LA2 Přehled

March 5, 2024

1 Obecný vektorový prostor

Grupa

Nechť M je neprázdná množina a $\circ : M \times M \to M$ binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon**: $(\forall a, b, c \in M)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$,
2. existence **neutrálního prvku**: existuje $e \in M$ tak, že $(\forall a \in M)\big(a \circ e = e \circ a = a\big)$,
3. existence **inverzních prvků**: $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)\big(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e\big)$,

říkáme, že uspořádaná dvojice $G = (M, \circ)$ je **grupa**.
Platí-li navíc pro $\circ$

- **komutativní zákon**: $(\forall a, b \in M)\big(a \circ b = b \circ a\big)$,

mluvíme o **abelovské grupě**.

Těleso

Nechť M je neprázdná množina a $+ : M \times M \to M$, $\cdot : M \times M \to M$ dvě binární operace. Platí-li, že

1. $(M, +)$ je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme 0 a nazýváme nulovým prvkem),
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (neutrální prvek značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)\Big(a(b + c) = ab + ac \wedge (b + c)a = ba + ca\Big),$$

nazýváme uspořádanou trojici $T = (M, +, \cdot)$ **tělesem**.
Je-li navíc $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ abelovská grupa, je T **komutativní těleso**.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme 0, resp. 1. Mějme dánu neprázdnou množinu V a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : T \times V \to V\,.$$

Řekneme, že $(V, T, \oplus, \odot)$ je **vektorový prostor nad tělesem** T s vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x})\,.$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)\big((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\big)\,.$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}\big)\,.$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)\big(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})\big)\,.$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})\big).$$

6. Neutrální prvek $1 \in T$ je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}).$$

7. Existuje **nulový vektor** ve V a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta).$$

Základní vlastnosti VP

Buď V vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor.
2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta).$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}).$$

4. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta).$$

   Tento vektor splňuje $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$, kde -1 je opačný prvek k 1 vůči operaci + v T.

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven 0 nebo vektor roven θ.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\Big(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)\Big).$$

Podprostor

Nechť P je podmnožina vektorového prostoru V nad T. Řekneme, že P je **podprostor** vektorového prostoru V, právě když platí:

1. množina P je neprázdná, tzn. $P \neq \emptyset$.
2. množina P je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P),$$

3. Množina P je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P).$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

(Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor V nad T. Nechť $\mathbf{x} \in V$ a $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor $\mathbf{x}$ je **lineární kombinací** souboru $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T$ taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \,.$$

Čísla α_i, $i \in \hat{m}$, nazýváme **koeficienty lineární kombinace**. Jestliže $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LN $\Leftrightarrow$

$$(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T) \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow \big((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0) \big) \right) .$$

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LZ $\Leftrightarrow$

$$(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left(\alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right) .$$

Lineární obal souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru** $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\} .$$

Vlastnosti lineární obalu souboru

Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \,,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \Big(\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle \Big) \,,$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle) \big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \big)$$

a

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle) \big(\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \big).$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

$$\text{Je-li } k \in \mathbb{N} \text{ a } \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\,, \text{ potom}$$
$$\langle \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \rangle \text{ je podmnožinou } \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\,.$$

Lineární obal množiny

Buď M neprázdná podmnožina VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny M nazveme **lineárním obalem množiny** M a značíme ji $\langle M \rangle$.

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:
$$\theta \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z M leží v jeho lineárním obalu, přesněji:
$$M \subseteq \langle M \rangle\,,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:
$$(\forall \mathbf{z} \in V)\Big(\mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \big\langle M \cup \{\mathbf{z}\} \big\rangle\Big)\,,$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:
$$\big(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)\big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)$$
$$\text{a}$$
$$(\forall \alpha \in T)\big(\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle\big)\big(\alpha\mathbf{x} \in \langle M \rangle\big).$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:
$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle\,, \text{ potom}$$
$$\langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$

   Speciálně:
$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M,\ \text{potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$

Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V a $m \geq 2$. Potom $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m})\big(\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big)\,.$$

Přidání vektoru do LN souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ LN soubor vektorů z VP V a $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle$. Potom soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$ je také LN.

Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** podprostor $P \subset\subset V$, právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že $P = V$ můžeme zjednodušeně říkat $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ generuje (vektorový) prostor V.

Dimenze VP

Buď V vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru** V je rovna

- $\mathbf{0}$, pokud neexistuje LN soubor vektorů z V délky 1.
- $\mathbf{d} \in \mathbb{N}$, pokud existuje LN soubor vektorů z V délky d, ale každý soubor vektorů z V délky $d + 1$ už je LZ.
- $\boldsymbol{\infty}$, pokud ve V existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru V označujeme symbolem $\dim V$.
Je-li $\dim V = \infty$, říkáme, že V má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud $\dim V < \infty$ říkáme, že V **má konečnou dimenzi**.

Věta o postačitelnosti jedné vlastnosti báze

Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je soubor vektorů z VP V a $\dim V = d \in \mathbb{N}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je báze V.
2. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je LN.
3. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ generuje V.

Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je báze VP V nad tělesem T a vektor $\mathbf{v} \in V$ splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{x}_i \, .$$

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v} \in V$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ nazveme uspořádanou d-tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in T^d \, .$$

2 Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $A : P \to Q$ nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y})\,,$$
2. (homogenita):
$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)\big(A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}\big)\,.$$

Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP P do stejného VP P nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na P.

Množinu všech lineárních operátorů na P značíme krátce $\mathcal{L}(P)$.

Lineární zobrazení z VP P do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na P.

Izomorfismem nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je báze prostoru V nad T. Přiřazení $(\cdot)_\mathcal{B} : V \to T^n$ definované předpisem
$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\mathcal{B} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$
kde $(\mathbf{x})_\mathcal{B}$ značí souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vůči bázi $\mathcal{B}$ dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

Alternativní vyjádření linearity

Buďte P a Q vektorové prostory nad T a mějme zobrazení $A : P \to Q$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$
$$(A(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y})\ .$$
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in P)$
$$\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{x}_i\right).$$

Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, kde P, Q jsou vektorové prostory nad T.

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v P a Q popořadě θ_P a θ_Q, platí
$$A\theta_P = \theta_Q\,.$$
2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li $M \subseteq P$, potom
$$A\big(\langle M\rangle\big) = \big\langle A(M)\big\rangle\,.$$
Je-li $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P , potom
$$A\big(\langle \mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\rangle\big) = \langle A\mathbf{x}_1,\ldots,A\mathbf{x}_n\rangle\,.$$
3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli
$$\big(\forall \tilde{P} \subset\subset P\big)\big(A(\tilde{P}) \subset\subset Q\big)\,.$$
4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli
$$\big(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q\big)\big(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P\big)\,.$$
5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ platí
$$(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \text{ je } LZ \implies (A\mathbf{x}_1,\ldots,A\mathbf{x}_n) \text{ je } LZ.$$
6. *“Předobraz” LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ platí
$$(A\mathbf{x}_1,\ldots,A\mathbf{x}_n) \text{ je } LN \implies (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \text{ je } LN.$$

Hodnost, jádro a defekt

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. **Hodností zobrazení** A rozumíme číslo
$$h(A) := \dim A(P)\,.$$
Jádro zobrazení A definujeme jako množinu
$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\}\,,$$
a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení** A. Defekt značíme $d(A)$. Tedy
$$d(A) := \dim\ker A\,.$$

Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Potom platí:
$$A \text{ je prosté } \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}\,.$$

LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je **prosté**. Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ LN soubor vektorů z P, je také $(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n)$ LN.
2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P takový že $(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n)$ je LZ soubor, potom také soubor vzorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ LZ.

Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a M podprostor VP P. Potom

1. $\dim A(M) \leq \dim M$.
2. Je-li A prosté zobrazení, potom $\dim A(M) = \dim M$.
3. $h(A) \leq \min\{\dim P, \dim Q\}$.

3 Matice lineárního zobrazení

Matice zobrazení vzhledem k bázím

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, buď $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ báze P a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$ báze Q. Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$ definovanou po sloupcích předpisem $\forall i \in \hat{n}$:

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)_{:i} := (A\,\mathbf{x}_i)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme **maticí zobrazení** A **vzhledem k bázím** $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$.
Je-li $A \in \mathcal{L}(P)$ lineární operátor, jeho matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ můžeme zkráceně značit ${}^{\mathcal{X}}A$.

Věta o matici složeného zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě báze P, Q, V vektorových prostorů konečné dimenze. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P, V)$ platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} \ .$$

Věta o matici izomorfismu

Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfismus, $\dim P, \dim Q < \infty$, $\mathcal{X}$ je báze P a $\mathcal{Y}$ je báze Q, potom je matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární a platí

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}} .$$

Věta o souvislosti hodnosti zobrazení a jeho matice

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\dim P, Q < \infty$, $\mathcal{X}$ je báze P a $\mathcal{Y}$ je báze Q. Potom platí

$$h(A) = h\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right) \ .$$

Matice přechodu mezi bázemi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ jsou báze P. Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.

Věta o vlastnostech matice přechodu

Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou báze P, $\dim P < \infty$. Potom

1. pro libovolné $\mathbf{x} \in P$ platí

$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{x})_{\mathcal{Y}} \,,$$

2. matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí

$$\left({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}} \,,$$

3. $${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}} \ .$$

4 Skalární součin

Skalární součin

Buď V VP nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to T$ nazýváme (obecný) **skalární součin**, platí-li pro všechny vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a každý skalár $\alpha \in T$ následující axiomy:

1. Zobrazení je lineární v druhém argumentu, tj.

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{x} \mid \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \,.$$

2. Platí tzv. *Hermitovská symetrie*:

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle} \,.$$

3. Zobrazení je pozitivně definitní, tzn.

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \geq 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \big(\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta \big).$$

Dvojici $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ nazýváme **(vektorovým) prostorem se skalárním součinem** nebo zkráceně jako **prehilbertův prostor** a značíme $\mathcal{H}$.

Základní vlastnosti skalárního součinu

Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$ platí

1. Sdružená linearita v prvním argumentu:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \alpha \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle \,.$$

2. Skalární součin s nulovým vektorem je nula:

$$\langle \mathbf{x} \mid \theta \rangle = \langle \theta \mid \mathbf{x} \rangle = 0 \,.$$

Standardní skalární součin

Na T^n definujeme skalární součin předpisem

$$\mathbf{x} \centerdot \mathbf{y} := \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot y_j \,,$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory z T^n. Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

Norma, vzdálenost

Mějme V VP nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ nazýváme **norma**, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a $\alpha \in T$ platí:

1. norma je vždy nezáporná:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \,,$$

2. pouze nulový vektor má nulovou normu:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta \,,$$

3. norma je homogenní v absolutní hodnotě:

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

4. platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ číslo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$ nazýváme **velikostí vektoru x** a číslo $d(x,y) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ nazýváme **vzdáleností vektorů x** a **y**.

Norma indukovaná skalárním součinem

Ve vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ definujme zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ pro $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ předpisem

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}.$$

Toto zobrazení nazýváme **normou indukovanou skalárním součinem**.

Věta o korektnosti indukované normy a Schwarzova nerovnost

Zobrazení definované v Definici .reference:dfn-indukovana-norma je normou a splňuje tzv. **Schwarzovu nerovnost**:

Pro každé $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z $\mathcal{H}$ platí

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Eukleidovská norma

Norma indukovaná standardním součinem se nazývá **eukleidovská norma**.

Pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$ je eukleidovská norma rovna

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\overline{x_1}\, x_1 + \cdots + \overline{x_n}\, x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

p-norma

Na T^n definujeme pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ tzv. **p-normu** předpisem: pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$ položíme

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \Big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Ortogonalita (kolmost)

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem a $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou vektory z $\mathcal{H}$. Vektor $\mathbf{x}$ nazýváme **ortogonální na** (nebo také **kolmý** na) $\mathbf{y}$, právě když

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortogonální (OG)**, právě když každý vektor ze souboru je ortogonální na ostatní vektory ze souboru, tj. pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$ je

$$\langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_j \rangle = 0.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortonormální (ON)**, právě když je ortogonální a každý vektor má velikost 1, tzn. pro každé $i, j \in \hat{n}$ Je

$$\langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Pythagorova věta

Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou vektory z $\mathcal{H}$ a $\mathbf{x}$ je kolmý na $\mathbf{y}$. Potom pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Obecněji: Je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ ortogonální soubor z $\mathcal{H}$, potom

$$\left\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n\right\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|^2 .$$

Věta o lineární nezávislosti OG souboru

Ortogonální soubor **nenulových** vektorů je LN. Speciálně, každý ortonormální soubor vektorů je LN.

Fourierovy koeficienty vůči ON bázi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je ON báze prehilbertova prostoru $\mathcal{H}$, potom pro každé $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}_i .$$

Neboli

$$(\mathbf{z})_{\mathcal{X}} = \big(\langle \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{z} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}_n \mid \mathbf{z} \rangle\big) .$$

Ortogonální projekce na přímku

Je-li $\mathbf{v} \neq \theta$, zobrazení $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}$ definované

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \quad \text{ pro } \mathbf{z} \in \mathcal{H}$$

se nazývá **ortogonální projekce z na přímku** $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN soubor vektorů. Potom existuje ON soubor $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ vektorů z $\mathcal{H}$ takový, že pro každé $k \in \hat{n}$ je

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \rangle .$$