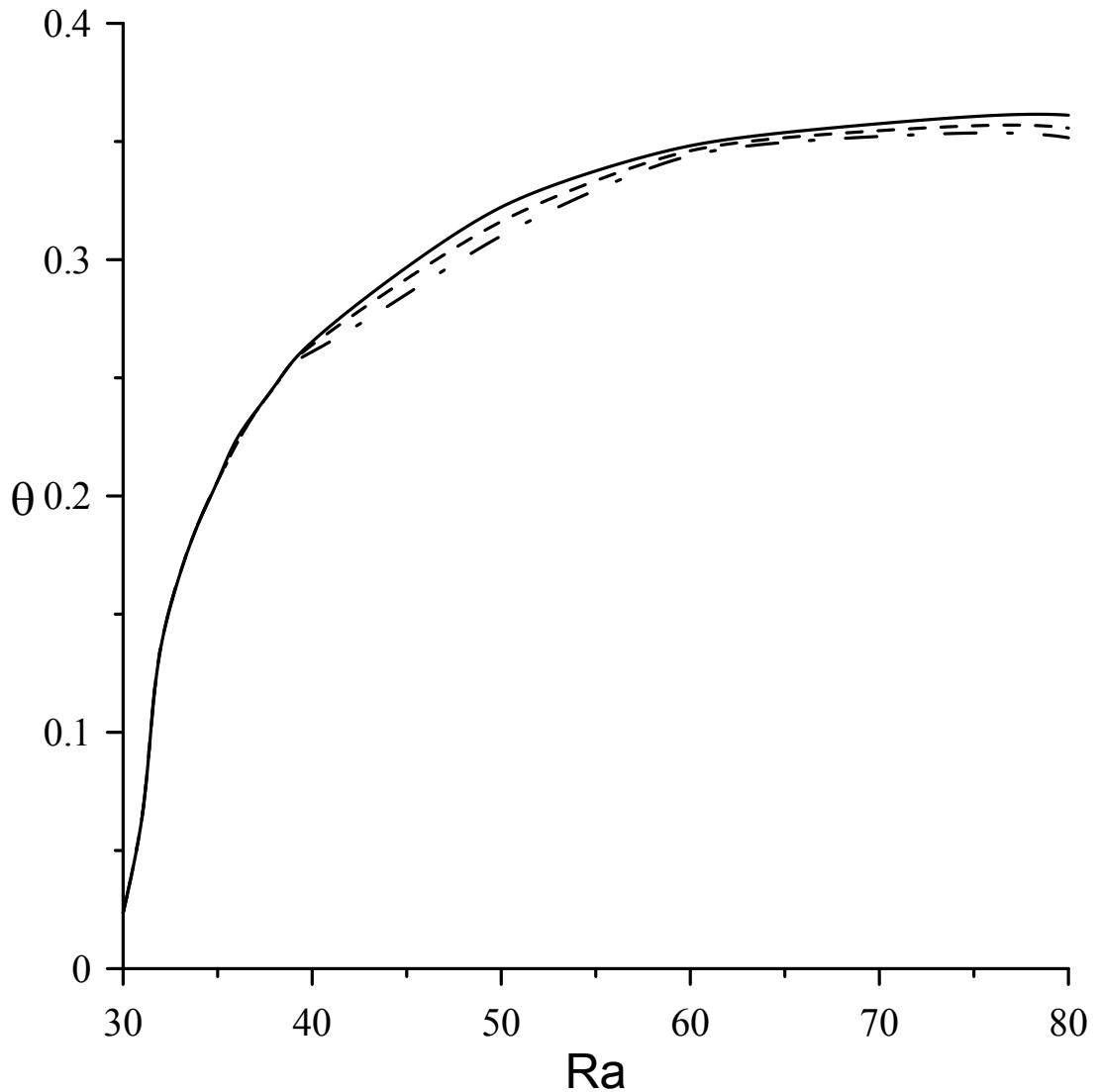


Рис. 3.8. Зависимость амплитуды θ от числа Рэлея ($Bl = 0.02$) с применением сплайн интерполяции: — $\xi_0 = 10^{-4}$, - - $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, - · - $\xi_0 = 10^{-5}$

довательно период перебросовых колебаний должен уменьшаться. Сравнивая рис. 3.4 и рис. 3.5 легко в этом убедиться. Так же следует заметить, что изменение неоднородности концентрации не приводит к заметному изменению амплитуды колебаний в области малых надкритичностей.

На рис. 3.6 представлены временные зависимости амплитуды скорости, для значений $\xi_0 = 10^{-5}, 10^{-4}$. В ходе расчетов использовались значения безразмерных параметров $Ra = 33, Sc = 100, Pr = 7, Sc_\phi = 500, \varepsilon = 0.04$. Значение числа $Bl = 0.1$. На рис. 3.7 представлены аналогичные зави-

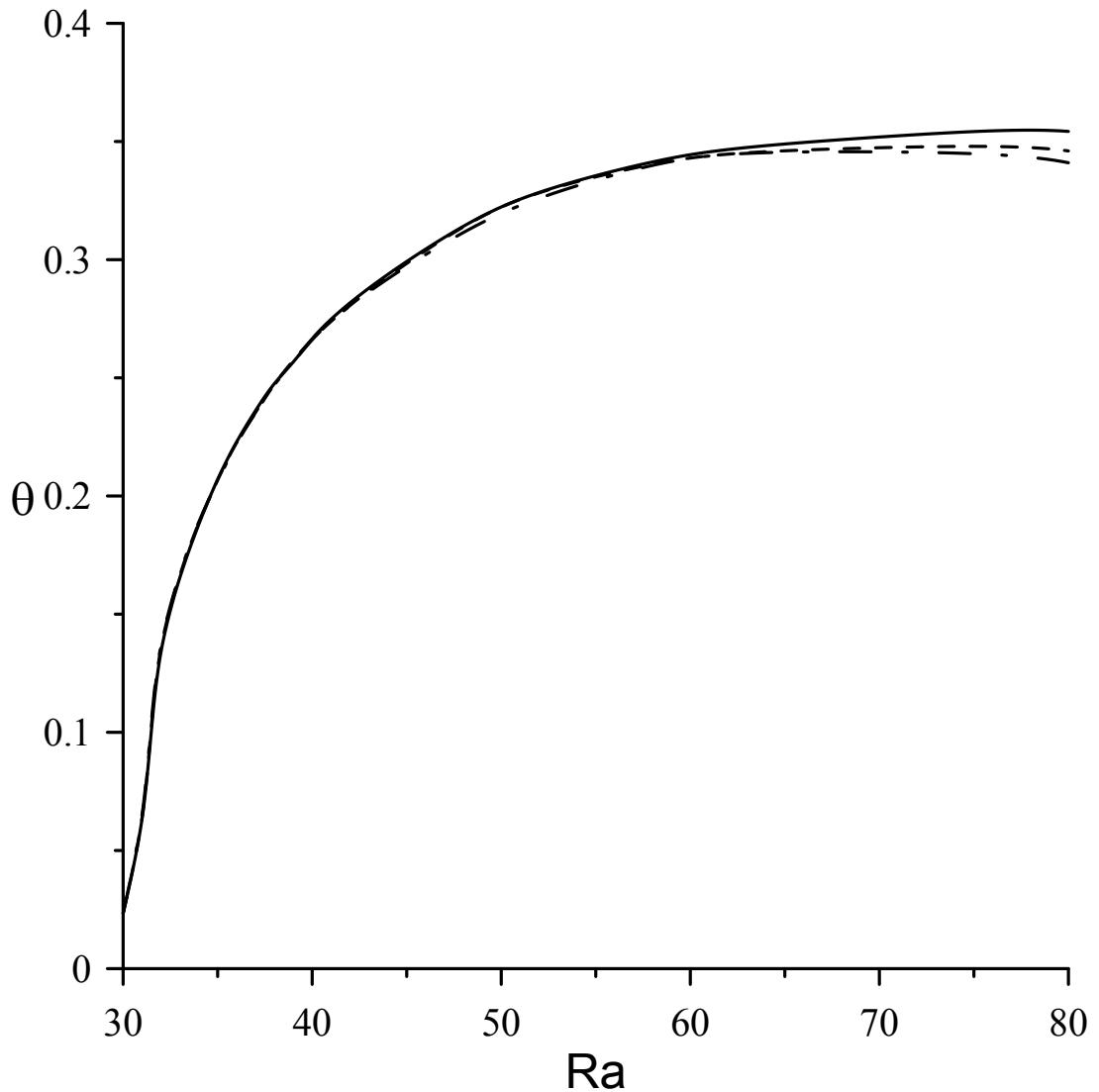


Рис. 3.9. Зависимость амплитуды θ от числа Рэлея ($Bl = 0.1$) с применением сплайн интерполяции: — $\xi_0 = 10^{-4}$, - - $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, - · - $\xi_0 = 10^{-5}$

симости для значения числа $Bl = 0.02$. Очевидно, что амплитуда скорости u должна меняться подобно амплитуде θ . Видно, что при $Ra = 33$ наблюдаются перебросовые колебания. С ростом неоднородности концентрации твердых частиц период колебаний уменьшается, амплитуда колебаний заметно не меняется.

На рис. 3.8, рис. 3.9 представлены зависимости максимума амплитуды θ от числа Ra , для значений неоднородности концентрации $\xi_0 = 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-5}$, и числа Больцмана 0.02 и 0.1 соответственно. При построении

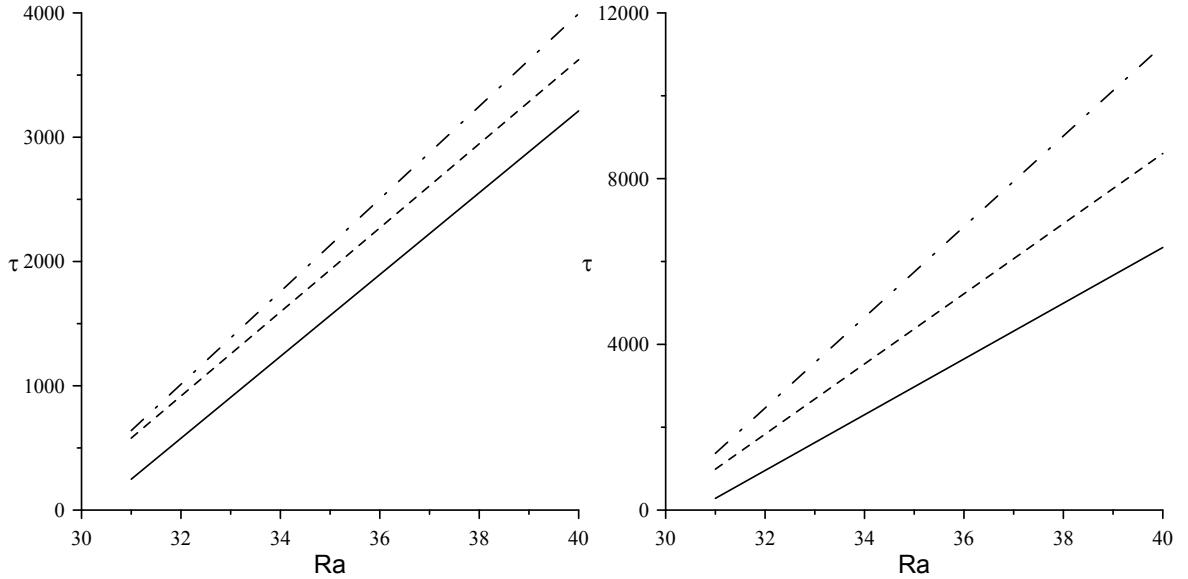


Рис. 3.10. Зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Шмидта ($Pr = 7, \xi_0 = 10^{-4}$) (Выполнена линейная интерполяция): левый график — $Bl = 0.1$; правый график — $Bl = 0.02$; — $Sc = 50$, - - $Sc = 100$, — · — $Sc = 300$

кривых использовалась сплайн интерполяция. При малых надкритичностях седиментация слабо сказывается на амплитуде течения. При увеличении неоднородности концентрации ξ_0 на порядок, значение амплитуды меняется в четвертой значащей цифре ($Ra = 30$). Рост неоднородности распределения взвешенных частиц приводит к увеличению амплитуды θ . Это становится заметно в области больших надкритичностей. При значении числа $Ra = 80$ изменение происходит уже во второй значащей цифре. Рост числа Больцмана так же увеличивает неоднородность концентрации, а следовательно приводит к уменьшению амплитуды θ .

На рис. 3.10 представлена зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Шмидта, при различных числах Больцмана. Расчеты проводились при $Pr = 7, \xi_0 = 10^{-4}, Bl = 0.1, 0.02$. Видно, что рост числа Больцмана приводит к уменьшению периода перебросовых колебаний. Это объясняется ростом неоднородности в распределении концентрации твердых частиц вдоль вертикальной оси. Рост числа Шмидта приводит к увеличению периода колебаний. Увеличение числа Шмидта физически означает усиление вязкого механизма переноса вещества, по отношению к диффузионному. Очевидно, что это должно приводить к уве-

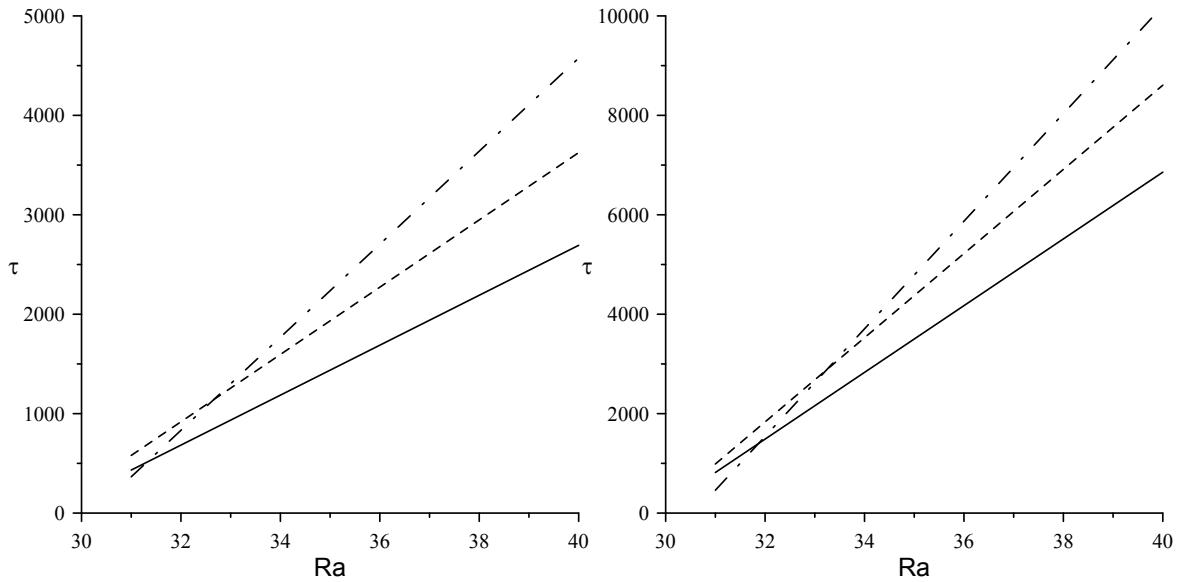


Рис. 3.11. Зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Прандтля ($Sc = 100, \xi_0 = 10^{-4}$) (Выполнена линейная интерполяция): левый график — $Bl = 0.1$; правый график — $Bl = 0.02$; — $Pr = 5$, - - $Pr = 7$, - · - $Pr = 9$

личению периода колебаний.

На рис. 3.11 представлена зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Прандтля, при различных числах Больцмана. Расчеты проводились при $Sc = 7, \xi_0 = 10^{-4}, Bl = 0.1, 0.02$. Видно, что рост числа Больцмана приводит к уменьшению периода колебаний. Рост числа Прандтля приводит к увеличению периода колебаний. Увеличение числа Прандтля физически означает усиление вязкого механизма переноса вещества, по отношению к теплопроводному. Это должно приводить к увеличению периода колебаний.

На рис. 3.12, рис. 3.13 представлены зависимости максимума амплитуды θ от времени для положительной и отрицательной термодиффузии соответственно. В ходе расчетов использовались значения безразмерных параметров $Bl = 0.1, Sc = 100, Pr = 7, Ra = 36$. Значение термодиффузионного параметра для положительной термодиффузии равнялось 0.04, для отрицательной — 0.04. Неоднородность концентрации для положительной термодиффузии варьировалась от 10^{-4} до 10^{-5} , для отрицательной от 10^{-3} до $5 \cdot 10^{-5}$.

В модели бинарных смесей, при отрицательной термодиффузии на-

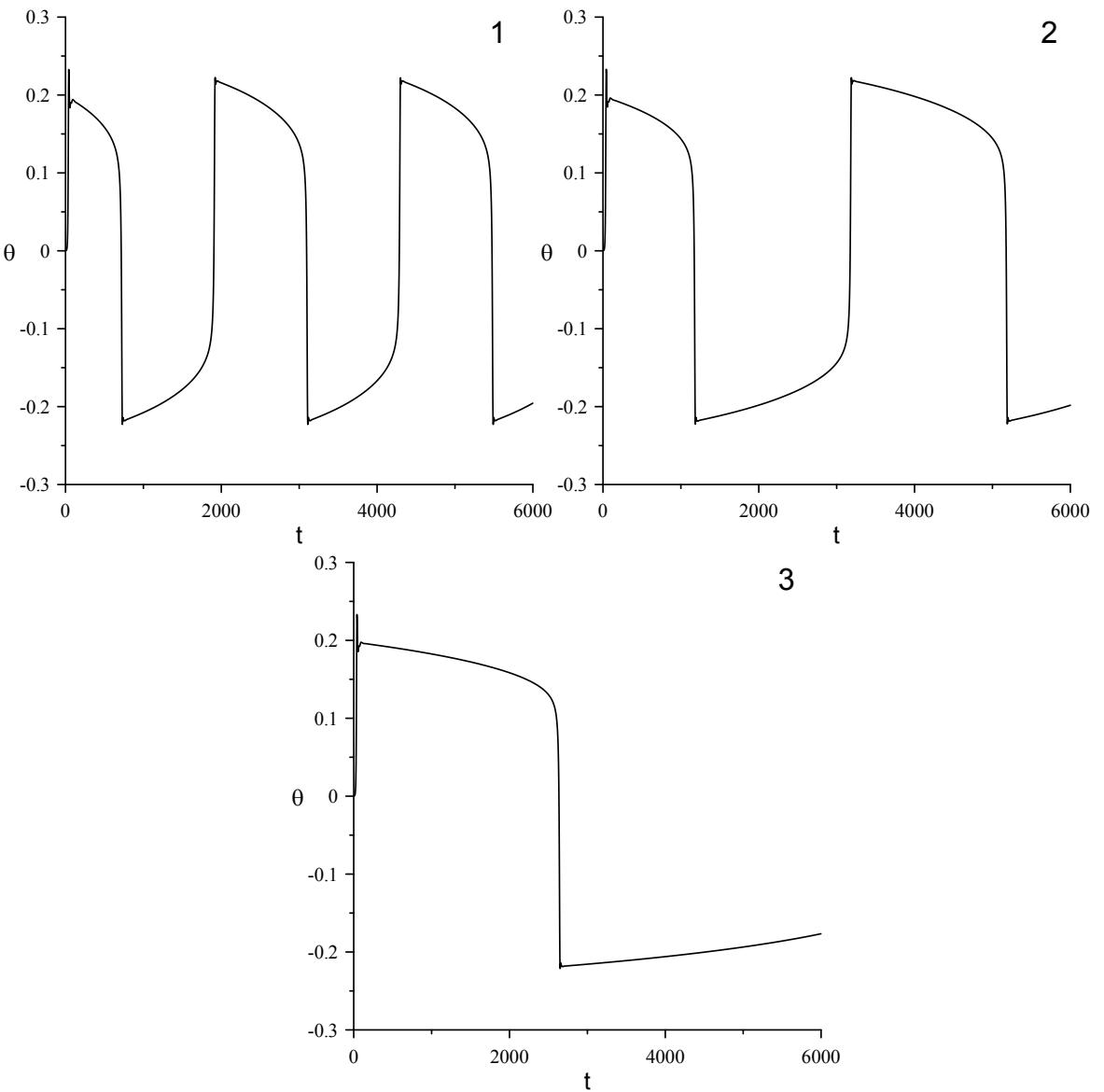


Рис. 3.12. Зависимость амплитуды θ от времени, для положительной термодиффузии, при различных значениях числа ξ_0 ($Bl = 0.1, Sc = 100, Pr = 7, Ra = 36, \varepsilon = 0.04$), график 1 — $\xi_0 = 10^{-4}$, 2 — $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, 3 — $\xi_0 = 10^{-5}$

блюдались лишь стационарные режимы. При добавлении в модель твердой фазы и учете ее седиментации, при отрицательной термодиффузии наблюдаются перебросовые колебания. Это означает, что в эксперименте по характеру движения затруднительно определить знак термодиффузии. Так же из рис. 3.12, рис. 3.13 видно, что как для положительной, так и для отрицательной термодиффузии, при уменьшении неоднородности концентрации ξ_0 период перебросовых колебаний увеличивается.

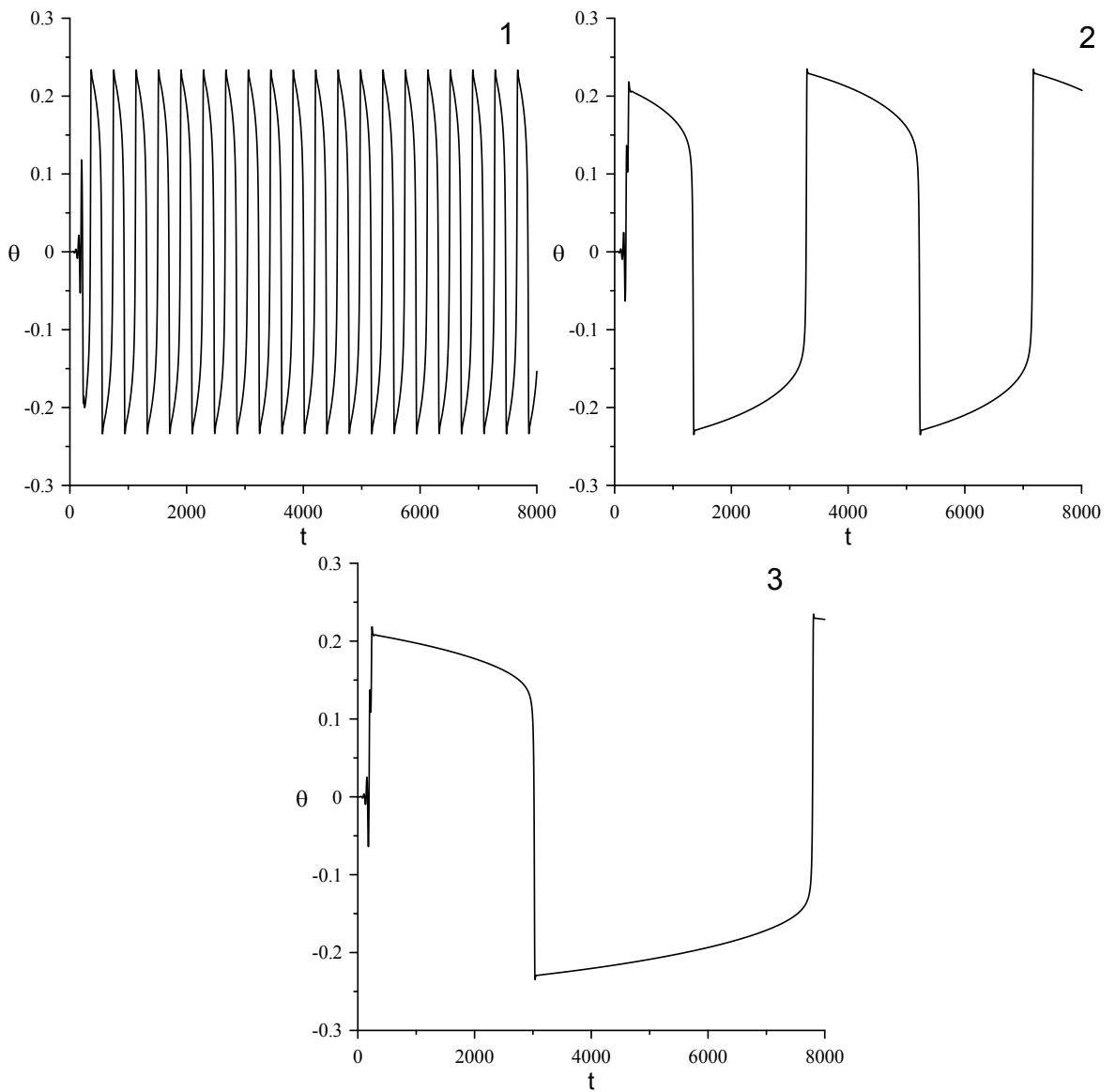


Рис. 3.13. Зависимость амплитуды θ от времени, для отрицательной термодиффузии, при различных значениях числа ξ_0 ($Bl = 0.1, Sc = 100, Pr = 7, Ra = 36, \varepsilon = -0.04$), график 1 — $\xi_0 = 10^{-3}$, 2 — $\xi_0 = 10^{-4}$, 3 — $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$

4 Заключение

В работе решена задача о тепловой конвекции смеси, представляющей собой коллоидный раствор на основе бинарной молекулярной жидкости в связанных каналах при подогреве снизу. Получено аналитическое решение стационарной задачи в приближении прямолинейных траекторий. Численно методом конечных разностей проведено моделирование нестационарных режимов. В надкритической области наблюдались перебросовые колебания. Исследовано влияние изменения различных параметров на характер течения. Объяснен механизм перебросовых колебаний.

Результаты расчетов показывают, что при увеличении неоднородности распределения концентрации твердых частиц по вертикали, увеличивается период и амплитуда перебросовых колебаний. Показано, что при усилении вязкого механизма переноса вещества по отношению к диффузионному и теплопроводному увеличивается период перебросовых колебаний. Обнаружено возникновение перебросовых колебаний при отрицательной термо-диффузии.

5 Список литературы

- [1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. – 393 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики, т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
- [3] Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН, МЖГ, № 5, 2010, с. 41-48.
- [4] Глухов А.Ф., Демин В.А., Мальгачёва И.А., Попов Е.А. Тепловая конвекция ферроожидкости в узких каналах // Изв. ТПУ, № 4, 2012, Энергетика, с. 41–45.
- [5] Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. О разделении смесей в связанных каналах // ПМТФ, 2009, т. 50, № 1, с. 68-77.
- [6] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. - М.: Наука. Физ.-мат. лит., 1989. – 320 с.
- [7] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990, – 228 с.
- [8] Бартеев О. В. Современный Фортран. - 3-е изд., доп. и перераб. - М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 449 с.
- [9] Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
- [10] Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977. – 656 с.
- [11] Самарский Л. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978. – 592 с.
- [12] Глухов А.Ф. Экспериментальное исследование тепловой конвекции в условиях гравитационного расслоения // Канд. диссерт., Перм. гос. ун-т, Пермь, 1995. – 140 с.
- [13] Глухов А.Ф., Демин В.А. Экспериментальное и теоретическое исследование конвекции бинарной смеси в связанных каналах // Вестник Пермского университета, Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, Сер. Физика, Вып. 1, 2006, с. 15-23.
- [14] Глухов А.Ф., Демин В.А. Тепловая конвекция бинарной смеси в

связанных каналах // Четвертая Российская национальная конференция по теплообмену, Московский энергетический институт, Труды конф., т. 3, Москва, 2006, с. 85-88.

[15] Глухов А.Ф., Демин В.А. Нелинейные колебания бинарной смеси в связанных каналах при положительном эффекте Соре // Вестник Пермского университета, Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, Сер. Физика, Вып. 1(6), 2007, с. 3-10.

[16] Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Разделение смесей и тепломассоперенос в связанных каналах // Письма в ЖТФ, т. 34. Вып. 17, 2008, с. 45-51.

[17] Глухов А.Ф., Демин В.А. Тепловая конвекция бинарных смесей в вертикальных слоях и каналах при подогреве снизу // Вестник Пермского университета, Пермь Изд-во Пермск. ун-та, Сер. Физика, Вып. 1(27), 2009, с. 16-25.

[18] Shliomis M.I., Smorodin B.L. Onset of convection in colloids stratified by gravity // Phys. Rev. E 71, 036312, 2005. – 6 p.