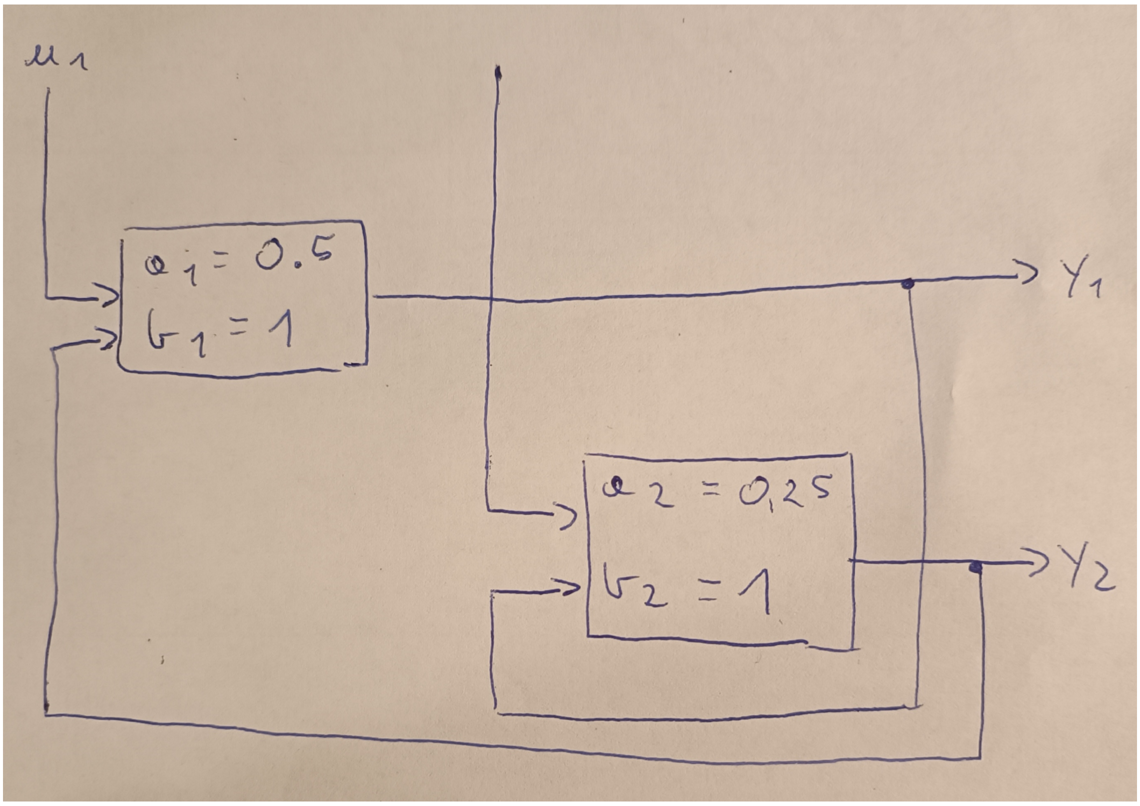
Sterowanie Procesami Ciągłymi
Laboratoria
10.01.2021

Sprawozdanie 6
Sterowanie optymalne, wielowarstwowe

Autor
Mikołaj Zapotoczny
(252939)

Prowadzący
mgr inż. Paweł Mielcarek

1 Schemat



$$H = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline 0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0.25 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$u = \begin{array}{|c|}\hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \end{array}$$

$$y = \begin{array}{|c|}\hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline \end{array}$$

Kryterium kosztów:

$$Q(u_1, u_2) = (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2$$

2 Optymalizacja działania systemu bez ograniczeń na zasoby.

2.1 Globalnie

$$y = K * u$$
$$u = K^{-1} * y_o$$
$$K = (I - A * H)^{-1} * B$$

```
clear all;
close all;

H=[0,1;1,0];
A=[0.5,0;0,0.25];
B=eye(2);
I=eye(2);

y1=1;
y2=2;
y=[y1;y2];

K=(I-A*H)^(-1) *B;

u=(K)^(-1) *y;
```

Uzyskujemy wektor u:

$$u = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1.75 \\ \hline \end{array}$$

2.2 Lokalnie

$$u_i = \frac{y_{i,z} - a_i * H_i * y_z}{b_i}$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

u11=(y(1)-A(1,:).*(H(1,:)*y))./B(1,:);
u22=(y(2)-A(2,:).*(H(2,:)*y))./B(2,:);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Uzyskujemy wektor u:

$$u = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1.75 \\ \hline \end{array}$$

2.3 Wnioski

Widzimy, że za pomocą obu metod otrzymujemy te same wyniki. Można wyciągnąć wniosek, że korzystanie z jednej lub drugiej metody wynika głównie z przyczyn technicznych i z prostoty zapisu. Ponadto nasza optymalizacja nie mieści się w ograniczeniach dla zadania drugiego, co sprawia, że trzeba liczyć dalej.

3 Optymalizacja działania systemu z ograniczeniami

3.1 Skrypt Matlab'a

```
clear all;
close all;

H=[0,1;1,0];
A=[0.5,0;0,0.25];
B=eye(2);
I=eye(2);

y1=1;
y2=2;

y=[y1;y2];
%Q=(y1-1)^2+(y2-2)^2;

K=(I-A*H)^(-1) *B;

u=(K)^(-1) *y;


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

u11=(y(1)-A(1,:).*(H(1,:)*y))./B(1,:);
u22=(y(2)-A(2,:).*(H(2,:)*y))./B(2,:);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

lambda=2;
a=K(1)*K(3)+K(2)*K(4);
b=K(3)*K(3)+K(4)*K(4)+lambda;
c=K(1)*K(1)+K(2)*K(2)+lambda;

u2=(c*(K(3)+2*K(4)-a*K(1)+2*K(2)))/(c*b-a*a);
u1=(-b*u2+K(3)+2*K(4))/(a);

H1=-8*u1*u1*(K(3)*K(3)+K(4)*K(4)+lambda);
H2=-8*u2*u2*(K(1)*K(1)+K(2)*K(2)+lambda);
H3=16*u1*u2*(K(1)*K(3)+K(2)*K(1));

detHesjan=H1+H2+H3;
```

3.2 Rozwiązanie zadania

$$Q(u_1, u_2) = (y_1 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2 \qquad u_1^2 + u_2^2 = 1$$

$$y_1 = k_{11} u_1 + k_{12} u_2 \qquad (u_1^2 + u_2^2 - 1) = 0$$

$$y = Ku$$

$$y_2 = k_{21} u_1 + k_{22} u_2 \qquad G(u_1, u_2)$$

$$Q(u_1, u_2) + \lambda G(u_1, u_2) = L(u_1, u_2, \lambda)$$

Lagranżjan

Metoda [illegible]

teraz trzeba zadanie z ograniczeniami sprowadzić do zadania bez ograniczeń

Hesjan obrzeżony

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial G}{\partial u_2} \\ \frac{\partial G}{\partial u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 u_1} \\ \frac{\partial G}{\partial u_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2 u_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} \end{vmatrix}$$

$$L = (k_{11} u_1 + k_{12} u_2 - 1)^2 + (k_{21} u_1 + k_{22} u_2 - 2)^2 + \lambda (u_1^2 + u_2^2 - 1)$$

$$L = (k_{11}^2 + k_{21}^2 + \lambda) u_1^2 + (-2k_{11} - 4k_{21}) u_1 + (k_{12}^2 + k_{22}^2 + \lambda) u_2^2 +$$
$$+ (-2k_{12} - 4k_{22}) u_2 + (2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22}) u_1 u_2 + 5$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} = 2k_{11}^2 + 2k_{21}^2 + 2\lambda \ ; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_1 u_2} = 2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} = 2k_{12}^2 + 2k_{22}^2 + 2\lambda \ ; \quad \frac{\partial G}{\partial u_1} = 2u_1 \ ; \quad \frac{\partial G}{\partial u_2} = 2u_2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2u_1 & 2u_2 \\ 2u_1 & 2k_{11}^2 + 2k_{21}^2 + 2\lambda & 2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22} \\ 2u_2 & 2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22} & 2k_{12}^2 + 2k_{22}^2 + 2\lambda \end{vmatrix} = \begin{aligned} & -8u_1^2(k_{12}^2 + k_{22}^2 + \lambda) + \\ & -8u_2^2(k_{11}^2 + k_{21}^2 + \lambda) + \\ & 16 u_1 u_2 (k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = 2(k_{11}^2 + k_{21}^2 + \lambda) u_1 + (-2k_{11} - 4k_{21}) + (2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22}) u_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = 2(k_{12}^2 + k_{22}^2 + \lambda) u_2 + (-2k_{12} - 4k_{22}) + (2k_{11}k_{12} + 2k_{21}k_{22}) u_1$$

$$a = k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22}$$

$$b = k_{12}^2 + k_{22}^2 + 1$$

$$c = k_{11}^2 + k_{21}^2 + 1$$

$$\begin{cases} 0 = a \cdot u_1 + b \cdot u_2 - k_{12} - 2k_{22} \\ 0 = c \cdot u_1 + a \cdot u_2 - k_{11} - 2k_{21} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \frac{b \cdot u_2 - k_{12} - 2k_{22}}{-a}$$

$$0 = c \cdot \frac{b \cdot u_2 - k_{12} - 2k_{22}}{-a} + a \cdot u_2 - k_{11} - 2k_{21} \quad / \cdot a$$

$$0 = -c\,b\,u_2 + c\left(k_{12} + 2k_{22}\right) + a^2 u_2 - \left(k_{11} + 2k_{21}\right)a$$

$$c\,b\,u_2 - a^2 u_2 = c\left(k_{12} + 2k_{22}\right) - a\left(k_{11} + 2k_{21}\right)$$

$$u_2 = \frac{c\left(k_{12} + 2k_{22}\right) - a\left(k_{11} + 2k_{21}\right)}{cb - a^2}$$

$$u_1 = \frac{-b \cdot u_2 + \left(k_{12} + 2k_{22}\right)}{a}$$

Workspace

Name	Value
a	0.9796
A	[0.5000,0;0,0.2500]
b	3.6327
B	[1,0;0,1]
c	3.3878
detHesjan	-12.7588
H	[0,1;1,0]
H1	-3.7702
H2	-12.8804
H3	3.8918
I	[1,0;0,1]
K	[1.1429,0.5714;0.2857,1.1429]
lambda	2
u	[0;1.7500]
u1	0.3602
u11	[0,Inf]
u2	0.6894
u22	[Inf,1.7500]
y	[1;2]
y1	1
y2	2

3.3 Wnioski

W próbie dopasowania się do ograniczenia metodą cen z użyciem Lagranżjanu oraz Hesjanu obrzeżonego poniosłem porażkę. Zadanie jest bardzo trudne obliczeniowo i na pewno gdzieś popełniłem drobny błąd, którego nie mogę znaleźć.

Jak widać na załączonym skanie rozwiązania: wyznaczyłem Lagranżjan, oraz macierz obrzeżoną. Następnie policzyłem wyznacznik Hesjanu oraz pochodne Lagranżjanu po u1 i u2. Podstawiając jedno do drugiego powinienem otrzymać dodatni wyznacznik, lecz manipulując lambdą nie jestem w stanie doprowadzić wyznacznika do żądanego stanu. Powyżej przedstawiam wyniki dla jednego z lepszych wariantów. Da się zauważyć, że udało mi się dopasować do ograniczenia, jednakże, nie jest to najlepsze możliwe sterowanie.