MA2 Přehled - dodatek

January 16, 2024

1 Asymptotika

Asymptotické horní meze o a $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\exists c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| \le c|b_n|\big), \\ a_n = o(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| < c|b_n|\big). \end{aligned}$$

Dolní asymptotická mez Ω

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je asymptoticky zdola omezená posloupností** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \Omega(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když existuje kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a přirozené $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge N$ platí

$$|a_n| \ge c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Omega(b_n)$, právě když $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.
- $a_n = \Omega(a_n)$.
- Vztah Ω je tranzitivní.

Dolní striktní asymptotická mez ω

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je asymptoticky zdola striktně omezená posloupností** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \omega(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když pro každé kladné $c \in \mathbb{R}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge N$ platí

$$|a_n| > c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \omega(b_n)$, právě když $b_n = o(a_n)$.
- Pokud $a_n = \omega(b_n)$, pak $a_n = \Omega(b_n)$.
- ω je tranzitivní.

Asymptotická těsná mez Θ

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je téhož řádu jako posloupnost** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \Theta(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když existují kladné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge N$ platí

$$c_1|b_n| \le |a_n| \le c_2|b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $b_n = \Theta(a_n)$.

- Vztah Θ kombinuje $\mathcal{O}$ a Ω v následujícím smyslu: $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $a_n = \Omega(b_n)$ a $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.
- Θ je tranzitivní.

Limity a asymptotické vztahy ($\sim$, o, $\mathcal{O}$, Ω, Θ a ω)

- Pokud limita $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, právě když $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, právě když $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| > 0$, potom $a_n = \Omega(b_n)$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty$, potom $a_n = \omega(b_n)$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \in (0, +\infty)$, potom $a_n = \Theta(b_n)$.

2 Důkazy

Důkaz věty o poloměru konvergence

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ různé od c dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-c)^{k+1}}{a_k(x-c)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x-c| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x-c| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x-c| \cdot L < 1$, tedy $|x-c| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x-c| \cdot L > 1$, tedy $|x-c| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k(x-c)^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(x-c)^k = 0$).

Důkaz per partes v neurčitém integrálu

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Platí

$$\left(fG - \int f'G \right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Ve výpočtu jsme dále použili známého Leibnizova pravidla pro derivování součinu funkcí.

Důkaz limity součtu vektorových posloupností

Předpoklad: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \wedge \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{b}$, z toho plyne: $\forall j \in \hat{n} : \lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_j = \mathbf{a}_j \wedge \lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{y}_k)_j = \mathbf{b}_j$ (Konvergence po složkách).

Chceme dokázat, že $\lim\limits_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

$$\forall j \in \hat{n} : \mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_j + \lim_{k\to\infty} (\mathbf{y}_k)_j = \lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k)_j + (\mathbf{y}_k)_j$$

Poslední krok jsme mohli udělat díky MA1 (limita součtu jednoduchých posloupností).
Díky větě o konvergenci po složkách víme, že posloupnost konverguje k bodu **právě tehdy**, když konvergují její složky.

Důkaz, že $|R_{n,a}(x)| \leq |R_{n-1,a}(x)|$

Z Taylorova vzorce:

$$|R_{n,a}(x)| = |f(x) - T_{n,a}(x)| \quad \text{a} \quad |R_{n-1,a}(x)| = |f(x) - T_{n-1,a}(x)|$$

Protože $T_{n-1,a}(x)$ je polynom stupně nejvýše n, různý od $T_{n,a}(x)$, pak platí (Věta o nejlepší aproximaci):

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| \leq |f(x) - T_{n-1,a}(x)|$$

Což je to samé jako:

$$|R_{n,a}(x)| \leq |R_{n-1,a}(x)|$$

Důkaz věty o substituci I v neurčitém integrálu

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$.

Důkaz, že $\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Nejprve určitě platí pro libovolné $m, n \in \langle a, b\rangle$, kde $n > m$:

$$\sup\{f(x) | x \in \langle m, n\rangle\} \leq \sup\{g(x) | x \in \langle m, n\rangle\}$$

Pak vezměme inegrální součet obou funkcí:

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde α_i budeme brát vždy jako $f(\alpha_i) = \sup\{f(x) | x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$ (argument pro které nabývá funkce na tomto intervalu maximum).
Potom platí $\forall \sigma$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$\begin{gathered}
\mathcal{J}(\sigma, f) \leq \mathcal{J}(\sigma, g) \\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, g) \\
\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx
\end{gathered}$$

Důkaz, že $f(x, y) = x^2 + y^2$ má v bodě θ ostré lokální minimum

Chceme dokázat, že:

$$(\exists U_\theta(\epsilon))(\forall \mathbf{x} \in U_\theta \cap D_f)(\mathbf{x} \neq \theta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > f(\theta))$$

Pro $x \neq 0$ a $y \neq 0$:

$$x^2 + y^2 > 0$$

platí vždy $\Rightarrow$ můžeme vzít libovolné ϵ.

Důkaz, že $f(x,y) = x^2 - y^2$ nemá v bodě θ extrém.

$f(x,y) = x^2 - y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$
$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, $\nabla f(0,0) = \theta$

Chceme dokázat:

$$(\forall U_\theta(\epsilon))(\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_a \cap D_f)(f(\mathbf{x}_1) > f(\theta) \wedge f(\mathbf{x}_2) < f(\theta))$$

Pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ má platit: $d(\mathbf{x}, \theta) < \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon$. Pro $\mathbf{x}_1$ zafixujeme $y = 0$ a pro $\mathbf{x}_2$ zafixujeme $x = 0$. Potom pro:

$$\mathbf{x}_1 : x < \epsilon \quad \text{a} \quad \mathbf{x}_2 : y < \epsilon$$

Pokud vybereme pro libovolné okolí $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ podle těchto podmínek, tak budou patřit do ukolí U_θ a bude pro ně splněna podmínka.

Důkaz věty o konvergenci a vzálenosti

Chceme dokázat: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - a\| = 0$
Ekvivalenci dokážeme tím, že dokážeme $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$

1. $\Rightarrow$: Předpoklad: $(\forall U_a(\epsilon_0))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k > n_0 : \mathbf{x}_k \in U_a)$, tím pádem:

   $$\sqrt{((\mathbf{x}_k)_1 - \mathbf{a}_1)^2 + \cdots + ((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j)^2} < \epsilon_0$$

   Chceme dokázat, že: $(\forall U_0(\epsilon_1))(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall k > n_1 : \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| \in U_0)$, tím pádem:

   $$\sqrt{((\mathbf{x}_k)_1 - \mathbf{a}_1)^2 + \cdots + ((\mathbf{x}_k)_j - \mathbf{a}_j)^2} < \epsilon_1$$

   Od nějakého n_1. Je to stejná rovnost jako u předpokladu a ten nám garantuje, že pro libovolná U_a existuje n_0, které tuto nerovnost splňuje. Tím pádem stačí vzít $U_a(\epsilon_1)$ a k němui správné n_0 a pak položit $n_1 = n_0$.

2. $\Leftarrow$: úplně stejně

Důkaz principu superpozice

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n$$
$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = \hat{b}_n$$

$(X_n)_{n=n_0}^\infty$ a $(Y_n)_{n=n_0}$ jsou řešením těchto dvou rovnic. Potom $(X_n + \alpha Y_n)_{n=n_0}^\infty$ je řešením:

$$x_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-1} c_{i,n} x_{n+i} = b_n + \alpha \hat{b}_n$$

Dosazením do prvních dvou rovnic dostaneme:

$$X_{n+k}+\sum_{i=0}^{k-1}c_{i,n}X_{n+i}=b_n$$
$$Y_{n+k}+\sum_{i=0}^{k-1}c_{i,n}Y_{n+i}=\hat{b}_n$$

Dosazením do poslední rovnice dostaneme:

$$X_{n+k}+\alpha Y_{n+k}+\textstyle\sum_{i=0}^{k-1}c_{i,n}X_{n+i}+c_{i,n}\alpha Y_{n+i}=$$
$$X_{n+k}+\textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(c_{i,n}X_{n+i})+\alpha(Y_{n+k}+\sum_{i=0}^{k-1}c_{i,n}Y_{n+i})=b_n+\alpha\hat{b}_n$$

Důkaz, že $\forall x\in\mathbb{R}: e^x>0$

1. $e^0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0^k}{k!}=1+0+0+\cdots=1.$

2.
$$\begin{aligned}e^x\cdot e^y&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{y^\ell}{\ell!}\right)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{x^\ell}{\ell!}\frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}x^\ell y^{k-\ell}=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=e^{x+y}.\end{aligned}$$

3. $\forall x\in\mathbb{R}$ platí tím pádem: $e^xe^{-x}=1$, tím pádem $\forall x\in\mathbb{R}: e^x\neq 0.$

3 Ostatní věci

Vektorová posloupnost

Vektorová posloupnost je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, které stále značíme $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$.

Standardní skalární součin

$$\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Schwarzova nerovnost

Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Navíc rovnost nastává právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

Trojúhelníková nerovnost

Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Středové pravidlo

$$\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \cdot \Delta$$

Odhad chyby ve středovém pravidlu

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \mathcal{J}_{\text{midpoint}} \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}.$$

Riemannova konstrukce pro hyperkvádr

1. Mějme funkci dvou proměnných f definovanou a omezenou na obdélníku $D := \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$.

2. Pro dělení $\sigma_x = \{x_0 = a_1 < x_1 < \cdots < x_n = b_1\}$ intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ a $\sigma_y = \{y_0 = a_2 < y_1 < \cdots < y_m = b_2\}$ intervalu $\langle a_2, b_2 \rangle$ definujme

   $$m_{i,j} := \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\},$$
   $$M_{i,j} := \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle\}, \quad i \in \hat{n},\ j \in \hat{m}.$$

   Množinu $\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ nazveme **dělením obdélníku** D.

3. Dále definujme **dolní a horní součty funkce f na obdélníku D při dělení** σ předpisy

$$s(f,\sigma) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{i,j}(x_{i-1}-x_i)(y_{j-1}-y_j),$$
$$S(f,\sigma) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{i,j}(x_{i-1}-x_i)(y_{j-1}-y_j).$$

4. Nyní pro funkci f a obdélník D definujeme **horní a dolní integrál funkce f na obdélníku D** následujícím předpisem

$$\overline{\int_D} f(x,y)\,dxdy := \inf\{S(f,\sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\},$$
$$\underline{\int_D} f(x,y)\,dxdy := \sup\{s(f,\sigma) \mid \sigma \text{ dělení obdélníku } D\}.$$

5. Omezenou funkci f nazveme **Riemannovsky integrabilní na obdélníku D**, právě když

$$\overline{\int_D} f(x,y)\,dxdy = \underline{\int_D} f(x,y)\,dxdy.$$

Tuto společnou reálnou hodnotu potom nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na obdélníku D** a značíme ji

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{nebo} \quad \int_D f.$$

Taylorova věta do kvadratických členů s odhadem chyby

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^n$, mající spojité všechny parciální derivace do třetího řádu včetně na okolí $U_{\mathbf{a}}$ bodu $\mathbf{a} \in D_f$. Potom existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každé $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}),$$

kde $|R_2(\mathbf{x})| \leq M\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^3$.