MA2 Přehled - dodatek

January 15, 2024

1 Asymptotika

Asymptotické horní meze o a $\mathcal{O}$

$$
\begin{aligned}
a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\exists c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| \leq c|b_n|\big), \\
a_n = o(b_n) \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\big(n > N \Rightarrow |a_n| < c|b_n|\big).
\end{aligned}
$$

Dolní asymptotická mez Ω

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je asymptoticky zdola omezená posloupností** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \Omega(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když existuje kladná konstanta $c \in \mathbb{R}$ a přirozené $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|a_n| \geq c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Omega(b_n)$, právě když $b_n = \mathcal{O}(a_n)$.
- $a_n = \Omega(a_n)$.
- Vztah Ω je tranzitivní.

Dolní striktní asymptotická mez ω

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je asymptoticky zdola striktně omezená posloupností** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \omega(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když pro každé kladné $c \in \mathbb{R}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|a_n| > c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \omega(b_n)$, právě když $b_n = o(a_n)$.
- Pokud $a_n = \omega(b_n)$, pak $a_n = \Omega(b_n)$.
- ω je tranzitivní.

Asymptotická těsná mez Θ

Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že **posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **je téhož řádu jako posloupnost** $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, symbolicky $a_n = \Theta(b_n)$ pro $n \to \infty$, právě když existují kladné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$c_1|b_n| \leq |a_n| \leq c_2|b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $b_n = \Theta(a_n)$.

- Vztah Θ kombinuje $\mathcal{O}$ a Ω v následujícím smyslu: $a_n = \Theta(b_n)$, právě když $a_n = \Omega(b_n)$ a $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.
- Θ je tranzitivní.

Limity a asymptotické vztahy ($\sim$, o, $\mathcal{O}$, Ω, Θ a ω)

- Pokud limita $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R}$, pak $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$, právě když $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.
- Platí $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, právě když $f(x) \sim g(x)$ pro $x \to a$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| > 0$, potom $a_n = \Omega(b_n)$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty$, potom $a_n = \omega(b_n)$.
- Pokud $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \in (0, +\infty)$, potom $a_n = \Theta(b_n)$.

2 Důkazy

Důkaz věty o poloměru konvergence

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ různé od c dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-c)^{k+1}}{a_k(x-c)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x-c| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x-c| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x-c| \cdot L < 1$, tedy $|x-c| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x-c| \cdot L > 1$, tedy $|x-c| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k(x-c)^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(x-c)^k = 0$).

Důkaz per partes

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Platí

$$\left(fG - \int f'G \right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Ve výpočtu jsme dále použili známého Leibnizova pravidla pro derivování součinu funkcí.

3 Ostatní věci

Vektorová posloupnost

Vektorová posloupnost je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, které stále značíme $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty}$.

Standardní skalární součin

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Schwarzova nerovnost

Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost

$$|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Navíc rovnost nastává právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

Trojúhelníková nerovnost

Pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$