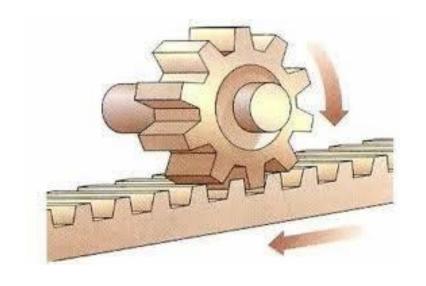
PREPARATORIA ABIERTA PUEBLA

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO



LUZ MARÍA ORTIZ CORTÉS

El movimiento circular uniformemente acelerado se presenta cuando un móvil con trayectoria circular aumenta disminuye en cada unidad de tiempo la magnitud de su velocidad angular en forma constante por lo que magnitud de la aceleración angular permanece constante.





- Velocidad angular instantánea.
- La magnitud de la velocidad angular instantánea representa la magnitud del desplazamiento angular efectuado por un móvil en un tiempo muy pequeño que casi tiende a cero.

$$\omega_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} \underline{\Delta t}$$

Aceleración angular media

Cuando durante el movimiento circular de un móvil su velocidad angular no permanece constante, sino que varía, se dice que sufre una aceleración angular. Cuando la velocidad angular varía, es conveniente determinar cuál es la magnitud de su aceleración angular media, misma que se expresa de la siguiente manera:

$$\alpha_{\rm m} = \frac{\omega f - \omega_0}{t_{\rm f} - t_{\rm o}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$



Donde:

α_m= magnitud de la aceleración angular media en rad/s²

 ω_f = magnitud de la velocidad angular final en rad/s

 ω_0 = magnitud de la velocidad angular inicial en rad/s

Δt= tiempo durante el cual varía la magnitud de la velocidad angular en segundos (s)



Aceleración angular instantánea

Aceleración angular instantánea.

Si en el movimiento acelerado de un cuerpo que sigue una trayectoria circular, los intervalos de tiempo considerados son cada vez más pequeños, la aceleración angular media se aproxima a una aceleración angular instantánea.

si el intervalo de tiempo es tan pequeño que tiende a cero, la magnitud de la aceleración angular del cuerpo será la instantánea:

$$\alpha_{inst} = \Delta t \longrightarrow 0 \quad \Delta \omega$$

$$\Delta t$$



Ecuaciones utilizadas en el movimiento en el movimiento circular uniformemente acelerado MCUA:

Las ecuaciones empleadas en el movimiento circular uniformemente acelerado son las mismas que se utilizan para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, con las siguientes variaciones:

- En lugar de magnitud del desplazamiento en metros se utiliza la magnitud del desplazamiento angular en radianes (θ en lugar de d).
- La magnitud de la velocidad en m/s será substituida por la magnitud de la velocidad angular en radianes/s (ω en lugar de v).

- 3. La magnitud de la aceleración en m/s² se cambiará por la magnitud de la aceleración angular en radianes/s² (α en lugar de a). Las ecuaciones serán:
- a) Para calcular la magnitud de los desplazamientos angulares:

1.
$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

2. $\theta = \frac{\omega f^2 - \omega_0^2}{2 \alpha}$

3. $\theta = \frac{\omega f + \omega_0}{2} t$



• Si el objeto parte del reposo su velocidad angular inicial (ωo) es cero y las tres ecuaciones anteriores se reducen a:

1.
$$\theta = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$2. \theta = \frac{\omega f^2}{2 \alpha}$$

3.
$$\theta = \frac{\omega f}{2} t$$



b) Para calcular la magnitud de las velocidades angulares finales:

1.
$$\omega_f = \omega_o + \alpha t$$

1.
$$\omega_f = \omega_o + \alpha t$$

2. $\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2 \alpha \theta$

Si el objeto parte del reposo su velocidad inicial (ω_0) es cero, y las dos ecuaciones anteriores se reducen a:

1.
$$\omega_f = \alpha t$$

1.
$$\omega_f = \alpha t$$

2. $\omega_f^2 = 2\alpha \theta$



Resolución de un problema e interpretación de gráficas para MCUA

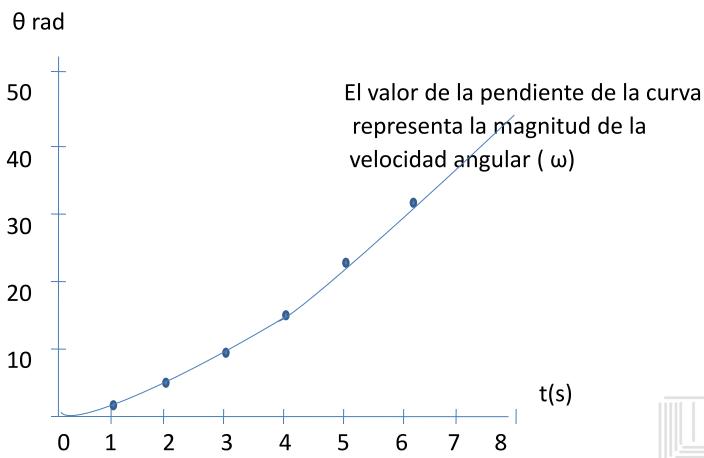
Datos de movimiento circular uniformemente acelerado:

Tiempo (s)	Magnitud del desplazamiento angular θ (radianes)	Magnitud de velocidad angular instantánea (rad/s)
1	1	2
2	4	4
3	9	6
4	16	8
5	25	10
6	36	12



- Con los datos realiza lo siguiente:
- Graficar las magnitudes del desplazamiento angular en función del tiempo e interpretar el significado físico de la curva obtenida al unir los puntos.
- Graficar las magnitudes del desplazamiento angular en función del tiempo elevado al cuadrado e interpretar el significado físico del valor de la pendiente de la recta obtenida al unir los puntos. Determinar el valor de la pendiente.
- 3. Graficar los datos de la magnitud de la velocidad angular e instantánea en función del tiempo y hallar el valor de la pendiente de la recta obtenida al unir los puntos. ¿Cuál es el significado físico de la pendiente de la recta?

Gráfica





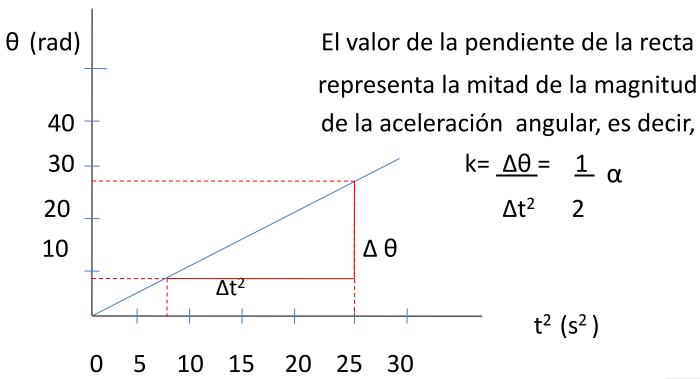
2) Al graficar la magnitud del desplazamiento angular en función del tiempo al cuadrado encontramos una recta cuyo valor de la pendiente representa la mitad de la magnitud de la aceleración angular. El valor de la pendiente se puede obtener por:

$$k = \Delta\theta = 25 \text{ rad} - 9 \text{ rad} = 16 \text{ rad} = 1 \text{ rad/s}^2$$

 $\Delta t^2 = 25 \text{ s}^2 - 9 \text{ s}^2 = 16 \text{ s}^2$



GRÁFICA



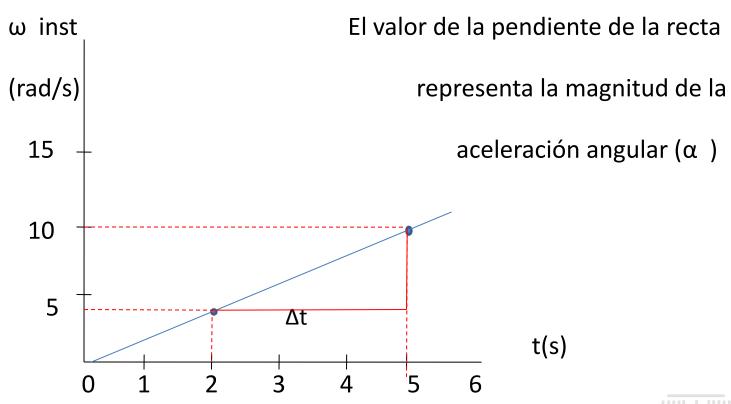


3. El valor de la pendiente que resulta de graficar las magnitudes de la velocidad angular instantánea en función del tiempo, representa la magnitud de la aceleración angular del objeto, cuya magnitud constante es:

$$\alpha = \Delta \omega = 10 \text{ rad/s} - 4 \text{ rad/s} = 6 \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}^2$$

$$\Delta t \qquad 5 \text{ s} - 2 \text{ s} \qquad 3 \text{ s}$$







PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un engranaje adquirió una velocidad angular cuya magnitud es de 2600 rad/s en 2 s, ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración angular?

Datos:

$$\omega$$
= 2512 rad/s

$$t=2 s$$

Fórmula:

$$\alpha = \omega$$

t

Sustitución:

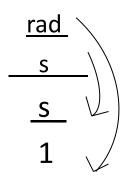
$$\alpha = \frac{2600 \text{ rad/s}}{2 \text{ s}}$$

$$\alpha = 1300 \text{ rad/s}^2$$



Obtención de unidades:

Podemos observar que se tienen rad/s, sobre s, por lo que a éstos últimos segundos se les coloca la unidad:



Se multiplican extremos con extremos (rad x 1), y medios con medios (s x s), quedando las unidades:



- 2. Un mezclador eléctrico incrementó la magnitud de su velocidad angular de 20 rad/s a 120 rad/s en 0.5 s. Calcular:
- a) ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración media?
- b) ¿Cuál fue la magnitud de su desplazamiento angular en ese tiempo?

Datos:

Fórmulas:

$$\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 120 \text{ rad/s}$$

$$t = 0.5 s$$

$$\alpha_{\rm m} = ?$$

$$\theta = ?$$

$$\alpha_{\rm m} = \omega f - \omega_0$$

t

$$\theta = \omega_{o}t + \underline{at^2}$$

2



Sustitución:

$$\alpha_{\rm m} = \frac{120 \text{ rad/s}}{0.5 \text{ s}}$$

$$\alpha_{\rm m}$$
 = 200 rad/s²

$$\theta = (20 \text{ rad/s})(0.5 \text{ s}) + (200 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ s})^2 = 2$$

$$\theta = 35 \text{ rad}$$



3. Determinar la magnitud de la velocidad angular de una rueda a los 0.2 minutos, si tenía una velocidad angular inicial con una magnitud de 8 rad/s y presenta una aceleración angular cuya magnitud es de 6 rad/s².

Datos:

Fórmula:

Despeje:

$$\omega_f = ?$$

$$\alpha_{\rm m} = \underline{\omega} f - \underline{\omega} o$$

$$\omega_f = \alpha_m t + \omega_o$$

t = 0.2 min

$$\omega_0 = 8 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$$

Conversión:

$$0.2 \text{ min } \times \underline{60 \text{ s}} = 12 \text{ s}$$
 1 min



Sustitución:

$$\omega_f = (6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 12/\text{s}) + 8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 80 \text{ rad/s}$$



- 4. Una rueda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 20 rad/s experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de 5 rad/s² que dura 8 s.
- a) ¿Qué magnitud de desplazamiento angular tiene a los 7 s?
- b) ¿Qué magnitud de velocidad angular tiene a los 7 s?

Datos:

$$\omega_0$$
 = 20 rad/s

$$\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 8 s$$

$$\theta = 3$$

$$\omega_f = ?$$

$$t = 8 s$$

Fórmulas:

$$\theta = \omega_{o}t + \underline{at^{2}}$$

$$\omega_f = \omega_o + at$$



Sustitución:

$$\theta = (20 \text{ rad}) (8 \text{ s}) + (5 \text{ rad/s}^2) (64 \text{ s}^2)$$

$$\theta = 320 \text{ rad}$$

$$\omega_f = (20 \text{ rad}) + (5 \text{ rad} \times 8 \text{ s})$$
s
 s^2

$$\omega_f = 60 \text{ rad/s}$$



5. Una rueda que gira a 4 rev/s aumenta su frecuencia a 20 rev/s en 2 s. Determinar la magnitud de su aceleración angular. Es resuelto datos

Datos:

Fórmulas:

$$f_0 = 4 \text{ rev/s}$$

$$\omega_0 = 2 \pi f_0$$

$$f_{\rm f}$$
 = 20 rev/s

$$\omega_f = 2 \pi f_f$$

$$t = 2 s$$

 $\alpha = ?$

$$\alpha = \omega f - \omega_0$$

t



Sustitución:

$$\omega_f = 2(3.1416)(20 \text{ rev/s})$$

$$\omega_{o}$$
= 2(3.1416)(4 rev/s)

$$\alpha = \frac{125.66 \text{ rad/s}}{2 \text{ s}}$$

$$\omega_{\rm f} = 125.66 \, {\rm rad/s}$$

$$\omega_{o} = 25.1328 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 50.2 \text{ rad/s}^2$$



PROBLEMAS RESUELTOS

- 6. Una hélice gira inicialmente con una velocidad angular cuya magnitud es de 10 rad/s y recibe una aceleración constante cuya magnitud es de 3 rad/s². es resuelto datos
- a) ¿Cuál será la magnitud de su velocidad angular después de 7 s?
- b) ¿Cuál será la magnitud de su desplazamiento angular a los 7s?
- c) ¿Cuántas revoluciones habrá dado a los 7 s?

Datos:

$$\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_f = ?$$

$$\theta = 3$$

$$t=7 s$$

Fórmula:

$$\omega_f = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \underline{\alpha t^2}$$

2



Sustitución:

$$\omega_f = 10 \text{ rad/s} + (3 \text{ rad/s}^2)(7/s)$$

$$\theta = (10 \text{ rad/s})(7 \text{ s}) + (3 \text{ rad/s}^2)(49 \text{ s}^2)$$

Resultado:

$$\omega_f = 31 \text{ rad/s}$$

$$\theta$$
 = 143.5 rad

c)

1 rev= 360° =
$$2 \pi \text{ rad}$$

143.5 rad x $\frac{1 \text{ rev}}{2 \pi \text{ rad}}$

22.84 revoluciones



7. Determinar la magnitud de la velocidad angular de una rueda a los 0.1 min, si tenía una velocidad angular con una magnitud de 8 rad/s y presenta una aceleración angular cuya magnitud es de 6 rad/s².

Datos:

$$\omega_f = ?$$

$$\omega_f = \omega_O + \alpha t$$

t = 0.1 min

$$\omega_0$$
 = 8 rad/s

$$\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$$

Conversión:



Sustitución:

$$\omega_f = 8 \text{ rad} + (6 \text{ rad})(6 \text{ s})$$
s
 s^2

$$\omega_f = 44 \text{ rad/s}$$



- 8. Un mezclador eléctrico incrementó la magnitud de su velocidad angular de 30 rad/s a 150 rad/s en 0.6 s. Calcular:
- a) ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración media?
- b) ¿Cuál fue la magnitud de su desplazamiento angular en ese tiempo?

Datos:

$$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 150 \text{ rad/s}$$

$$t = 0.6 s$$

Fórmula:

$$\alpha_{m} = \omega f - \omega o$$

$$\theta = \omega_0 t + \underline{\alpha t^2}$$



Sustitución:

$$\alpha_{\rm m}$$
= 150 rad/s - 30 rad/s 0.6 s

$$\alpha_{\rm m}$$
= 200 rad/s²

$$\theta = (30 \text{ rad})(0.6 \text{ s}) + (200 \text{ rad/s}^2)(0.6 \text{ s}^2) =$$

$$\theta$$
 = 54 rad



PROBLEMAS RESUELTOS

- 9. Una rueda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 20 rad/s experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de 5 rad/s² que dura 8 s.
- a) ¿Qué magnitud de desplazamiento angular tiene a los 8 s?
- b) ¿Qué magnitud de velocidad angular tiene a los 8 s?

Datos:

Fórmulas:

$$\omega_{o} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\theta = \omega_0 t + \underline{at^2}$$

$$\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 8 s$$

$$\omega_f = \omega_o + at$$

Sustitución:

Resultado:

$$\theta = (20 \text{ rad/s})(8 \text{ s}) + (5 \text{ rad/s}^2)(64 \text{ s}^2)$$

 θ = 480 rad



PROBLEAMAS RESUELTOS

Sustitución:

$$\omega_f = (20 \text{ rad/s}) + (5 \text{ rad/s}^2)(8/\text{s})$$

$$\omega_f = 60 \text{ rad/s}$$



10. Calcular la magnitud de la aceleración angular de una rueda que adquiere una velocidad angular de 350 rad/s en 2 s?

Datos:

Fórmula:

$$\alpha = ?$$

$$\alpha = \underline{\omega}$$

$$\omega = 350 \text{ rad/s}$$

$$t = 2 s$$

Sustitución:

$$\alpha = \frac{350 \text{ rad/s}}{2 \text{ s}}$$

$$\alpha = 175 \text{ rad/s}^2$$



Problemas propuestos

11. Una rueda tuvo una magnitud de aceleración angular de 5 rad/s² durante 6 segundos. ¿Qué magnitud de velocidad final adquirió?

Datos:

$$\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 6 s$$

$$\omega_f = ?$$

$$\omega_{o} = 0$$

Sustitución:

$$\omega_f = (5 \text{ rad/s}^2)(6s)$$

Fórmula:

$$\alpha = \omega f - \omega_0$$

Despeje:

$$\omega_f = \alpha t + \omega_o$$

$$\omega_f = 30 \text{ rad/s}$$



12. Si una hélice con una magnitud de velocidad angular inicial de 15 rad/s recibe una aceleración angular cuya magnitud es de 7 rad/s² durante 0.2 min. ¿Cuáles son las magnitudes de la velocidad angular final y del desplazamiento angular que alcanzó en 0.2 min?

Datos:

Fórmulas:

$$\omega_{o} = 15 \text{ rad/s}$$
 $\omega_{f} = \alpha t + \omega_{o}$
 $\alpha = 7 \text{ rad/s}^{2}$
 $t = 0.2 \text{ min}$
 $\omega_{f} = 0.2 \text{ min}$

Conversión:

$$0.2 \text{ min } \times \underline{60 \text{ s}} = 12 \text{ s}$$
 1 min



$$\omega_f = (7 \text{ rad/s}^2)(12 \text{ s}) + 15 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 99 \text{ rad/s}$$

$$\theta = (15 \text{ rad/s})(12 \text{ s}) + (7 \text{ rad/s}^2)(12 \text{ s})^2$$

$$\theta$$
 = 684 rad



PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Un engranaje aumentó la magnitud de su velocidad angular de 12 rad/s a 60 rad/s en 4 s. ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración angular?

 $\alpha = \omega_f - \omega_o$

Datos: Fórmula:

$$\omega o = 12 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 60 \text{ rad/s}$$

$$t = 4 s$$

$$\alpha = ?$$

$$\alpha = 60 \text{ rad/s} - 12 \text{ rad/s}$$
 $\alpha = 12 \text{ rad/s}^2$
4 s



PROBLEMAS RESUELTOS

- 14. Una banda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 12 rad/s y recibe una aceleración angular cuya magnitud es de 6 rad/s² durante 13 s.
- a) ¿Qué magnitud de velocidad angular lleva al cabo de los 13 s?
- b) ¿Qué magnitud de desplazamiento angular tuvo? 663 teta

Datos:

Fórmula:

Despeje:

$$\omega_{o}$$
 = 12 rad/s

$$\alpha = \underline{\omega f - \omega_0}$$

$$\omega_f = \alpha t + \omega o$$

$$\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta = \omega_{o}t + \underline{\alpha t^2}$$

$$\omega_f = ?$$

2

Sustitución:

Resultado:

$$\omega_f = (6 \text{ rad/s}^2)(13 \text{ s}) + 12 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 90 \text{ rad/s}$$



$$\theta = (12 \text{ rad/s})(13 \text{ s}) + (6 \text{ rad/s}^2)(13 \text{ s})^2 \qquad \theta = 663 \text{ rad}$$

$$\theta = 663 \text{ rad}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

15. Un disco que gira a 2 rev/s aumenta su frecuencia a 50 rev/s en 3 s. Determinar cuál fue la magnitud de su aceleración angular en rad/s².

Datos:

Fórmulas:

$$f_0 = 2 \text{ rev/s}$$

$$\omega_{\rm o} = 2 \pi f_{\rm o}$$
 $\omega_{\rm f} = 2 \pi f_{\rm f}$

$$\omega_f = 2 \pi f_f$$

$$f_{\rm f}$$
= 50 rev/s

$$t=3 s$$

$$\alpha = ?$$

$$\alpha = \omega_f - \omega_o$$



$$\omega_{\rm o} = 2(3.1416)(2 \text{ rev/s})$$

$$\omega_f = 2(3.1416) (50 \text{ rev/s})$$

$$\alpha = 314.16 \text{ rad/s} - 12.566 \text{ rad/s}$$
3 s

$$\omega_0 = 12.566 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\rm f} = 314.16 \; {\rm rad/s}$$

$$\alpha = 100.5 \text{ rad/s}^2$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

- 16. Una rueda de la fortuna gira inicialmente con una magnitud de velocidad angular de 2 rad/s. Si recibe una aceleración angular cuya magnitud es de 1.5 rad/s².
- a) ¿Cuál será la magnitud de su velocidad angular a los 5 s?
- b) ¿Cuál será la magnitud de su desplazamiento angular?
- c) ¿Cuántas revoluciones habrá dado al término de los 5 s? Datos: Fórmulas:

$$\omega_o$$
 = 2 rad/s

$$\alpha = 1.5 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega_f = ?$$

$$\theta = ?$$

$$t = 5 s$$

$$\alpha = \underline{\omega_f - \omega_o}$$
 $\omega_f = \alpha t + \omega_o$

$$\theta = \omega_{\text{o}}t + \underline{\alpha}t$$



Sustitución:

$$\omega_f = (1.5 \text{ rad/s}^2)(5 \text{ s}) + 2 \text{ rad/s}$$

$$\theta = (2 \text{ rad/s})(5 \text{ s}) + (1.5 \text{ rad/s}^2)(25 \text{ s}^2)$$

Resultado:

$$\omega_f = 9.5 \text{ rad/s}$$

$$\theta$$
 = 28.75 rad

c)
$$1 \text{ rev} = 360^{\circ} = 2 \pi \text{ rad}$$

 $rad = 1 \quad rev \quad 28.75 \text{ rad} \quad x \quad 1 \quad rev \quad =$
 $2 \pi \text{ rad} \quad 2(3.1416) \text{ rad}$



- Una banda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 10 rad/s y recibe una aceleración angular cuya magnitud es de 5 rad/s ² durante 12 segundos. Calcular:
- a) ¿Qué magnitud de velocidad angular lleva al cabo de los 12 s?
- b) ¿Qué magnitud de desplazamiento angular tuvo?
- 2. Un disco que gira a 3 rev/s aumenta su frecuencia a 60 rev/s en 4 s. Determinar cuál fue la magnitud de su aceleración angular en rad/s².



- 3. Una rueda de la fortuna gira inicialmente con una magnitud de velocidad angular de 3 rad/s. Si recibe una aceleración angular cuya magnitud es de 2 rad/s² durante 6 segundos, calcular:
- a) ¿Cuál será la magnitud de su velocidad angular a los 6 s?
- b) ¿Cuál será la magnitud de su desplazamiento angular?
- c) ¿Cuántas revoluciones habrá dado al término de los 6 s?
- 4. Un engranaje aumentó la magnitud de su velocidad angular de 10 rad/s a 50 rad/s en 3 s. ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración angular?

- 5. Una rueda tuvo una magnitud de aceleración angular de 4 rad/s² durante 5 segundos. ¿Qué magnitud de velocidad final adquirió?
- 6. Una rueda gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 20 rad/s experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de 5 rad/s² que dura 8 segundos. Calcular:
- a) La magnitud del desplazamiento angular a los 8 s.
- b) La magnitud de velocidad angular a los 8 s.
- 7. Un disco que gira a 3 rev/s aumenta su frecuencia a 60 rev/s en 4 s. Determinar: ¿Cuál fue la magnitud de su aceleración angular en rad/s².

Respuestas

- 1. $\omega_f = 70 \text{ rad/s}, \ \theta = 48 \text{ rad}$
- 2. $\alpha = 89.5 \text{ rad/s}^2$
- 3. a) $\omega_f = 15 \text{ rad/s}$, b) $\theta = 54 \text{ rad}$, c) 8.6 rev
- 4. $\alpha = 13.33 \text{ rad/s}^2$
- 5. $\omega_f = 20 \text{ rad/s}$
- 6. $\theta = 320 \text{ rad}, \omega_f = 60 \text{ rad/s}$
- 7. $\alpha = 89.5 \text{ rad/s}^2$



Bibliografía

Física para Bachillerato.

Pérez Montiel, Héctor.

Editorial: Patria.

2011

Física general con experimentos

Alvarenga, Beatriz. Máximo, Antonio.

Editorial: Oxford.

2014

