LA2 Přehled

February 27, 2024

1 Obecný vektorový prostor

Grupa

Nechť M je neprázdná množina a $\circ : M \times M \to M$ binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon**: $(\forall a, b, c \in M)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$,
2. existence **neutrálního prvku**: existuje $e \in M$ tak, že $(\forall a \in M)\big(a \circ e = e \circ a = a\big)$,
3. existence **inverzních prvků**: $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)\big(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e\big)$,

říkáme, že uspořádaná dvojice $G = (M, \circ)$ je **grupa**.
Platí-li navíc pro $\circ$

- **komutativní zákon**: $(\forall a, b \in M)\big(a \circ b = b \circ a\big)$,

mluvíme o **abelovské grupě**.

Těleso

Nechť M je neprázdná množina a $+ : M \times M \to M$, $\cdot : M \times M \to M$ dvě binární operace. Platí-li, že

1. $(M, +)$ je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme 0 a nazýváme nulovým prvkem),
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (neutrální prvek značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)\Big(a(b + c) = ab + ac \wedge (b + c)a = ba + ca\Big),$$

nazýváme uspořádanou trojici $T = (M, +, \cdot)$ **tělesem**.
Je-li navíc $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ abelovská grupa, je T **komutativní těleso**.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme 0, resp. 1. Mějme dánu neprázdnou množinu V a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \to V, \qquad \odot : T \times V \to V\,.$$

Řekneme, že $(V, T, \oplus, \odot)$ je **vektorový prostor nad tělesem** T s vektorovými operacemi $\oplus$ a $\odot$, právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x})\,.$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)\big((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})\big)\,.$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}\big)\,.$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)\big(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})\big)\,.$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\big((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})\big)\,.$$

6. Neutrální prvek $1 \in T$ je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x})\,.$$

7. Existuje **nulový vektor** ve V a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta)\,.$$

Základní vlastnosti VP

Buď V vektorový prostor nad tělesem T. Potom platí:

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor.

2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta)\,.$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x})\,.$$

4. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta)\,.$$

   Tento vektor splňuje $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$, kde -1 je opačný prvek k 1 vůči operaci $+$ v T.

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven 0 nebo vektor roven θ.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)\Big(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)\Big)\,.$$

Podprostor

Nechť P je podmnožina vektorového prostoru V nad T. Řekneme, že P je **podprostor** vektorového prostoru V, právě když platí:

1. množina P je neprázdná, tzn. $P \neq \emptyset$.
2. množina P je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P)\,,$$

3. Množina P je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P)\,.$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

(Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor V nad T. Nechť $\mathbf{x} \in V$ a $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z V. Říkáme, že vektor $\mathbf{x}$ je **lineární kombinací** souboru $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T$ taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i\,.$$

Čísla α_i, $i \in \hat{m}$, nazýváme **koeficienty lineární kombinace**. Jestliže $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LN $\Leftrightarrow$

$$(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T)\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow \big((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)\big)\right).$$

- $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je LZ $\Leftrightarrow$

$$(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m})\left(\alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta\right).$$

Lineární obal souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru** $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\}.$$

Vlastnosti lineární obalu souboru

Nechť $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:
$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle,$$
2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:
$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle,$$
3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:
$$(\forall \mathbf{z} \in V)\Big(\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle\Big),$$
4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle)\big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big)$$
a
$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle)\big(\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big).$$
5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:
Je-li $k \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle$, potom $\langle \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k \rangle$ je podmnožinou $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle$.

Lineární obal množiny

Buď M neprázdná podmnožina VP V nad tělesem T. Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny M nazveme **lineárním obalem množiny** M a značíme ji $\langle M \rangle$.

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in T \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V nad T. Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:
$$\theta \in \langle M \rangle,$$
2. vektory z M leží v jeho lineárním obalu, přesněji:
$$M \subseteq \langle M \rangle\,,$$
3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:
$$(\forall \mathbf{z} \in V)\Big(\mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \big\langle M \cup \{\mathbf{z}\}\big\rangle\Big)\,,$$
4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:
$$\big(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)\big(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle\big)$$
a
$$(\forall \alpha \in T)\big(\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle\big)\big(\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle\big).$$
5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:
$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle\,, \text{ potom}$$
$$\langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$
Speciálně:
$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M, \text{ potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle\,.$$

Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V a $m \geq 2$. Potom $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m})\big(\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle\big)\,.$$

Přidání vektoru do LN souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ LN soubor vektorů z VP V a $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle$. Potom soubor $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$ je také LN.

Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** podprostor $P \subset\subset V$, právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že $P = V$ můžeme zjednodušeně říkat $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ generuje (vektorový) prostor V.