Lydvisualisering av fourierapproksimert firkantbølge

Mikkel Mæhlum Farner

April 2025

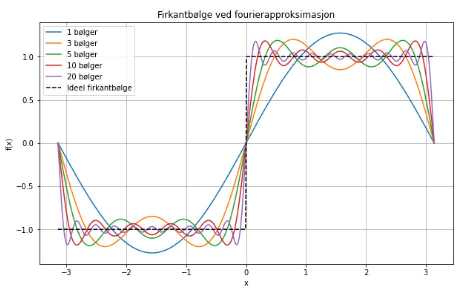

Figure 1: Rekonstruert firkantbølge ved ulike bølgenummer

1 Introduksjon

En forutsetning for en god oblig-oppgave må være at prosjektet er morsomt å utføre, og for en hobbymusiker som meg var fourieranalyse den soleklare kandidaten. Gjennom bruk av digitale synthesizere som benytter såkalt "Wavetable Synthesis" har jeg vært bort i både sinus-, trekant- og firkantbølger, som alle har sin karakteristiske klang. Av de mest særegne er firkantbølgen, med forvrengingen som gir firkantbølgen sin kantete og aggressive profil. Ved å se på en dekomponering av frekvensene disse ulike bølgene gir ut, er det tydelig at dette er et resultat av ulike mengder med overtoner, hvor sinusbølgen ikke har noen, trekantbølgen har litt fler, og firkantbølgen har veldig mange. Men akkurat hvor disse overtonene kom fra, manglet jeg en forklaring på inntil fourieranalysen ga meg muligheten til å regne på det. Og det er nettopp det denne rapporten vil dekke - min fourierapproksimasjon av en firkantbølge ved sinusbølger - men denne gangen demonstrert gjennom å lytte, istedenfor å se, slik som man typisk lærer det første gangen, og som er vist i figur 1.

2 Teori

Firkantbølgen kan defineres slik:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < t < T/2 \\ -1 & \text{for } -T/2 < t < 0 \end{cases}$$

Firkantbølgen er en odde funksjon, så fourierrekken inneholder kun sinusledd, ingen cosinusledd eller konstantledd ($a_0 = 0$).

Dermed kan en firkantbølge med amplitude 1, periode T, og vinkelfrekvens $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ utrykkes som en uendelig sum av sinusfunksjoner:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)\omega_0 t) \tag{1}$$

I musikkens verden brukes frekvens fremfor vinkelfrekvens, så med $\omega_0 = 2\pi f$, samt å bare legge til de odde verdiene for $n = (2k+1)$ får man dette utrykket, som vil brukes videre:

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ odd}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin(2\pi n f t) \tag{2}$$

Et problem med oppstår ved denne fourierrekken er Gibbs' fenomen [1]. Siden funksjonen er diskontinuerlig i 0, vil fourierapproksimasjonen få et oversving. Likevel vil denne konvergere nesten overalt, som jeg har skjønt både er et fagbegrep og også tilstrekkelig for ingeniøranvendelser.

3 Metode

All kode til dette prosjektet er skrevet i python, og for å generere lyd er biblioteket pyaudio brukt. Den første demonstrasjonen er en enkel sammenlikning mellom en teoretisk perfekt firkantbølge og en fourierapproksimasjon. Jeg valgte å approksimere en firkantbølge med frekvens 110 Hz, altså en A2 i scientific pitch notation systemet. Fourierapproksimasjonen fortsetter å legge til bølger frem til frekvensen er større en halvparten av sampleraten på 44100 Hz, hvor Nyquist-Shannon teoremet forteller oss at bølgene ikke lenger kan representeres. I demonstrasjonen hører man først den approksimerte og dermed den perfekte bølgen. Her er også bølgene plottet for å se på hvordan de ser ut.

For å utdype forståelsen av fourierapproksimasjonen og undertonene, lagde jeg den andre demonstrasjonen, hvor fourierapproksimasjonen spilles av ved flere steg i prossessen, for å få frem hvordan approksimasjonen utvikler seg med flere bølger. Den siste demonstrasjonen bygger videre på dette ved å se på de ulike sinusbølgene alene, hvor de spilles av helt på egen hånd for å se på relasjonene mellom dem.

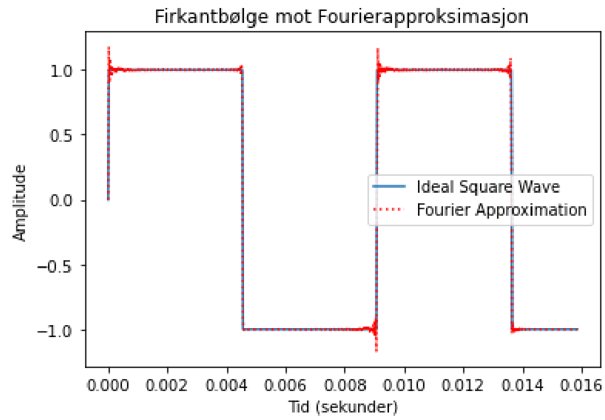

Figure 2: Rekonstruert firkantbølge mot teoretisk bølge

4 Resultat og diskusjon

Lyden fant jeg ingen god måte å veve inn i rapporten direkte, så den er å finne i denne youtubevideoen: https://www.youtube.com/watch?v=RiBmW4X7QpI. (Anbefaler sterkt å bruke hodetelefoner)

Den første demonstrasjonen viser at firkantapproksimasjonen høres (hvertfall for meg) identisk ut til den ideele firkantbølgen. Om man ser på et plott av disse bølgene, som vist i figur 2, er kanskje ikke dette så overraskende, men man ser også at Gibbs' fenomen dukker opp.

Demonstrasjon to var for meg den mest vesentlige, hvor man hører overtonene bli lagt til i samtid. Tonene alene høres ikke spesielt ut, men etter hvert som flere overtoner legges til, trer den tydelige og kantete klangen til firkantbølgen frem. Som demonstrasjon tre viser, består denne lyden av harmoniske overtoner – nærmere bestemt kun oddetallsmultipler av grunntonen. Selv om disse frekvensene følger den naturlige overtonerekka, svarer de ofte ikke til eksakte toner på et piano. Dette gjør at vi ikke oppfatter lyden som en vanlig akkord, men som én kompleks klang hvor overtonene gir firkantbølgen sin karakteristiske klang.

5 Konklusjon

Jeg er svært fornøyd med å ha oppnådd mitt hovedmål om å ha det gøy mens jeg lærte litt mer om noe jeg interesserer meg for. Musikk er i en tidsalder hvor man kan manipulere lyden nøyaktig slik man vil, og firkantbølgen er et tidløst verktøy i denne sammenhengen. Prosjektet viste meg hvor overtonene kommer fra, og årsaken til at firkantbølgen har den klangen den har, ble også tydeliggjort.

References

[1] Wikipedia contributors. Gibbs phenomenon, 2025.