MA2 Přehled

January 12, 2024

1 Neurčitý integrál

Primitivní funkce

Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Funkci F splňující

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Věta o jednoznačnosti primitivní funkce

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \forall x \in (a, b)$$

Neurčitý integrál

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)dx$

Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak má funkce f na tomto intervalu primitivní funkci.

Linearita primitivní funkce

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b).
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Integrace per partes

Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G$$

První věta o substituci

Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi((\alpha, \beta) \subset (a, b))$.

Pak funkce $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$$

kde C je integrační konstanta.

Druhá věta o substituci

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(x)dt = G(t) + C \Rightarrow \int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C$$

kde C je integrační konstanta.

2 Určitý integrál

Dělení intervalu

Buď dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům $x_k,\ k = 1, 2, \dots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b\rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme **částečný interval** intervalu $\langle a, b\rangle$ při dělení σ.
Číslo:

$$\nu(\sigma) \equiv \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k \equiv x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ.

Ekvidistantní dělení

Pro interval $\langle a, b\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta \equiv \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i \equiv a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \big\{a,\ a + \Delta,\ a + 2\Delta, \dots,\ a + (n-1)\Delta,\ b\big\}.$$

Dolní a horní součet funkce při dělení σ

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dělení intervalu J. Součty

$$S(\sigma, f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f,$$

$$s(\sigma, f) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f$$

nazýváme **horním součtem funkce** a **dolním součtem funkce** f při dělení σ.

Dolní a horní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b\rangle$ pomocí **dolních a horních součtů** definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \equiv \inf\{S(\sigma, f) \mid \sigma \text{ dělení } J\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \equiv \sup\{s(\sigma, f) \mid \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme je **horním integrálem**, resp. **dolním integrálem**, funkce f na intervalu J.

Riemannův určitý integrál

Mějme funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J. Pokud pro její dolní a horní integrál na intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Normální posloupnost dělení

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pokud je navíc (σ_n) normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Integrální součet

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, tohoto intervalu definujeme **integrální součet** funkce f při dělení σ

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Aditivita integrálu

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$, která je také automaticky spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Multiplikativita integrálu

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Aditivita integrálu v mezích

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Nerovnosti mezi integrály

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Newtonova formule

Funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ s primitivní funkcí F, Pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

Per partes pro určitý integrál

Funkce f a g jsou spojité na $\langle a, b \rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a G je primitivní funkcí k g na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

Věta o substituci v určitém integrálu

Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi\big(\langle \alpha, \beta \rangle\big)$.

Potom pro Riemannův integrál platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Integrace na symetrickém intervalu

Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a \rangle$, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{b}^{b+T} f(x)dx$.

Zobecněný Riemannův integrál

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$, která má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, c \rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_{a}^{c} f(x)\,dx,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje.

Absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} |f(x)|\,dx,$$

pak tuto její hodnotu značíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\mathbb{R}$. Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, dx$$

existuje a značíme ji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem f na $\mathbb{R}$**

3 Číselné řady

Definice číselné řady

Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots ,$$

kde $(a_k)_{k=n_0}^{\infty}$ je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je **posloupnost částečných součtů** $(s_n)_{n=n_0}^{\infty}$ definovaná předpisem

$$s_n \equiv \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0, n \geq n_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také konvergentní. V opačném případě o ní mluvíme jako o divergentní číselné řadě. Součtem konvergentní řady $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Nutná podmínka konvergence

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, potom pro limitu jejích sčítanců platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bolzanovo–Cauchyovo kritérium pro řady

Řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé přirozené $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Absolutní konvergence

Číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud číselná řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

O vztahu absolutní konvergence a konvergence

Pokud řada absolutně konverguje, **potom** tato řada konverguje.

Leibnizovo kritérium

Buď $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergentní.

Srovnávací kritérium

Buďte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí nerovnosti $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší nebo rovno než k_0 platí nerovnosti $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverguje.

D'Alembertovo kritérium

Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Pokud

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

potom řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Pokud ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

potom řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje.

O odhadu posloupnosti částečných součtů

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li f klesající, pak platí

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li f rostoucí, pak platí

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrální kritérium

Buď $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy taková, že existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom

- Pokud (zobecněný Riemannův) integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje součet konvergentní řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu v bodě x značíme symbolem e^x. Platí tedy

$$e^x \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Základní vlastnosti exponenciální funkce

Exponenciální funkce oplývá následujícími vlastnostmi:

1. $e^0 = 1$,
2. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $e^{x+y} = e^x e^y$,
3. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x > 0$ a dále $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,
4. exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $e^x < e^y$.

Eulerovo číslo

Eulerovo číslo definujeme pomocí exponenciální funkce předpisem

$$e \equiv e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Eulerovo číslo je iracionální.

Přirozený logaritmus

Existuje tedy inverzní funkce k exponenciále, která je také ostře rostoucí a zobrazuje $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$. Tuto funkci nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme symbolem ln.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

Přirozený logaritmus ln oplývá následujícími vlastnostmi:

1. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí
2. $e^{\ln x} = x$,
3. $\ln e = 1$ a $\ln 1 = 0$,
4. pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Obecná mocnina

Pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x \equiv e^{x \ln a}.$$

Vlastnosti obecné mocniny

Pro $a, b > 0$ platí

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$,
3. $(ab)^x = a^x b^x$.

pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.

4 Taylorovy polynomy

Polynom

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existuje nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Taylorův polynom

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Polynom

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme **n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a**

Věta o vlastnostech Taylorova polynomu

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom Taylorův polynom $T_{n,a}$ existuje a je to jediný polynom stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Taylorův vzorec a Taylorův zbytek

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) \equiv f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme **n-tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Věta o zbytku v Taylorově vzorci

Nechť funkce f má v jistém okolí U_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta o nejlepší aproximaci

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynomem stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí U_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in U_0 \setminus \{0\}.$$

Taylorova věta

Nechť existuje okolí U_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$ -ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ lze pro každé $x \in U_a$ zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a a. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Mocninná řada

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

závisející na reálném parametru x, nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Taylorova řada

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **v bodě** c.

Věta o poloměru konvergence

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|c-x| > R$.

Cauchyho–Hadamardova věta

Ke každé mocninné řadě tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

existuje $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

5 Lineární rekurentní rovnice

Definice LRR

Lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ (zkráceně LRR) je rovnice tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} \cdot x_{n+1} + c_{0,n} \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $(c_{i,n})_{n=n_0}^{\infty}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, (tzv. koeficienty rovnice) a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ (tzv. pravá strana rovnice) jsou zadané posloupnosti a posloupnost $(c_{0,n})_{n=n_0}^{\infty}$ není nulová posloupnost. Jestliže $b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$, pak se příslušná rovnice nazývá **homogenní**. **Přidruženou homogenní rovnicí** k originální rovnici nazýváme LRR se stejnými koeficienty a nulovou pravou stranou ($b_n = 0$ pro každé $n \geq n_0$).

Řešení LRR

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} x_{n+1} + c_{0,n} x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Jejím **řešením** nazveme libovolnou posloupnost $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ takovou, že dosazením jejích členů do rovnice dostaneme pravdivé rovnosti pro každé celočíselné $n \geq n_0$.

Počáteční podmínky

Nechť je dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} + c_{k-1,n} x_{n+k-1} + \cdots + c_{1,n} x_{n+1} + c_{0,n} x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0.$$

Počátečními podmínkami pro tuto rovnici nazveme libovolnou soustavu rovností $x_{n_0} = A_0$, $x_{n_0+1} = A_1$, ..., $x_{n_0+k-1} = A_{k-1}$, pro zadané hodnoty $A_0, \ldots, A_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení LRR

Platí dvě následující tvrzení.

1. Každá lineární rekurentní rovnice má **nějaké** řešení.
2. Je-li dána lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ s předepsanými počátečními podmínkami, pak existuje **právě jedno** řešení této rovnice splňující tyto počáteční podmínky.

Princip superpozice

Uvažme dvě LRR k-tého řádu s ne nutně shodnými pravými stranami,

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n,$$

a

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = \tilde{b}_n,$$

pro $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$. Je-li $(X_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešení první rovnice a $(Y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešení druhé rovnice, potom pro libovolnou konstantu α je posloupnost $(X_n + \alpha Y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ řešením LRR

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n + \alpha \tilde{b}_n, \quad n \geq n_0.$$

Věta o struktuře množiny řešení LRR

Mějme LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ tvaru

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0,$$

a označme množinu všech jejích řešení symbolem S a množinu všech řešení přidružené homogenní rovnice symbolem S_0. Potom platí následující tvrzení:

1. Množina S_0 je vektorový prostor dimenze k.
2. Množina S je tvaru $S = (\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty} + S_0$, kde $(\tilde{x}_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je (partikulární) řešení rovnice.

LRR s konstantními koeficienty

Lineární rekurentní rovnice řádu $k \in \mathbb{N}$ **s konstantními koeficienty** je lineární rekurentní rovnice řádu k tvaru

$$x_{n+k} + c_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + \cdots + c_1 \cdot x_{n+1} + c_0 \cdot x_n = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},\ n \geq n_0,$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $c_0 \neq 0$, jsou zadané konstanty a $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je zadaná posloupnost.

Charakteristický polynom LRR s konstantními koeficienty

Charakteristickým polynomem LRRsKK nazýváme polynom stupně k tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

Kořeny tohoto polynomu se nazývají **charakteristická (nebo vlastní) čísla** LRRsKK.

Konstrukce řešení homogenní LRR pomocí charakteristického čísla

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR s konstantními koeficienty řádu $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

pak posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ je jejím řešením.

Řešení homogenní LRR s konstantními koeficienty, jednoduchá charakteristická čísla

Uvažujme homogenní LRR s konstantními koeficienty řádu $k \in \mathbb{N}$

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má k vzájemně různých charakteristických čísel λ_i, $i \in \hat{k}$, pak soubor posloupností $(\lambda_i^n)_{n=n_0}^{\infty}$, $i \in \hat{k}$, tvoří bázi S_0, tedy libovolné řešení $(x_n)_{n=n_0}^{\infty} \in S_0$ je tvaru

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n, \quad n \geq n_0,$$

pro nějaké konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Konstrukce řešení homogenní LRR pomocí charakteristického čísla vyšší násobnosti

Jestliže λ je charakteristickým číslem homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0,$$

a jeho násobnost je m, pak posloupnosti $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}, (n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}, \ldots, (n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$ jsou jejím řešením a tvoří LN soubor.

Konstrukce prostoru všech řešení homogenní LRR

Uvažujme homogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže má K vzájemně různých charakteristických čísel λ_i, $i \in \hat{K}$, každé s násobností $m_i \in \hat{K}$, pak soubor posloupností

$$\Big((\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ (n\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots, \tag{1}$$

$$(\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty},\ (n\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty},\ \ldots, (n^{m_K-1}\lambda_K^n)_{n=n_0}^{\infty} \Big) \tag{2}$$

tvoří bázi S_0.

Shrnutí konstrukce množiny všech řešení homogenní LRR

Uvažme LRR k-tého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Bázi $\mathcal{B}$ podprostoru S_0 konstruujeme v následujících krocích:

1. Sestavme charakteristický polynom $p(\lambda)$ a nalezněme jeho kořeny.
2. Za každé reálné charakteristické číslo λ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnost $(\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
3. Za každé reálné charakteristické číslo λ násobnosti $m > 1$ přidáme do $\mathcal{B}$ posloupnosti $(n\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}, \dots, (n^{m-1}\lambda^n)_{n=n_0}^{\infty}$.
4. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, která nejsou reálná, přidáme do souboru $\mathcal{B}$ dvě reálné posloupnosti $(r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$ a $(r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$.
5. Za každá dvě komplexně sdružená charakteristická čísla $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$, která nejsou reálná a mají násobnost $m > 1$, přidáme do souboru $\mathcal{B}$ reálné posloupnosti $(nr^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}, \dots, (n^{m-1}r^n \cos n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$ a dále $(nr^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}, \dots, (n^{m-1}r^n \sin n\varphi)_{n=n_0}^{\infty}$.

Kvazipolynom

Řekneme, že posloupnost $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je **kvazipolynom**, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ a polynom $P(x)$ takový, že $b_n = P(n)\lambda^n$ pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

Partikulární řešení LRR s kvazipolynomiální pravou stranou

Uvažujme nehomogenní LRR řádu $k \in \mathbb{N}$ s konstantními koeficienty

$$x_{n+k} + c_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n = b_n, \quad n \geq n_0,$$

a nechť $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ je kvazipolynom, tj. $b_n = P(n)\lambda^n$, $n \geq n_0$, pro nějaký polynom $P(x)$ a číslo $\lambda \in \mathbb{R}$. Definujme $m \in \mathbb{N}_0$ následujícím způsobem:

- pokud je λ charakteristické číslo uvažované LRR, pak nechť m je jeho násobnost,
- jinak nechť m je nula.

Potom existuje polynom $Q(x)$ stupně stejného jako $P(x)$ takový, že posloupnost

$$\Big(n^m Q(n)\lambda^n\Big)_{n=n_0}^{\infty}$$

je řešením uvažované LRR.

Mistrovská metoda

Nechť $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou reálné konstanty, f kladná funkce jedné proměnné. Uvažujme rekurentní rovnici

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ v argumentu může znamenat i $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ nebo $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$.
Potom (všechny vztahy myšleny pro $n \to \infty$):

1. Pokud $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$.
2. Pokud $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$, pak $T(n) = \Theta\big(n^{\log_b(a)} \cdot \ln(n)\big)$.
3. Pokud $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a pokud existuje $d \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

   $$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq d \cdot f(n), \quad \text{pro každé } n \geq n_0,$$

   pak $T(n) = \Theta(f(n))$.

6 Funkce více proměnných

Euklidovská norma a vzdálenost

Euklidovskou normu vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,.$$

Euklidovskou vzdálenost dvou bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pak představuje číslo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}\,.$$

Okolí bodu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

Mějme bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a poloměr $\epsilon > 0$. Potom **okolím bodu a o poloměru** ϵ nazýváme množinu všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jejichž vzdálenost od bodu $\mathbf{a}$ je menší než ϵ a značíme ho $U_{\mathbf{a}}(\epsilon)$. Tj. podrobně rozepsáno

$$U_{\mathbf{a}}(\epsilon) \equiv \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \epsilon \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}^n$

Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **hromadným bodem množiny** $M \subset \mathbb{R}^n$, právě když v každém okolí bodu $\mathbf{a}$ leží bod množiny M různý od $\mathbf{a}$.

Vnitřní bod množiny

O bodu $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je **vnitřním bodem množiny** M, právě když existuje okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že $U_{\mathbf{a}} \subset M$.

Otevřená množina

O množině $M \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je **otevřená**, právě když pro každý bod $\mathbf{a} \in M$ existuje okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že $U_{\mathbf{a}} \subset M$.

Limita vektorové posloupnosti

Řekneme, že posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vektorů $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ má **limitu** (případně **konverguje k**) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, právě když pro každé okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené $k > N$ platí $\mathbf{x}_k \in U_{\mathbf{a}}$. Tento fakt značíme $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$.

Konvergence a vzdálenost

Pro vektorovou posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = 0$ (tato druhá limita je obyčejná limita z BI-MA1).

Konvergence po složkách

Uvažme posloupnost $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$. Potom platí následující ekvivalence: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, právě když pro každé $j \in \hat{n}$ platí $\lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_j = \mathbf{a}_j$.

Limita součtu a skalárního násobku posloupností

Mějme dvě vektorové posloupnosti $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ a $(\mathbf{y}_k)_{k=1}^{\infty}$ splňující $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{b}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\big) = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \big(\alpha \mathbf{x}_k\big) = \alpha \mathbf{a}. \tag{4}$$

Limita (vektorové) funkce více proměnných

Mějme funkci n reálných proměnných $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, a hromadný bod $\mathbf{a}$ množiny D_F.
Potom **funkce** F **má v bodě a limitu b** $\in \mathbf{R}^m$, právě když pro každé okolí $U_{\mathbf{b}}$ bodu $\mathbf{b}$ existuje okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že kdykoliv $\mathbf{x} \in (U_{\mathbf{a}} \cap D_F) \setminus \{\mathbf{a}\}$ pak platí $F(\mathbf{x}) \in U_{\mathbf{b}}$.
Symbolicky tuto situaci zapisujeme opět jako

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Pokud $m = 1$, pak ještě pro $\alpha \in \{+\infty, -\infty\}$ klademe $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \alpha$ kdykoliv

$$(\forall U_\alpha)(\exists U_{\mathbf{a}})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(x \in (U_{\mathbf{a}} \cap D_F) \setminus \{\mathbf{a}\} \Rightarrow F(\mathbf{x}) \in U_\alpha).$$

Limita zúžení

Mějme vektorovou funkci $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$ a hromadný bod $\mathbf{a}$ definičního oboru funkce F v němž existuje limita

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Potom i pro $F|_M$ zúžení funkce F na množinu M, která má $\mathbf{a}$ jako hromadný bod, platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (F|_M)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Limita vektorové funkce a limity jejích složek

Mějme (vektorovou) funkci $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, hromadný bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ množiny D_F a bod $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Potom platí

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, právě když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| = 0$.

- Označme složky F jako

$$F(\mathbf{x}) = \big(F_1(\mathbf{x}), \cdots, F_m(\mathbf{x})\big)^T, \quad x \in D_F.$$

Pak $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, právě když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F_j(\mathbf{x}) = b_j$ pro každé $j \in \hat{m}$.

Věta o limitě součtu, násobku

Mějme dvě vektorové funkce $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, $G : D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_F \cap D_G$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pokud existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} G(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$, potom platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \big(F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\big) = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha F(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{b}.$$

Věta o limitě součinu a podílu

Mějme dvě funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, $D_g \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_f \cap D_g$. Potom pokud existují limity $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = c \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = b \cdot c \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{b}{c}, \text{ pokud } c \neq 0.$$

Spojitost (vektorové) funkce

Mějme (vektorovou) funkci $F : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, a bod $\mathbf{a} \in D_F$, který je hromadným bodem množiny D_F.

Funkce F je spojitá v bodě $\mathbf{a}$, právě když

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}).$$

Funkci F nazveme **spojitou** (resp. spojitou na množině M), právě když je spojitá v každém bodě svého definičního oboru (resp. v každém bodě množiny M).

Spojitost součtu, násobku, součinu a podílu

Mějme dvě vektorové funkce $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, $G : D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$, bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, který je hromadným bodem množiny $D_F \cap D_G$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že F i G jsou spojité v bodě $\mathbf{a}$. Potom

- $F + G$ je spojitá v $\mathbf{a}$,
- αF je spojitá v $\mathbf{a}$.

Pokud je $m = 1$, pak

- $F \cdot G$ je spojitá v $\mathbf{a}$,
- $\frac{F}{G}$ je spojitá v $\mathbf{a}$ v případě kdy $G(\mathbf{a}) \neq 0$.

D_f v k-tém faktoru

Buďte $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$, reálná funkce jedné reálné proměnné, $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \hat{n}$. Definujme funkci (D_f v k-tém faktoru)

$$g(\mathbf{x}) \equiv f(x_k), \text{ pro } \mathbf{x} \in D_g \equiv \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k-1} \times D_f \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-k}.$$

Je-li f spojitá, pak i g je spojitá.

Věta o spojitosti složené (vektorové) funkce

Mějme (vektorové) funkce $g : D_g \to \mathbb{R}^m$, $D_g \subset \mathbb{R}^n$ a $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, $D_f \subset \mathbb{R}^m$. Dále předpokládejme, že g je spojitá v $\mathbf{a} \in D_g$ a f je spojitá a definovaná na okolí $g(\mathbf{a})$. Potom je $f \circ g$ spojitá v bodě $\mathbf{a}$.

Parciální derivace (v bodě)

Mějme reálnou funkci n reálných proměnných $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, definovanou na okolí bodu $\mathbf{a} \in D_f$ a $j \in \hat{n}$.

Existuje-li limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **parciální derivací funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle j-té proměnné** a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, případně $\partial_{x_j} f(\mathbf{a})$.

Označme M jako množinu všech vnitřních bodů $\mathbf{a}$ množiny D_f, v kterých existuje limita (předchozí limita). Potom funkci přiřazující hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ každému $\mathbf{a} \in M \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **parciální derivací funkce f podle j-té proměnné** a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \text{případně} \quad \partial_{x_j} f.$$

Gradient

Mějme reálnou funkci n reálných proměnných $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ mající všechny parciální derivace v bodě $\mathbf{a} \in D_f$. Potom řádkový vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \in \mathbb{R}^{1,n}$$

nazýváme **gradientem funkce f v bodě $\mathbf{a}$** a používáme pro něj značení

$$\nabla f(\mathbf{a}) \quad \text{nebo} \quad \text{grad} f(\mathbf{a}).$$

Derivace (vektorové) funkce

Mějme zobrazení $F : D_F \to \mathbb{R}^m$, $D_F \subset \mathbb{R}^n$, definované na okolí bodu $\mathbf{a}$.

Derivací zobrazení F v bodě $\mathbf{a}$ nazýváme matici $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ splňující

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a}) - DF(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0.$$

Složky matice $DF(\mathrm{a})$ a její jednoznačnost

Pokud má zobrazení $F : D_f \to \mathbb{R}^m$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, definované na okolí bodu $\mathbf{a}$, derivaci $DF(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ v bodě $\mathbf{a}$, potom

$$DF(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Odtud ihned také plyne, že je tato matice dána jednoznačně, existuje-li.

Hessova matice

Na derivaci, resp. gradient, funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, lze nahlížet jako na zobrazení $Df : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset D_f$, jeho derivací v bodě $\mathbf{a} \in A$ je pak matice typu $\mathbb{R}^{n,n}$, kterou nazýváme **Hessovou maticí** a značíme $\nabla^2 f(\mathbf{a})$. Pokud existuje, pak platí

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

Derivace složené funkce

Mějme zobrazení $F : D_F \to \mathbb{R}^k$, $D_F \subset \mathbb{R}^m$ a $G : D_G \to \mathbb{R}^m$, $D_G \subset \mathbb{R}^n$ a bod $\mathbf{a} \in D_G$ takové, že existují $DG(\mathbf{a})$ a $DF\big(G(\mathbf{a})\big)$. Potom existuje i derivace složeného zobrazení $F \circ G$ v bodě $\mathbf{a}$ a platí

$$D\big(F \circ G\big)(\mathbf{a}) = DF\big(G(\mathbf{a})\big) \cdot DG(\mathbf{a}).$$

Derivace ve směru

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$ má derivaci v bodě $\mathbf{a} \in D_f$. Buď $\mathbf{v}$ vektor délky 1.

Potom existuje limita (tzv. **derivace funkce f ve směru $\mathbf{v}$ v bodě $\mathbf{a}$**)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) \equiv \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

a je rovna $\langle \nabla f(\mathbf{a})^T \mid \mathbf{v} \rangle$.

7 Kvadratické formy

Kvadratická forma

Funkci $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazýváme **kvadratickou formou**, právě když existuje symetrická matice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{M}_{j,k} x_j x_k, \quad \text{pro každé } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Typy definitnosti kvadratických forem

Kvadratickou formu $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme

- **pozitivně definitní** (PD), právě když $q(\mathbf{x}) > 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **pozitivně semidefinitní** (PSD), právě když $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **indefinitní** (ID), právě když existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ splňující $q(\mathbf{x}) > 0$ a $q(\mathbf{y}) < 0$.
- **negativně semidefinitní** (NSD), právě když $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **negativně definitní** (ND), právě když $q(\mathbf{x}) < 0$ pro každé nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Stejnou terminologii budeme používat i pro symetrické matice $\mathbf{M}$: symetrická matice $\mathbf{M}$ je typu T, právě když forma $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$ je typu T.

Diagonalizace symetrické reálné matice

Symetrická reálná matice je diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory příslušející různým vlastním číslům jsou vzájemně ortogonální.

Vztah definitností a vlastních čísel

Kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$ je

- PD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou kladná.
- PSD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou nezáporná.
- ID, právě když má matice $\mathbf{M}$ kladné i záporné vlastní číslo.
- NSD, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou nekladná.
- ND, právě když všechna vlastní čísla matice $\mathbf{M}$ jsou záporná.

Typy definitností a úprava na čtverce

Předpokládejme, že předchozí postup úspěšně proběhl a máme tedy $q(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vyjádřeno ve tvaru

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \big((\mathbf{P}\mathbf{x})_j\big)^2,$$

kde $1 \leq k \leq n$, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{k,n}$ má hodnost k (plyne z postupné eliminace proměnných) a $\alpha_j \neq 0$, $j \in \hat{k}$.
Potom platí:

- Pokud $k = n$ a $\alpha_j > 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q PD.
- Pokud $k = n$ a $\alpha_j < 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q ND.
- Pokud $k < n$ a $\alpha_j > 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q PSD (ale ne PD).
- Pokud $k < n$ a $\alpha_j < 0$ pro všechna $j \in \hat{k}$, potom je q NSD (ale ne ND).
- Pokud existují $j, \ell \in \hat{k}$ taková, že $\alpha_j > 0$ a $\alpha_\ell < 0$, potom je q ID.

Sylvesterovo kritérium

Kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice, je

- PD, právě když pro každé $k \in \hat{n}$ platí $\det \mathbf{M}_k > 0$.
- ND, právě když pro každé $k \in \hat{n}$ platí $(-1)^k \det \mathbf{M}_k > 0$.

Obecné Sylvestrovo kritérium

Nechť $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická matice. Potom

1. $\mathbf{M}$ je PD, právě když $\det \mathbf{M}_{\{k+1,\ldots,n\}} > 0$ pro každé přirozené k splňující $0 < k \leq n$,
2. $\mathbf{M}$ je ND, právě když $(-1)^k \det \mathbf{M}_{\{k+1,\ldots,n\}} > 0$ pro každé přirozené k splňující $0 < k \leq n$,
3. $\mathbf{M}$ je PSD, právě když $\det \mathbf{M}_I \geq 0$ pro všechna $I \subsetneq \hat{n}$.
4. $\mathbf{M}$ je NSD, právě když $(-1)^{n-\#I} \det \mathbf{M}_I \geq 0$ pro všechna $I \subsetneq \hat{n}$.
5. $\mathbf{M}$ je ID, právě když $\det \mathbf{M}_I < 0$ pro nějaké $I \subsetneq \hat{n}$, kde $n - \#I$ je sudé, nebo $\det \mathbf{M}_I < 0$ a $\det \mathbf{M}_J > 0$ pro nějaké $I, J \subsetneq \hat{n}$, kde $n - \#I$ a $n - \#J$ jsou lichá.

8 Extrémy funkcí více proměnných

Definice extrému funkce více proměnných

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, a bod $\mathbf{a} \in D_f$. Funkce f má v bodě $\mathbf{a}$

- **ostré lokální minimum**, právě když existuje okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a} \cap D_f$ různá od $\mathbf{a}$ platí $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$.
- **ostré lokální maximum**, právě když existuje okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a} \cap D_f$ různá od $\mathbf{a}$ platí $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$.
- **lokální minimum**, právě když existuje okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a} \cap D_f$ platí $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.
- **lokální maximum**, právě když existuje okolí $U_\mathbf{a}$ bodu $\mathbf{a}$ takové, že pro všechna $\mathbf{x} \in U_\mathbf{a} \cap D_f$ platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$.

Hodnota tohoto extrému je ve všech případech rovna $f(\mathbf{a})$. Souhrnně budeme mluvit o (ostrém) lokálním extrému.

Nutná podmínka existence lokálního extrému I: parciální derivace

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, mající v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém (klidně ostrý) a $j \in \hat{n}$. Potom parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{a}$ podle j-té proměnné je rovna nule nebo neexistuje.

Nutná podmínka existence lokálního extrému I: gradient

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, mající v bodě $\mathbf{a}$ (ostrý) lokální extrém a mající parciální derivace v bodě $\mathbf{a}$ podle všech proměnných. Potom $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$.

Stacionární bod

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{a} \in D_f$ splňující $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$ nazýváme **stacionárním bodem**. **Kritickým bodem** nazýváme bod, kde neexistuje gradient nebo je stacionární.

Nutná podmínka existence lokálního extrému II

Nechť funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, má spojité všechny druhé parciální derivace na okolí bodu $\mathbf{a}$ a nechť má v tomto bodě lokální minimum (resp. maximum), potom je Hessova matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ PSD (resp. NSD).

Postačující podmínka existence lokálního extrému

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, mající spojité všechny třetí parciální derivace na okolí bodu $\mathbf{a}$ a nechť jsou splněny následující dvě podmínky

1. $\nabla f(\mathbf{a}) = \theta$,
2. $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ je PD (resp. ND).

Potom má funkce f v bodě $\mathbf{a}$ ostré lokální minimum (resp. maximum).
Pokud platí první podmínka a Hessova matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ je ID, pak tato funkce v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém nemá.

9 Vícerozměrná integrace

Množiny typu 1 a 2

O množině $D \subset \mathbb{R}^2$ řekneme, že

- je **typu 1**, právě když existuje interval $J = \langle a, b \rangle$ a dvě spojité funkce φ_1 a φ_2 definované na J a splňující $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro všechna $x \in J$ tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in J \ \wedge \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

- je **typu 2**, právě když existuje interval $J = \langle a, b \rangle$ a dvě spojité funkce ψ_1 a ψ_2 definované na J a splňující $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in J$ tak, že

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in J \ \wedge \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Postačující podmínka existence vícerozměrného integrálu

Nechť D je hyperkvádr nebo množina typu 1 nebo 2 a f spojitá funkce na D. Potom je funkce f Riemannovsky integrabilní na množině D.

Fubini pro hyperkvádr

Buď f Riemannovsky integrabilní na obdélníku $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$. Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx \quad \text{nebo} \quad \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right) dy$$

potom je roven Riemannově integrálu

$$\int_D f(x, y)\, dxdy.$$

Integrace funkcí se separovanými proměnnými

Pokud integrujeme spojitou funkci tvaru $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ na obdélníku $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$, pak

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_{a_1}^{b_1} g(x)\, dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} h(y)\, dy.$$

Fubini pro množiny typu 1 nebo 2

Buď f spojitá na množině D typu 1 nebo 2. Potom

1. pro množinu D typu 1 platí $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$
2. pro množinu D typu 2 platí $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$

10 Tabulky

Tabulka integrálů

Integrál	**Výsledek**	**Podmínka**
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$\int x^\alpha \, dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln \lvert x \rvert + C$	$x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$
$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\int \sin(x) \, dx$	$-\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \cos(x) \, dx$	$\sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$	$\tan(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx$	$-\cot(x) + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$\arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$\arctan(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Důležité limity posloupností

Limita	**Výsledek**	**Podmínka**
$\lim\limits_{n\to\infty} c$	c	$c \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} n^a$	$\begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	1	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$	1	$c \in (0, +\infty)$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$	$+\infty$	
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$	$\begin{cases} 0, & \lvert a \rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e	

Důležité limity

Limita	**Hodnota**	**Podmínky**
$\lim\limits_{x\to a} c$	c	$c \in \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a} x$	a	$a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a\pm} \dfrac{1}{(x-a)^k}$	$\begin{cases} \pm\infty, & k \text{ lichá}, \\ +\infty, & k \text{ sudá}. \end{cases}$	$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$
$\lim\limits_{x\to a} \lvert x\rvert$	$\lvert a\rvert$	$a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to 0\pm} \operatorname{sgn}(x)$	± 1	
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x}$	$\sqrt[k]{a}$	lichá $k \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[k]{x}$	$\sqrt[k]{a}$	sudá $k \in \mathbb{N}$, $a \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$
$\lim\limits_{x\to a} P(x)$	$P(a)$	$a \in \mathbb{R}$, polynom P
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$	1	
$\lim\limits_{x\to a} \sin(x)$	$\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to a} \cos(x)$	$\cos(a)$	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^x$	e^a	$a \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x$	$+\infty$	
$\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x$	0	
$\lim\limits_{x\to a} \ln(x)$	$\ln(a)$	$a \in (0, +\infty)$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)$	$+\infty$	
$\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x)$	$-\infty$	
$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	e	
$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x$	e^α	$\alpha \in \mathbb{R}$

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	**Podmínky**
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = -1, -2, \ldots$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$