

統計学II

早稲田大学政治経済学術院

西郷 浩

本日の目標

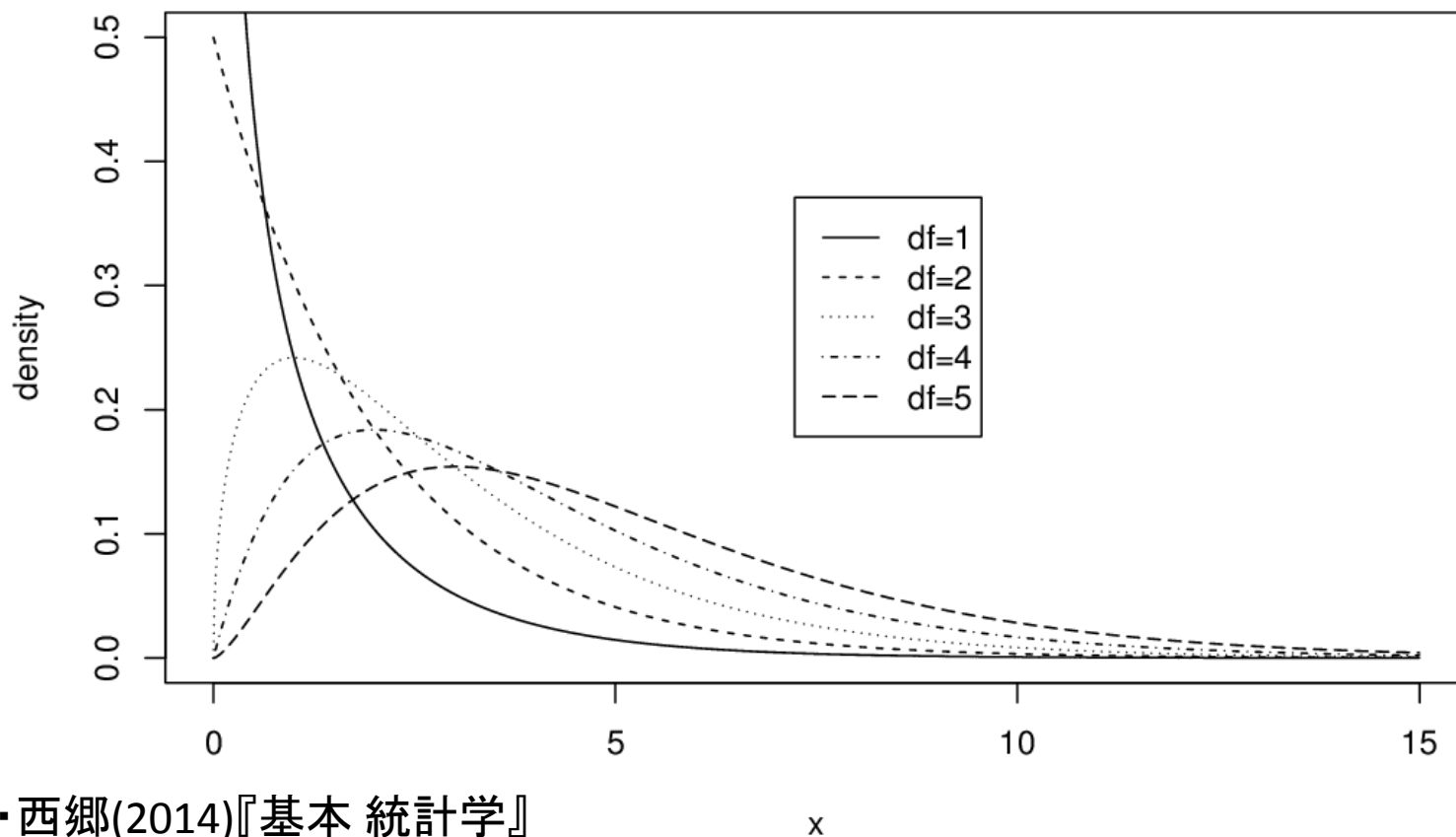
- 正規分布から派生する3つの分布の紹介
 - χ^2 分布
 - t 分布
 - F 分布
- 同じ正規分布から独立に発生したデータ
 - 算術平均(標本平均)
 - 分散(標本分散)
 - 両者が独立になる。
 - 位置の情報(標本平均)とバラツキの情報(標本分散)とを別個に扱える。

χ^2 分布(1)

- 標準正規確率変数
 - $Z_i \sim iid N(0, 1), i = 1, 2, \dots, m.$
- 新しい確率変数を作成する。
 - $Y_m = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_m^2$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
 - $Y_m \sim \chi^2(m)$ (自由度 m の χ^2 分布にしたがう確率変数)
- χ^2 分布の性質
 - 非負の実現値
 - 自由度によって確率分布の形状が変化する。
 - $E(Y_m) = m$
 - $V(Y_m) = 2m$

χ^2 分布(2)

図1: χ^2 分布の確率密度関数の例



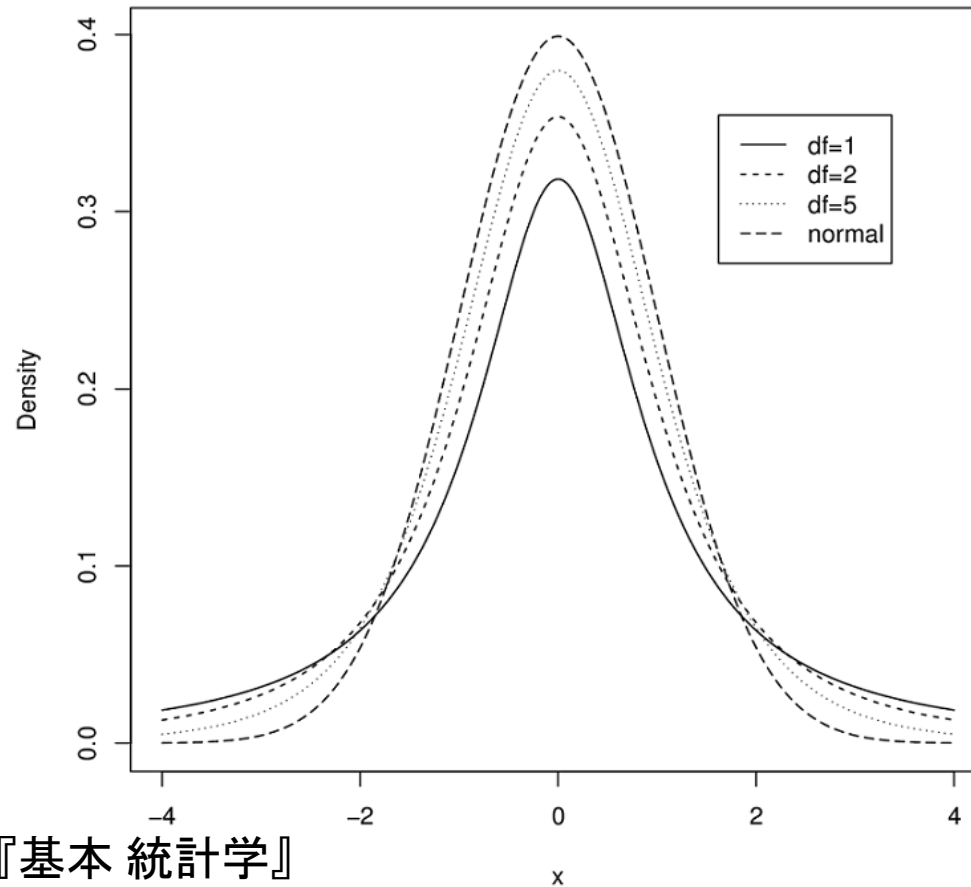
野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 100.

t 分布(1)

- 標準正規確率変数と χ^2 確率変数
 - $Z \sim N(0, 1), Y_m \sim \chi^2(m)$
 - 両者が独立とする。
- 新しい確率変数を作成する。
 - $X = \frac{Z}{\sqrt{Y_m/m}}$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
 - $X \sim t(m)$ (自由度 m の t 分布)
- t 分布の性質
 - 対称分布(正規分布と似ている but 似て非なるもの)
 - 自由度によって確率分布の形状が変わる。
 - $E(X) = 0$ ($m > 1$)
 - $V(X) = \frac{m}{m-2}$ ($m > 2$)

t 分布(2)

図2: t 分布の確率密度関数の例



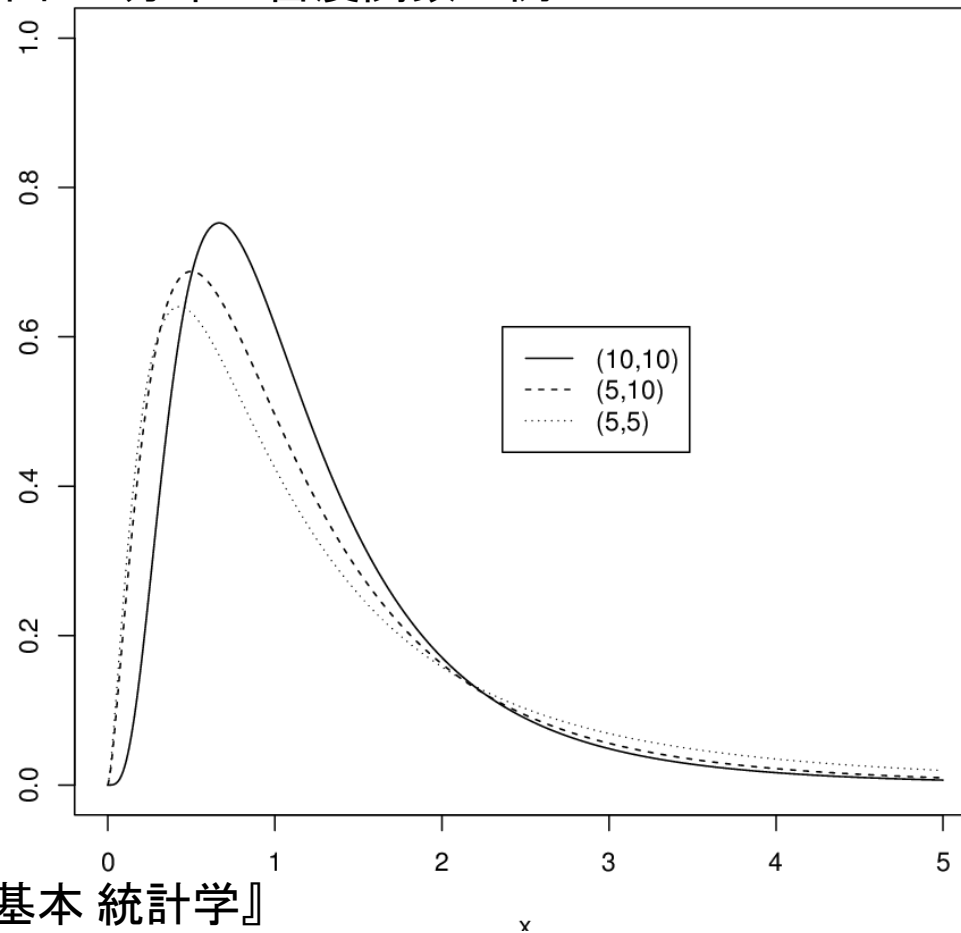
野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 101.

F 分布(1)

- 2つの χ^2 確率変数
 - $Y_{m_1} \sim \chi^2(m_1), Y_{m_2} \sim \chi^2(m_2)$
 - 両者は独立であるとする。
- 新しい確率変数を作成する。
 - $X = \frac{Y_{m_1}/m_1}{Y_{m_2}/m_2}$
- この新しい確率変数のしたがう確率分布
 - $X \sim F(m_1, m_2)$ (自由度 (m_1, m_2) の F 分布)
- F 分布の性質
 - 非負の実現値
 - 自由度によって確率分布の形状が変わる。
 - $E(X) = m_2/(m_2 - 2)$ ($m_2 > 2$)
 - $V(X) = 2m_2^2(m_1 + m_2 - 2)/\{m_1(m_2 - 2)^2(m_2 - 4)\}$ ($m_2 > 4$)

F 分布(2)

図3: F分布の密度関数の例



野口・西郷(2014)『基本 統計学』
培風館 p. 103.

正規母集団からの標本(1)

- 正規母集団からの無作為標本

- $X_i \sim iid N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n.$

- このとき、以下の性質が示せる。

- (1) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- (2) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ は標本(不偏)分散と呼ばれる。

- (3) 上の2つの確率変数が独立である。

正規母集団からの標本(2)

- 性質(1)

- \bar{X} が(多変量)正規分布の一次結合で表せることからわかる。

- $$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$$

- $$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

正規母集団からの標本(3)

- 性質(2), (3)
 - 数学的な説明は教科書を参照のこと。
- とくに、性質(3)が有用
 - 正規母集団からの標本については、以下の2つの標本情報が独立(互いに無関係)になる。
 - 分布の中心の位置(標本平均)
 - 分布の散らばり(標本分散)
 - 1～3番目の性質から、 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$ となる。