

LA2 Přehled

February 29, 2024

1 Obecný vektorový prostor

Grupa

Nechť M je neprázdná množina a $\circ : M \times M \rightarrow M$ binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon:** $(\forall a, b, c \in M)(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$,
2. existence **neutrálního prvku:** existuje $e \in M$ tak, že $(\forall a \in M)(a \circ e = e \circ a = a)$,
3. existence **inverzních prvků:** $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$,

říkáme, že uspořádaná dvojice $G = (M, \circ)$ je **grupa**.

Platí-li navíc pro \circ

- **komutativní zákon:** $(\forall a, b \in M)(a \circ b = b \circ a)$,

mluvíme o **abelovské grupě**.

Těleso

Nechť M je neprázdná množina a $+: M \times M \rightarrow M$, $\cdot : M \times M \rightarrow M$ dvě binární operace. Platí-li, že

1. $(M, +)$ je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme 0 a nazýváme nulovým prvkem),
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (neutrální prvek značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)(a(b + c) = ab + ac \wedge (b + c)a = ba + ca),$$

nazýváme uspořádanou trojici $T = (M, +, \cdot)$ **tělesem**.

Je-li navíc $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ abelovská grupa, je T **komutativní těleso**.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme 0 , resp. 1 . Mějme danu neprázdnou množinu V a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad \odot : T \times V \rightarrow V.$$

Řekneme, že (V, T, \oplus, \odot) je **vektorový prostor nad tělesem T** s vektorovými operacemi \oplus a \odot , právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}).$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})).$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}).$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})).$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})).$$

6. Neutrální prvek $1 \in T$ je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}).$$

7. Existuje **nulový vektor** ve V a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta).$$

Základní vlastnosti VP

Buď V vektorový prostor nad tělesem T . Potom platí:

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor.

2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta).$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}).$$

4. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta).$$

Tento vektor splňuje $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$, kde -1 je opačný prvek k 1 vůči operaci $+$ v T .

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven 0 nebo vektor roven θ .

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)).$$

Podprostor

Nechť P je podmnožina vektorového prostoru V nad T . Řekneme, že P je **podprostor** vektorového prostoru V , právě když platí:

1. množina P je neprázdná, tzn. $P \neq \emptyset$.
2. množina P je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P),$$

3. Množina P je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P).$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

(Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor V nad T . Nechť $\mathbf{x} \in V$ a $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z V . Říkáme, že vektor \mathbf{x} je **lineární kombinací** souboru $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$ taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Čísla α_i , $i \in \hat{m}$, nazýváme **koefficienty lineární kombinace**. Jestliže $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je LN \Leftrightarrow

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow ((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)) \right).$$

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je LZ \Leftrightarrow

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left(\alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right).$$

Lineární obal souboru

Bud' $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V nad tělesem T . Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru** $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\}.$$

Vlastnosti lineární obalu souboru

Nechť $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad T . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left(\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) \\ \text{a} \\ (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} \text{Je-li } k \in \mathbb{N} \text{ a } \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle, \text{ potom} \\ \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle \text{ je podmnožinou } \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle. \end{aligned}$$

Lineární obal množiny

Bud' M neprázdná podmnožina VP V nad tělesem T . Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny M nazveme **lineárním obalem množiny** M a značíme ji $\langle M \rangle$.

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid m \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V nad T . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$0 \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z M leží v jeho lineárním obalu, přesněji:

$$M \subseteq \langle M \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left(\mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \langle M \cup \{\mathbf{z}\} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle) \\ & \quad \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} & \text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle, \text{ potom} \\ & \quad \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle. \end{aligned}$$

Speciálně:

$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M, \text{ potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle.$$

Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V a $m \geq 2$. Potom $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m}) (\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m \rangle).$$

Přidání vektoru do LN souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ LN soubor vektorů z VP V a $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$. Potom soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$ je také LN.

Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** podprostor $P \subset \subset V$, právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že $P = V$ můžeme zjednodušeně říkat $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ generuje (vektorový) prostor V .

Dimenze VP

Bud' V vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru** V je rovna

- 0 , pokud neexistuje LN soubor vektorů z V délky 1.
- $d \in \mathbb{N}$, pokud existuje LN soubor vektorů z V délky d , ale každý soubor vektorů z V délky $d + 1$ už je LZ.
- ∞ , pokud ve V existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru V označujeme symbolem $\dim V$.

Je-li $\dim V = \infty$, říkáme, že V má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud $\dim V < \infty$ říkáme, že V má **konečnou dimenzi**.

Věta o postačitelnosti jedné vlastnosti báze

Nechť $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je soubor vektorů z VP V a $\dim V = d \in \mathbb{N}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je báze V .
2. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je LN.
3. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ generuje V .

Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je báze VP V nad tělesem T a vektor $\mathbf{v} \in V$ splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v} \in V$ **vzhledem k bázi** \mathcal{B} nazveme uspořádanou d -tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

2 Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $A : P \rightarrow Q$ nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}),$$

2. (homogenita):

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}).$$

Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP P do stejného VP P nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na P .

Množinu všech lineárních operátorů na P značíme krátce $\mathcal{L}(P)$.

Lineární zobrazení z VP P do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na P .

Izomorfismem nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ je báze prostoru V nad T . Přiřazení $(\cdot)_{\mathcal{B}} : V \rightarrow T^n$ definované předpisem

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$

kde $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$ značí souřadnice vektoru \mathbf{x} vůči bázi \mathcal{B} dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

Alternativní vyjádření linearity

Buďte P a Q vektorové prostory nad T a mějme zobrazení $A : P \rightarrow Q$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$

$$(A(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y}).$$

3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in P)$

$$\left(A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{x}_i \right).$$

Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P, Q jsou vektorové prostory nad T .

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v P a Q popořadě θ_P a θ_Q , platí

$$A\theta_P = \theta_Q.$$

2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li $M \subseteq P$, potom

$$A(\langle M \rangle) = \langle A(M) \rangle.$$

Je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P , potom

$$A(\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle) = \langle A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n \rangle.$$

3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{P} \subset\subset P)(A(\tilde{P}) \subset\subset Q).$$

4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q)(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P).$$

5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LZ} \implies (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LZ}.$$

6. *“Předobraz” LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LN} \implies (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LN}.$$

Hodnost, jádro a defekt

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. **Hodností zobrazení** A rozumíme číslo

$$h(A) := \dim A(P).$$

Jádro zobrazení A definujeme jako množinu

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\},$$

a jeho dimenzi nazýváme "defektem zobrazení".^{notion.1} A . Defekt značíme $d(A)$. Tedy

$$d(A) := \dim \ker A.$$

Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom platí:

$$A \text{ je prosté} \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}.$$

LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je "prosté". Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ LN soubor vektorů z P , je také $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$ LN.
2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P takový že $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$ je LZ soubor, potom také soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ LZ.

Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a M podprostor VP P . Potom

1. $\dim A(M) \leq \dim M$.
2. Je-li A prosté zobrazení, potom $\dim A(M) = \dim M$.
3. $h(A) \leq \min\{\dim P, \dim Q\}$.