

# LA2 Přehled

June 2, 2024

# 1 Obecný vektorový prostor

## Grupa

Nechť  $M$  je neprázdná množina a  $\circ : M \times M \rightarrow M$  binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon:**  $(\forall a, b, c \in M)(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$ ,
2. existence **neutrálního prvku:** existuje  $e \in M$  tak, že  $(\forall a \in M)(a \circ e = e \circ a = a)$ ,
3. existence **inverzních prvků:**  $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$ ,

říkáme, že uspořádaná dvojice  $G = (M, \circ)$  je **grupa**.

Platí-li navíc pro  $\circ$

- **komutativní zákon:**  $(\forall a, b \in M)(a \circ b = b \circ a)$ ,

mluvíme o **abelovské grupě**.

## Těleso

Nechť  $M$  je neprázdná množina a  $+: M \times M \rightarrow M$ ,  $\cdot : M \times M \rightarrow M$  dvě binární operace. Platí-li, že

1.  $(M, +)$  je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme  $0$  a nazýváme nulovým prvkem),
2.  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  je grupa (neutrální prvek značíme  $1$  a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)(a(b+c) = ab+ac \wedge (b+c)a = ba+ca),$$

nazýváme uspořádanou trojici  $T = (M, +, \cdot)$  **tělesem**.

Je-li navíc  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  abelovská grupa, je  $T$  **komutativní těleso**.

## Vektorový prostor

Nechť  $T$  je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme  $0$ , resp.  $1$ . Mějme dále neprázdnou množinu  $V$  a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad \odot : T \times V \rightarrow V.$$

Řekneme, že  $(V, T, \oplus, \odot)$  je **vektorový prostor nad tělesem  $T$**  s vektorovými operacemi  $\oplus$  a  $\odot$ , právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}).$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})).$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}).$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})).$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})).$$

6. Neutrální prvek  $1 \in T$  je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}).$$

7. Existuje **nulový vektor** ve  $V$  a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta).$$

## Základní vlastnosti VP

Buď  $V$  vektorový prostor nad tělesem  $T$ . Potom platí:

1. Ve  $V$  existuje právě jeden nulový vektor.
2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta).$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}).$$

4. Ke každému vektoru z  $V$  existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta).$$

Tento vektor splňuje  $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$ , kde  $-1$  je opačný prvek k  $1$  vůči operaci  $+$  v  $T$ .

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven  $0$  nebo vektor roven  $\theta$ .

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)).$$

## Podprostor

Nechť  $P$  je podmnožina vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Řekneme, že  $P$  je **podprostor** vektorového prostoru  $V$ , právě když platí:

1. množina  $P$  je neprázdná, tzn.  $P \neq \emptyset$ .
2. množina  $P$  je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P),$$

3. Množina  $P$  je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P).$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset \subset V.$$

## Triviální a vlastní podprostor

Podprostory  $\{\theta\}$  a  $V$  vektorového prostoru  $V$  nazýváme **triviálními podprostory**. Každý podprostor  $P \subset \subset V$ , pro který současně platí  $P \neq V$ , nazýváme **vlastním podprostorem**.

## (Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor  $V$  nad  $T$ . Necht'  $\mathbf{x} \in V$  a  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je soubor vektorů z  $V$ . Říkáme, že vektor  $\mathbf{x}$  je **lineární kombinací** souboru  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ , právě když existují čísla  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$  taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Čísla  $\alpha_i$ ,  $i \in \hat{m}$ , nazýváme **koefficienty lineární kombinace**. Jestliže  $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$ , nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

## Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je LN  $\Leftrightarrow$

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T) \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow ((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)) \right).$$

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je LZ  $\Leftrightarrow$

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left( \alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right).$$

## Lineárně (ne)závislá množina

Buď  $V$  vektorový prostor a  $\emptyset \neq M \subseteq V$ . Množinu  $M$  nazveme **lineárně nezávislou (LN)** právě tehdy, když každý soubor různých vektorů z ní je lineárně nezávislý.

Pokud množina  $M$  není LN, nazýváme ji **lineárně závislou (LZ)**.

## Lineární obal souboru

Buď  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  soubor vektorů z VP  $V$  nad tělesem  $T$ . Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru**  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\}.$$

## Vlastnosti lineární obalu souboru

Necht'  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je soubor vektorů z vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left( \mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) \\ & \quad \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} & \text{Je-li } k \in \mathbb{N} \text{ a } \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle, \text{ potom} \\ & \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle \text{ je podmnožinou } \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle. \end{aligned}$$

## Lineární obal množiny

Buď  $M$  neprázdná podmnožina VP  $V$  nad tělesem  $T$ . Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny  $M$  nazveme **lineárním obalem množiny**  $M$  a značíme ji  $\langle M \rangle$ .

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid m \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T \right\}.$$

## Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť  $M$  je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru  $V$  nad  $T$ . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\mathbf{0} \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z  $M$  leží v jeho lineárním obalu, přesněji:

$$M \subseteq \langle M \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left( \mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \langle M \cup \{\mathbf{z}\} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle) \\ & \quad \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} & \text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle, \text{ potom} \\ & \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle. \end{aligned}$$

Speciálně:

$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M, \text{ potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle.$$

## Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  soubor vektorů z VP  $V$  a  $m \geq 2$ . Potom  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m})(\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m \rangle).$$

## Přidání vektoru do LN souboru

Buď  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  LN soubor vektorů z VP  $V$  a  $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$ . Potom soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$  je také LN.

## Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  z vektorového prostoru  $V$  řekneme, že **generuje** podprostor  $P \subset V$ , právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že  $P = V$  můžeme zjednodušeně říkat  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  generuje (vektorový) prostor  $V$ .

## Dimenze VP

Buď  $V$  vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru**  $V$  je rovna

- $0$ , pokud neexistuje LN soubor vektorů z  $V$  délky 1.
- $d \in \mathbb{N}$ , pokud existuje LN soubor vektorů z  $V$  délky  $d$ , ale každý soubor vektorů z  $V$  délky  $d + 1$  už je LZ.
- $\infty$ , pokud ve  $V$  existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru  $V$  označujeme symbolem  $\dim V$ .

Je-li  $\dim V = \infty$ , říkáme, že  $V$  má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud  $\dim V < \infty$  říkáme, že  $V$  má **konečnou dimenzi**.

## Věta o postačitelosti jedné vlastnosti báze

Nechť  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je soubor vektorů z VP  $V$  a  $\dim V = d \in \mathbb{N}$ . Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je báze  $V$ .
2. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je LN.
3. Soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  generuje  $V$ .

## Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť  $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$  je báze VP  $V$  nad tělesem  $T$  a vektor  $\mathbf{v} \in V$  splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

**Souřadnicemi vektoru**  $\mathbf{v} \in V$  **vzhledem k bázi**  $\mathcal{B}$  nazveme uspořádanou  $d$ -tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

## 2 Lineární zobrazení

### Lineární zobrazení

Buďte  $P$  a  $Q$  dva vektorové prostory nad stejným tělesem  $T$ . Zobrazení  $A : P \rightarrow Q$  nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}),$$

2. (homogenita):

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}).$$

### Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP  $P$  do stejného VP  $P$  nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na  $P$ .

Množinu všech lineárních operátorů na  $P$  značíme krátce  $\mathcal{L}(P)$ .

Lineární zobrazení z VP  $P$  do tělesa  $T$  nazýváme **lineární funkcionál** na  $P$ .

**Izomorfismem** nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

### Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor  $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  je báze prostoru  $V$  nad  $T$ . Přiřazení  $(\cdot)_{\mathcal{B}} : V \rightarrow T^n$  definované předpisem

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$

kde  $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$  značí souřadnice vektoru  $\mathbf{x}$  vůči bázi  $\mathcal{B}$  dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

### Alternativní vyjádření linearity

Buďte  $P$  a  $Q$  vektorové prostory nad  $T$  a mějme zobrazení  $A : P \rightarrow Q$ . Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1.  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ .
2.  $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$

$$(A(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y}).$$

3.  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in P)$

$$\left( A \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{x}_i \right).$$

## Věta o inverzi a skládání lineárních zobrazení

Mějme  $P, Q, R$  vektorové prostory nad stejným tělesem. Potom:

1. Buďte  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  a  $B \in \mathcal{L}(Q, R)$ . Potom složené zobrazení  $BA$  je také lineární, tj.

$$BA \in \mathcal{L}(P, R).$$

2. Je-li  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  izomorfismus, neboli toto lineární zobrazení je navíc bijekce, tedy k němu existuje inverzní zobrazení. Potom inverzní zobrazení  $A^{-1}$  je také lineární, tj.

$$A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P).$$

## Věta o určení lineárního zobrazení pomocí obrazů báze

Nechť  $P, Q$  jsou vektorové prostory nad  $T$ . Nechť  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  je báze  $P$  a nechť  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  je libovolný soubor vektorů z  $Q$ . Potom existuje právě jedno lineární zobrazení  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  takové, že

$$(\forall i \in \hat{n})(A\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i).$$

## Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ , kde  $P, Q$  jsou vektorové prostory nad  $T$ .

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v  $P$  a  $Q$  popořadě  $\theta_P$  a  $\theta_Q$ , platí

$$A\theta_P = \theta_Q.$$

2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li  $M \subseteq P$ , potom

$$A(\langle M \rangle) = \langle A(M) \rangle.$$

Je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  soubor vektorů z  $P$ , potom

$$A(\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle) = \langle A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n \rangle.$$

3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{P} \subset\subset P)(A(\tilde{P}) \subset\subset Q).$$

4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q)(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P).$$

5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  platí

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LZ} \implies (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LZ}.$$

6. *“Předobraz” LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  platí

$$(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LN} \implies (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LN}.$$



## Hodnost, jádro a defekt

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . **Hodností zobrazení**  $A$  rozumíme číslo

$$h(A) := \dim A(P).$$

**Jádro zobrazení**  $A$  definujeme jako množinu

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\},$$

a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení**  $A$ . Defekt značíme  $d(A)$ . Tedy

$$d(A) := \dim \ker A.$$

## 2. věta o dimenzi

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . Potom

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

## Věta o vztahu in/sur-jektivit a defektu/hodnosti

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  a dimenze  $\dim P$  a  $\dim Q$  jsou konečné.

1.

$$\begin{aligned} A \text{ je injektivní} &\Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\} \\ &\Leftrightarrow d(A) = 0 \Leftrightarrow h(A) = \dim P, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \text{ je surjektivní} &\Leftrightarrow A(P) = Q \\ &\Leftrightarrow \dim A(P) = \dim Q \Leftrightarrow h(A) = \dim Q. \end{aligned}$$

## Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ . Potom platí:

$$A \text{ je prosté} \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}.$$

## LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  je **prosté**. Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  LN soubor vektorů z  $P$ , je také  $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$  LN.
2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  soubor vektorů z  $P$  takový že  $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$  je LZ soubor, potom také soubor vzorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  LZ.

## Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  a  $M$  podprostor VP  $P$ . Potom

1.  $\dim A(M) \leq \dim M$ .
2. Je-li  $A$  prosté zobrazení, potom  $\dim A(M) = \dim M$ .
3.  $h(A) \leq \min\{\dim P, \dim Q\}$ .

### 3 Matice lineárního zobrazení

#### Matice zobrazení vzhledem k bázím

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ , buď  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  báze  $P$  a  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$  báze  $Q$ . Matici  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$  definovanou po sloupcích předpisem  $\forall i \in \hat{n}$ :

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:i} := (A\mathbf{x}_i)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme **maticí zobrazení  $A$  vzhledem k bázím  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$** .

Je-li  $A \in \mathcal{L}(P)$  lineární operátor, jeho matici zobrazení  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$  můžeme zkráceně značit  ${}^{\mathcal{X}}A$ .

#### Věta o matici složeného zobrazení

Nechť  $A \in \mathcal{L}(Q, V)$ ,  $B \in \mathcal{L}(P, Q)$  a  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$  jsou popořadě báze  $P, Q, V$  vektorových prostorů konečné dimenze. Potom pro matici složeného zobrazení  $AB \in \mathcal{L}(P, V)$  platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

#### Věta o matici izomorfismu

Je-li  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$  izomorfismus,  $\dim P, \dim Q < \infty$ ,  $\mathcal{X}$  je báze  $P$  a  $\mathcal{Y}$  je báze  $Q$ , potom je matice  ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$  regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$

#### Věta o souvislosti hodnoty zobrazení a jeho matice

Nechť  $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ ,  $\dim P, \dim Q < \infty$ ,  $\mathcal{X}$  je báze  $P$  a  $\mathcal{Y}$  je báze  $Q$ . Potom platí

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

#### Matice přechodu mezi bázemi

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  a  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  jsou báze  $P$ . Matici identického operátoru  ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$  nazýváme **maticí přechodu** od báze  $\mathcal{X}$  k bázi  $\mathcal{Y}$ .

#### Věta o vlastnostech matice přechodu

Nechť  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  a  $\mathcal{Z}$  jsou báze  $P$ ,  $\dim P < \infty$ . Potom

1. pro libovolné  $\mathbf{x} \in P$  platí

$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{x})_{\mathcal{Y}},$$

2. matice  ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$  je regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}},$$

- 3.

$${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}.$$

## 4 Skalární součin

### Skalární součin

Buď  $V$  VP nad  $T = \mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$  nazýváme (obecný) **skalární součin**, platí-li pro všechny vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  a každý skalár  $\alpha \in T$  následující axiomy:

1. Zobrazení je lineární v druhém argumentu, tj.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle.$$

2. Platí tzv. *Hermitovská symetrie*:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}.$$

3. Zobrazení je pozitivně definitní, tzn.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad (\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta).$$

Dvojici  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  nazýváme (**vektorovým**) **prostorem se skalárním součinem** nebo zkráceně jako **prehilbertův prostor** a značíme  $\mathcal{H}$ .

### Základní vlastnosti skalárního součinu

Pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$  a  $\alpha \in T$  platí

1. Sdružená linearita v prvním argumentu:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle.$$

2. Skalární součin s nulovým vektorem je nula:

$$\langle \mathbf{x} | \theta \rangle = \langle \theta | \mathbf{x} \rangle = 0.$$

### Standardní skalární součin

Na  $T^n$  definujeme skalární součin předpisem

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{j=1}^n \overline{x_j} \cdot y_j,$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  jsou vektory z  $T^n$ . Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

### Norma, vzdálenost

Mějme  $V$  VP nad  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{C}$ . Zobrazení  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **norma**, pokud pro libovolné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  a  $\alpha \in T$  platí:

1. norma je vždy nezáporná:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0,$$

2. pouze nulový vektor má nulovou normu:

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta,$$

3. norma je homogenní v absolutní hodnotě:

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

4. platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Pro  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  číslo  $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$  nazýváme **velikostí vektoru  $\mathbf{x}$**  a číslo  $d(x, y) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  nazýváme **vzdáleností vektorů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$** .

## Norma indukovaná skalárním součinem

Ve vektorovém prostoru  $\mathcal{H}$  se skalárním součinem  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  definujeme zobrazení  $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  pro  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  předpisem

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}.$$

Toto zobrazení nazýváme **normou indukovanou skalárním součinem**.

## Věta o korektnosti indukované normy a Schwarzova nerovnost

Zobrazení definované v Definici .reference:dfn-indukovana-norma je normou a splňuje tzv. **Schwarzovu nerovnost**:

Pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  z  $\mathcal{H}$  platí

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

## Eukleidovská norma

Norma indukovaná standardním součinem se nazývá **eukleidovská norma**.

Pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$  je eukleidovská norma rovna

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

## $p$ -norma

Na  $T^n$  definujeme pro  $p \in \langle 1, \infty \rangle$  tzv.  **$p$ -normu** předpisem: pro  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$  položíme

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

## Ortogonalita (kolmost)

Nechť  $\mathcal{H}$  je prostor se skalárním součinem a  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou vektory z  $\mathcal{H}$ . Vektor  $\mathbf{x}$  nazýváme **ortogonální na** (nebo také **kolmý na**)  $\mathbf{y}$ , právě když

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Soubor vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  z  $\mathcal{H}$  nazveme **ortogonální (OG)**, právě když každý vektor ze souboru je ortogonální na ostatní vektory ze souboru, tj. pro každé  $i, j \in \hat{n}$ ,  $i \neq j$  je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = 0.$$

Soubor vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  z  $\mathcal{H}$  nazveme **ortonormální (ON)**, právě když je ortogonální a každý vektor má velikost 1, tzn. pro každé  $i, j \in \hat{n}$  Je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

## Pythagorova věta

Nechť  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jsou vektory z  $\mathcal{H}$  a  $\mathbf{x}$  je kolmý na  $\mathbf{y}$ . Potom pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Obecněji: Je-li  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  ortogonální soubor z  $\mathcal{H}$ , potom

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2.$$

## Věta o lineární nezávislosti OG souboru

Ortogonální soubor **nenulových** vektorů je LN. Speciálně, každý ortonormální soubor vektorů je LN.

## Fourierovy koeficienty vůči ON bázi

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  je ON báze prehilbertova prostoru  $\mathcal{H}$ , potom pro každé  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$  platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}_i.$$

Neboli

$$(\mathbf{z})_{\mathcal{X}} = (\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z} \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n | \mathbf{z} \rangle).$$

## Ortogonální projekce na přímku

Je-li  $\mathbf{v} \neq \theta$ , zobrazení  $\text{proj}_{\mathbf{v}}$  definované

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \quad \text{pro } \mathbf{z} \in \mathcal{H}$$

se nazývá **ortogonální projekce  $\mathbf{z}$  na přímku  $\langle \mathbf{v} \rangle$** .

## Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Nechť  $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{H}$  je LN soubor vektorů. Potom existuje ON soubor  $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  vektorů z  $\mathcal{H}$  takový, že pro každé  $k \in \hat{n}$  je

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \rangle.$$

## Výpočet GSO

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{x}_2 - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_2), \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{x}_3 - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_3) - \text{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_3), \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{x}_n - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_n) - \text{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_n) - \dots - \text{proj}_{\mathbf{z}_{n-1}}(\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

## 5 Geometrie $\mathbb{R}^n$

### Vzdálenost množin

Pro dvě množiny  $M$  a  $N$  z  $\mathbb{R}^n$  definujeme **vzdálenost**  $M$  od  $N$  předpisem

$$d(M, N) := \inf \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N \}.$$

### Ortogonalní doplněk

Je-li  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , potom definujeme tzv. **ortogonalní doplněk** (značíme  $M^\perp$ ) jako množinu vektorů kolmých na všechny vektory z  $M$ , tj.

$$M^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{v} \in M)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0) \}.$$

### Věta o vzdálenosti a kolmici

Mějme vektor  $\mathbf{x}$  a podprostor  $P$  v  $\mathbb{R}^n$ . Existují-li vektory  $\mathbf{v} \in P$  a  $\mathbf{w} \in P^\perp$  takové, že  $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ , potom

$$d(\mathbf{x}, P) = \|\mathbf{w}\|.$$

### O vlastnostech ortogonalního doplňku

Je-li  $P$  podprostor  $\mathbb{R}^n$ , potom platí následující.

1.  $P^\perp$  je podprostor v  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $P \cap P^\perp = \{\theta\}$ .
3. Každý vektor z  $\mathbb{R}^n$  lze zapsat jako součet vektoru z  $P$  a vektoru z  $P^\perp$ , neboli

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\exists \mathbf{v} \in P)(\exists \mathbf{w} \in P^\perp)(\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

4. Rozklad vektoru na součet vektorů z  $P$  a  $P^\perp$  je jednoznačný, neboli

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\forall \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in P)(\forall \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}} \in P^\perp) \\ \left( (\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{w}}) \Rightarrow (\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}) \right).$$

*Důkaz.* Viz cvičení 5.4 a 5.6. □

### Ortogonalní projekce na podprostor

Je-li soubor  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$  OG báze podprostoru  $P$  z  $\mathbb{R}^n$ , potom definujeme **ortogonalní projekci na podprostor  $P$**  předpisem:

$$\text{proj}_P(\mathbf{z}) := \text{proj}_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{z}) + \dots + \text{proj}_{\mathbf{y}_k}(\mathbf{z}) \text{ pro } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

### Věta o vzdálenosti variet

Mějme variety  $M = \mathbf{a} + \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$  a  $N = \mathbf{b} + \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell \rangle$ , potom

$$d(M, N) = d(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell \rangle).$$

## Rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné variety

Máme-li dvě variety  $W$  a  $U$ , potom řekneme, že tyto variety jsou

1. **rovnoběžné**, pokud  $Z(W) \subseteq Z(U)$  nebo  $Z(U) \subseteq Z(W)$ ,
2. **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a  $W \cap U \neq \emptyset$ ,
3. **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a  $W \cap U = \emptyset$ .

## Úhel mezi vektory

Jsou-li  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  nenulové vektory, potom **úhlem vektorů**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  nazýváme číslo

$$\arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

## Úhel mezi přímkami a nadrovinami

Máme-li dvě přímky  $p = \mathbf{a} + \langle \mathbf{u} \rangle$ ,  $q = \mathbf{b} + \langle \mathbf{v} \rangle$  a dvě nadroviny  $P$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}_P$  a  $Q$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}_Q$ , potom definujeme **úhel mezi**

1. **přímkami**  $p$  a  $q$  jako

$$\arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

2. **přímkou**  $p$  a **nadrovinou**  $P$  jako

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_P|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{n}_P\|}.$$

3. **nadrovinami**  $P, Q$  jako

$$\arccos \frac{|\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{n}_Q|}{\|\mathbf{n}_P\| \|\mathbf{n}_Q\|}.$$

## Translace (posunutí) o vektor

Máme-li vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , potom zobrazení: Pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  položíme

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

nazýváme **translací** o vektor  $\mathbf{u}$ .

## Afinní transformace

**Afinní transformace** jsou zobrazení ve tvaru

$$T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde  $A$  je nějaký lineární operátor z  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  a  $\mathbf{u}$  vektor z  $\mathbb{R}^n$ .

## Homogenní souřadnice

Je-li  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  vektor z  $\mathbb{R}^n$ , potom  $(x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  nazýváme **homogenní souřadnice** vektoru  $\mathbf{x}$ .

## Matice translace

Translace o vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , resp.  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , lze reprezentovat pomocí matic

$$T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Rotace

Pro rotace o úhel  $\varphi$  v  $\mathbb{R}^2$  je matice rotace s homogenní souřadnicí rovna

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Škálování

Škálování znamená prosté násobení jednotlivých souřadnic číslem. Škálovací matice vypadají takto

$$S_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad S_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## 6 Základy numerické matematiky

### Přidružená (indukovaná) maticová norma

Mějme normu  $\|\cdot\|_{(n)}$  na  $\mathbb{R}^n$  a normu  $\|\cdot\|_{(m)}$  na  $\mathbb{R}^m$ , definujeme **přidruženou (indukovanou) maticovou normu** matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$  následujícím způsobem

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}}.$$

### O základních vlastnostech přidružené normy

Zobrazení definované v předchozí definici je normou a platí pro ni

1. Je-li  $m = n$  a zvolené normy jsou stejné, potom  $\|\mathbf{E}\| = 1$  (zde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice),
2.  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_{(n)}$  (konzistence normy),
3.  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ .

### (Přidružená) maticová $p$ -norma

Pokud v definici maticové normy uvažujeme na  $\mathbb{R}^n$  i  $\mathbb{R}^m$  odpovídající  $p$ -normy, nazýváme tuto normu přidruženou (indukovanou) **maticovou  $p$ -normou** a značíme ji  $\|\mathbf{A}\|_p$ . Tedy

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{z}\|_p=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_p.$$

### Věta o speciálních případech přidružené maticové normy

Mějme matici  $\mathbf{A}$  z  $\mathbb{R}^{m,n}$ , která má složky  $a_{ij}$ , potom

1. Norma  $\|\mathbf{A}\|_1$  je rovna maximu součtu absolutních hodnot ve sloupci, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

2. Norma  $\|\mathbf{A}\|_\infty$  je rovna maximu součtu absolutních hodnot v řádku, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. Norma  $\|\mathbf{A}\|_2$  je rovna odmocnině z největšího vlastního čísla matice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  i matice  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ .

### Frobeniova norma

**Frobeniovou normou** nazýváme normu na  $\mathbb{R}^{m,n}$  definovanou předpisem

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### Absolutní číslo podmíněnosti

Absolutní číslo podmíněnosti úlohy je definováno

$$\hat{\kappa} = \lim_{r \rightarrow 0+} \sup_{\|\Delta x\| \leq r} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|}.$$

## Relativní číslo podmíněnosti

Relativní číslo podmíněnosti úlohy je

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{\|\Delta x\| \leq r} \left( \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} / \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right).$$

## Číslo podmíněnosti matice

Mějme regulární matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Číslo

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

se nazývá **číslo podmíněnosti matice  $\mathbf{A}$**  vzhledem k normě  $\|\cdot\|$ .

## Věta o podmíněnosti řešení soustavy lineárních rovnic

Mějme matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Změníme-li vektor pravé strany soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{b}$  o  $\Delta \mathbf{b}$ , pro změnu řešení  $\Delta \mathbf{x}$  platí

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

## Stabilita algoritmů

Nechť  $V$  je nějaký numerický algoritmus, jehož teoretický (přesný) výstup označíme  $V^*(x)$ , kde  $x$  jsou vstupní data. Výsledek výpočtu v konečné (strojové) aritmetice označíme  $V(x)$ . Označme  $\Delta y = V^*(x) - V(x)$ .

Tato hodnota je tzv. *dopředná/přímá chyba* (anglicky *forward error*). Je to odchylka spočítaného řešení od přesného řešení.

Nejmenší (v normě) číslo  $\Delta x$  takové, že  $V^*(x + \Delta x) = V(x)$  se nazývá *zpětná chyba* (anglicky *backward error*). Jedná se o promítnutí chyby algoritmu  $V$  do jeho vstupu.

## 7 Maticové rozklady

### LU rozklad

Mějme matici  $\mathbf{A} \in T^{m,m}$ . Pokud existuje dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{L}$  s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníková matice  $\mathbf{U}$ , takové že  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , nazýváme tento součin **LU rozkladem**.

### LU rozklad s řádkovou pivotací

Zápis matice  $\mathbf{A} \in T^{m,m}$  jako součin

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

kde  $\mathbf{P}$  je nějaká permutační matice,  $\mathbf{L}$  dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a  $\mathbf{U}$  horní trojúhelníková matice nazýváme **LU rozkladem s řádkovou pivotací**.

### LU rozklad s částečnou pivotací

LU rozklad s řádkovou pivotací matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

nazveme **LU rozkladem s částečnou pivotací**, pokud pro všechna  $i \geq j$  z  $\hat{m}$  platí

$$|\mathbf{L}_{ij}| \leq 1.$$

### Matice s ortonormálními sloupci

Matice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $m \geq n$ , nazýváme **maticí s ortonormálními sloupci**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{E}_n,$$

kde  $\mathbf{E}_n$  je jednotková matice z  $\mathbb{R}^{n,n}$ , neboli

$$\mathbf{Q}_{:i}^T \mathbf{Q}_{:j} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

### Ortogonalní matice

Čtvercovou matici  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$  nazýváme **ortogonální**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

### Transpozice ortogonální matice

Je-li  $\mathbf{Q}$  ortogonální matice, je její transpozice  $\mathbf{Q}^T$  také ortogonální matice.

*Důkaz.* Z vlastností ortogonální matice a transpozice platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}^T)^T \mathbf{Q}^T \text{ a } \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}^T)^T.$$

Tedy  $(\mathbf{Q}^T)^{-1} = (\mathbf{Q}^T)^T$ , a proto je  $\mathbf{Q}^T$  dle definice také ortogonální. □

## Součin ortogonálních matic

Pro ortogonální matice  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , platí, že jejich součin je opět ortogonální matice, neboli

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}.$$

*Důkaz.* Tvrzení plyne z vlastností ortogonálních matic a z faktu, že transpozice součinu matic je součin transpozic těchto matic, ale v obráceném pořadí:

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \cdots \mathbf{Q}_1^T.$$

Z toho a z vlastností ortogonálních matic získáváme

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \\ \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1) \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \cdots = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

□

## Ortogonální matice zachovávají standardní skalární součin

Je-li  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$  ortogonální matice, pak pro každé dva vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

*Důkaz.* Důkaz je přímočarým použitím vlastností ON matic a vlastností standardního skalárního součinu

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

□

## Ortogonální matice zachovávají eukleidovskou normu

Je-li  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$  ortogonální matice, pak pro každý vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

*Důkaz.* Důkaz je přímočarým použitím vlastností eukleidovské normy a Tvrzení o OG maticích a skalárním součinu.

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2^2 = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

□

## Determinant ortogonální matice

Je-li  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$  ortogonální matice, pak pro její determinant platí

$$\det \mathbf{Q}_i = \pm 1.$$

*Důkaz.* Důkaz plyne z vlastností determinantu součinu matic a transponované matice při aplikaci determinantu na obě strany rovnice ON matic,

$$\begin{aligned} \det (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) &= \det (\mathbf{E}), \\ \det (\mathbf{Q}^T) \det (\mathbf{Q}) &= 1, \\ \det (\mathbf{Q}) \det (\mathbf{Q}) &= 1, \\ (\det (\mathbf{Q}))^2 &= 1, \\ \det (\mathbf{Q}) &= \pm 1. \end{aligned}$$

□

## Vlastní čísla ortogonální matice

Je-li  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$  ortogonální matice, pak pro každé její vlastní číslo  $\lambda$  platí

$$|\lambda| = 1.$$

*Důkaz.* Důkaz plyne z Tvzení o normě OG matic a homogenity násobení skalárním číslem použitého na rovnici pro vlastní čísla,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 &= \|\lambda\mathbf{x}\|_2, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= |\lambda|\|\mathbf{x}\|_2, \\ 1 &= |\lambda|.\end{aligned}$$

□

## Redukovaný QR rozklad

Mějme  $m \geq n$  a matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ . Zápís této matice jako součin

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}},$$

kde  $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{m,n}$  je matice s ortonormálními sloupci a  $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je horní trojúhelníková matice, nazýváme **redukovaný QR rozklad**.

## Úplný QR rozklad

Mějme  $m \geq n$  a matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ . Její zápis jako součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

kde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$  je ortogonální matice a  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$  je horní trojúhelníková matice, nazýváme **úplný (kompletní) QR rozklad**.

## Souvislost QR rozkladu a GSO

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Věta o existenci QR rozkladu

Každá matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$  má úplný QR rozklad a tedy i redukovaný QR rozklad.

## Věta o jednoznačnosti QR rozkladu

Každá matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$  s lineárně nezávislými sloupci má jednoznačný redukovaný QR rozklad  $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$  splňující  $r_{jj} > 0$ .

## Householderova triangularizace

Máme-li QR rozklad

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

tak vlastně platí

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{R},$$

Chceme najít ortogonální matice  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_k$ , které postupně zvyšují počet nul pod diagonálou:

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q}_1} \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q}_2} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{Q}_3} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A} \qquad \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \qquad \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \qquad \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A}$

## Householderův reflektor

Hledaná ortogonální matice zachová prvních  $k - 1$  řádků, bude mít tvar

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{k-1} & \\ & \mathbf{F} \end{pmatrix}.$$

Označme si sloupec matice od diagonály dolů, který chceme vynulovat, jako  $\mathbf{x}$ . Hledáme  $\mathbf{F}$  tak, aby

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{F}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1.$$

Rozdíl těchto vektorů označme jako

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1 - \mathbf{x}.$$

Definujme podprostor  $H$  jako ortogonální doplněk vektoru  $\mathbf{v}$ . Projekci  $\mathbf{x}$  na přímku určenou vektorem  $\mathbf{v}$  získáme vzorečkem

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

a projekci na podprostor  $H$

$$\text{proj}_H \mathbf{x} = \mathbf{x} - \text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right) \mathbf{x}.$$

Pokud chceme získat zrcadlení, projekci na vektor  $\mathbf{v}$  musíme odečíst dvakrát, tedy

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} - 2\mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \left( \mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right) \mathbf{x}.$$

Hledaná matice zrcadlení tedy bude

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - 2 \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}.$$

To ale není jediná možnost, jak sloupec vynulovat. Druhá možnost odpovídá zobrazení vektoru  $\mathbf{x}$  na vektor  $-\|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1$ . Druhý reflektor je tedy

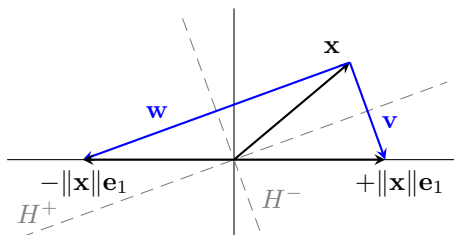
$$\mathbf{w} = -\|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1 - \mathbf{x}.$$

Z důvodu numerické chyby vybereme ten, který bude mít větší délku, jako

$$\mathbf{v} = -\text{sgn}(x_1) \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1 - \mathbf{x}$$

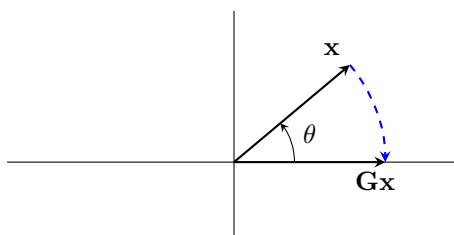
Konečně si uvědomme, že na orientaci nezáleží, a zbavíme se tak znaménka

$$\mathbf{v} = \text{sgn}(x_1) \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}$$



## Givensova triangularizace

Další možnost jak pomocí OG matice zobrazit vektor do směru je rotace. Těto matici se říká **Givensova rotace**.



Givensova rotace

V prostoru  $\mathbb{R}^m$ ,  $c = \cos \theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$ ,  $s = \sin \theta = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$ :

$$\mathbf{G}(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & s \\ & & & \ddots & \\ & & -s & & c \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Givensova triangularizace postupuje následovně.

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{Q}_1} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{Q}_2} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{Q}_3} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \\ \xrightarrow{\mathbf{Q}_4} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{Q}_5} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ 0 & \circ & \circ \end{pmatrix} & \xrightarrow{\mathbf{Q}_6} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \circ \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ 0 & \circ & \circ \end{pmatrix} & \dots \xrightarrow{\mathbf{Q}_k} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_5 \mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_6 \mathbf{Q}_5 \mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} & & \mathbf{Q}_k \dots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \end{array}$$

## Pozitivně definitní matice

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je **pozitivně definitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

---

**Algorithm** Givensova triangularizace

---

```
for  $i = 1, \dots, n$  do
  for  $j = i + 1, \dots, m$  do
    Najdi  $\mathbf{G}(a_{i,i}, a_{j,i})$ 
     $\mathbf{A}_{[i,j],i:n} = \mathbf{G}\mathbf{A}_{[i,j],i:n}$ 
  end for
end for
```

---

### Pozitivně semidefinitní matice

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je **pozitivně semidefinitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

### Symetrické matice

Matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je **symetrická**, jestliže je rovna svojí transpozici, tedy  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ .

### Věta o symetrických maticích

Buď  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$  symetrická matice. Potom platí následující:

1. Matice  $\mathbf{S}$  je diagonalizovatelná a navíc lze vlastní vektory volit tak, že tvoří ortonormální bázi. Jinými slovy: existuje ortogonální matice  $\mathbf{Q}$  a diagonální matice  $\mathbf{D}$  tak, že

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T.$$

2. Všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{S}$  jsou reálná.
3. Je-li matice  $\mathbf{S}$  pozitivně semidefinitní, jsou vlastní čísla nezáporná.
4. Je-li matice  $\mathbf{S}$  pozitivně definitní, jsou vlastní čísla kladná.

### Rayleighův podíl

Rayleighův podíl vektoru  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  je číslo

$$r(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}.$$

Nechť  $\mathbf{x}$  je vlastní vektor matice  $\mathbf{A}$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ , neboli platí

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Pak platí  $r(\mathbf{x}) = \lambda$ .

### Mocninná metoda

Matice  $\mathbf{A}$  musí být symetrická.

```
 $\mathbf{v}^{(0)} =$  nějaký vektor takový, že  $\|\mathbf{v}^{(0)}\| = 1$ 
for  $k = 1, 2, \dots$  do
   $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{(k-1)}$ 
   $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{w} / \|\mathbf{w}\|$ 
   $\lambda^{(k)} = (\mathbf{v}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{v}^{(k)}$ 
end for
```

$\lambda^{(k)}$  konverguje k dominantnímu (největšímu) vl. číslu  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v}^{(k)}$  konverguje k příslušnému vl. vektoru.



## QR algoritmus pro výpočet vlastních čísel

Matice  $\mathbf{A}$  musí být symetrická.

```

 $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ 
for  $k = 1, 2, \dots$  do
   $\mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)}$ 
   $\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k)}$ 
end for

```

Pro symetrické matice posloupnost  $\mathbf{A}^{(0)}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots$  konverguje k diagonální matici, která je podobná  $\mathbf{A}$  a tudíž má stejná vlastní čísla.

## Příprava matice pomocí ortogonálních transformací

Najdeme tedy Householderův reflektor tak, že

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathbf{F} \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_1 \mathbf{A}} \mathbf{Q}_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \bullet & \bullet & \bullet \\ \alpha_1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1}.$$

Analogicky vytvoříme matici  $\mathbf{Q}_2$ . Dostáváme

$$\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_1 & \circ & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1} \mathbf{Q}_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} \circ & \circ & \bullet & \bullet \\ \alpha_1 & \circ & \bullet & \bullet \\ 0 & \alpha_2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2}$$

Tímto postupem jsme dospěli k matici v tzv. *Hessenbergově tvaru*.

Matice  $\mathbf{A}$  jsme upravili jako

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{H},$$

neboli jsme našli faktorizaci ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{Q}^T.$$

Z tohoto zápisu vyplývá, že matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{H}$  jsou si podobné a tudíž mají stejná vlastní čísla.

## Dvě fáze výpočtu vlastních čísel

1. Převod matice do Hessenbergova tvaru pomocí Householderovy redukce (přímý algoritmus).
2. Převod matice z Hessenbergova tvaru do horního trojúhelníkového tvaru pomocí iteračního algoritmu, např. QR algoritmu.

## Redukovaný SVD rozklad

Redukovaným SVD rozkladem matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $m \geq n$ , se myslí její zápis jako součin matic

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{V}^T,$$

kde  $\hat{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^{m,n}$  je matice s ortonormálními sloupci,  $\hat{\mathbf{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je diagonální matice, a  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je ortogonální matice. Na diagonále  $\hat{\mathbf{\Sigma}}$  je  $p = \min(m, n)$  seřazených *singulárních čísel*  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ .

## Úplný SVD rozklad

Úplným (kompletním) SVD rozkladem matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$  se myslí její zápis jako součin matic

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T,$$

kde  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m,m}$  je ortogonální matice,  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m,n}$  je diagonální matice, a  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,n}$  je ortogonální matice. Na diagonále  $\mathbf{\Sigma}$  je  $p = \min(m, n)$  seřazených *singulárních čísel*  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ .

## Existence a jednoznačnost SVD rozkladu

Každá matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$  má (úplný) SVD rozklad. Singulární čísla  $\{\sigma_j\}$  jsou určena jednoznačně a pokud je  $\mathbf{A}$  čtvercová a singulární čísla  $\{\sigma_j\}$  jsou různá, levé a pravé singulární vektory  $\{\mathbf{u}_j\}$  a  $\{\mathbf{v}_j\}$  jsou určeny jednoznačně až na koeficient  $\pm 1$ .

## SVD rozklad vs. rozklad pomocí vlastních čísel

Nenulová singulární čísla  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$  jsou rovna odmocninám z nenulových vlastních čísel  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , resp.  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ .

## Singulární čísla a vlastní čísla

Nechť matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ . Pak singulární čísla jsou absolutní hodnoty vlastních čísel  $\mathbf{A}$ .

## SVD rozklad a vlastnosti matic

Nechť  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $p = \min(m, n)$ , a  $r \leq p$  je počet nenulových singulárních čísel  $\mathbf{A}$ . Pak platí následující tvrzení.

1.  $h(\mathbf{A}) = r$
2. Lineární obal sloupců  $\mathbf{A}$  je roven  $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ . Podprostor řešení soustavy  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}\mathbf{x} = \theta\}$  je roven  $\langle \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ .
3. Pro každou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$  a ortogonální matici  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$  platí

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2, \quad \|\mathbf{Q}\mathbf{A}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F.$$

4.

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1 \quad \text{a} \quad \|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_r^2}.$$

## 8 Další náhodný věci

Hodnoty sin a cos

Úhel	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$
$0^\circ$	$\sin(0^\circ) = 0$	$\cos(0^\circ) = 1$
$30^\circ$	$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$	$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$45^\circ$	$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$60^\circ$	$\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$
$90^\circ$	$\sin(90^\circ) = 1$	$\cos(90^\circ) = 0$