Prova Pratica di Calcolo Scientifico e Metodi Numerici

06 Settembre 2024

Creare un live script dal nome Cognome_Nome_Matricola.mlx (dove Cognome è il vostro cognome, Nome il vostro nome e Matricola il vostro numero di matricola senza il codice 60/61/ iniziale) che esegua le seguenti istruzioni:

1. [**8 punti**] chieda in input all'utente un numero n e verifichi che sia intero, pari e compreso tra 20 e 30. Stabilito che il numero inserito soddisfa i requisiti richiesti, si costruisca una matrice C di dimensione $n \times n$ fatta nel seguente modo

$$C = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A titolo di esempio, se $n = 5$ (attenzione: questo numero non soddisfa le condizioni richieste) la matrice C dovrà avere la forma

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino e si visualizzino, inoltre, lo spettro e il raggio spettrale di C. Se il numero inserito non dovesse verificare le condizioni richieste, dovrà esserne richiesto uno nuovo fino a quando non si ottiene un numero consentito.

2. [**11 punti**] crei un test per la risoluzione di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tramite la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice dei coefficienti. In particolare, si generino 10 matrici di dimensione crescente tra 100 e 1000 con passo 100 contenente numeri pseudo-casuali **reali** compresi tra 10 e 30. Per ogni matrice:

   - calcolare la fattorizzazione tramite una funzione `[P,L,U] = gauss_palu(A)` **da allegare alla fine dello script**;
   - imporre una soluzione $\mathbf{x}$ di elementi uguali a 1 e calcolare il corrispondente termine noto $\mathbf{b}$;
   - risolvere i sistemi "a cascata" per ottenere la soluzione $\mathbf{x}_1$;
   - calcolare l'errore relativo tra la soluzione vera $\mathbf{x}$ e quella calcolata $\mathbf{x}_1$.

   Infine, stampare a video una tabella che contiene in ogni riga la dimensione della matrice e l'errore relativo calcolato precedentemente.

3. [**11 punti**] implementi un test per l'approssimazione della radice positiva dell'equazione nonlineare

$$f(x) = \sin(3x) - x^2 + 2x + 3 = 0$$

utilizzando il metodo di Newton, con punto iniziale $x_0 = 1$, e con il metodo di bisezione, partendo dall'intervallo $[0, 4]$. Per entrambi i metodi, impostare una tolleranza $\tau = 10^{-5}$ e un numero massimo di iterazioni $kmax = 100$. Infine si stampi, sullo stesso sistema di assi cartesiani, il grafico della funzione $f(x)$ e le due approssimazioni ottenute. Il grafico dovrà essere corredato da un titolo e una legenda.

Le due funzioni

- `[`x_n`,`k_n`] = newton(f,fder,`x_0`,`τ`,kmax)`
- `[`x_b`,`k_b`] = bisezione(f,a,b,`τ`,kmax)`

dovranno essere allegate alla fine dello script.