LA2 Přehled

May 15, 2024

1 Obecný vektorový prostor

Grupa

Nechť M je neprázdná množina a $\circ : M \times M \to M$ binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon**: $(\forall a, b, c \in M)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$,
2. existence **neutrálního prvku**: existuje $e \in M$ tak, že $(\forall a \in M)\big(a \circ e = e \circ a = a\big)$,
3. existence **inverzních prvků**: $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)\big(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e\big)$,

říkáme, že uspořádaná dvojice $G = (M, \circ)$ je **grupa**.
Platí-li navíc pro $\circ$

- **komutativní zákon**: $(\forall a, b \in M)\big(a \circ b = b \circ a\big)$,

mluvíme o **abelovské grupě**.

Těleso

Nechť M je neprázdná množina a $+ : M \times M \to M$, $\cdot : M \times M \to M$ dvě binární operace. Platí-li, že

1. $(M, +)$ je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme 0 a nazýváme nulovým prvkem),
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (neutrální prvek značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)\Big(a(b + c) = ab + ac \wedge (b + c)a = ba + ca\Big),$$

nazýváme uspořádanou trojici $T = (M, +, \cdot)$ **tělesem**.
Je-li navíc $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ abelovská grupa, je T **komutativní těleso**.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme 0, resp. 1. Mějme dánu neprázdnou množinu V a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : T \times V \to V.$$

Řekneme, že $(V, T, \oplus, \odot)$ je **vektorový prostor nad tělesem** T s vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}).$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)\big((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\big).$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}\big).$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)\big(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})\big).$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})\big)\,.$$

6. Neutrální prvek $1 \in T$ je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x})\,.$$

7. Existuje **nulový vektor** ve V a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta)\,.$$

Základní vlastnosti VP

Buď V vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor.
2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta)\,.$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x})\,.$$

4. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta)\,.$$

   Tento vektor splňuje $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$, kde -1 je opačný prvek k 1 vůči operaci $+$ v T.

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven 0 nebo vektor roven θ.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\Big(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)\Big)\,.$$

Podprostor

Nechť P je podmnožina vektorového prostoru V nad T. Řekneme, že P je **podprostor** vektorového prostoru V, právě když platí:

1. množina P je neprázdná, tzn. $P \neq \emptyset$.
2. množina P je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P)\,,$$

3. Množina P je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P)\,.$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

Triviální a vlastní podprostor

Podprostory $\{\theta\}$ a V vektorového prostoru V nazýváme **triviálními podprostory**. Každý podprostor $P \subset\subset V$, pro který současně platí $P \neq V$, nazýváme **vlastním podprostorem**.

(Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor V nad T. Nechť $\mathbf{x} \in V$ a $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor $\mathbf{x}$ je **lineární kombinací** souboru $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T$ taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \,.$$

Čísla α_i, $i \in \hat{m}$, nazýváme **koeficienty lineární kombinace**. Jestliže $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LN $\Leftrightarrow$

$$(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T) \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow \big((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0) \big) \right) .$$

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LZ $\Leftrightarrow$

$$(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left(\alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right) .$$

Lineárně (ne)závislá množina

Buď V vektorový prostor a $\emptyset \neq M \subseteq V$. Množinu M nazveme **lineárně nezávislou (LN)** právě tehdy, když každý soubor různých vektorů z ní je lineárně nezávislý.

Pokud množina M není LN, nazýváme ji **lineárně závislou (LZ)**.

Lineární obal souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru** $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\} .$$

Vlastnosti lineární obalu souboru

Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \,,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V)\Big(\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle\Big)\,,$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle)\big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big)$$
$$\text{a}$$
$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle)\big(\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big).$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

$$\text{Je-li } k \in \mathbb{N} \text{ a } \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\,, \text{ potom}$$
$$\langle \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \rangle \text{ je podmnožinou } \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\,.$$

Lineární obal množiny

Buď M neprázdná podmnožina VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny M nazveme **lineárním obalem množiny** M a značíme ji $\langle M \rangle$.

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:
$$\theta \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z M leží v jeho lineárním obalu, přesněji:

$$M \subseteq \langle M \rangle\,,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:
$$(\forall \mathbf{z} \in V)\Big(\mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \big\langle M \cup \{\mathbf{z}\}\big\rangle\Big)\,,$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\big(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)\big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)$$
$$\text{a}$$
$$(\forall \alpha \in T)\big(\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle\big)\big(\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle\big).$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:

$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle\,, \text{ potom}$$
$$\langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$

   Speciálně:

$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M, \text{ potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$

Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V a $m \geq 2$. Potom $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m})\big(\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big)\,.$$

Přidání vektoru do LN souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ LN soubor vektorů z VP V a $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle$. Potom soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$ je také LN.

Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** podprostor $P \subset\subset V$, právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že $P = V$ můžeme zjednodušeně říkat $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ generuje (vektorový) prostor V.

Dimenze VP

Buď V vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru** V je rovna

- $\mathbf{0}$, pokud neexistuje LN soubor vektorů z V délky 1.
- $\mathbf{d} \in \mathbb{N}$, pokud existuje LN soubor vektorů z V délky d, ale každý soubor vektorů z V délky $d + 1$ už je LZ.
- ∞, pokud ve V existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru V označujeme symbolem $\dim V$.
Je-li $\dim V = \infty$, říkáme, že V má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud $\dim V < \infty$ říkáme, že V **má konečnou dimenzi**.

Věta o postačitelnosti jedné vlastnosti báze

Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je soubor vektorů z VP V a $\dim V = d \in \mathbb{N}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je báze V.
2. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je LN.
3. Soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ generuje V.

Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d)$ je báze VP V nad tělesem T a vektor $\mathbf{v} \in V$ splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathbf{x}_i\,.$$

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v} \in V$ vzhledem k bázi $\mathcal{B}$ nazveme uspořádanou d-tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in T^d\,.$$

2 Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $A : P \to Q$ nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y})\,,$$
2. (homogenita):
$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)\big(A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}\big)\,.$$

Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP P do stejného VP P nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na P.

Množinu všech lineárních operátorů na P značíme krátce $\mathcal{L}(P)$.

Lineární zobrazení z VP P do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na P.

Izomorfismem nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je báze prostoru V nad T. Přiřazení $(\cdot)_\mathcal{B} : V \to T^n$ definované předpisem
$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\mathcal{B} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$
kde $(\mathbf{x})_\mathcal{B}$ značí souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vůči bázi $\mathcal{B}$ dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

Alternativní vyjádření linearity

Buďte P a Q vektorové prostory nad T a mějme zobrazení $A : P \to Q$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$
$$(A(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y})\ .$$
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in P)$
$$\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{x}_i\right).$$

Věta o inverzi a skládání lineárních zobrazení

Mějme P, Q, R vektorové prostory nad stejným tělesem. Potom:

1. Buďte $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $B \in \mathcal{L}(Q, R)$. Potom složené zobrazení BA je také lineární, tj.

$$BA \in \mathcal{L}(P, R)\,.$$

2. Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfismus"Neboli toto lineární zobrazení je navíc bijekce, tedy k němu existuje inverzní zobrazení.".footnote, potom inverzní zobrazení A^{-1} je také lineární, tj.

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)\,.$$

Věta o určení lineárního zobrazení pomocí obrazů báze

Nechť P, Q jsou vektorové prostory nad T. Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ je báze P a nechť $(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ je libovolný soubor vektorů z Q. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(A\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i)\,.$$

Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P, Q jsou vektorové prostory nad T.

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v P a Q popořadě θ_P a θ_Q, platí

$$A\theta_P = \theta_Q\,.$$

2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li $M \subseteq P$, potom

$$A\big(\langle M\rangle\big) = \big\langle A(M)\big\rangle\,.$$

   Je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P , potom

$$A\big(\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\rangle\big) = \langle A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\rangle\,.$$

3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli

$$\big(\forall \tilde{P} \subset\subset P\big)\big(A(\tilde{P}) \subset\subset Q\big)\,.$$

4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli

$$\big(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q\big)\big(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P\big)\,.$$

5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \text{ je } LZ \implies (A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n) \text{ je } LZ.$$

6. *"Předobraz" LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n) \text{ je } LN \implies (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \text{ je } LN.$$

Hodnost, jádro a defekt

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. **Hodností zobrazení** A rozumíme číslo

$$h(A) := \dim A(P)\,.$$

Jádro zobrazení A definujeme jako množinu

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\}\,,$$

a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení** A. Defekt značíme $d(A)$. Tedy

$$d(A) := \dim \ker A\,.$$

2. věta o dimenzi

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Potom

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Věta o vztahu in/sur-jektivity a defektu/hodnosti

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a dimenze $\dim P$ a $\dim Q$ jsou konečné.

1. $$\begin{aligned} A \text{ je injektivní } \;&\Leftrightarrow\; \ker A = \{\theta_P\} \\ \Leftrightarrow\; d(A) = 0 \;&\Leftrightarrow\; h(A) = \dim P, \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} A \text{ je surjektivní } \;&\Leftrightarrow\; A(P) = Q \\ \Leftrightarrow\; \dim A(P) = \dim Q \;&\Leftrightarrow\; h(A) = \dim Q. \end{aligned}$$

Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Potom platí:

$$A \text{ je prosté } \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}\,.$$

LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ je **prosté**. Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ LN soubor vektorů z P, je také $(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n)$ LN.

2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P takový že $(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n)$ je LZ soubor, potom také soubor vzorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ LZ.

Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ a M podprostor VP P. Potom

1. $\dim A(M) \le \dim M$.

2. Je-li A prosté zobrazení, potom $\dim A(M) = \dim M$.

3. $h(A) \le \min\{\dim P, \dim Q\}\,.$

3 Matice lineárního zobrazení

Matice zobrazení vzhledem k bázím

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, buď $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ báze P a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ báze Q. Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$ definovanou po sloupcích předpisem $\forall i \in \hat{n}$:

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)_{:i} := (A\,\mathbf{x}_i)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme **maticí zobrazení** A **vzhledem k bázím** $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$.
Je-li $A \in \mathcal{L}(P)$ lineární operátor, jeho matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ můžeme zkráceně značit ${}^{\mathcal{X}}A$.

Věta o matici složeného zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(Q,V)$, $B \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě báze P, Q, V vektorových prostorů konečné dimenze. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P,V)$ platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} \ .$$

Věta o matici izomorfismu

Je-li $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ izomorfismus, $\dim P, \dim Q < \infty$, $\mathcal{X}$ je báze P a $\mathcal{Y}$ je báze Q, potom je matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární a platí

$$\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}} .$$

Věta o souvislosti hodnosti zobrazení a jeho matice

Nechť $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, $\dim P, Q < \infty$, $\mathcal{X}$ je báze P a $\mathcal{Y}$ je báze Q. Potom platí

$$h(A) = h\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right) .$$

Matice přechodu mezi bázemi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ jsou báze P. Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.

Věta o vlastnostech matice přechodu

Nechť $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou báze P, $\dim P < \infty$. Potom

1. pro libovolné $\mathbf{x} \in P$ platí
$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{x})_{\mathcal{Y}} ,$$
2. matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí
$$\left({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}\right)^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}} ,$$
3. $${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}} .$$

4 Skalární součin

Skalární součin

Buď V VP nad $T = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to T$ nazýváme (obecný) **skalární součin**, platí-li pro všechny vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a každý skalár $\alpha \in T$ následující axiomy:

1. Zobrazení je lineární v druhém argumentu, tj.
$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{x} \mid \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle .$$
2. Platí tzv. *Hermitovská symetrie*:
$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \rangle} .$$
3. Zobrazení je pozitivně definitní, tzn.
$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad \big(\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta \big).$$

Dvojici $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ nazýváme **(vektorovým) prostorem se skalárním součinem** nebo zkráceně jako **prehilbertův prostor** a značíme $\mathcal{H}$.

Základní vlastnosti skalárního součinu

Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$ platí

1. Sdružená linearita v prvním argumentu:
$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} \mid \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \alpha \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{z} \rangle .$$
2. Skalární součin s nulovým vektorem je nula:
$$\langle \mathbf{x} \mid \theta \rangle = \langle \theta \mid \mathbf{x} \rangle = 0 .$$

Standardní skalární součin

Na T^n definujeme skalární součin předpisem
$$\mathbf{x} \centerdot \mathbf{y} := \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot y_j ,$$
kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ jsou vektory z T^n. Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

Norma, vzdálenost

Mějme V VP nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ nazýváme **norma**, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a $\alpha \in T$ platí:

1. norma je vždy nezáporná:
$$\| \mathbf{x} \| \geq 0 ,$$
2. pouze nulový vektor má nulovou normu:
$$\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta ,$$

3. norma je homogenní v absolutní hodnotě:

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|\,,$$

4. platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.$$

Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ číslo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$ nazýváme **velikostí vektoru x** a číslo $d(x,y) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ nazýváme **vzdáleností vektorů x** a **y**.

Norma indukovaná skalárním součinem

Ve vektorovém prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ definujme zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ pro $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ předpisem

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}\,.$$

Toto zobrazení nazýváme **normou indukovanou skalárním součinem**.

Věta o korektnosti indukované normy a Schwarzova nerovnost

Zobrazení definované v Definici .reference:dfn-indukovana-norma je normou a splňuje tzv. **Schwarzovu nerovnost**:

Pro každé $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ z $\mathcal{H}$ platí

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|\,.$$

Eukleidovská norma

Norma indukovaná standardním součinem se nazývá **eukleidovská norma**.

Pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$ je eukleidovská norma rovna

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\overline{x_1}\,x_1 + \cdots + \overline{x_n}\,x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

p-norma

Na T^n definujeme pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ tzv. **p-normu** předpisem: pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in T^n$ položíme

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \Big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty\,, \\ \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\}, & \text{pro } p = \infty\,. \end{cases}$$

Ortogonalita (kolmost)

Nechť $\mathcal{H}$ je prostor se skalárním součinem a $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou vektory z $\mathcal{H}$. Vektor $\mathbf{x}$ nazýváme **ortogonální na** (nebo také **kolmý** na) $\mathbf{y}$, právě když

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0\,.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortogonální (OG)**, právě když každý vektor ze souboru je ortogonální na ostatní vektory ze souboru, tj. pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$ je

$$\langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_j \rangle = 0\,.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ z $\mathcal{H}$ nazveme **ortonormální (ON)**, právě když je ortogonální a každý vektor má velikost 1, tzn. pro každé $i, j \in \hat{n}$ Je

$$\langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j\,, \\ 1 & \text{pro } i = j\,. \end{cases}$$

Pythagorova věta

Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou vektory z $\mathcal{H}$ a $\mathbf{x}$ je kolmý na $\mathbf{y}$. Potom pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Obecněji: Je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ortogonální soubor z $\mathcal{H}$, potom

$$\left\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\right\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2 .$$

Věta o lineární nezávislosti OG souboru

Ortogonální soubor **nenulových** vektorů je LN. Speciálně, každý ortonormální soubor vektorů je LN.

Fourierovy koeficienty vůči ON bázi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ je ON báze prehilbertova prostoru $\mathcal{H}$, potom pro každé $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}_i \mid \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}_i .$$

Neboli

$$(\mathbf{z})_{\mathcal{X}} = \big(\langle \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{z}\rangle, \langle \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{z}\rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n \mid \mathbf{z}\rangle\big) .$$

Ortogonální projekce na přímku

Je-li $\mathbf{v} \neq \theta$, zobrazení $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}$ definované

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \frac{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{z}\rangle}{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} \quad \text{pro } \mathbf{z} \in \mathcal{H}$$

se nazývá **ortogonální projekce z na přímku** $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN soubor vektorů. Potom existuje ON soubor $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ vektorů z $\mathcal{H}$ takový, že pro každé $k \in \hat{n}$ je

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \rangle .$$

Výpočet GSO

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 , \\
\mathbf{z}_2 &= \mathbf{x}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_2) , \\
\mathbf{z}_3 &= \mathbf{x}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_3) - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_3) , \\
&\vdots \\
\mathbf{z}_n &= \mathbf{x}_n - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_n) - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_n) - \dots - \mathrm{proj}_{\mathbf{z}_{n-1}}(\mathbf{x}_n) .
\end{aligned}$$

5 Geometrie $\mathbb{R}^n$

Vzdálenost množin

Pro dvě množiny M a N z $\mathbb{R}^n$ definujeme **vzdálenost** M od N předpisem

$$d(M,N) := \inf \left\{ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \mid \mathbf{x}\in M,\ \mathbf{y}\in N \right\}.$$

Ortogonální doplněk

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$, potom definujeme tzv. **ortogonální doplněk** (značíme $M^\perp$) jako množinu vektorů kolmých na všechny vektory z M, tj.

$$M^\perp := \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{v}\in M)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=0) \right\}.$$

Věta o vzdálenosti a kolmici

Mějme vektor $\mathbf{x}$ a podprostor P v $\mathbb{R}^n$. Existují-li vektory $\mathbf{v}\in P$ a $\mathbf{w}\in P^\perp$ takové, že $\mathbf{x}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, potom

$$d(\mathbf{x},P)=\|\mathbf{w}\|.$$

O vlastnostech ortogonálního doplňku

Je-li P podprostor $\mathbb{R}^n$, potom platí následující.

1. $P^\perp$ je podprostor v $\mathbb{R}^n$.
2. $P\cap P^\perp=\{\theta\}$.
3. Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ lze zapsat jako součet vektoru z P a vektoru z $P^\perp$, neboli

$$(\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)(\exists \mathbf{v}\in P)(\exists \mathbf{w}\in P^\perp)(\mathbf{x}=\mathbf{v}+\mathbf{w}).$$

4. Rozklad vektoru na součet vektorů z P a $P^\perp$ je jednoznačný, neboli

$$\begin{gathered}(\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)(\forall \mathbf{v},\tilde{\mathbf{v}}\in P)(\forall \mathbf{w},\tilde{\mathbf{w}}\in P^\perp)\\ \Big((\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{v}}+\tilde{\mathbf{w}}) \Rightarrow \big(\mathbf{v}=\tilde{\mathbf{v}}\wedge\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{w}}\big)\Big).\end{gathered}$$

Důkaz. Viz cvičení 5.4 a 5.6. □

Ortogonální projekce na podprostor

Je-li soubor $(\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_k)$ OG báze podprostoru P z $\mathbb{R}^n$, potom definujeme **ortogonální projekci na podprostor** P předpisem:

$$\mathrm{proj}_P(\mathbf{z}) := \mathrm{proj}_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{z})+\dots+\mathrm{proj}_{\mathbf{y}_k}(\mathbf{z}) \text{ pro } \mathbf{z}\in\mathbb{R}^n.$$

Věta o vzdálenosti variet

Mějme variety $M=\mathbf{a}+\langle\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\rangle$ a $N=\mathbf{b}+\langle\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_\ell\rangle$, potom

$$d(M,N)=d\big(\mathbf{a}-\mathbf{b},\langle\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_\ell\rangle\big).$$

Rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné variety

Máme-li dvě variety W a U, potom řekneme, že tyto variety jsou

1. **rovnoběžné**, pokud $Z(W) \subseteq Z(U)$ nebo $Z(U) \subseteq Z(W)$,
2. **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a $W \cap U \neq \emptyset$,
3. **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a $W \cap U = \emptyset$.

Úhel mezi vektory

Jsou-li $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ nenulové vektory, potom **úhlem vektorů** $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme číslo

$$\arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Úhel mezi přímkami a nadrovinami

Máme-li dvě přímky $p = \mathbf{a} + \langle \mathbf{u} \rangle$, $q = \mathbf{b} + \langle \mathbf{v} \rangle$ a dvě nadroviny P s normálovým vektorem $\mathbf{n}_P$ a Q s normálovým vektorem $\mathbf{n}_Q$, potom definujeme **úhel mezi**

1. **přímkami** p a q jako
$$\arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}.$$
2. **přímkou** p a **nadrovinou** P jako
$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_P|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{n}_P\|}.$$
3. **nadrovinami** P, Q jako
$$\arccos \frac{|\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{n}_Q|}{\|\mathbf{n}_P\|\|\mathbf{n}_Q\|}.$$

Translace (posunutí) o vektor

Máme-li vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení: Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ položíme

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

nazýváme **translací** o vektor $\mathbf{u}$.

Afinní transformace

Afinní transformace jsou zobrazení ve tvaru

$$T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde A je nějaký lineární operátor z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathbf{u}$ vektor z $\mathbb{R}^n$.

Homogenní souřadnice

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor z $\mathbb{R}^n$, potom $(x_1, \ldots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nazýváme **homogenní souřadnice** vektoru $\mathbf{x}$.

Matice translace

Translace o vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, resp. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, lze reprezentovat pomocí matic

$$T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace

Pro rotace o úhel φ v $\mathbb{R}^2$ je matice rotace s homogenní souřadnicí rovna

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Škálování

Škálování znamená prosté násobení jednotlivých souřadnic číslem. Škálovací matice vypadají takto

$$S_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad S_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Základy numerické matematiky

Přidružená (indukovaná) maticová norma

Mějme normu $\|\cdot\|_{(n)}$ na $\mathbb{R}^n$ a normu $\|\cdot\|_{(m)}$ na $\mathbb{R}^m$, definujeme **přidruženou (indukovanou) maticovou normu** matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ následujícím způsobem

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}}\,.$$

O základních vlastnostech přidružené normy

Zobrazení definované v předchozí definici je normou a platí pro ni

1. Je-li $m = n$ a zvolené normy jsou stejné, potom $\|\mathbf{E}\| = 1$ (zde $\mathbf{E}$ je jednotková matice),
2. $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_{(n)}$ (konzistence normy),
3. $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$.

(Přidružená) maticová p-norma

Pokud v definici maticové normy uvažujeme na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ odpovídající p-normy, nazýváme tuto normu přidruženou (indukovanou) **maticovou p-normou** a značíme ji $\|\mathbf{A}\|_p$. Tedy

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \sup_{\substack{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{z}\|_p=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_p.$$

Věta o speciálních případech přidružené maticové normy

Mějme matici $\mathbf{A}$ z $\mathbb{R}^{m,n}$, která má složky a_{ij}, potom

1. Norma $\|\mathbf{A}\|_1$ je rovna maximu součtu absolutních hodnot ve sloupci, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|\,.$$

2. Norma $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je rovna maximu součtu absolutních hodnot v řádku, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,.$$

3. Norma $\|\mathbf{A}\|_2$ je rovna odmocnině z největšího vlastního čísla matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ i matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

Frobeniova norma

Frobeniovou normou nazýváme normu na $\mathbb{R}^{m,n}$ definovanou předpisem

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Absolutní číslo podmíněnosti

Absolutní číslo podmíněnosti úlohy je definováno

$$\hat{\kappa} = \lim_{r\to 0+} \sup_{\|\Delta x\|\leq r} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|}.$$

Relativní číslo podmíněnosti

Relativní číslo podmíněnosti úlohy je

$$\kappa = \lim_{r \to 0+} \sup_{\|\Delta x\| \le r} \left(\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} \bigg/ \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right).$$

Číslo podmíněnosti matice

Mějme regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Číslo

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

se nazývá **číslo podmíněnosti matice A** vhledem k normě $\| \cdot \|$.

Věta o podmíněnosti řešení soustavy lineárních rovnic

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Změníme-li vektor pravé strany soustavy lineárních rovnic $\mathbf{b}$ o $\Delta \mathbf{b}$, pro změnu řešení $\Delta \mathbf{x}$ platí

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Stabilita algoritmů

Nechť V je nějaký numerický algoritmus, jehož teoretický (přesný) výstup označíme $V^*(x)$, kde x jsou vstupní data. Výsledek výpočtu v konečné (strojové) aritmetice označíme $V(x)$. Označme $\Delta y = V^*(x) - V(x)$.

Tato hodnota je tzv. *dopředná/přímá chyba* (anglicky *forward error*). Je to odchylka spočítaného řešení od přesného řešení.

Nejmenší (v normě) číslo Δx takové, že $V^*(x + \Delta x) = V(x)$ se nazývá *zpětná chyba* (anglicky *backward error*). Jedná se o promítnutí chyby algoritmu V do jeho vstupu.

7 Maticové rozklady

LU rozklad

Mějme matici $\mathbf{A} \in T^{m,m}$. Pokud existuje dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$ s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníková matice $\mathbf{U}$, takové že $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, nazýváme tento součin **LU rozkladem**.

LU rozklad s řádkovou pivotací

Zápis matice $\mathbf{A} \in T^{m,m}$ jako součin

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

kde $\mathbf{P}$ je nějaká permutační matice, $\mathbf{L}$ dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $\mathbf{U}$ horní trojúhelníková matice nazýváme **LU rozkladem s řádkovou pivotací**.

LU rozklad s částečnou pivotací

LU rozklad s řádkovou pivotací matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU},$$

nazveme **LU rozkladem s částečnou pivotací**, pokud pro všechna $i \geq j$ z $\hat{m}$ platí

$$|\mathbf{L}_{ij}| \leq 1\,.$$

Matice s ortonormálními sloupci

Matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$, nazýváme **maticí s ortonormálními sloupci**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{E}_n,$$

kde $\mathbf{E}_n$ je jednotková matice z $\mathbb{R}^{n,n}$, neboli

$$\mathbf{Q}_{:i}^T\mathbf{Q}_{:j} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Ortogonální matice

Čtvercovou matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazýváme **ortogonální**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Transpozice ortogonální matice

Je-li $\mathbf{Q}$ ortogonální matice, je její transpozice $\mathbf{Q}^T$ také ortogonální matice.

Důkaz. Z vlastnosti ortogonální matice a transpozice platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T\mathbf{Q}^T \text{ a } \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\left(\mathbf{Q}^T\right)^T.$$

Tedy $\left(\mathbf{Q}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{Q}^T\right)^T$, a proto je $\mathbf{Q}^T$ dle definice také ortogonální. □

Součin ortogonálních matic

Pro ortogonální matice $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{n,n}, n, k \in \mathbb{N}$, platí, že jejich součin je opět ortogonální matice, neboli

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z vlastnosti ortogonálních matic a z faktu, že transpozice součinu matic je součin transpozic těchto matic, ale v obráceném pořadí:

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \cdots \mathbf{Q}_1^T .$$

Z toho a z vlastností ortogonálních matic získáváme

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k =$$
$$\mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1) \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \, \mathbf{E} \, \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \cdots = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}\,.$$

□

Ortogonální matice zachovávají standardní skalární součin

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Důkaz. Důkaz je přímočarým použitím vlastností ON matic a vlastností standardního skalárního součinu

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{E}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

□

Ortogonální matice zachovávají eukleidovskou normu

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Důkaz. Důkaz je přímočarým použitím vlastností eukleidovské normy a Tvrzení o OG maticích a skalárním součinu.

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2^2 = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

□

Determinant ortogonální matice

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro její determinant platí

$$\det \mathbf{Q}_i = \pm 1.$$

Důkaz. Důkaz plyne z vlastností determinantu součinu matic a transponované matice při aplikaci determinantu na obě strany rovnice ON matic,

$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\right) &= \det(\mathbf{E}),\\
\det\left(\mathbf{Q}^T\right) \det(\mathbf{Q}) &= 1,\\
\det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{Q}) &= 1,\\
(\det(\mathbf{Q}))^2 &= 1,\\
\det(\mathbf{Q}) &= \pm 1.
\end{aligned}$$

□

Vlastní čísla ortogonální matice

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každé její vlastní číslo λ platí

$$|\lambda| = 1.$$

Důkaz. Důkaz plyne z Tvrzení o normě OG matic a homogenity násobení skalárním číslem použitého na rovnici pro vlastní čísla,

$$\begin{aligned} \mathbf{Qx} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \|\mathbf{Qx}\|_2 &= \|\lambda\mathbf{x}\|_2, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= |\lambda|\|\mathbf{x}\|_2, \\ 1 &= |\lambda|. \end{aligned}$$

□

Redukovaný QR rozklad

Mějme $m \geq n$ a matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zápis této matice jako součin

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}},$$

kde $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je matice s ortonormálními sloupci a $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je horní trojúhelníková matice, nazýváme **redukovaný QR rozklad**.

Úplný QR rozklad

Mějme $m \geq n$ a matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Její zápis jako součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR},$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$ je ortogonální matice a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je horní trojúhelníková matice, nazýváme **úplný (kompletní) QR rozklad**.

Věta o existenci QR rozkladu

Každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$ má úplný QR rozklad a tedy i redukovaný QR rozklad.

Věta o jednoznačnosti QR rozkladu

Každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$ s lineárně nezávislými sloupci má jednoznačný redukovaný QR rozklad $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ splňující $r_{jj} > 0$.

Pozitivně definitní matice

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **pozitivně definitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \theta.$$

Pozitivně semidefinitní matice

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Symetrické matice

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je **symetrická**, jestliže je rovna svojí transpozici, tedy $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Věta o symetrických maticích

Buď $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická matice. Potom platí následující:

1. Matice $\mathbf{S}$ je diagonalizovatelná a navíc lze vlastní vektory volit tak, že tvoří ortonormální bázi. Jinými slovy: existuje ortogonální matice $\mathbf{Q}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ tak, že

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T.$$

2. Všechna vlastní čísla matice $\mathbf{S}$ jsou reálná.

3. Je-li matice $\mathbf{S}$ pozitivně semidefinitní, jsou vlastní čísla nezáporná.

4. Je-li matice $\mathbf{S}$ pozitivně definitní, jsou vlastní čísla kladná.