

LA2 Přehled

May 6, 2024

1 Obecný vektorový prostor

Grupa

Nechť M je neprázdná množina a $\circ : M \times M \rightarrow M$ binární operace. Platí-li

1. **asociativní zákon:** $(\forall a, b, c \in M)(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c)$,
2. existence **neutrálního prvku:** existuje $e \in M$ tak, že $(\forall a \in M)(a \circ e = e \circ a = a)$,
3. existence **inverzních prvků:** $(\forall a \in M)(\exists a^{-1} \in M)(a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e)$,

říkáme, že uspořádaná dvojice $G = (M, \circ)$ je **grupa**.

Platí-li navíc pro \circ

- **komutativní zákon:** $(\forall a, b \in M)(a \circ b = b \circ a)$,

mluvíme o **abelovské grupě**.

Těleso

Nechť M je neprázdná množina a $+: M \times M \rightarrow M$, $\cdot : M \times M \rightarrow M$ dvě binární operace. Platí-li, že

1. $(M, +)$ je **abelovská grupa** (neutrální prvek značíme 0 a nazýváme nulovým prvkem),
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (neutrální prvek značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek),
3. platí levý a pravý **distributivní zákon**, tj.

$$(\forall a, b, c \in M)(a(b+c) = ab+ac \wedge (b+c)a = ba+ca),$$

nazýváme uspořádanou trojici $T = (M, +, \cdot)$ **tělesem**.

Je-li navíc $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ abelovská grupa, je T **komutativní těleso**.

Vektorový prostor

Nechť T je libovolné komutativní těleso, jeho neutrální prvky vůči operacím sčítání, resp. násobení označme 0 , resp. 1 . Mějme dále neprázdnou množinu V a dvě zobrazení

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad \odot : T \times V \rightarrow V.$$

Řekneme, že (V, T, \oplus, \odot) je **vektorový prostor nad tělesem T** s vektorovými operacemi \oplus a \odot , právě když platí následující **axiomy vektorového prostoru**:

1. Sčítání vektorů je komutativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}).$$

2. Sčítání vektorů je asociativní:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)((\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) \oplus \mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus (\mathbf{y} \oplus \mathbf{z})).$$

3. Násobení skalárem je asociativní:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot (\beta \odot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \odot \mathbf{x}).$$

4. Násobení skalárem je distributivní zleva:

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\alpha \odot (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\alpha \odot \mathbf{y})).$$

5. Násobení skalárem je distributivní zprava:

$$(\forall \alpha, \beta \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)((\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = (\alpha \odot \mathbf{x}) \oplus (\beta \odot \mathbf{x})).$$

6. Neutrální prvek $1 \in T$ je neutrální i vůči násobení vektoru skalárem:

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}).$$

7. Existuje **nulový vektor** ve V a nulový násobek libovolného vektoru je nulový vektor

$$(\exists \theta \in V)(\forall \mathbf{x} \in V)(0 \odot \mathbf{x} = \theta).$$

Základní vlastnosti VP

Buď V vektorový prostor nad tělesem T . Potom platí:

1. Ve V existuje právě jeden nulový vektor.
2. Libovolný násobek nulového vektoru je opět nulový vektor. Tj.

$$(\forall \alpha \in T)(\alpha \odot \theta = \theta).$$

3. Přičtení nulového vektoru k libovolnému vektoru jej nezmění. Tj.

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} \oplus \theta = \mathbf{x}).$$

4. Ke každému vektoru z V existuje právě jeden **vektor opačný**. Tzn.,

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists_1 \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \theta).$$

Tento vektor splňuje $\mathbf{y} = (-1) \odot \mathbf{x}$, kde -1 je opačný prvek k 1 vůči operaci $+$ v T .

5. Je-li součin skaláru a vektoru roven nulovému vektoru, potom je skalár roven 0 nebo vektor roven θ .

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in V)(\alpha \odot \mathbf{x} = \theta \Rightarrow (\alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \theta)).$$

Podprostor

Nechť P je podmnožina vektorového prostoru V nad T . Řekneme, že P je **podprostor** vektorového prostoru V , právě když platí:

1. množina P je neprázdná, tzn. $P \neq \emptyset$.
2. množina P je *uzavřená* vůči sčítání vektorů v ní, tzn.

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(\mathbf{x} + \mathbf{y} \in P),$$

3. Množina P je uzavřená vůči násobení vektorů v ní libovolným skalárem, tzn.

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(\alpha \mathbf{x} \in P).$$

Vztah být podprostorem pak značíme

$$P \subset\subset V.$$

(Triviální) lineární kombinace

Mějme vektorový prostor V nad T . Nechť $\mathbf{x} \in V$ a $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z V . Říkáme, že vektor \mathbf{x} je **lineární kombinací** souboru $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$, právě když existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$ taková, že

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Čísla α_i , $i \in \hat{m}$, nazýváme **koefficienty lineární kombinace**. Jestliže $(\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)$, nazýváme takovou lineární kombinaci **triviální**. V opačném případě jde o **lineární kombinaci netriviální**.

Lineárně (ne)závislý soubor

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je LN \Leftrightarrow

$$(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \Rightarrow ((\forall i \in \hat{m})(\alpha_i = 0)) \right).$$

- $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je LZ \Leftrightarrow

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T)(\exists k \in \hat{m}) \left(\alpha_k \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i = \theta \right).$$

Lineárně (ne)závislá množina

Buď V vektorový prostor a $\emptyset \neq M \subseteq V$. Množinu M nazveme **lineárně nezávislou (LN)** právě tehdy, když každý soubor různých vektorů z ní je lineárně nezávislý.

Pokud množina M není LN, nazýváme ji **lineárně závislou (LZ)**.

Lineární obal souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V nad tělesem T . Množinu všech lineárních kombinací tohoto souboru nazveme **lineárním obalem souboru** $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ a značíme ji

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle.$$

Neboli

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \alpha_i \in T \text{ pro každé } i \in \hat{m} \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu souboru

Nechť $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je soubor vektorů z vektorového prostoru V nad T . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\theta \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

2. vektory leží ve svém lineárním obalu, přesněji:

$$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do souboru se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left(\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{z} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) \\ & \quad \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal z lineárního obalu neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} & \text{Je-li } k \in \mathbb{N} \text{ a } \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle, \text{ potom} \\ & \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle \text{ je podmnožinou } \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle. \end{aligned}$$

Lineární obal množiny

Buď M neprázdná podmnožina VP V nad tělesem T . Množinu všech lineárních kombinací všech souborů vektorů z množiny M nazveme **lineárním obalem množiny** M a značíme ji $\langle M \rangle$.

Tedy

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i \mid m \in \mathbb{N}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in M, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in T \right\}.$$

Vlastnosti lineárního obalu množiny

Nechť M je neprázdná množina vektorů z vektorového prostoru V nad T . Pak platí:

1. lineární obal obsahuje nulový vektor:

$$\mathbf{0} \in \langle M \rangle,$$

2. vektory z M leží v jeho lineárním obalu, přesněji:

$$M \subseteq \langle M \rangle,$$

3. je-li vektor již obsažen v lineárním obalu, tak jeho přidáním do množiny se lineární obal nezmění:

$$(\forall \mathbf{z} \in V) \left(\mathbf{z} \in \langle M \rangle \Leftrightarrow \langle M \rangle = \langle M \cup \{\mathbf{z}\} \rangle \right),$$

4. lineární obal je uzavřený na sčítání vektorů i na násobení vektorů skalárem:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle) (\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle) \\ & \quad \text{a} \\ & (\forall \alpha \in T) (\forall \mathbf{x} \in \langle M \rangle) (\alpha \mathbf{x} \in \langle M \rangle). \end{aligned}$$

5. lineární obal souboru vektorů z lineárního obalu souboru vektorů neobsahuje nic navíc:

$$\begin{aligned} & \text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq \langle M \rangle, \text{ potom} \\ & \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle. \end{aligned}$$

Speciálně:

$$\text{Je-li } \emptyset \neq N \subseteq M, \text{ potom } \langle N \rangle \subseteq \langle M \rangle.$$

Věta o vztahu LZ souboru a lineárního obalu

Buď $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ soubor vektorů z VP V a $m \geq 2$. Potom $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ je lineárně závislý právě tehdy, když

$$(\exists k \in \hat{m})(\mathbf{x}_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m \rangle).$$

Přidání vektoru do LN souboru

Buď $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ LN soubor vektorů z VP V a $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle$. Potom soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y})$ je také LN.

Soubor (množina) generuje podprostor

O souboru vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ z vektorového prostoru V řekneme, že **generuje** podprostor $P \subset V$, právě když platí:

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \rangle = P.$$

V případě, že $P = V$ můžeme zjednodušeně říkat $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ generuje (vektorový) prostor V .

Dimenze VP

Buď V vektorový prostor. Řekneme, že **dimenze vektorového prostoru V** je rovna

- **0**, pokud neexistuje LN soubor vektorů z V délky 1.
- **$d \in \mathbb{N}$** , pokud existuje LN soubor vektorů z V délky d , ale každý soubor vektorů z V délky $d + 1$ už je LZ.
- **∞** , pokud ve V existuje LN soubor libovolné délky.

Dimenzi vektorového prostoru V označujeme symbolem $\dim V$.

Je-li **$\dim V = \infty$** , říkáme, že V má **nekonečnou dimenzi**, naopak pokud **$\dim V < \infty$** říkáme, že V má **konečnou dimenzi**.

Věta o postačitelosti jedné vlastnosti báze

Nechť $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je soubor vektorů z VP V a $\dim V = d \in \mathbb{N}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je báze V .
2. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je LN.
3. Soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ generuje V .

Souřadnice vzhledem k bázi

Nechť $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je báze VP V nad tělesem T a vektor $\mathbf{v} \in V$ splňuje

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{x}_i.$$

Souřadnicemi vektoru $\mathbf{v} \in V$ vzhledem k bázi \mathcal{B} nazveme uspořádanou d -tici

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in T^d.$$

2 Lineární zobrazení

Lineární zobrazení

Buďte P a Q dva vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $A : P \rightarrow Q$ nazveme **lineární**, právě když současně platí:

1. (aditivita):

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)(A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}),$$

2. (homogenita):

$$(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x} \in P)(A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}).$$

Lineární operátor (transformace), funkcionál a izomorfismus

Lineární zobrazení z VP P do stejného VP P nazýváme **lineární operátor** (nebo také **transformace**) na P .

Množinu všech lineárních operátorů na P značíme krátce $\mathcal{L}(P)$.

Lineární zobrazení z VP P do tělesa T nazýváme **lineární funkcionál** na P .

Izomorfismem nazveme lineární zobrazení, které je zároveň i bijekce.

Souřadnicový izomorfismus

Nechť soubor $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ je báze prostoru V nad T . Přiřazení $(\cdot)_{\mathcal{B}} : V \rightarrow T^n$ definované předpisem

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in V,$$

kde $(\mathbf{x})_{\mathcal{B}}$ značí souřadnice vektoru \mathbf{x} vůči bázi \mathcal{B} dle Definice .reference:dfn-souradnice, nazýváme **souřadnicový izomorfismus**.

Alternativní vyjádření linearity

Buďte P a Q vektorové prostory nad T a mějme zobrazení $A : P \rightarrow Q$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P)$

$$(A(\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + A\mathbf{y}).$$

3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)(\forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in P)$

$$\left(A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{x}_i \right).$$

Základní vlastnosti lineárního zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, kde P, Q jsou vektorové prostory nad T .

1. *Obraz nulového vektoru je nulový vektor:* Označíme-li nulové vektory v P a Q popořadě θ_P a θ_Q , platí

$$A\theta_P = \theta_Q.$$

2. *Obraz lineárního obalu je lineární obal obrazu:* Je-li $M \subseteq P$, potom

$$A(\langle M \rangle) = \langle A(M) \rangle.$$

Je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P , potom

$$A(\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \rangle) = \langle A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n \rangle.$$

3. *Obraz podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{P} \subset\subset P)(A(\tilde{P}) \subset\subset Q).$$

4. *Vzor podprostoru je podprostor.* Neboli

$$(\forall \tilde{Q} \subset\subset Q)(A^{-1}(\tilde{Q}) \subset\subset P).$$

5. *Obraz LZ souboru je opět LZ soubor.* Neboli pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LZ} \implies (A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LZ}.$$

6. *“Předobraz” LN souboru je opět LN soubor.* Přesněji pro libovolný soubor $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ platí

$$(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) \text{ je LN} \implies (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ je LN}.$$

Hodnost, jádro a defekt

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. **Hodností zobrazení** A rozumíme číslo

$$h(A) := \dim A(P).$$

Jádro zobrazení A definujeme jako množinu

$$\ker A := \{\mathbf{x} \in P \mid A\mathbf{x} = \theta_Q\},$$

a jeho dimenzi nazýváme **defektem zobrazení** A . Defekt značíme $d(A)$. Tedy

$$d(A) := \dim \ker A.$$

2. věta o dimenzi

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Věta o vztahu in/sur-jektivitu a defektu/hodnosti

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a dimenze $\dim P$ a $\dim Q$ jsou konečné.

1.

$$\begin{aligned} A \text{ je injektivní} &\Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\} \\ &\Leftrightarrow d(A) = 0 \Leftrightarrow h(A) = \dim P, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \text{ je surjektivní} &\Leftrightarrow A(P) = Q \\ &\Leftrightarrow \dim A(P) = \dim Q \Leftrightarrow h(A) = \dim Q. \end{aligned}$$

Věta o jádru prostého zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom platí:

$$A \text{ je prosté} \Leftrightarrow \ker A = \{\theta_P\}.$$

LN/LZ soubor a prosté zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ je **prosté**. Potom

1. Obraz LN souboru vektorů je taky LN soubor. Tedy je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ LN soubor vektorů z P , je také $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$ LN.
2. Vzor LZ souboru vektorů je opět LZ. Neboli: je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ soubor vektorů z P takový že $(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$ je LZ soubor, potom také soubor vzorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ LZ.

Lineární zobrazení a zachování dimenze

Mějme $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a M podprostor VP P . Potom

1. $\dim A(M) \leq \dim M$.
2. Je-li A prosté zobrazení, potom $\dim A(M) = \dim M$.
3. $h(A) \leq \min\{\dim P, \dim Q\}$.

3 Matice lineárního zobrazení

Matice zobrazení vzhledem k bázím

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, buď $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ báze P a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ báze Q . Matici ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$ definovanou po sloupcích předpisem $\forall i \in \hat{n}$:

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})_{:i} := (A\mathbf{x}_i)_{\mathcal{Y}},$$

nazveme **maticí zobrazení A vzhledem k bázím \mathcal{X}, \mathcal{Y}** .

Je-li $A \in \mathcal{L}(P)$ lineární operátor, jeho matici zobrazení ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ můžeme zkráceně značit ${}^{\mathcal{X}}A$.

Věta o matici složeného zobrazení

Nechť $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{W}$ jsou popořadě báze P, Q, V vektorových prostorů konečné dimenze. Potom pro matici složeného zobrazení $AB \in \mathcal{L}(P, V)$ platí

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{W}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{W}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Věta o matici izomorfismu

Je-li $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfismus, $\dim P, \dim Q < \infty$, \mathcal{X} je báze P a \mathcal{Y} je báze Q , potom je matice ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}(A^{-1})^{\mathcal{X}}.$$

Věta o souvislosti hodnoty zobrazení a jeho matice

Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\dim P, Q < \infty$, \mathcal{X} je báze P a \mathcal{Y} je báze Q . Potom platí

$$h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}).$$

Matice přechodu mezi bázemi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ a $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ jsou báze P . Matici identického operátoru ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \in T^{n,n}$ nazýváme **maticí přechodu** od báze \mathcal{X} k bázi \mathcal{Y} .

Věta o vlastnostech matice přechodu

Nechť \mathcal{X}, \mathcal{Y} a \mathcal{Z} jsou báze P , $\dim P < \infty$. Potom

1. pro libovolné $\mathbf{x} \in P$ platí

$${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} \cdot (\mathbf{x})_{\mathcal{X}} = (\mathbf{x})_{\mathcal{Y}},$$

2. matice ${}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}}$ je regulární a platí

$$({}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}})^{-1} = {}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{X}},$$

- 3.

$${}^{\mathcal{Y}}E^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}E^{\mathcal{Z}}.$$

4 Skalární součin

Skalární součin

Buď V VP nad $T = \mathbb{R}$ nebo \mathbb{C} . Zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$ nazýváme (obecný) **skalární součin**, platí-li pro všechny vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ a každý skalár $\alpha \in T$ následující axiomy:

1. Zobrazení je lineární v druhém argumentu, tj.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle.$$

2. Platí tzv. *Hermitovská symetrie*:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle}.$$

3. Zobrazení je pozitivně definitní, tzn.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad (\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta).$$

Dvojici $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ nazýváme (**vektorovým**) **prostorem se skalárním součinem** nebo zkráceně jako **prehilbertův prostor** a značíme \mathcal{H} .

Základní vlastnosti skalárního součinu

Pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$ a $\alpha \in T$ platí

1. Sdružená linearita v prvním argumentu:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \quad \text{a} \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle.$$

2. Skalární součin s nulovým vektorem je nula:

$$\langle \mathbf{x} | \theta \rangle = \langle \theta | \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Standardní skalární součin

Na T^n definujeme skalární součin předpisem

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{j=1}^n \overline{x_j} \cdot y_j,$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ jsou vektory z T^n . Tento skalární součin nazýváme **standardním skalárním součinem**.

Norma, vzdálenost

Mějme V VP nad \mathbb{R} nebo \mathbb{C} . Zobrazení $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme **norma**, pokud pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a $\alpha \in T$ platí:

1. norma je vždy nezáporná:

$$\| \mathbf{x} \| \geq 0,$$

2. pouze nulový vektor má nulovou normu:

$$\| \mathbf{x} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \theta,$$

3. norma je homogenní v absolutní hodnotě:

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

4. platí **trojúhelníková nerovnost**:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ číslo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$ nazýváme **velikostí vektoru \mathbf{x}** a číslo $d(x, y) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ nazýváme **vzdáleností vektorů \mathbf{x} a \mathbf{y}** .

Norma indukovaná skalárním součinem

Ve vektorovém prostoru \mathcal{H} se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definujeme zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ pro $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ předpisem

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}.$$

Toto zobrazení nazýváme **normou indukovanou skalárním součinem**.

Věta o korektnosti indukované normy a Schwarzova nerovnost

Zobrazení definované v Definici .reference:dfn-indukovana-norma je normou a splňuje tzv. **Schwarzovu nerovnost**:

Pro každé \mathbf{x}, \mathbf{y} z \mathcal{H} platí

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Eukleidovská norma

Norma indukovaná standardním součinem se nazývá **eukleidovská norma**.

Pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$ je eukleidovská norma rovna

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

p -norma

Na T^n definujeme pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ tzv. **p -normu** předpisem: pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in T^n$ položíme

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}, & \text{pro } p = \infty. \end{cases}$$

Ortogonalita (kolmost)

Nechť \mathcal{H} je prostor se skalárním součinem a \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou vektory z \mathcal{H} . Vektor \mathbf{x} nazýváme **ortogonální na** (nebo také **kolmý na**) \mathbf{y} , právě když

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ z \mathcal{H} nazveme **ortogonální (OG)**, právě když každý vektor ze souboru je ortogonální na ostatní vektory ze souboru, tj. pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$ je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = 0.$$

Soubor vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ z \mathcal{H} nazveme **ortonormální (ON)**, právě když je ortogonální a každý vektor má velikost 1, tzn. pro každé $i, j \in \hat{n}$ Je

$$\langle \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Pythagorova věta

Nechť \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou vektory z \mathcal{H} a \mathbf{x} je kolmý na \mathbf{y} . Potom pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Obecněji: Je-li $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ortogonální soubor z \mathcal{H} , potom

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2.$$

Věta o lineární nezávislosti OG souboru

Ortogonalní soubor **nenulových** vektorů je LN. Speciálně, každý ortonormální soubor vektorů je LN.

Fourierovy koeficienty vůči ON bázi

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ je ON báze prehilbertova prostoru \mathcal{H} , potom pro každé $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ platí

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z} \rangle \mathbf{x}_i.$$

Neboli

$$(\mathbf{z})_{\mathcal{X}} = (\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z} \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_n | \mathbf{z} \rangle).$$

Ortogonalní projekce na přímku

Je-li $\mathbf{v} \neq \theta$, zobrazení $\text{proj}_{\mathbf{v}}$ definované

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{z}) := \frac{\langle \mathbf{v} | \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \quad \text{pro } \mathbf{z} \in \mathcal{H}$$

se nazývá **ortogonalní projekce z na přímku $\langle \mathbf{v} \rangle$** .

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Nechť $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \subseteq \mathcal{H}$ je LN soubor vektorů. Potom existuje ON soubor $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ vektorů z \mathcal{H} takový, že pro každé $k \in \hat{n}$ je

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \rangle.$$

Výpočet GSO

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{x}_2 - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_2), \\ \mathbf{z}_3 &= \mathbf{x}_3 - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_3) - \text{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_3), \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{x}_n - \text{proj}_{\mathbf{z}_1}(\mathbf{x}_n) - \text{proj}_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{x}_n) - \dots - \text{proj}_{\mathbf{z}_{n-1}}(\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

5 Geometrie \mathbb{R}^n

Vzdálenost množin

Pro dvě množiny M a N z \mathbb{R}^n definujeme **vzdálenost** M od N předpisem

$$d(M, N) := \inf \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in N \}.$$

Ortogonalní doplněk

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$, potom definujeme tzv. **ortogonalní doplněk** (značíme M^\perp) jako množinu vektorů kolmých na všechny vektory z M , tj.

$$M^\perp := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \mathbf{v} \in M)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0) \}.$$

Věta o vzdálenosti a kolmici

Mějme vektor \mathbf{x} a podprostor P v \mathbb{R}^n . Existují-li vektory $\mathbf{v} \in P$ a $\mathbf{w} \in P^\perp$ takové, že $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, potom

$$d(\mathbf{x}, P) = \|\mathbf{w}\|.$$

O vlastnostech ortogonalního doplňku

Je-li P podprostor \mathbb{R}^n , potom platí následující.

1. P^\perp je podprostor v \mathbb{R}^n .
2. $P \cap P^\perp = \{\theta\}$.
3. Každý vektor z \mathbb{R}^n lze zapsat jako součet vektoru z P a vektoru z P^\perp , neboli

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\exists \mathbf{v} \in P)(\exists \mathbf{w} \in P^\perp)(\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

4. Rozklad vektoru na součet vektorů z P a P^\perp je jednoznačný, neboli

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\forall \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in P)(\forall \mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}} \in P^\perp) \\ \left((\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{w}}) \Rightarrow (\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}) \right).$$

Důkaz. Viz cvičení 5.4 a 5.6. □

Ortogonalní projekce na podprostor

Je-li soubor $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$ OG báze podprostoru P z \mathbb{R}^n , potom definujeme **ortogonalní projekci na podprostor P** předpisem:

$$\text{proj}_P(\mathbf{z}) := \text{proj}_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{z}) + \dots + \text{proj}_{\mathbf{y}_k}(\mathbf{z}) \text{ pro } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Věta o vzdálenosti variet

Mějme variety $M = \mathbf{a} + \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$ a $N = \mathbf{b} + \langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell \rangle$, potom

$$d(M, N) = d(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell \rangle).$$

Rovnoběžné, různoběžné, mimoběžné variety

Máme-li dvě variety W a U , potom řekneme, že tyto variety jsou

1. **rovnoběžné**, pokud $Z(W) \subseteq Z(U)$ nebo $Z(U) \subseteq Z(W)$,
2. **různoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a $W \cap U \neq \emptyset$,
3. **mimoběžné**, pokud nejsou rovnoběžné a $W \cap U = \emptyset$.

Úhel mezi vektory

Jsou-li \mathbf{x}, \mathbf{y} nenulové vektory, potom **úhlem vektorů** $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme číslo

$$\arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Úhel mezi přímkami a nadrovinami

Máme-li dvě přímky $p = \mathbf{a} + \langle \mathbf{u} \rangle$, $q = \mathbf{b} + \langle \mathbf{v} \rangle$ a dvě nadroviny P s normálovým vektorem \mathbf{n}_P a Q s normálovým vektorem \mathbf{n}_Q , potom definujeme **úhel mezi**

1. **přímkami** p a q jako

$$\arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

2. **přímkou** p a **nadrovinou** P jako

$$\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_P|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{n}_P\|}.$$

3. **nadrovinami** P, Q jako

$$\arccos \frac{|\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{n}_Q|}{\|\mathbf{n}_P\| \|\mathbf{n}_Q\|}.$$

Translace (posunutí) o vektor

Máme-li vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení: Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ položíme

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

nazýváme **translací** o vektor \mathbf{u} .

Afinní transformace

Afinní transformace jsou zobrazení ve tvaru

$$T : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

kde A je nějaký lineární operátor z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a \mathbf{u} vektor z \mathbb{R}^n .

Homogenní souřadnice

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vektor z \mathbb{R}^n , potom $(x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nazýváme **homogenní souřadnice** vektoru \mathbf{x} .

Matice translace

Translace o vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, resp. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, lze reprezentovat pomocí matic

$$T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad T_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotace

Pro rotace o úhel φ v \mathbb{R}^2 je matice rotace s homogenní souřadnicí rovna

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Škálování

Škálování znamená prosté násobení jednotlivých souřadnic číslem. Škálovací matice vypadají takto

$$S_{(\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad S_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Základy numerické matematiky

Přidružená (indukovaná) maticová norma

Mějme normu $\|\cdot\|_{(n)}$ na \mathbb{R}^n a normu $\|\cdot\|_{(m)}$ na \mathbb{R}^m , definujeme **přidruženou (indukovanou) maticovou normu** matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ následujícím způsobem

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)}}{\|\mathbf{x}\|_{(n)}}.$$

O základních vlastnostech přidružené normy

Zobrazení definované v předchozí definici je normou a platí pro ni

1. Je-li $m = n$ a zvolené normy jsou stejné, potom $\|\mathbf{E}\| = 1$ (zde \mathbf{E} je jednotková matice),
2. $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{(m)} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_{(n)}$ (konzistence normy),
3. $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$.

(Přidružená) maticová p -norma

Pokud v definici maticové normy uvažujeme na \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m odpovídající p -normy, nazýváme tuto normu přidruženou (indukovanou) **maticovou p -normou** a značíme ji $\|\mathbf{A}\|_p$. Tedy

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \theta}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{z}\|_p=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_p.$$

Věta o speciálních případech přidružené maticové normy

Mějme matici \mathbf{A} z $\mathbb{R}^{m,n}$, která má složky a_{ij} , potom

1. Norma $\|\mathbf{A}\|_1$ je rovna maximu součtu absolutních hodnot ve sloupci, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|.$$

2. Norma $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je rovna maximu součtu absolutních hodnot v řádku, tj.

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. Norma $\|\mathbf{A}\|_2$ je rovna odmocnině z největšího vlastního čísla matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ i matice $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$.

Frobeniova norma

Frobeniovou normou nazýváme normu na $\mathbb{R}^{m,n}$ definovanou předpisem

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Absolutní číslo podmíněnosti

Absolutní číslo podmíněnosti úlohy je definováno

$$\hat{\kappa} = \lim_{r \rightarrow 0+} \sup_{\|\Delta x\| \leq r} \frac{\|\Delta y\|}{\|\Delta x\|}.$$

Relativní číslo podmíněnosti

Relativní číslo podmíněnosti úlohy je

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup_{\|\Delta x\| \leq r} \left(\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} / \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \right).$$

Číslo podmíněnosti matice

Mějme regulární matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Číslo

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

se nazývá **číslo podmíněnosti matice \mathbf{A}** vzhledem k normě $\|\cdot\|$.

Věta o podmíněnosti řešení soustavy lineárních rovnic

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Změníme-li vektor pravé strany soustavy lineárních rovnic \mathbf{b} o $\Delta \mathbf{b}$, pro změnu řešení $\Delta \mathbf{x}$ platí

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Stabilita algoritmů

Nechť V je nějaký numerický algoritmus, jehož teoretický (přesný) výstup označíme $V^*(x)$, kde x jsou vstupní data. Výsledek výpočtu v konečné (strojové) aritmetice označíme $V(x)$. Označme $\Delta y = V^*(x) - V(x)$.

Tato hodnota je tzv. *dopředná/přímá chyba* (anglicky *forward error*). Je to odchylka spočítaného řešení od přesného řešení.

Nejmenší (v normě) číslo Δx takové, že $V^*(x + \Delta x) = V(x)$ se nazývá *zpětná chyba* (anglicky *backward error*). Jedná se o promítnutí chyby algoritmu V do jeho vstupu.

7 Maticové rozklady

LU rozklad

Mějme matici $\mathbf{A} \in T^{m,m}$. Pokud existuje dolní trojúhelníková matice \mathbf{L} s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníková matice \mathbf{U} , takové že $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, nazýváme tento součin **LU rozkladem**.

LU rozklad s řádkovou pivotací

Zápis matice $\mathbf{A} \in T^{m,m}$ jako součin

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

kde \mathbf{P} je nějaká permutační matice, \mathbf{L} dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a \mathbf{U} horní trojúhelníková matice nazýváme **LU rozkladem s řádkovou pivotací**.

LU rozklad s částečnou pivotací

LU rozklad s řádkovou pivotací matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

nazveme **LU rozkladem s částečnou pivotací**, pokud pro všechna $i \geq j$ z \hat{m} platí

$$|\mathbf{L}_{ij}| \leq 1.$$

Matice s ortonormálními sloupci

Matice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$, nazýváme **maticí s ortonormálními sloupci**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{E}_n,$$

kde \mathbf{E}_n je jednotková matice z $\mathbb{R}^{n,n}$, neboli

$$\mathbf{Q}_{:i}^T \mathbf{Q}_{:j} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Ortogonalní matice

Čtvercovou matici $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazýváme **ortogonální**, pokud platí

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Transpozice ortogonální matice

Je-li \mathbf{Q} ortogonální matice, je její transpozice \mathbf{Q}^T také ortogonální matice.

Důkaz. Z vlastností ortogonální matice a transpozice platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}^T)^T \mathbf{Q}^T \text{ a } \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q}^T)^T.$$

Tedy $(\mathbf{Q}^T)^{-1} = (\mathbf{Q}^T)^T$, a proto je \mathbf{Q}^T dle definice také ortogonální. □

Součin ortogonálních matic

Pro ortogonální matice $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n, k \in \mathbb{N}$, platí, že jejich součin je opět ortogonální matice, neboli

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z vlastností ortogonálních matic a z faktu, že transpozice součinu matic je součin transpozic těchto matic, ale v obráceném pořadí:

$$(\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \cdots \mathbf{Q}_1^T.$$

Z toho a z vlastností ortogonálních matic získáváme

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \\ \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1) \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k &= \mathbf{Q}_k^T \cdots \mathbf{Q}_2^T \mathbf{E} \mathbf{Q}_2 \cdots \mathbf{Q}_k = \cdots = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

□

Ortogonální matice zachovávají standardní skalární součin

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Důkaz. Důkaz je přímočarým použitím vlastností ON matic a vlastností standardního skalárního součinu

$$(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{E} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

□

Ortogonální matice zachovávají eukleidovskou normu

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2.$$

Důkaz. Důkaz je přímočarým použitím vlastností eukleidovské normy a Tvrzení o OG maticích a skalárním součinu.

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2^2 = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

□

Determinant ortogonální matice

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro její determinant platí

$$\det \mathbf{Q}_i = \pm 1.$$

Důkaz. Důkaz plyne z vlastností determinantu součinu matic a transponované matice při aplikaci determinantu na obě strany rovnice ON matic,

$$\begin{aligned} \det (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) &= \det (\mathbf{E}), \\ \det (\mathbf{Q}^T) \det (\mathbf{Q}) &= 1, \\ \det (\mathbf{Q}) \det (\mathbf{Q}) &= 1, \\ (\det (\mathbf{Q}))^2 &= 1, \\ \det (\mathbf{Q}) &= \pm 1. \end{aligned}$$

□

Vlastní čísla ortogonální matice

Je-li $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ortogonální matice, pak pro každé její vlastní číslo λ platí

$$|\lambda| = 1.$$

Důkaz. Důkaz plyne z Tvrzení o normě OG matic a homogenity násobení skalárním číslem použitého na rovnici pro vlastní čísla,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}, \\ \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 &= \|\lambda\mathbf{x}\|_2, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= |\lambda|\|\mathbf{x}\|_2, \\ 1 &= |\lambda|.\end{aligned}$$

□

Redukovaný QR rozklad

Mějme $m \geq n$ a matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Zápís této matice jako součin

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}},$$

kde $\hat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je matice s ortonormálními sloupci a $\hat{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je horní trojúhelníková matice, nazýváme **redukovaný QR rozklad**.

Úplný QR rozklad

Mějme $m \geq n$ a matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Její zápis jako součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$ je ortogonální matice a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je horní trojúhelníková matice, nazýváme **úplný (kompletní) QR rozklad**.

Věta o existenci QR rozkladu

Každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$ má úplný QR rozklad a tedy i redukovaný QR rozklad.

Věta o jednoznačnosti QR rozkladu

Každá matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} (m \geq n)$ s lineárně nezávislými sloupci má jednoznačný redukovaný QR rozklad $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ splňující $r_{jj} > 0$.

Pozitivně definitní matice

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice \mathbf{A} je **pozitivně definitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Pozitivně semidefinitní matice

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice \mathbf{A} je **pozitivně semidefinitní**, pokud

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Symetrické matice

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je **symetrická**, jestliže je rovna svojí transpozici, tedy $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Věta o symetrických maticích

Buď $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická matice. Potom platí následující:

1. Matice \mathbf{S} je diagonalizovatelná a navíc lze vlastní vektory volit tak, že tvoří ortonormální bázi. Jinými slovy: existuje ortogonální matice \mathbf{Q} a diagonální matice \mathbf{D} tak, že

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T.$$

2. Všechna vlastní čísla matice \mathbf{S} jsou reálná.
3. Je-li matice \mathbf{S} pozitivně semidefinitní, jsou vlastní čísla nezáporná.
4. Je-li matice \mathbf{S} pozitivně definitní, jsou vlastní čísla kladná.