

# MA2 Přehled - dodatek

January 15, 2024

# 1 Asymptotika

## Asymptotické horní meze $o$ a $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned} a_n = \mathcal{O}(b_n) &\stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow |a_n| \leq c|b_n|), \\ a_n = o(b_n) &\stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow |a_n| < c|b_n|). \end{aligned}$$

## Dolní asymptotická mez $\Omega$

Mějme dvě posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$  a  $(b_n)_{n=1}^\infty$ . Řekneme, že **posloupnost**  $(a_n)_{n=1}^\infty$  **je asymptoticky zdola omezená posloupností**  $(b_n)_{n=1}^\infty$ , symbolicky  $a_n = \Omega(b_n)$  pro  $n \rightarrow \infty$ , právě když existuje kladná konstanta  $c \in \mathbb{R}$  a přirozené  $N \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n \geq N$  platí

$$|a_n| \geq c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Omega(b_n)$ , právě když  $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ .
- $a_n = \Omega(a_n)$ .
- Vztah  $\Omega$  je tranzitivní.

## Dolní striktní asymptotická mez $\omega$

Mějme dvě posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$  a  $(b_n)_{n=1}^\infty$ . Řekneme, že **posloupnost**  $(a_n)_{n=1}^\infty$  **je asymptoticky zdola striktně omezená posloupností**  $(b_n)_{n=1}^\infty$ , symbolicky  $a_n = \omega(b_n)$  pro  $n \rightarrow \infty$ , právě když pro každé kladné  $c \in \mathbb{R}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n \geq N$  platí

$$|a_n| > c \cdot |b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \omega(b_n)$ , právě když  $b_n = o(a_n)$ .
- Pokud  $a_n = \omega(b_n)$ , pak  $a_n = \Omega(b_n)$ .
- $\omega$  je tranzitivní.

## Asymptotická těsná mez $\Theta$

Mějme dvě posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$  a  $(b_n)_{n=1}^\infty$ . Řekneme, že **posloupnost**  $(a_n)_{n=1}^\infty$  **je téhož řádu jako posloupnost**  $(b_n)_{n=1}^\infty$ , symbolicky  $a_n = \Theta(b_n)$  pro  $n \rightarrow \infty$ , právě když existují kladné konstanty  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  a  $N \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n \geq N$  platí

$$c_1|b_n| \leq |a_n| \leq c_2|b_n|.$$

Vlastnosti:

- $a_n = \Theta(b_n)$ , právě když  $b_n = \Theta(a_n)$ .

- Vztah  $\Theta$  kombinuje  $\mathcal{O}$  a  $\Omega$  v následujícím smyslu:  $a_n = \Theta(b_n)$ , právě když  $a_n = \Omega(b_n)$  a  $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ .
- $\Theta$  je tranzitivní.

### Limity a asymptotické vztahy ( $\sim$ , $o$ , $\mathcal{O}$ , $\Omega$ , $\Theta$ a $\omega$ )

- Pokud limita  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \in \mathbb{R}$ , pak  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  pro  $x \rightarrow a$ .
- Platí  $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$ , právě když  $f(x) = o(g(x))$  pro  $x \rightarrow a$ .
- Platí  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , právě když  $f(x) \sim g(x)$  pro  $x \rightarrow a$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| > 0$ , potom  $a_n = \Omega(b_n)$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty$ , potom  $a_n = \omega(b_n)$ .
- Pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \in (0, +\infty)$ , potom  $a_n = \Theta(b_n)$ .