

# LA2 Přehled

March 24, 2024

# 1 Obecný vektorový prostor

## Grupa

Nechť  $M$  je neprázdná množina a  $\circ : M \times M \rightarrow M$  binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon:**  $(\forall a, b, c \in M)(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$ ,
2. existence **neutrálního prvku:** existuje  $e \in M$  tak, že  $(\forall a \in M)(a \circ e = e \circ a = a)$ ,
3. existence **inverzních prvků:**  $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$ ,

říkáme, že uspořádaná dvojice  $G = (M, \circ)$  je **grupa**.

Platí-li navíc pro  $\circ$

- **komutativní zákon:**  $(\forall a, b \in M)(a \circ b = b \circ a)$ ,

mluvíme o **abelovské grupě**.

## Těleso

Nechť  $M$  je neprázdná množina a  $+: M \times M \rightarrow M$ ,  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  dvě binární operace. Platí-li, že

1.  $(M, +)$  je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme  $0$  a nazýváme nulovým prvkem),
2.  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  je grupa (neutrální prvek značíme  $1$  a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)(a(b+c) = ab+ac \wedge (b+c)a = ba+ca),$$

nazýváme uspořádanou trojici  $T = (M, +, \cdot)$  **tělesem**.

Je-li navíc  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  abelovská grupa, je  $T$  **komutativní těleso**.

## Vektorový prostor

Nechť  $T$  je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme  $0$ , resp.  $1$ . Mějme dále neprázdnou množinu  $V$  a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad \odot : T \times V \rightarrow V.$$

Řekneme, že  $(V, T, \oplus, \odot)$  je **vektorový prostor nad tělesem  $T$**  s vektorovými operacemi  $\oplus$  a  $\odot$ , právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}).$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})).$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}).$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})).$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})).$$

6. Neutrální prvek  $1 \in T$  je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}).$$

7. Existuje **nulový vektor** ve  $V$  a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta).$$

## Základní vlastnosti VP

Buď  $V$  vektorový prostor nad tělesem  $T$ . Potom platí:

1. Ve  $V$  existuje právě jeden nulový vektor.
2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta).$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}).$$

4. Ke každému vektoru z  $V$  existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta).$$

Tento vektor splňuje  $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$ , kde  $-1$  je opačný prvek k  $1$  vůči operaci  $+$  v  $T$ .

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven  $0$  nebo vektor roven  $\theta$ .

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)).$$

## Podprostor

Nechť  $P$  je podmnožina vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Řekneme, že  $P$  je **podprostor** vektorového prostoru  $V$ , právě když platí:

1. množina  $P$  je neprázdná, tzn.  $P \neq \emptyset$ .
2. množina  $P$  je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P),$$

3. Množina  $P$  je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P).$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset \subset V.$$

## (Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor  $V$  nad  $T$ . Nechť  $\mathbf{x} \in V$  a  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je soubor vektorů z  $V$ . Říkáme, že vektor  $\mathbf{x}$  je **lineární kombinací** souboru  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ , právě když existují čísla  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$  taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Čísla  $\alpha_i$ ,  $i \in \hat{m}$ , nazýváme **koefficienty lineární kombinace**. Jestliže  $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$ , nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

## Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je LN  $\Leftrightarrow$

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T) \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow ((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)) \right).$$

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je LZ  $\Leftrightarrow$

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left( \alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right).$$

## Lineární obal souboru

Buď  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  soubor vektorů z VP  $V$  nad tělesem  $T$ . Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru**  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\}.$$

## Vlastnosti lineárního obalu souboru

Nechť  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je soubor vektorů z vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left( \mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle)$$

a

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle).$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

Je-li  $k \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$ , potom  
 $\langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle$  je podmnožinou  $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$ .

### Lineární obal množiny

Bud'  $M$  neprázdná podmnožina VP  $V$  nad tělesem  $T$ . Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny  $M$  nazveme **lineárním obalem množiny**  $M$  a značíme ji  $\langle M \rangle$ .

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid m \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T \right\}.$$

### Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť  $M$  je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\mathbf{0} \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z  $M$  leží v jeho lineárním obalu, přesněji:

$$M \subseteq \langle M \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left( \mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \langle M \cup \{\mathbf{z}\} \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle) \\ & \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:

Je-li  $\emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle$ , potom  
 $\langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle$ .

Speciálně:

Je-li  $\emptyset \neq N \subseteq M$ , potom  $\langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle$ .

### Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Bud'  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  soubor vektorů z VP  $V$  a  $m \geq 2$ . Potom  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m}) (\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m \rangle).$$

### Přidání vektoru do LN souboru

Bud'  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  LN soubor vektorů z VP  $V$  a  $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$ . Potom soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$  je také LN.

## Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  z vektorového prostoru  $V$  řekneme, že **generuje** podprostor  $P \subset V$ , právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že  $P = V$  můžeme zjednodušeně říkat  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  generuje (vektorový) prostor  $V$ .

## Dimenze VP

Buď  $V$  vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru**  $V$  je rovna

- **0**, pokud neexistuje LN soubor vektorů z  $V$  délky 1.
- **$d \in \mathbb{N}$** , pokud existuje LN soubor vektorů z  $V$  délky  $d$ , ale každý soubor vektorů z  $V$  délky  $d + 1$  už je LZ.
- **$\infty$** , pokud ve  $V$  existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru  $V$  označujeme symbolem  $\dim V$ .

Je-li  **$\dim V = \infty$** , říkáme, že  $V$  má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud  **$\dim V < \infty$**  říkáme, že  $V$  má **konečnou dimenzi**.

## Věta o postačitelnosti jedné vlastnosti báze

Nechť  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je soubor vektorů z VP  $V$  a  $\dim V = d \in \mathbb{N}$ . Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je báze  $V$ .
2. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je LN.
3. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  generuje  $V$ .

## Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť  $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je báze VP  $V$  nad tělesem  $T$  a vektor  $\mathbf{v} \in V$  splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

**Souřadnicemi** vektoru  $\mathbf{v} \in V$  **vzhledem k bázi**  $\mathcal{B}$  nazveme uspořádanou  $d$ -tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

## 2 Lineární zobrazení

### Lineární zobrazení

Buďte  $P$  a  $Q$  dva vektorové prostory nad stejným tělesem  $T$ . Zobrazení  $A : P \rightarrow Q$  nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}),$$

2. (homogenita):

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}).$$

### Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP  $P$  do stejného VP  $P$  nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na  $P$ .

Množinu všech lineárních operátorů na  $P$  značíme krátce  $\mathcal{L}(P)$ .

Lineární zobrazení z VP  $P$  do tělesa  $T$  nazýváme **lineární funkcionál** na  $P$ .

**Izomorfismem** nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

### Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor  $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  je báze prostoru  $V$  nad  $T$ . Přiřazení  $(\cdot)_{\mathcal{B}} : V \rightarrow T^n$  definované předpisem

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$

kde  $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$  značí souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  vůči bázi  $\mathcal{B}$  dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

### Alternativní vyjádření linearity

Buďte  $P$  a  $Q$  vektorové prostory nad  $T$  a mějme zobrazení  $A : P \rightarrow Q$ . Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ .
2.  $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$

$$(A(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y}).$$

3.  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in P)$

$$\left( A \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{x}_i \right).$$

## Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ , kde  $P, Q$  jsou vektorové prostory nad  $T$ .

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v  $P$  a  $Q$  popořadě  $\theta_P$  a  $\theta_Q$ , platí

$$A\theta_P = \theta_Q.$$

2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li  $M \subseteq P$ , potom

$$A(\langle M \rangle) = \langle A(M) \rangle.$$

Je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  soubor vektorů z  $P$ , potom

$$A(\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle) = \langle A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n \rangle.$$

3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{P} \subset\subset P)(A(\tilde{P}) \subset\subset Q).$$

4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q)(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P).$$

5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  platí

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LZ} \implies (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LZ}.$$

6. *“Předobraz” LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  platí

$$(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LN} \implies (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LN}.$$

## Hodnost, jádro a defekt

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . **Hodností zobrazení**  $A$  rozumíme číslo

$$h(A) := \dim A(P).$$

**Jádro zobrazení**  $A$  definujeme jako množinu

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\},$$

a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení**  $A$ . Defekt značíme  $d(A)$ . Tedy

$$d(A) := \dim \ker A.$$

## 2. věta o dimenzi

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . Potom

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

## Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . Potom platí:

$$A \text{ je prosté} \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}.$$



## LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  je **prosté**. Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  LN soubor vektorů z  $P$ , je také  $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$  LN.
2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  soubor vektorů z  $P$  takový že  $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$  je LZ soubor, potom také soubor vzorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  LZ.

## Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  a  $M$  podprostor VP  $P$ . Potom

1.  $\dim A(M) \leq \dim M$ .
2. Je-li  $A$  prosté zobrazení, potom  $\dim A(M) = \dim M$ .
3.  $h(A) \leq \min\{\dim P, \dim Q\}$ .

### 3 Matice lineárního zobrazení

#### Matice zobrazení vzhledem k bázím

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ , buď  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  báze  $P$  a  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$  báze  $Q$ . Matici  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$  definovanou po sloupcích předpisem  $\forall i \in \hat{n}$ :

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:i} := (A\mathbf{x}_i)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme **maticí zobrazení  $A$  vzhledem k bázím  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$** .

Je-li  $A \in \mathcal{L}(P)$  lineární operátor, jeho matici zobrazení  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$  můžeme zkráceně značit  ${}^{\mathcal{X}}A$ .

#### Věta o matici složeného zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(Q, V)$ ,  $B \in \mathcal{L}(P, Q)$  a  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$  jsou popořadě báze  $P, Q, V$  vektorových prostorů konečné dimenze. Potom pro matici složeného zobrazení  $AB \in \mathcal{L}(P, V)$  platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

#### Věta o matici izomorfismu

Je-li  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  izomorfismus,  $\dim P, \dim Q < \infty$ ,  $\mathcal{X}$  je báze  $P$  a  $\mathcal{Y}$  je báze  $Q$ , potom je matice  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$  regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$

#### Věta o souvislosti hodnoty zobrazení a jeho matice

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ,  $\dim P, \dim Q < \infty$ ,  $\mathcal{X}$  je báze  $P$  a  $\mathcal{Y}$  je báze  $Q$ . Potom platí

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

#### Matice přechodu mezi bázemi

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  a  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  jsou báze  $P$ . Matici identického operátoru  ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$  nazýváme **maticí přechodu** od báze  $\mathcal{X}$  k bázi  $\mathcal{Y}$ .

#### Věta o vlastnostech matice přechodu

Nechť  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  a  $\mathcal{Z}$  jsou báze  $P$ ,  $\dim P < \infty$ . Potom

1. pro libovolné  $\mathbf{x} \in P$  platí

$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{x})_{\mathcal{Y}},$$

2. matice  ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$  je regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}},$$

- 3.

$${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}.$$

## 4 Skalární součin

### Skalární součin

Buď  $V$  VP nad  $T = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$  nazýváme (obecný) **skalární součin**, platí-li pro všechny vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  a každý skalár  $\alpha \in T$  následující axiomy:

1. Zobrazení je lineární v druhém argumentu, tj.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle.$$

2. Platí tzv. *Hermitovská symetrie*:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}.$$

3. Zobrazení je pozitivně definitní, tzn.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad (\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta).$$

Dvojici  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  nazýváme **(vektorovým) prostorem se skalárním součinem** nebo zkráceně jako **prehilbertův prostor** a značíme  $\mathcal{H}$ .

### Základní vlastnosti skalárního součinu

Pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$  a  $\alpha \in T$  platí

1. Sdružená linearita v prvním argumentu:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle.$$

2. Skalární součin s nulovým vektorem je nula:

$$\langle \mathbf{x} | \theta \rangle = \langle \theta | \mathbf{x} \rangle = 0.$$

### Standardní skalární součin

Na  $T^n$  definujeme skalární součin předpisem

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{j=1}^n \overline{x_j} \cdot y_j,$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  jsou vektory z  $T^n$ . Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

### Norma, vzdálenost

Mějme  $V$  VP nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **norma**, pokud pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  a  $\alpha \in T$  platí:

1. norma je vždy nezáporná:

$$\| \mathbf{x} \| \geq 0,$$

2. pouze nulový vektor má nulovou normu:

$$\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta,$$

3. norma je homogenní v absolutní hodnotě:

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

4. platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Pro  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  číslo  $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$  nazýváme **velikostí vektoru  $\mathbf{x}$**  a číslo  $d(x, y) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  nazýváme **vzdáleností vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$** .

## Norma indukovaná skalárním součinem

Ve vektorovém prostoru  $\mathcal{H}$  se skalárním součinem  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  definujeme zobrazení  $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  pro  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  předpisem

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}.$$

Toto zobrazení nazýváme **normou indukovanou skalárním součinem**.

## Věta o korektnosti indukované normy a Schwarzova nerovnost

Zobrazení definované v Definici .reference:dfn-indukovana-norma je normou a splňuje tzv. **Schwarzovu nerovnost**:

Pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathcal{H}$  platí

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

## Eukleidovská norma

Norma indukovaná standardním součinem se nazývá **eukleidovská norma**.

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$  je eukleidovská norma rovna

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

## $p$ -norma

Na  $T^n$  definujeme pro  $p \in \langle 1, \infty \rangle$  tzv.  **$p$ -normu** předpisem: pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$  položíme

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

## Ortogonalita (kolmost)

Nechť  $\mathcal{H}$  je prostor se skalárním součinem a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou vektory z  $\mathcal{H}$ . Vektor  $\mathbf{x}$  nazýváme **ortogonální na** (nebo také **kolmý na**)  $\mathbf{y}$ , právě když

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Soubor vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  z  $\mathcal{H}$  nazveme **ortogonální (OG)**, právě když každý vektor ze souboru je ortogonální na ostatní vektory ze souboru, tj. pro každé  $i, j \in \hat{n}$ ,  $i \neq j$  je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = 0.$$

Soubor vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  z  $\mathcal{H}$  nazveme **ortonormální (ON)**, právě když je ortogonální a každý vektor má velikost 1, tzn. pro každé  $i, j \in \hat{n}$  Je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

## Pythagorova věta

Nechť  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jsou vektory z  $\mathcal{H}$  a  $\mathbf{x}$  je kolmý na  $\mathbf{y}$ . Potom pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Obecněji: Je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  ortogonální soubor z  $\mathcal{H}$ , potom

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2.$$

## Věta o lineární nezávislosti OG souboru

Ortogonální soubor **nenulových** vektorů je LN. Speciálně, každý ortonormální soubor vektorů je LN.

## Fourierovy koeficienty vůči ON bázi

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  je ON báze prehilbertova prostoru  $\mathcal{H}$ , potom pro každé  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$  platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}_i.$$

Neboli

$$(\mathbf{z})_{\mathcal{X}} = (\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z} \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n | \mathbf{z} \rangle).$$

## Ortogonální projekce na přímku

Je-li  $\mathbf{v} \neq \theta$ , zobrazení  $\text{proj}_{\mathbf{v}}$  definované

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \quad \text{pro } \mathbf{z} \in \mathcal{H}$$

se nazývá **ortogonální projekce  $\mathbf{z}$  na přímku  $\langle \mathbf{v} \rangle$** .

## Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{H}$  je LN soubor vektorů. Potom existuje ON soubor  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  vektorů z  $\mathcal{H}$  takový, že pro každé  $k \in \hat{n}$  je

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \rangle.$$