

# En videnskabelig analyse af den maritime tommelfingerregel for vurderingen af kollisionskurs ved betragtning af omgivelsernes relative bevægelse til et andet fartøj

Mikkel Metzsch Jensen  
Department of Physics, University of Oslo

(Dated: January 17, 2021)

In this article we investigate the rule of thumb for recognizing when two boats are on a collision course. The proposed statement to be analyzed, *The background method*, can be formulated shortly as: "If the static background seen behind the oncoming boat does not move relatively to the boat, then you are on a collision course.". This turned out to be strongly connected to the determination of the relative bearing. By mathematical proof we found the relative bearing to remain constant when on collision course, and therefore this is a precise way of recognizing collision course. On the other hand we say that the background method can be used as mean to determine if the relative bearing is constant in special cases. This were mainly derived by an analytical analysis but is supported by numerical simulations. In general the background method is found to be valid when used in greater distances to the coast, loosely estimated to approximately 800 meters or more. This is found to be dependent on the value of relative bearing and the angle between the heading and the coast. This is explained in more details on figure 5 and 6.

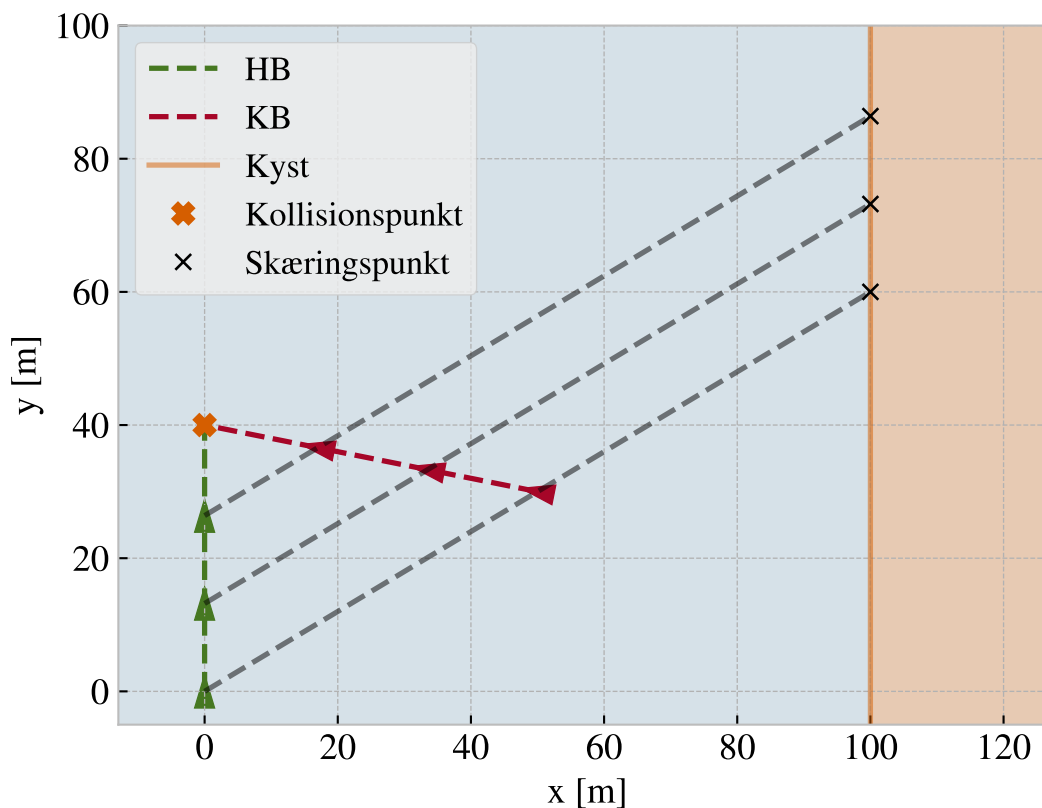


Figure 1. forside billede

## I. INTRODUKTION

Som søfarer findes der en række nødvendige og basale regler som sikrer god orden og sikkerhed til søs. Heriblandt har vi vigereglerne som regulerer færdslen på vandet og forebygger, at skibe støder sammen [1]. Disse regler beskriver som udgangspunkt hvordan man skal agere hvis man er på kollisionskurs med andre fartøjer. Hertil er det fordelagtigt for søfaren at blive opmærksom på en mulig kollision i så god tid som mulig. Denne rapport udspringer af en diskussion med Lars Juel Hansen (sommeren 2019) om en forslået tommelfingerregel for netop denne vurdering. Formuleringen for det vi fremadrettet skal kalde baggrundsmetoden lyder som følger:

Betrakt båden med mulig kollisionskurs og noter et fastliggende punkt i baggrunden som synes bag båden. Hvis dette baggrundspunkt i den efterfølgende tid lader til at flytte sig i forhold til båden, da er du ikke på kollisionskurs med båden. Forbliver baggrundspunktet i sigtelinjen bag båden er dette et tegn på kollisionskurs.

Ved en undersøgelse af tilgængelige internetkilder finder vi lidt forskellige gengivelser af denne regel. Ifølge [2] kan man ved "betydelige afstande" til kysten bruge observationen om hvordan kollisionsfartøjet trækker "over land" til at vurdere pejlingen (Retning fra iagttageren til den genstand, der pejles [3]). Altså hævdes det at hvis den modsejlende trækker mod højre (stjrbord) i forhold til baggrunden så vil fartøjet gå højre om iagterens fartøj. Modsat vil det gå venstre (bagbord) om iagterens fartøj hvis det trækker til venstre over land. Hvis ikke fartøjet bevæger sig kendeligt i forhold til baggrunden, vil det i overensstemmelse med baggrundsmetoden efter sigende indikere at fartøjerne er på kollisionskurs. Dog er det værd at bemærke at denne metode indføres som et middel til at vurdere pejlingen. I andre kilder som [4], [5] og [6], er det netop pejlingen som angives som en direkte indikator på kollisionskurs. I dette tilfælde kan man altså bruge en sammenligning af det andet fartøjs bevægelse relativt til et fast punkt på eget skib som en alternativ metode til baggrundsmetoden.

I denne rapport skal vi fremføre en matematisk analyse af baggrundsmetodens pålidelighed som indikator for kollisionskurs. Dette gøres ved først at beskrive pejlingens betydning for denne vurdering. Med dette udgangspunkt skal vi undersøge baggrundsmetodens præcision i forhold til at vurdere pejltræk og dermed udpege eventuelle begrænsninger.

### 1. Målgruppe og brug af matematisk notation

Rapporten bestræber sig på at give en fyldestgørende beskrivelse af det omtalte problem samtidig som dette formidles til en målgruppe uden særpræget matematisk baggrund. Dette er ikke mulig på alle punkter, da en

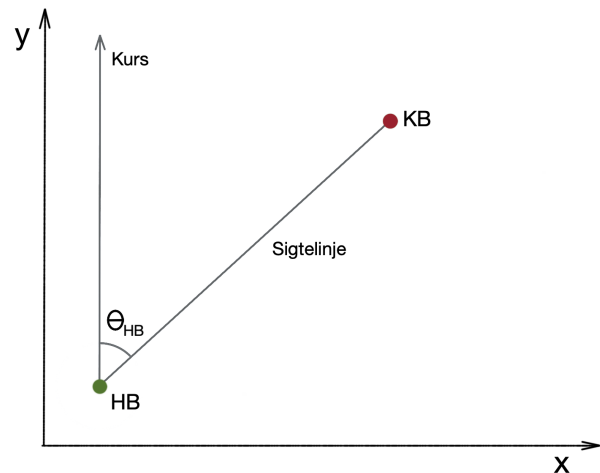


Figure 2.

ordenlig bevisførelse kræver en hvis mængde matematik. Jeg har dog forsøgt at gengive de underliggende resultater undervejs, således at man kan springe beregninger og udledninger over uden at miste kontekst. Det gælder særlig udledningen i afsnit III A.

## II. METODE

### A. Definering af problemet

Vi forestiller os to både til søs, som nærmer sig hinanden. Vi kalder den ene båd for hovedbåden (HB), hvor vi har placeret iagttageren, som ønsker at vurdere om bådene er på kollisionskurs. Den anden båd kalder vi for kollisionsbåden (KB). Vi antager at begge bådene bevæger sig med konstant hastighed, dvs. retlinjet og med konstant fart. Vi beskriver hver båd som et enkelt punkt i et to-dimensionalt akse-system som tilsvarende bådens position på vandets overflade. Vi bruger aksetitlerne  $x$  og  $y$  til at beskrive positionen  $\vec{P} = (x, y)$ . Positionen til hver båd bliver da en funktion af tid, som bestemt af parametrene: Startposition  $\vec{P}_0$  og hastighed  $\vec{v}$ . For de to både har vi bevægelsesligningen

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0 + \vec{v} \cdot t \quad (1)$$

Vi definerer en kollision som tilfældet hvor bådene har samme position til samme tidspunkt. Bemærk at en kollision i praksis vil ske i flere tilfælde da vi ikke har taget hensyn til bådenes udstrækning her. Dette regnes dog for en ubetydelig detalje for dette problem.

For at vurdere om bådene er på kollisionskurs er det angiveligt nyttigt at benytte pejlingen. Vi definerer i matematisk forstand pejlingen  $\theta_{HB}$  fra HB som vinklen mellem kursen til HB og sigtelinjen fra HB til KB. Dette er illustreret på figur ??.

## B. Numeriske simuleringer som støtte til matematiske resultater

I tillæg til den matematiske analyse vil vi bruge numeriske metoder som støtte til resultaterne. Da alle bevægelserne er lineære kan vi simulere bådenes præcise bevægelse uden usikkerhed. Dette gøres ved at evaluere bevægelsesligning 1 ved forskellige tidspunkter. Dette er analogt til eulers metode uden acceleration. Vi skriver simuleringskoden i python som ser ud som vist nedenfor.

```
import numpy as np

def simulator(MB_start, OB_start, MB_end,
    ↪ OB_end, T = 10, dt = 0.1):
    K = int(T/dt + 1)           #Steps
    MB_pos = np.zeros((K,2))    #MB = Main Boat
    OB_pos = np.zeros((K,2))    #OB = Other Boat
    t = np.zeros(K)             #Time

    #Initial position
    MB_pos[0] = MB_start
    OB_pos[0] = OB_start

    #Calculate constant velocity
    MB_vel = (MB_end - MB_pos[0])/T
    OB_vel = (OB_end - OB_pos[0])/T

    #Main update loop
    for k in range(K - 1):
        MB_pos[k+1] = MB_pos[k] + MB_vel*dt
        OB_pos[k+1] = OB_pos[k] + OB_vel*dt
        t[k+1] = t[k] + dt
    return MB_pos, OB_pos
```

## III. RESULTATER

### A. Pejlingens betydning for kollisionskurs (matematisk udledning)

Da vi har antaget at bådene bevæger sig med konstant hastighed kan vi bruge en lineær transformation til at skifte koordinatsystem til intertialsystemet hvor HB er i ro (HB's intertialsystem). Med andre så kan vi frit vælge at beskrive positionen til KB som den opleves for en iagtager ombord på HB. Positionen  $P'_{KB}$  til KB i det nye intertialsystem kan skrives:

$$\begin{aligned}\vec{P}'_{KB}(t) &= \vec{P}_{KB}(t) - \vec{P}_{HB}(t) \\ &= \vec{P}_{0,KB} + \vec{v}_{KB}t - \vec{P}_{0,HB} - \vec{v}_{HB}t \\ &= (\vec{P}_{0,KB} - \vec{P}_{0,HB}) + (\vec{v}_{KB} - \vec{v}_{HB})t \\ &= \vec{P}'_{0,KB} + \vec{v}'_{KB}t\end{aligned}$$

Vi ser at  $P'_{KB}$  også beskriver en retlinjet bevægelse. I tilfældet hvor bådene er på kollisionskurs ved vi at

$P'_{KB}(t_k) = 0$  ved kollisionsstidspunktet  $t_k$ . Dette medfører sammenhængen:

$$\begin{aligned}\vec{P}'_{0,KB} &= -\vec{v}'_{KB}t_k \\ \begin{pmatrix} x'_{0,KB} \\ y'_{0,KB} \end{pmatrix} \frac{1}{t_k} &= - \begin{pmatrix} v'_{x,KB} \\ v'_{y,KB} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2)$$

Vi kan da finde pejlingen  $\theta_{HB}$  ved at omskrive  $P'_{KB}$  til polære koordinater. Her er vi bare interesseret i vinkelkoordinat  $\phi_{KB}$  som kan bestemmes som

$$\begin{aligned}\phi_{KB}(t) &= \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} + v'_{y,KB}t}{x'_{0,KB} + v'_{x,KB}t}\right)\end{aligned}$$

Vi bruger da sammenhængen fra ligning 2 og finder

$$\begin{aligned}\phi_{KB}(t) &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} - y'_{0,KB}\frac{t}{t_k}}{x'_{0,KB} - x'_{0,KB}\frac{t}{t_k}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} \frac{1 - \frac{t}{t_k}}{1 - \frac{t}{t_k}}}{x'_{0,KB} \frac{1 - \frac{t}{t_k}}{1 - \frac{t}{t_k}}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB}}{x'_{0,KB}}\right) = \text{konst.}\end{aligned}$$

Fra dette ser vi at vinkelkoordinat  $\phi_{KB}$  er konstant (uafhængig af tid), hvilket medfører at pejlingen også er konstant:

$$\theta_{HB} = \frac{\pi}{2} - \phi_{KB} = \text{konst.}$$

Fra dette ræsonement har vi altså vist at pejlingen vil være konstant i tilfældet hvor bådene er på kollisionskurs. Hvis bådene følger kollisionskursen men i modsat retning (bevæger sig væk fra hinanden), kan vi indføre betingelsen  $P'_{KB}(t_i) = 0$  for et tidspunkt  $t_i < 0$ . Derved kan vi opstille en ligning analog til 2 og derved finde at pejlingen også vil være konstant i dette tilfælde. Hvis ikke bådene er på kollisionskurs er ligning 2 ikke længere gyldig og  $P'_{KB}$  kan tage hvilken som helst retlinjet bane. Det betyder at  $\phi_{KB}$  og dermed også at pejlingen  $\theta_{KB}$  ændre sig som funktion af tid. Dette fører til slutningen:

**Teorem 1** *Hvis og bare hvis to både har kollisionskurs og nærmer sig i afstand vil pejlingen fra den ene båd til den anden være konstant.*

#### 1. Gengivelse af konstant-pejling-udledningen uden matematisk notation

Siden begge bådene antages at bevæge sig med konstant fart og i en ret linje vil en iagtager på HB også se at KB bevæger sig med konstant fart og i en ret linje. I tilfældet hvor bådene er på kollisionskurs vil en iagtager på

HB altså se at KB har kurs direkte mod iagteren. Dette er den eneste mulige kurs hvorpå bådene kan kollidere uden at medparterne ændrer retning eller fart. Derfor følger det at pejlingen også vil være konstant i tilfældet med kollisionskurs. Det eneste andet tidspunkt at man vil opleve at pejlingen er konstant er hvis begge bådene står stille eller bevæger sig i modsat retning af hvad der kræves for kollisionskurs.

### B. Grænsebetingelser for brug af baggrundsmetoden

Med udgangspunkt i teorem 1 kan vi undersøge om brugen af baggrundsmetoden er en pålidelig indikator for en fremtidig kollision. Vi skal altså undersøge om det er sammenfald mellem en konstant pejling og tilfældet hvor baggrunden ikke bevæger sig relativt til sigtelinjen gennem KB.

I tilfældet med kollisionskurs ved vi fra teorem 1 at sigtelinjen fra HB gennem KB vil have en konstant vinkel i forhold til kystlinjen. I det enkle tilfælde hvor kystlinjen er relinjet og parallel med kursen til HB vil sigtelinjens skæring med kystlinjen forflytte sig med samme hastighed som HB. Dette resultat bekræftes ved simuleringen vist på figur 3.

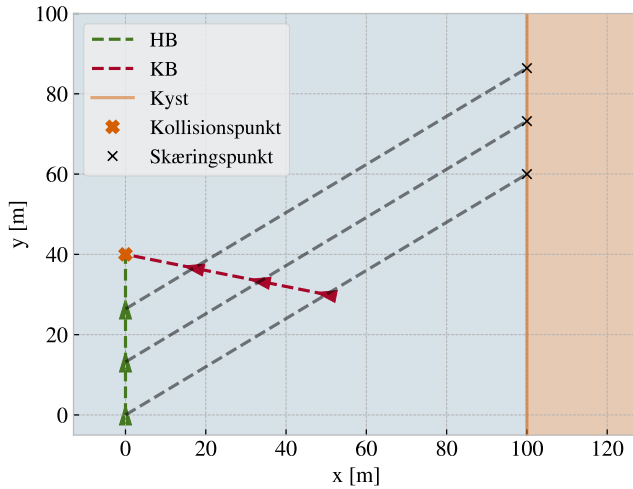


Figure 3. En simulering af bådene HB og KB på kollisionskurs, med kollisionspunkt 100 meter fra kysten. Her plottes fire positioner for bådene (inklusive kollisionspunktet) jævnt fordelt i tid. Fra de sorte stiplede linjer ser vi hvordan sigtelinjen fra HB gennem KB skærer med kysten. Dette skæringspunkt forflytter sig som forventet i henhold til HB's bevægelse.

Hvis denne forflytning er kendelig, på trods af at bådene er på kollisionskurs og pejlingen er konstant, vil baggrundsmetoden være vildledende. Fra HB's perspektiv vil baggrundspunktet (BP) bevæge sig med en hastighed

$\vec{v}_{BP} = -\vec{v}_{HB}$ . Dette giver en vinkelhastighed  $\omega_O$ :

$$\omega_O = -\frac{v_{HB} \sin(\theta_{HB})}{d}$$

hvor  $v_{HB} = |\vec{v}_{HB}|$  er bådens fart,  $\theta_{HB}$  er pejlingen og  $d$  er afstanden til kysten via sigtelinjen. Hvis vi definerer minimumsgrænsen for en kendelig forflytning som vinkelhastigheden  $\omega_k$  får vi at kriteriet for anvendelse af baggrundsmetoden er

$$\begin{aligned} |\omega_O| &< \omega_k \\ \frac{v_{HB} \sin(\theta_{HB})}{d} &< \omega_k \\ \frac{v_{HB} \sin(\theta_{HB})}{\omega_k} &< d \end{aligned} \quad (3)$$

Vi kan da bruge denne sammenhæng (3) til at finde Den minimum afstand  $d$  for brug af baggrundsmetoden som funktion af pejlingen  $\theta_{HB}$ . Dette resultat er vist på figur 4.

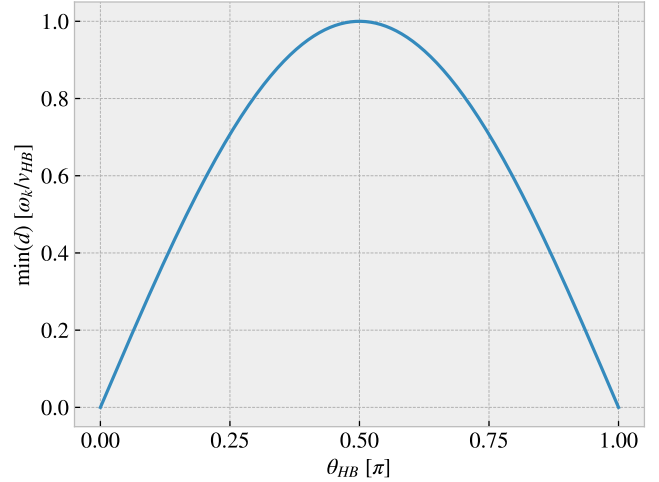


Figure 4. Den minimum afstand  $d$  som funktion af pejlingen  $\theta_{HB}$  angivet med dimensionløse enheder. For at baggrundsmetoden skal være anvendelig må  $d$  ligge over kurven vist her.

#### 1. Definering af kendelig forflytning

For at bestemme enhederne til figur 4, må vi definere hvad en kendelig forflytning er. Hertil er vi nødsaget til at lave en række kvalificerede gæt for at finde et estimat for  $\omega_k$ .

Vi kan forestille os at vi ved observation af KB vil benytte et centralt punkt på båden som referanse mod baggrunden. En mulig definition på en kendelig forflytning kan da være at baggrundspunktet har flyttet sig ud til eller forbi kanten af båden i løbet af en observationsperiode. Observationsperioden estimeres til 10 sekunder, svarende til den nedre grænse af tidsintervallet 10-20 sekunder som

nævnes i [2]. Vi siger da at forflytningen er kendelig hvis baggrundspunktet har flyttet sig en relativ afstand større eller lig halvdelen af bådens tværlængde set fra iagtageren i løbet af 10 sekunder. For sejlåde i den lidt større klasse kan vi bruge en gennemsnitlig bredde på 5 m og længde på 15 m. Siden vi ønsker at finde tværlængden set fra iagtageren kan vi bruge 10 m som et middelestimat (tilsvarende 45 graders sigtelinje). Til sidst må vi vurdere den gennemsnitlige aftand hvorved en søfarer har brug for at vurdere kollisionsrisikoen. Hertil bruges 200 meter som en minimumsværdi. Ud fra dette finder vi at en kendelig forflytning kan defineres ved en vinkelhastighed større eller lig  $\omega_k$ :

$$\omega_k = \frac{\arctan\left(\frac{1}{2} \frac{10\text{m}}{200\text{m}}\right)}{10\text{s}} = 0.0025\text{s}^{-1} \approx 0.14^\circ\text{s}^{-1} \quad (4)$$

Bemærk at vi ved valg af den nedre grænse for observationsperioden, et stort estimat for bådens tværlængde og et minimumsestimat for afstanden mellem bådene ved observation, effektivt estimerer den øvre grænse for en kendelig forflytning. Dette vil føre til at estimatet for den gyldige afstand  $d$  bliver et minimumsestimat og dermed giver de bedst tænkelige vilkår for baggrundsmetodens gyldighed.

Vi kan bruge at en typisk bådshastighed er 4 knob hvilket tilsvarende omtrent 2 m/s. Med disse værdier kan vi skalere resultatet fra figur 4 sådan at vi får et fysisk enhed på resultatet. Det nye resultat er vist på figur 5

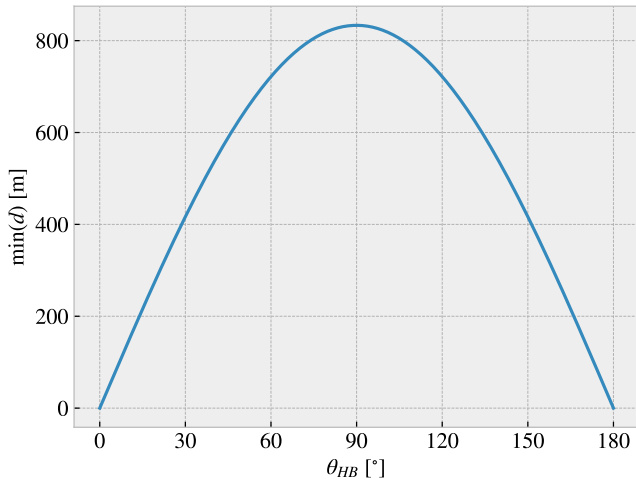


Figure 5. dimensionsløs.

I en situation hvor den retlinjede kyst har en vinkel  $\beta$  i forhold til HB's kurs kan vi omregne afstanden  $d$  langs sigtelinjen til den korteste afstand  $s_{kyst}$  mellem HB og kysten. Omregning gøres som

$$s = d \cdot \sin(\theta_{HB} + \beta)$$

Ved at anvende denne omregning får vi resultatet vist på figur 6.

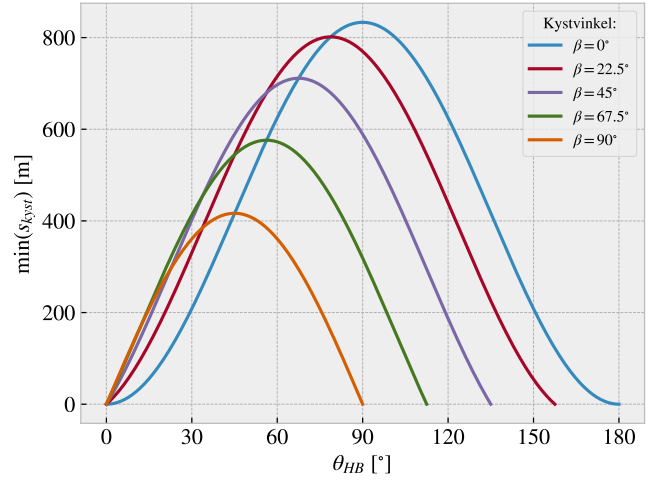


Figure 6.

#### IV. DISKUSSION

Ud fra den matematiske slutning om pejlingen i teorem 1 er det klart at pejlingen kan bruges som et direkte indikator på kollisionskurs. Hvis pejlingen ikke ændres og det andet fartøj nærmer sig er dette ensbetydende med en kollision, hvis ikke kurs eller retning ændres. Som antydnet i [2] (se introduktion) kan baggrundsmetoden bruges som en indikator på pejltræk. Dette er dog ikke uden begrænsninger da baggrunden, i tilfælde med konstant pejling, vil flytte sig tilsvarende bådens egen relative bevægelse i forhold til baggrunden. Siden denne bevægelse bliver mindre og mindre tydelig desto længere væk fra den observerede baggrund man kommer, kan baggrundsmetoden effektivt bruges ved større afstand til kysten. Dette er i overensstemmelse med påstanden fra [2]. Med kendskab til den minimum vinkelhastighed  $\omega_k$  for en kendelig forflytning samt HB's hastighed, vil man kunne kortlægge det gyldige område for baggrundsmetoden via resultaterne fra figur 4. Med kvalificerede gæt på disse størrelser kom vi frem til resultaterne i figur 5. Fra dette finder vi at baggrundsmetoden kræver den største afstand  $d \approx 800$  m når pejling er på  $90^\circ$ . For andre pejlinger var dette estimat mindre. Det er klart at dette er et usikkert estimat og det bør derfor kun bruges som en indikator på størrelsesordenen for hvilket område hvor baggrundsmetoden er gyldig. På figur 6 får vi relevant information om hvad afstand  $d$  tilsvarende i den direkte afstand til kysten  $s_{kyst}$  som vil være mere brugbar i praksis. Denne afhænger af vinklen mellem kursen og kysten, mne hvis vi sammenfatter det mulige interval som funktion af pejlingen får vi datapunkterne vist på tabel I.

Table I. ....

$\theta_{HB}$ [°]	$s_{kyst}$ -interval [m]
30	[208, 402]
60	[361, 725]
90	[0, 833]

Dette giver et bedre billede af den minimumme direkte aftsand til kysten som kræves for at baggrundsmetoden kan anvendes.

## V. KONKLUSION

Fra den matematiske udledning kan vi konkludere at pejlingen kan bruges som et direkte indikator på om to

både er på kollisionskurs. Dette kan formuleres som teoremet:

**Teorem** *Hvis og bare hvis to både har kollisionskurs og nærmer sig i afstand vil pejlingen fra den ene båd til den anden være konstant.*

Videre fandt vi at baggrundsmetoden, hvor man vurderer om baggrunden flytter sig relativt til den anden båd, kan bruges som en indirekte indikator på kollisionskurs. Dette skyldes at baggrundens forflytning kan være kendelig selvom bådene er på kollisionskurs, når iagtageren befinder sig relativt nær kysten. Et estimat af grænseværdien for denne kystafstand er vist på figur 6 og tabel I, men vi ser at generelt at baggrundsmetoden kan bruges for kystafstande på ca. 800 m eller større. Baggrundspunktet bevæger sig ligesom dit eget skib inde på kysten. Så spørgsmålet er om du ville kunne se en kendelig forflytning af dit eget skib (med sinus led af  $\theta_{HB}$ ) hvis det var placeret på baggrundspunktet.

- 
- [1] Repspekt for vand <https://www.respektforvand.dk/paa-havet/laer-at-sejle/vigeregler> (sidst læst: 16/01/2021)
  - [2] Duelighed.dk. Date. Edition. Skipper-kursus (slide 03-02), tilgængelig ved [http://www.duelighed.dk/tutorial\\_soevsregler/03\\_02.htm](http://www.duelighed.dk/tutorial_soevsregler/03_02.htm) (sidst læst: 05/01/2021)
  - [3] Hjemmeværnet: Maritime udtryk, tilgængelig ved <https://www.hjv.dk/oe/HVF122/Sider/Maritime-udtryk.aspx> (sidst læst: 05/01/2021)
  - [4] Søren Toftegaard O. (2013), *LystSejlads*, s. 19 (afsnit 1.4), tilgængelig ved <http://studienoter.dk/Sejlads/Noter/LystSejlads.pdf> (sidst læst: 05/01/2021)
  - [5] retsinformation.dk: *Bekendtgørelse om søvejsregler* 20/11/2009. Regel 7: fare for sammenstød (d) (20/11/2009), tilgængelig ved <https://www.retsinformation.dk/eli/lta/2009/1083> (sidst læst: 05/01/2021)
  - [6] Albrechten S. (2007). *Sejlads for Begyndere* <http://www.groensund.dk/upl/website/sejlads/SejladsforBegyndere2.pdf>
  - [7] Wikipedia: Naked eye [https://en.wikipedia.org/wiki/Naked\\_eye](https://en.wikipedia.org/wiki/Naked_eye) (sidst læst: 11/01)

## APPENDIX

## A. Kollisions simmuleringer

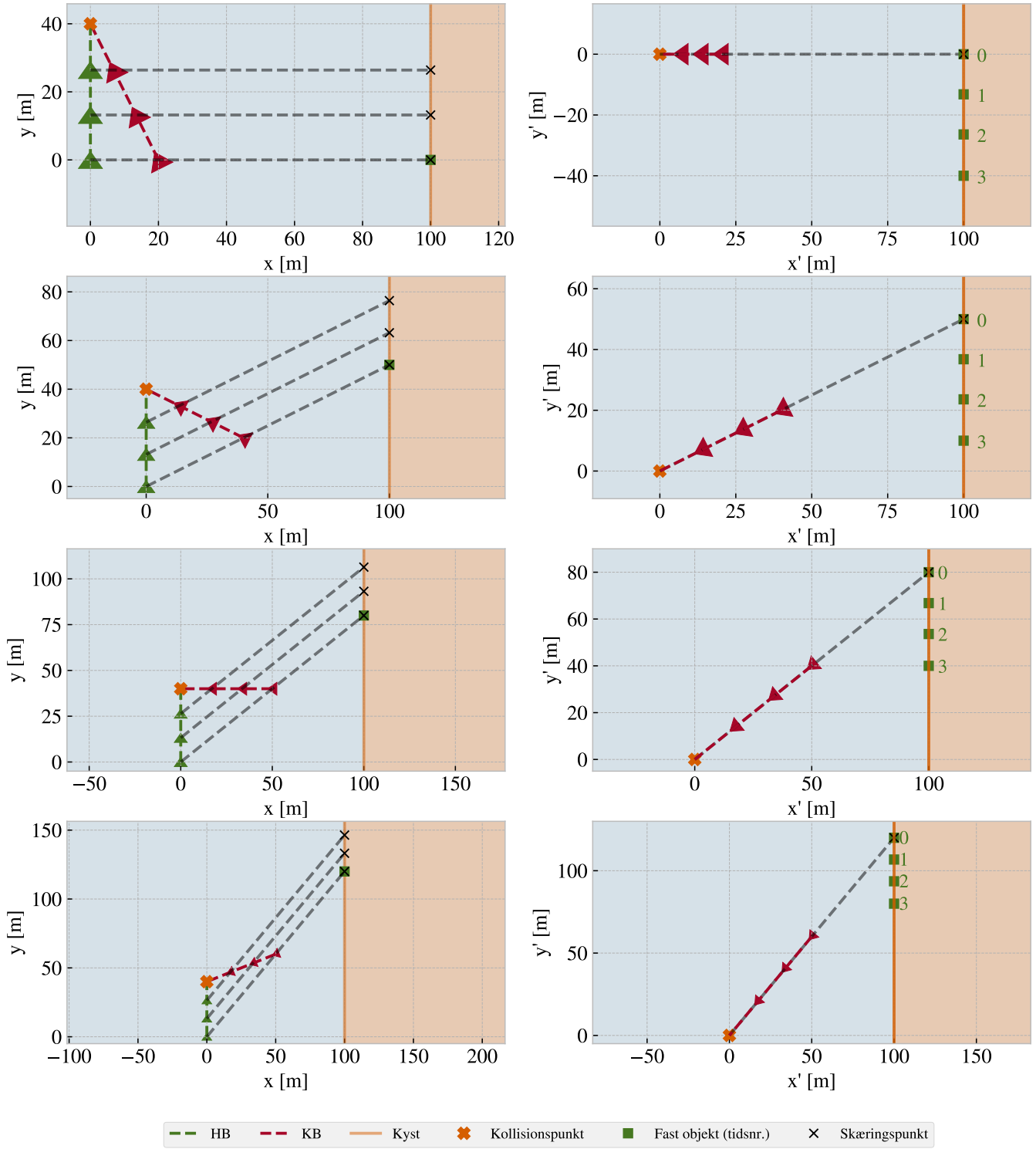


Figure 7.

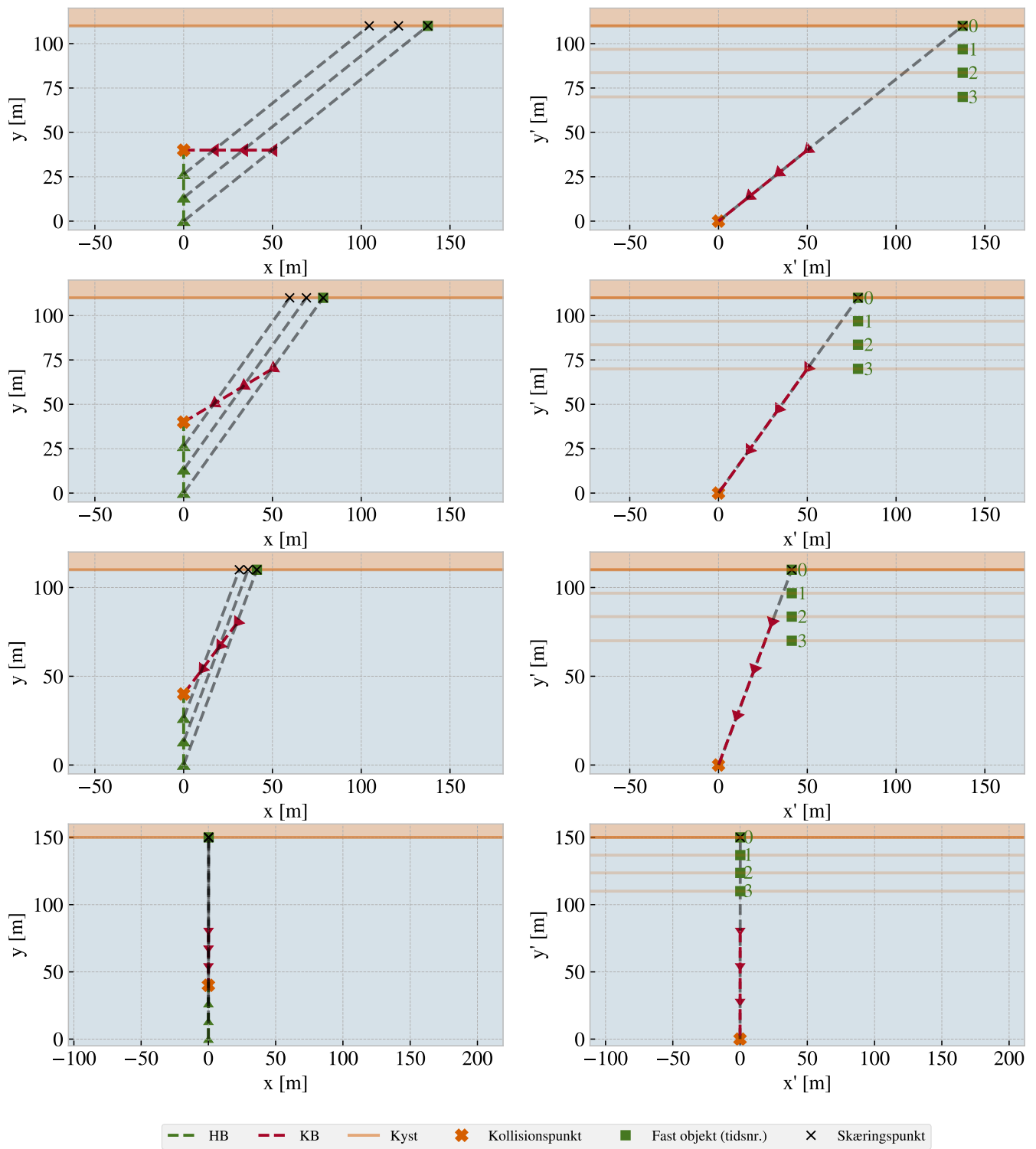


Figure 8.



## B. Ikke-kollisions simmuleringer

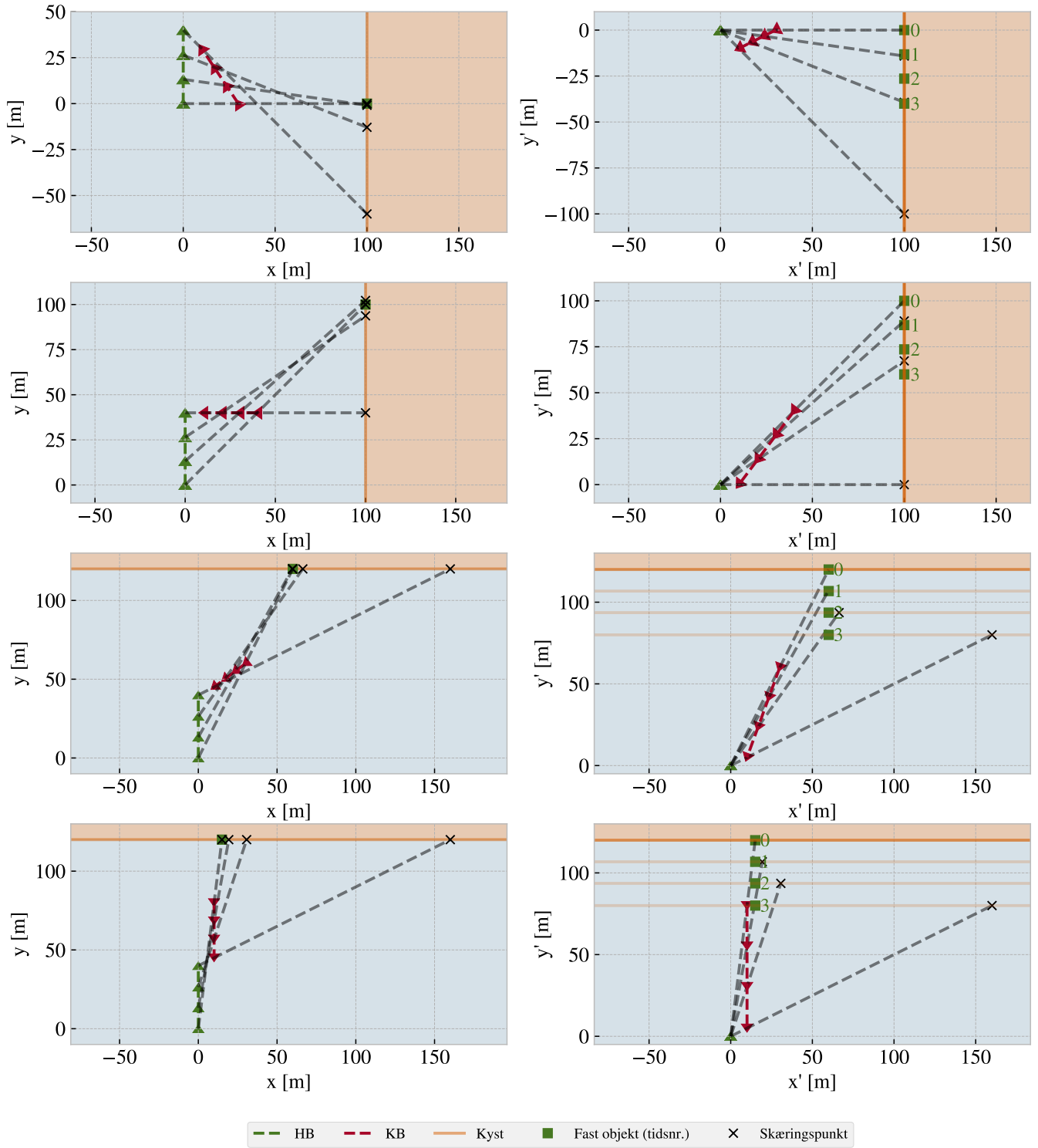


Figure 9.