

Mikołaj Korobczak

Pracownia z analizy numerycznej

Pracownia P1 Zadanie 12

Wrocław, 9 listopada 2019

Prowadzący: dr hab. Paweł Woźny

Spis treści

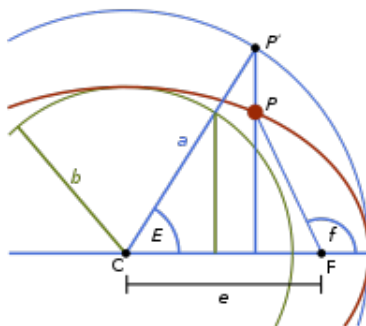
1. Wstęp	1
2. Ograniczenie wartości E	2
3. Metoda bisekcji	2
4. Metoda iteracyjna	3
5. Metoda Newtona	4
6. Inne przykłady	5
7. Problemy funkcji iteracyjnej	6
8. Wnioski	7
Literatura i źródła	8

1. Wstęp

Wektor położenia ciała na orbicie eliptycznej w czasie t można liczyć wzorem

$$\left(a(\cos E - e), a\sqrt{1 - e^2} \sin E\right), \quad (1)$$

gdzie a , to półosć wielka orbity, e , to mimośród orbity (ang. eccentricity), natomiast E , to anomalia mimośrodowa (ang. eccentric anomaly). Wielkości te obrazuje Rysunek 1.



Rysunek 1. Szukamy wartości kąta E .

Wartości a oraz e , to stałe dla każdej planety i nie ma problemu, aby je zdobyć. Wartość M zależy od czasu t przez zależność

$$M = \frac{2\pi t}{T}, \quad (2)$$

gdzie T , to okres orbitalny planety. Widać więc, że M nie jest trudno obliczyć. Pozostaje zatem obliczyć wartość kąta E . Można go obliczyć z równania Keplera:

$$E - e \sin E = M \quad (0 < |e| < 1) \quad (3)$$

co okazuje się trudnym zadaniem, a do rozwiązania go używa się różnych metod numerycznych. Postanowiłem więc zbadać różne sposoby przybliżenia szukanej wartości, oraz zestawiono wyniki. Do testów użyte zostały dane z 1 stycznia 2019 roku, a większość przykładów pokazanych jest dla Marsa.

2. Ograniczenie wartości E

Aby móc przybliżać wartości metodą bisekcji potrzebujemy odpowiedniego ograniczenia przedziału, w którym znajduje się szukana wartość. Jednym z przybliżeń może być $M - |e| \leq E \leq M + |e|$ dla $0 < |e| < 1$, ale potrzebny jest formalny dowód poprawności takiego przybliżenia.

Wiadomo, że $M = x - e \sin x$, gdzie $x = E$, oraz $0 < |e| < 1$

$$\begin{aligned} M - |e| &\leq x \leq M + |e| \\ x - e \sin x - |e| &\leq x \leq x - e \sin x + |e| \\ -e \sin x - |e| &\leq 0 \leq -e \sin x + |e| \\ -|e| &\leq e \sin x \leq |e| \end{aligned}$$

□

Jeszcze dokładniejszym ograniczeniem może być:¹

Dla $0 \leq M \leq \frac{\pi}{2} - e$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - e} \leq E \leq M + e$$

Natomiast dla $\frac{\pi}{2} - e \leq M \leq \pi$

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + e} \left(\frac{M}{2} + e \right) \leq E \leq M + e$$

W trakcie wykonywanych testów używano pierwszego ograniczenia.

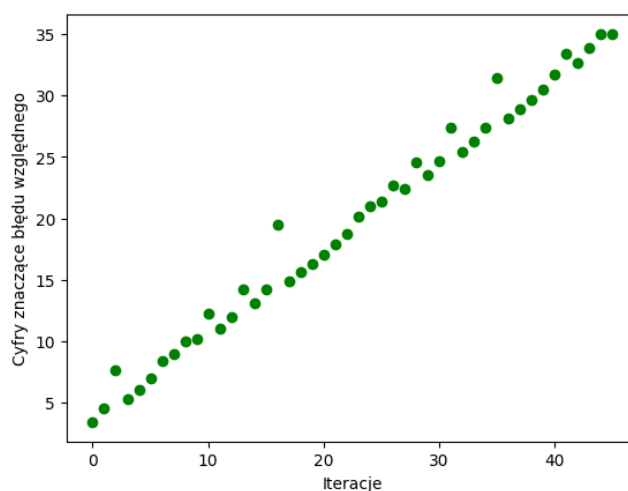
3. Metoda bisekcji

Jedną z najprostszych metod przybliżania wartości jest metoda bisekcji, która polega na wyznaczeniu przedziału, na którym będziemy szukać miejsca zerowego zadanej funkcji. W badanym przypadku aby oszacować wartość E , będziemy szukać w przedziale $\langle M - |e|, M + |e| \rangle$, a naszą funkcją będzie równanie Keplera

$$E - e \sin E - M = 0. \quad (4)$$

Bisekcja w każdej iteracji dzieli zadany przedział na pół i szuka miejsca zerowego w jednej z połówek pierwotnego przedziału. Zbieżność tej metody jest liniowa, co widać na naszym przykładzie.

¹ Ograniczenie opisane w G. R. Smith, A simple, efficient starting value for the iterative solution of Kepler's equation, Celestial Mechanics 19 (1979), 163–166.



Rysunek 2. Zbieżność metody bisekcji.

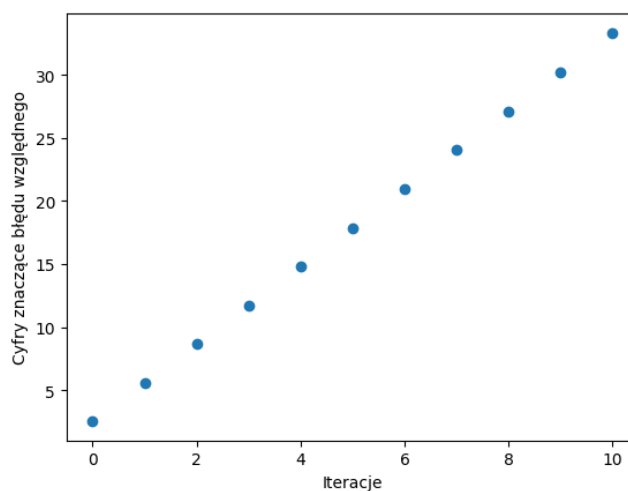
Potrzeba było ponad 40 iteracji, aby przybliżenie naszej wartości było dostatecznie dobre.

4. Metoda iteracyjna

Inną metodą jest metoda iteracyjna zadana wzorem:

$$x_{n+1} = e \sin(x_n) + M \quad x_0 = 0. \quad (5)$$

Taka metoda wydaje się dobra, ponieważ zwraca od razu przybliżoną wartość E , a nie przedział, na którym znajduje się szukana wartość. Nie wymaga zatem, aby pierwsze przybliżenie wartości było dobre (zawsze zaczynamy od wartości 0), a zarazem jest szybciej zbieżna niż metoda bisekcji. Po przetestowaniu tej metody dla takich samych danych, jak w metodzie bisekcji, otrzymałem wyniki zobrazowane na wykresie.



Rysunek 3. Zbieżność metody iteracyjnej.

Niestety metoda ta ma wady, które opisałem w rozdziale 7.

5. Metoda Newtona

Kolejną metodą przybliżenia poszukiwanej wartości jest metoda Newtona wyrażona wzorem

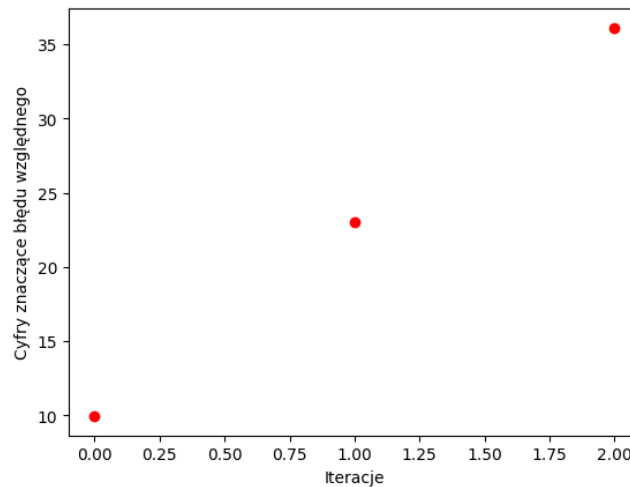
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (6)$$

Metoda ta jest zbieżna kwadratowo, ale wymaga, aby funkcja wyjściowa była różniczkowalna, ponieważ we wzorze używana jest jej pierwsza pochodna. Ponadto musi ona spełniać kryterium $\forall_x f'(x) \neq 0$. Pochodna równania Keplera istnieje i jest wyrażona wzorem

$$f'(x) = 1 - e \cos E \quad 0 < |e| < 1, \quad (7)$$

a ponadto jej wartość nigdy nie wynosi 0. Potrzeba jeszcze startowego przybliżenia wartości x . W tym badaniu użyłem przybliżenia $x_0 = M + \frac{e}{2}$.²

Zbieżność tej metody jest z pewnością lepsza niż poprzednich, co najlepiej obrazuje wykres.

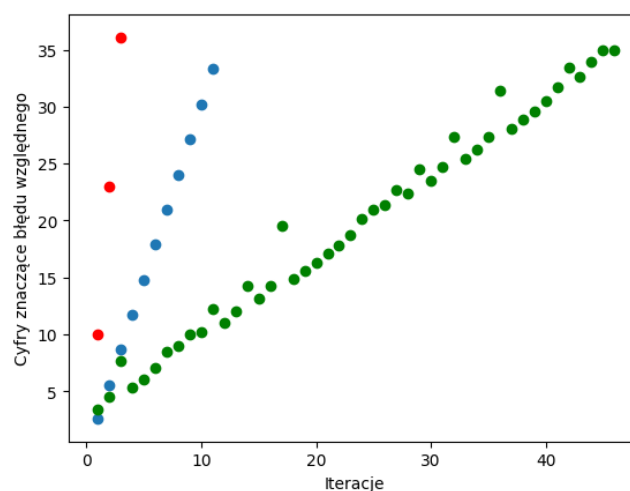


Rysunek 4. Zbieżność metody Newtona.

Widać tutaj, że metoda ta wymaga najmniej iteracji, aby osiągnąć wystarczająco dobry wynik.

Ostateczne zestawienie zbieżności wszystkich trzech metod pokazuje poniższy wykres.

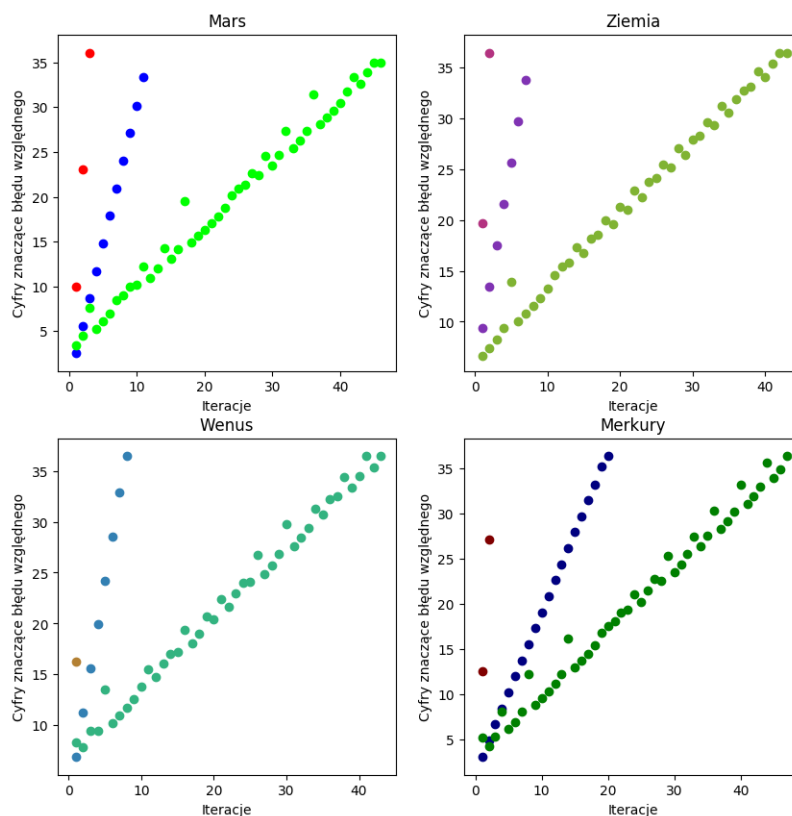
² Wartość wybrana w oparciu o artykuł R. Esmaelzadeh, H. Ghadiri, Appropriate Starter for Solving the Kepler's Equation, International Journal of Computer Applications 89 (2014), 31–38.



Rysunek 5. Zestawienie wszystkich metod

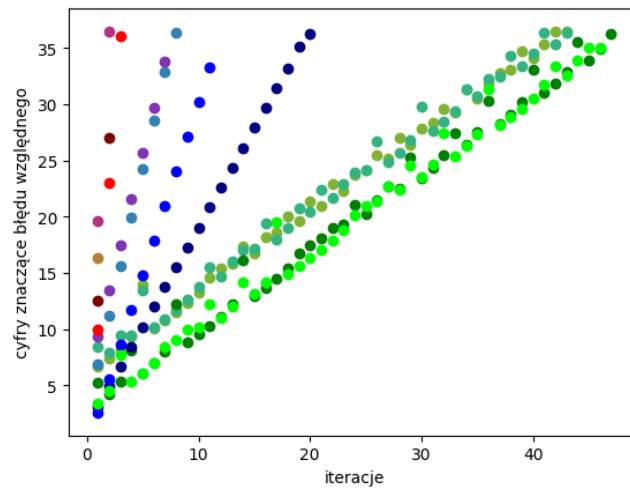
6. Inne przykłady

Aby upewnić się, że wyniki te mają odzwierciedlenie dla innych planet, wykonałem testy dla Merkurego, Wenus i Ziemi. Wyniki zbieżności powyższych metod są podobne, co oznacza, że metody działają w sposób zbliżony dla różnych danych.



Rysunek 6. Inne przykłady.

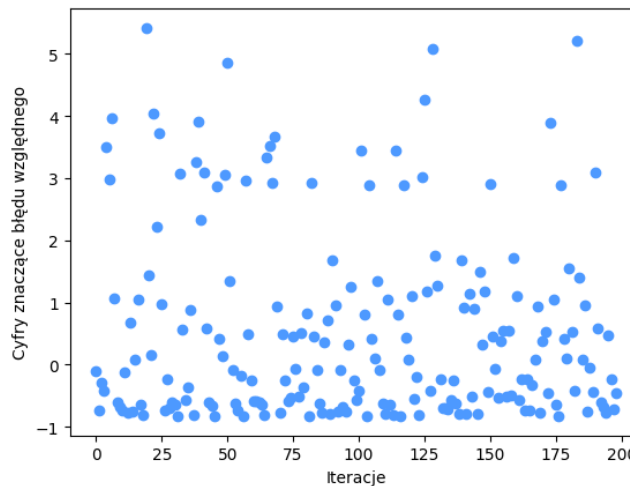
Po przedstawieniu wszystkich tych wyników na wykresie, widać, że metoda bisekcji (odcienie zieleni) jest najwolniej zbieżna, natomiast metoda Newtona (odcienie czerwieni) — najszybciej.



Rysunek 7. Zestawienie wszystkich testów.

7. Problemy funkcji iteracyjnej

W trakcie badań metody iteracyjnej, opisaną dokładniej w rozdziale 4., zauważyłem, że metoda ta czasami zachowuje się nieprzewidywalnie. Jeżeli weźmiemy bardzo dużą wartość mimośrodoru orbity e , to okazuje się, że funkcja nie zbiega do jednej wartości, co obrazuje poniższy wykres dla $e = 10$.



Rysunek 8. Wykres funkcji iteracyjnej dla dużego e .

Postanowiłem eksperymentalnie sprawdzić na ile utrudnia to poszukiwanie wartości E . Poszukałem najmniejszej wartości e , dla której funkcja ta nie zbiega i okazało się, że dla $e \geq 1.302$ tracimy zbieżność³. Jednak kiedy sprawdzimy wartości e dla różnych planet naszego układu słonecznego (Tabela 1), okazuje się, że największa wartość e jest rzędu 10^{-1} (dla Merkurego), więc problem ten nie wpływa

³ Wartość szukana z dokładnością ± 0.001

na wyniki.

Planeta	Mimośród orbity e
Merkury	2.064529232369614E-01
Wenus	1.440912442492587E-02
Ziemia	2.436387889126406E-02
Mars	9.796953375342891E-02
Jowisz	4.993906869363410E-02
Saturn	5.453988595722793E-02
Uran	4.735756806414718E-02
Neptun	8.606944879034762E-03

Tabela 1. Wartości e dla różnych planet.

8. Wnioski

Opisane powyżej trzy metody szukania wartości anomalii mimośrodowej E zadanej planety posiadają zalety i wady. Metoda bisekcji (Rozdział 3) jest łatwa do zaprogramowania i nie wymaga, aby zadana funkcja spełniała złożone założenia (wymaga jedynie, aby funkcja była ciągła na zadanym obszarze). Największą wadą tej metody jest jednak bardzo wolna zbieżność rzędu 40 iteracji w porównaniu do 3 w metodzie Newtona.

Durgą metodą jest metoda iteracyjna (Rozdział 4), która okazała się znacznie szybsza niż metoda bisekcji. Jednak wzór tej metody odnosi się wyłącznie do rozwiązywania równania Keplera i nie można jej stosować w przypadku innych problemów numerycznych. Kolejną wadą tej metody jest to, że nie zawsze jest ona zbieżna, jak pokazano w rozdziale 7.

Ostatnią testowaną metodą jest metoda Newtona (Rozdział 5), która okazała się najszybsza, ze względu na jej kwadratową zbieżność. Metoda ta potrafi zwrócić wartość już po 2 iteracjach (w przypadku Wenus). Jest to znaczna poprawa względem innych metod. Metoda Newtona wymaga jednak, aby zadana funkcja była różniczkowalna i aby jej pochodna zawsze była różna od zera. Poza tym wartość startowa dla tej metody może się okazać trudna do wyznaczenia i trzeba jej szukać eksperymentalnie, a złe dobranie może poskutkować tym, że nie będzie zachodzić zbieżność. Ponadto w opisanym przypadku jedną ze składowych funkcji jest funkcja sinus, która skądinąd jest trudna do dokładnego liczenia, a w przypadku metody Newtona trzeba dodatkowo liczyć cosinus, co dodatkowo może spotęgować błędy liczenia. Ponieważ jest to zwykła charakterystyka funkcji sinus i cosinus, nie uwzględniałem tych trudności odrębnie w prowadzonym badaniu.

Podsumowując metoda bisekcji wydaje się być najbardziej niezawodna, ale jest wolno zbieżna, metoda iteracyjna sprawdza się bardzo dobrze w omawianym problemie, a jej zbieżność jest zadowalająca, natomiast najszybszą metodą jest metoda Newtona, ale używając jej bardzo łatwo można stracić zbieżność.

Literatura i źródła

- 1) Wszystkie dane pochodzą ze strony: <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top> [4.11.2019]
- 2) R. Esmaelzadeh, H. Ghadiri, Appropriate Starter for Solving the Kepler's Equation, International Journal of Computer Applications 89 (2014), 31–38.
- 3) G. R. Smith, A simple, efficient starting value for the iterative solution of Kepler's equation, Celestial Mechanics 19 (1979), 163–166.
- 4) https://en.wikipedia.org/wiki/Eccentric_anomaly [4.11.2019]
- 5) https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_anomaly [4.11.2019]
- 6) <http://www.stargazing.net/kepler/ellipse.html> [28.10.2019]
- 7) <http://www.jgiesen.de/kepler/kepler.html> [28.10.2019]