

En videnskabelig analyse af den maritime tommelfingerregel for vurderingen af kollisionskurs ved betragtning af baggrundens relative bevægelse til et andet fartøj

Mikkel Metzsch Jensen
Department of Physics, University of Oslo

(Dated: June 23, 2021)

In this article we investigate the rule of thumb for recognizing when two boats are on a collision course. The proposed statement to be analyzed, namely *The background method*, can be formulated briefly as: "If the static background seen behind the oncoming boat does not visually move relatively to the boat, then you are on a collision course.". The analysis have shown that this statement is strongly related to the determination of the relative bearing. By mathematical derivation we found that if and only if two boats, approaching each other with constant velocity, have constant relative bearing they are on collision course. Therefore the direct determination of the relative bearing is the most precise way of recognizing a collision course. On the other hand we found that the background method can be used as a means to determine whether the relative bearing is constant in special cases. This were mainly derived by an analytical approach but is also supported by numerical simulations. In general the background method is found to be valid when used in greater distances to the coast, loosely estimated to approximately 833 meters or more. The exact value requires the relative velocity of the observer, the tolerance definition for a humanly recognizable angular velocity and is dependent on the value of the relative bearing and the angle between the heading and the coast. The nature of this relationship is showcased generally on figure 7 and 8.

I. INTRODUKTION

Som søfarer findes der en række nødvendige og basale regler, som sikrer god orden og sikkerhed til søs. Heriblandt har vi vigereglerne, som regulerer færdslen på vandet, og forebygger at skibe støder sammen [2]. Disse regler beskriver som udgangspunkt, hvordan man skal agere, hvis man er på kollisionskurs med andre fartøjer. Det er naturligvis fordelagtigt for søfaren at blive opmærksom på en sådan kollisionsfare i så god tid som mulig, så man kan korrigere kurs eller fart.

Denne rapport udspringer af en diskussion med Lars Juel Hansen (sommeren 2020) om en tommelfingerregel for netop vurderingen af kollisionskurs. Denne tommelfingerregel består af en metode, hvorpå iagttageren bruger baggrunden som referanse til at afgøre om man er på kollisionskurs eller ikke. Vi skal fremadrettet kalde den metode for *baggrundsmetoden*, og vi formulerer den som følger.

Baggrundsmetoden: Betragt båden som du mistænker en mulig kollision med, og noter et fastliggende punkt i baggrunden som synes akkurat bag båden. Hvis dette baggrundspunkt i den efterfølgende observationsperiode lader til at flytte sig i forhold til båden, da er du ikke på kollisionskurs med båden. Forbliver baggrundspunktet derimod i sigtelinjen bag båden er dette en indikator på at kollisionskursen er reel.

Ved en undersøgelse af tilgængelige internetkilder findes forskellige gengivelser af denne regel. Ifølge Duelighed.dk [3] kan man ved "betydelige afstande" til kysten bruge observationen om hvordan kollisionsfartøjet trækker "over land" til at vurdere pejlingen til kollisions-

fartøjet. Pejlingen er retning fra iagttageren til den genstand, der pejles [4], og der hævdes i denne sammenhæng:

"[...] fare skal anses for at være til stede, hvis pejlingen af et skib, der nærmer sig, ikke kendeligt forandrer sig." - Duelighed.dk [3]

Dette kan tolkes således, at hvis den modsejlende trækker mod styrbord i forhold til baggrunden, så vil fartøjet gå styrbord om iagttagers fartøj. Modsat vil det gå bagbord om iagttagers fartøj, hvis det trækker til bagbord over land. Hvis ikke fartøjet bevæger sig kendeligt i forhold til baggrunden, vil det indikere at fartøjerne er på kollisionskurs.

Dette er i overensstemmelse med baggrundsmetoden, som vi ønsker at undersøge. Dog er det værd at bemærke at metoden fra Duelighed.dk indføres som et middel til at vurdere om der er pejltræk, dvs. om pejlingen til kollisionsfartøjet ændres.

I andre kilder ([5], [6] [7]) er det netop pejlingen, der angives som den direkte indikator på kollisionskurs. Her henvises til en mere direkte fremgangsmåde, for at vurdere om der er pejltræk, ved at anvende et fastliggende punkt på eget fartøj som referanse. Vi vil fremadrettet betegne denne metode som *lokalpunktsmetoden*, og vi formulerer den som følger.

Lokalpunktsmetoden: Betragt båden som du mistænker en mulig kollision med, og noter et fastliggende punkt på eget fartøj (f.eks. et punkt på rælingen), som synes i sigtelinjen til båden. Hvis båden i den efterfølgende observationsperiode lader til at flytte sig i forhold til det lokale punkt, da er der pejltræk, og du er ikke på kollisionskurs med båden. Forbliver båden derimod i sigtelinjen for det lokale punkt er dette en indikator på,

at der ikke er pejltræk og at kollisionskursen er reel.

Der fremstår nu to centrale spørgsmål for vurderingen af baggrundsmetodens pålidelighed:

1. Hvilken sammenhæng findes der mellem pejltræk til en anden båd og en mulig kollisionskurs.
2. I hvilken grad kan baggrundsmetoden bruges til at vurdere om der er pejltræk.

I denne rapport skal vi fremføre en matematisk analyse af baggrundsmetodens pålidelighed ved at behandle de to overstående spørgsmål.

Rapporten bestræber sig på at give en fyldestgørende beskrivelse af det omtalte problem, samtidig som at dette formidles til en målgruppe uden særlig matematisk baggrund. Dette er ikke mulig på alle punkter, da en ordenlig bevisførelse kræver en hvis mængde matematik. Jeg har dog forsøgt at gengive de underliggende resultater og vigtigste pointer undervejs, således at man kan springe beregninger og udledninger over uden at miste kontekst. Dette gælder særlig udledningen i afsnit III B.

II. METODE

A. Definering af problemet

Vi forestiller os to både til søs, som nærmer sig hinanden. Vi kalder den ene båd for hovedbåden (HB), hvor vi har placeret iagttageren, og den anden båd kalder vi for kollisionsbåden (KB). Vi antager at begge bådene bevæger sig med konstant hastighed, dvs. retlinjet og med konstant fart. Vi beskriver hver båd som et enkelt punkt i et koordinatsystem med akserne x og y som angiver bådens position på vandets overflade set oppefra (se figur 1). Hvis vi kender startpositionen og hastigheden til hver båd, har vi alt den information vi trænger for at beskrive situationen.

Formelt set kan vi beskrive position $\vec{P} = (x, y)$ som en funktion af tid t , når vi kender startposition \vec{P}_0 og hastighed \vec{v} . For de to både har vi dermed bevægelsesligningen

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0 + \vec{v} \cdot t \quad (1)$$

Hvis du allerede nu føler en ubehag i kroppen ved synet af ligninger og andre matematiske redskaber, så vil jeg understrege at det holder at tænke på dette som en oversættelse fra ord til tal. Det vigtigste at forstå her, er at vi beskriver bådene som punkter i et koordinatsystem, som bevæger sig i rette linjer med uændret hastighed.

Vi definerer en kollision som tilfældet hvor bådene har samme position til samme tidspunkt. I praksis vil man have en kollision allerede hvis bådene passerer tæt forbi hinanden, da bådene naturligvis har en vis udstrækning i virkeligheden. Dette er dog en uvæsentlig detalje, som ikke bidrager betydningsfuldt til problemets natur. For at

vurdere om bådene er på kollisionskurs, er det angiveligt nyttigt at benytte pejlingen. Vi definerer i matematisk forstand pejlingen θ_{HB} fra HB til KB som vinklen mellem kursen til HB og sigtelinjen fra HB til KB. Dette er illustreret på figur 1.

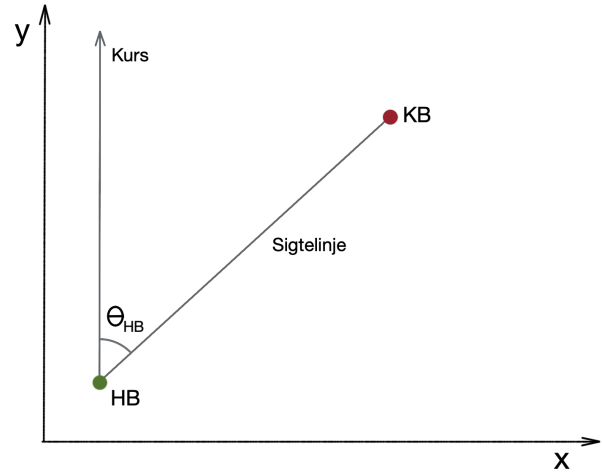


Figure 1. En illustration af koordinatsystemet som beskriver positionen til de to både på vandoverfladen (set fra oven). Her har vi indtegnet pejlingen θ_{HB} som defineres som vinklen mellem kursen til HB og sigtelinjen fra HB til KB.

Ud fra disse definitioner og indførelsen af et koordinatsystem, er vi klar til at give os i kast med en analyse af situationen under forskellige betingelser.

B. Numeriske simuleringer som støtte til matematiske resultater

I tillæg til den matematiske analyse, skal vi bruge simple numeriske metoder, måske bedre kendt som simmuleringer, til støtte af vores resultater.

For den interesserede kan vi simmulere bådens præcise bevægelse (uden usikkerhed), da alle bevægelserne er lineære. Dette gøres ved at evaluere bevægelsesligning 1 ved forskellige tidspunkter, analogt til Eulers metode uden acceleration. Vi skriver simmuleringskoden i python som angivet nedenfor. Denne er også tilgængelig på github [1] sammen med diverse scripts for plotting af data.

```
import numpy as np

def simulator(MB_start, OB_start, MB_end,
             OB_end, T = 10, dt = 0.1):
    K = int(T/dt + 1) #Steps
    MB_pos = np.zeros((K,2)) #MB = Main Boat
    OB_pos = np.zeros((K,2)) #OB = Other Boat
    t = np.zeros(K) #Time

    #Initial position
```

```

MB_pos[0] = MB_start
OB_pos[0] = OB_start

#Calculate constant velocity
MB_vel = (MB_end - MB_pos[0])/T
OB_vel = (OB_end - OB_pos[0])/T

#Main update loop
for k in range(K - 1):
    MB_pos[k+1] = MB_pos[k] + MB_vel*dt
    OB_pos[k+1] = OB_pos[k] + OB_vel*dt
    t[k+1] = t[k] + dt
return MB_pos, OB_pos

```

III. RESULTATER

A. Sammenhæng mellem pejltræk og kollisionskurs

Vi begynder med en intuitiv forklaring på, hvorfor pejltrækket har en helt særlig sammenhæng til kollisionskursen. For at indse denne sammenhæng, skal vi bruge at begge bådene antages at bevæge sig med konstant fart og i en ret linje. Dette har den særlige egenskab, at en iagttagere på HB også vil se at KB bevæger sig med konstant fart og i en ret linje relativt til iagttagereens perspektiv. Når vi skifter perspektiv, siger vi i fysikkens verden, at vi skifter koordinatsystem eller mere formelt intertialsystem. Mens koordinaterne (x, y) angiver positionen på vandet ud fra et fikseret referansepunkt, så kan vi skifte til koordinatsystemet med koordinaterne (x', y') som angiver position relativt til HB. I dette koordinatsystem vil HB altid være placeret i origo, med koordinat $(0, 0)$, og de andre både beskrives ved positionen relativt til HB. Det betyder at hvis HB bevæger sig fremad i (x, y) -systemet så vil stillestående punkter fra dette system bevæge sig bagud i (x', y') -systemet. På figur 2 ses hvordan koordinaterne til en række bådruter ændres ved overgangen fra det "normale" (x, y) -system til (x', y') -systemet. Brug gerne et øjeblik på at studerer overgangen vist på figur 2, da det er konceptuelt vigtig for den følgende forklaring.

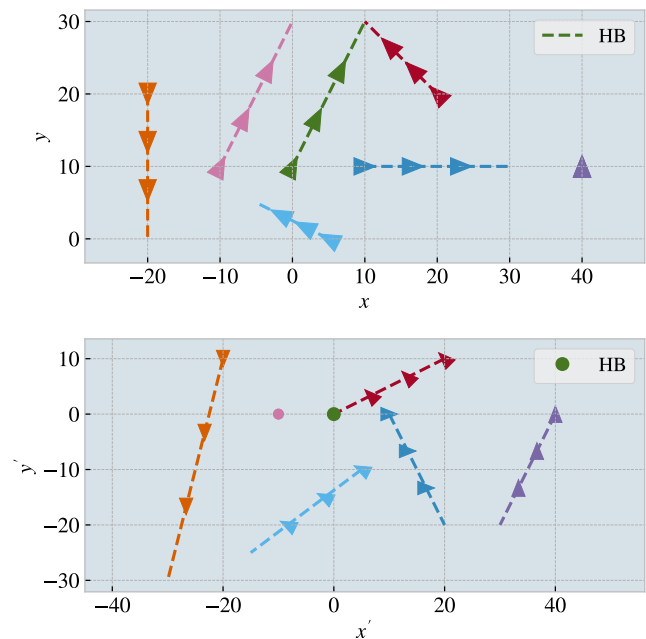


Figure 2. En illustration af ændringen fra koordinatsystemet (x, y) til HB's intertialsystem med koordinaterne (x', y') for en række bådruter. Pilens retning angiver bådens kurs og vi ser i (x', y') -system at bådene ikke følger pilens retning, og dermed ser ud til at sejle sidelæns eller baglæns. Dette skyldes naturligvis netop at HB selv flytter sig. Bemærk for eksempel at den lille båd som egentlig står stille i (x, y) nu bevæger sig i (x', y') . Tilsvarende står den lyserøde båd i ro i (x', y') fordi den bevæger sig parallelt (og med samme fart) som HB.

Som det fremgår af figur 2, vil enhver bevægelse være retlinjet i (x', y') -systemet, dersom bevægelserne er retlinjet i det originale (x, y) -systemet. Dermed ved vi, at hvis KB kolliderer med HB, så kan vi tegne dette som en ret linje med endepunkt i origo $(0, 0)$ i (x', y') -systemet. Dette er netop tilfældet for den røde båd på figur 2. Faktisk kan vi med dette udgangspunkt definere kollisionskursen ved at KB rammer origo i (x', y') -systemet. Dette medfører i tilfældet med kollisionskurs, at en iagttagere på HB nødvendigvis vil se at KB bevæger sig direkte mod iagttageren. Dette er den eneste mulige rette linje hvorpå bådene kan kolliderer uden at medparterne ændrer retning eller fart undervejs. På figur 3 ser vi hvordan forskellige kollisionsruter alle rammer origo i (x', y') -systemet.

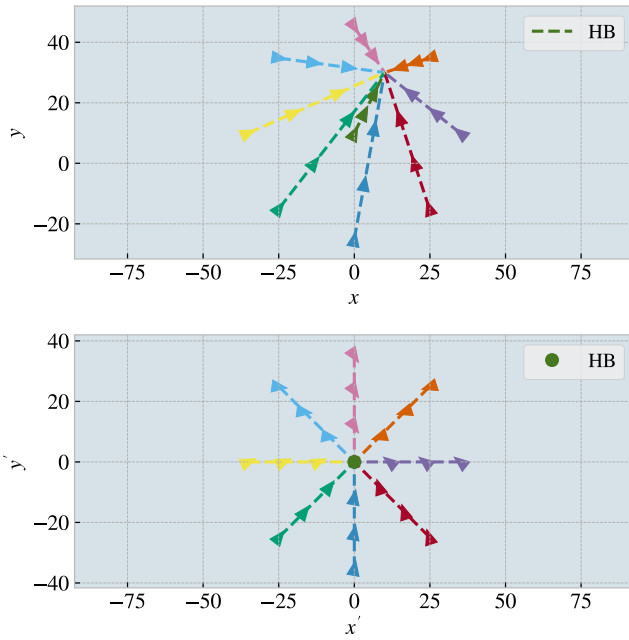


Figure 3. Forskellige kollisionsruter i både (x, y) - og (x', y') -systemet. Uanset hvilken retning kollisionsbåden kommer fra i (x, y) -systemet, vil det medføre at båden rammer origo i (x', y') -systemet.

Som iagtager på HB, vil man altså i alle disse tilfælde med kollision, se at pejlingen til bådene er uændret indtil kollisionen. Derfor vil en iagtager ikke opleve pejltræk for kollisionsbåden. De eneste andre situationer hvor pejlingen er konstant er når bådene begge ligger stille, sejler parallelt eller sejler væk fra hinanden på en bestemt måde. For disse tre tilfælde nærmer bådene sig dog ikke i afstand, og det er dermed enkelt at afgøre, at der ikke er kollisionsfare i disse tilfælde. Altså når vi frem til delkonklusionen:

Hvis bådene nærmer sig hinanden, og der ikke er noget pejltræk, da er bådene på kollisionskurs.

I det følgende afsnit skal vi give en matematisk udledning for overstående konklusion. Med matematisk støtte kan vi formulere den lidt mere formelt, som det ses i det vi kalder teorem 1. Hvis du ikke er til matematik, så kan du trygt springe næste afsnit over, da det ikke bidrager mere til problemet, men blot bekræfter det vi allerede har argumenteret for i det overstående. Hvis du ikke køber argumenterne over, så er næste afsnit essentielt.

B. Sammenhæng mellem pejltræk og kollisionskurs (matematisk udledning)

Med grundlag i argumenterne fra forrige afsnit, skal vi nu give en mere grundig udledning, for at en uændret pejling, til en båd som nærmer sig, er ensbetydende med

kollision. Da vi har antaget at bådene bevæger sig med konstant hastighed, kan vi bruge en lineær transformation til HB's intertialsystem (x', y') . Positionen \vec{P}'_{KB} til KB i det nye intertialsystem kan skrives:

$$\begin{aligned}\vec{P}'_{KB}(t) &= \vec{P}_{KB}(t) - \vec{P}_{HB}(t) \\ &= \vec{P}_{0,KB} + \vec{v}_{KB}t - \vec{P}_{0,HB} - \vec{v}_{HB}t \\ &= (\vec{P}_{0,KB} - \vec{P}_{0,HB}) + (\vec{v}_{KB} - \vec{v}_{HB})t \\ &= \vec{P}'_{0,KB} + \vec{v}'_{KB}t\end{aligned}$$

Vi ser som forventet at \vec{P}'_{KB} også beskriver en retlinjet bevægelse. I tilfældet hvor bådene er på kollisionskurs ved vi at $\vec{P}'_{KB}(t_k) = \vec{0}$ ved kollisionstidspunktet t_k . Dette medfører sammenhængen:

$$\begin{aligned}\vec{P}'_{0,KB} &= -\vec{v}'_{KB}t_k \\ \begin{pmatrix} x'_{0,KB} \\ y'_{0,KB} \end{pmatrix} \frac{1}{t_k} &= -\begin{pmatrix} v'_{x,KB} \\ v'_{y,KB} \end{pmatrix} \quad (2)\end{aligned}$$

Vi kan da finde pejlingen θ_{HB} ved at omskrive \vec{P}'_{KB} til polære koordinater. Her er vi bare interesseret i vinkelkoordinat ϕ_{KB} der bestemmes som

$$\begin{aligned}\phi_{KB}(t) &= \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} + v'_{y,KB}t}{x'_{0,KB} + v'_{x,KB}t}\right)\end{aligned}$$

Vi bruger da sammenhængen fra ligning 2 og finder

$$\begin{aligned}\phi_{KB}(t) &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} - y'_{0,KB}\frac{t}{t_k}}{x'_{0,KB} - x'_{0,KB}\frac{t}{t_k}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)}{x'_{0,KB} \left(1 - \frac{t}{t_k}\right)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{y'_{0,KB}}{x'_{0,KB}}\right) = \text{konst.}\end{aligned}$$

Fra dette ser vi at vinkelkoordinat ϕ_{KB} er konstant (uafhængig af tid), hvilket medfører at pejlingen også er konstant:

$$\theta_{HB} = \frac{\pi}{2} - \phi_{KB} = \text{konst.}$$

Fra dette ræsonoment, har vi altså vist at pejlingen vil være konstant, i tilfældet hvor bådene er på kollisionskurs. Hvis bådene følger kollisionskursen men i modsat retning (bevæger sig væk fra hinanden), kan vi indføre betingelsen $\vec{P}'_{KB}(t_i) = \vec{0}$ for et tidspunkt $t_i < 0$. Derved kan vi opstille en ligning tilsvarende 2 og derved finde at pejlingen også vil være konstant i dette tilfælde. Hvis ikke bådene er på kollisionskurs er ligning 2 ikke længere gyldig og \vec{P}'_{KB} kan tage hvilken som helst retlinjet bane uden om $\vec{P}'_{KB} = \vec{0}$. Det betyder at ϕ_{KB} og dermed også pejlingen θ_{KB} vil ændre sig som funktion af tid. Dette fører i sidste ende til slutningen:

Teorem 1 Hvis og bare hvis to både med konstant hastighed, som nærmer sig i afstand, har konstant pejling til hinanden er disse på kollisionskurs.

C. Falsifisering af baggrundsmetoden

Vi har nu fastslået, at pejltrækket kan bruges som en direkte indikator på om bådene er på kollisionskurs eller ikke. Vi kan derfor allerede nu bekræfte at lokalpunktmetoden vil være en pålidelig metode for påvisning af kollisionskursen. Spørgsmålet som genstår nu, er hvorvidt baggrundsmetoden er en god metode til at vurdere pejltrækket. Vi skal altså undersøge, om der er sammenfald mellem pejltræk og baggrundens bevægelse relativt til sigtelinjen gennem KB.

I tilfældet med kollisionskurs ved vi fra teorem 1 at sigtelinjen fra HB gennem KB vil have en konstant vinkel. I det enkle tilfælde hvor kystlinjen er relinjet og parallel med kursen til HB vil sigtelinjens skæring med kystlinjen forflytte sig med samme hastighed som HB. Dette resultat bekræftes og illustreres godt ved simuleringen vist på figur 4.

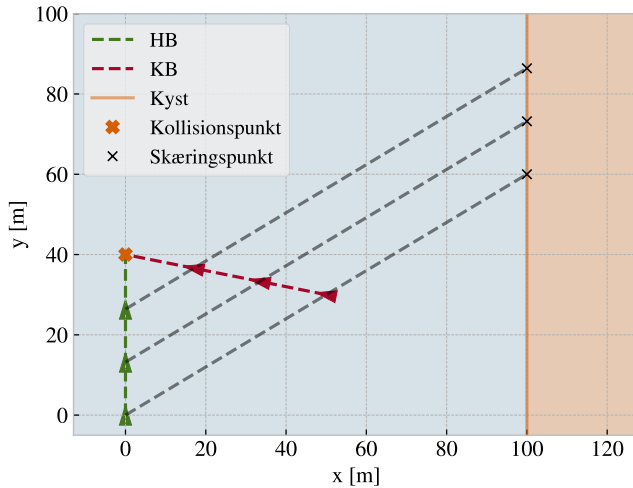


Figure 4. En simulering af bådene HB og KB på kollisionskurs, med kollisionspunkt 100 meter fra kysten. Her plottes fire positioner for bådene (inklusive kollisionspunktet) jævnt fordelt i tid. Fra de grå stiplede linjer ser vi hvordan sigtelinjen fra HB gennem KB skærer med kystlinjen ved de forskellige tidspunkter. Dette skæringspunkt forflytter sig som forventet i henhold til HB's bevægelse.

I situationen på figur 4, bevæger HB sig 40 meter frem i løbet af simuleringen, hvilket medfører at sigtelinjen fra HB til KB forskydes tilsvarende 40 meter op langs kysten (i positiv y-retning). Det betyder at en iagtager på HB i samme tidsrum vil se at et referansepunkt på kysten bevæger sig 40 meter i modsat retning. HB befinder sig her kun 100 meter væk fra kysten, og derfor vil en relativ forflytning af referansepunktet på 40 meter højst sandsynlig være kendelig. I denne situation, er baggrundsmeto-

den derfor vildledene, og en iagtager på HB vil fejlagtigt tro at situationen er ufarlig. Vi har altså med dette ene eksempel modbevist at baggrundsmetoden ikke virker i alle tilfælde. Vi kalder formelt set dette for en falsifisering af teorien. I appendix VI ses flere simuleringsrækker for en række situationer med og uden kollision. Her ser vi både eksempler hvor baggrundspunktet forflytter sig relativt ved kollision, og eksempler hvor baggrundspunktet ser ud til at være stillestående (i en kort periode) uden kollision.

Spørgsmålet er om der findes nogle kriterier, for hvilke baggrundsmetoden alligevel kan bruges som en pålidelig indikator på kollisionskursen.

D. Grænsebetingelser for brug af baggrundsmetoden

Vi begynder med undersøgelsen af hvordan afstanden til baggrunden (kysten) spiller en rolle for baggrundsmetodens pålidelighed. Hvis vi modificerer det omtalte eksempel (på figur 4), således at kollisionspunktet flyttes en kilometer væk fra kysten, da vil baggrundens forflytning på kun 40 meter højst sandsynlig ikke klassificeres som en kendelig forflytning. I et sådan tilfælde vil baggrunden altså synes at være stillestående, og dermed vil baggrundsmetoden være en udmærket indikator for kollisionskursen. Vi skal i det følgende kvantificere dette og estimere en mulig grænse for hvornår baggrundsmetoden kan bruges forsvarligt.

Fra HB's perspektiv vil baggrundspunktet (BP) som nævnt bevæge sig med en fart tilsvarende HB's egen fart men modsat vej. Vi husker på at et stillestående punkt i (x, y) -systemet bevæger sig modsat af HB når vi beskriver det i (x', y') -systemet. Matematisk set kan vi skrive dette som

$$\vec{v}_{BP} = -\vec{v}_{HB}$$

Det betyder, at en iagtager på HB, som betragter baggrundspunkt BP vil se at pejlingen til BP ændres med en vinkelhastighed som vi kalder ω_O . Vinkelhastigheden beskriver hvor hurtigt en vinkel ændres, og dermed hvor meget pejltræk vi har over tid. Matematisk beregner vi vinkelhastigheden som

$$\omega_O = -\frac{v_{HB} \sin(\theta_{HB})}{d}$$

hvor $v_{HB} = |\vec{v}_{HB}|$ er HB bådens fart langs kursen, θ_{HB} er pejlingen til KB (og dermed BP), og d er afstanden til kysten/BP via sigtelinjen. Se figur 5 for illustration af situationen. Bemærk at vi i praksis skal antage at baggrundspunktet ligger akkurat på kystlinjen, og ikke længere inde på landområdet.

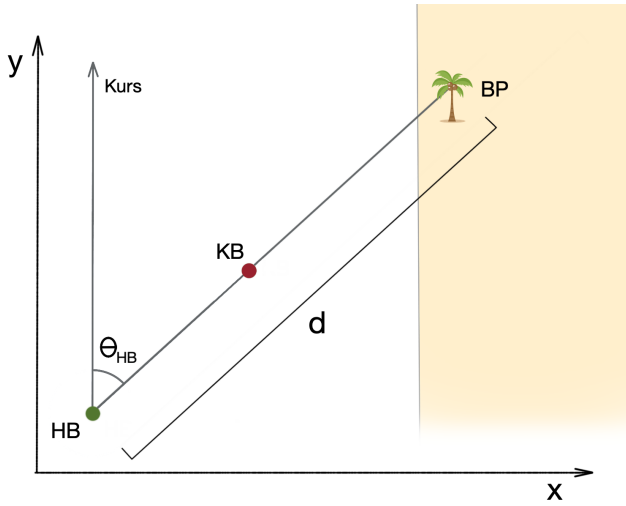


Figure 5. Illustration af situationen, hvor vi noterer et baggrundspunkt (BP) i sigtelinjen til KB. Her baggrundspunktet ikke placeret præcis på kystlinjen, selvom vi fremadrettet skal bruge denne antagelse, og derfor vil snakke om afstanden til baggrundspunktet og kysten ved baggrundspunktet som en og samme ting.

Vi definerer minimumsgrænsen for en kendelig forflytning ved vinkelhastigheden ω_k . Vi kender ikke værdien af denne, men den skal beskrive den mindste bevægelse som vi er i stand til at opfange. I praksis må vi da også tage hensyn til, at det er mere udfordrende at opfange små bevægelser i urolige omgivelser til søs, og at metodens grænse ikke bør baseres på urimelige finfølelse observationer. Med kendskab til denne grænseværdi ω_k , vil kriteriet for en kendelig bevægelse være givet ved uligheden:

$$\begin{aligned} |\omega_O| &< \omega_k \\ \frac{v_{HB} |\sin(\theta_{HB})|}{d} &< \omega_k \\ \frac{v_{HB} |\sin(\theta_{HB})|}{\omega_k} &< d \end{aligned} \quad (3)$$

Vi kan da bruge denne sammenhæng til at finde den minimale afstand d for brug af baggrundsmetoden som funktion af θ_{HB} . Dette resultat er vist på figur 6.

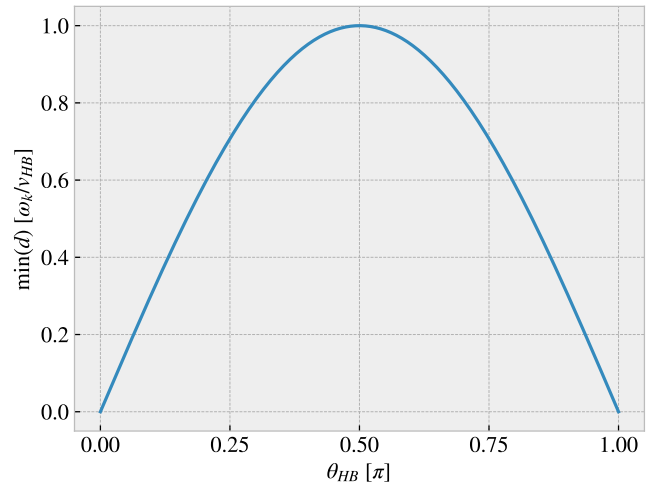


Figure 6. Den minimale afstand $\min(d)$ som funktion af pejlingen θ_{HB} som muliggør brug af baggrundsmetoden. d beskriver afstanden til kysten via sigtelinjen. Resultatet er angivet med dimensionløse enheder med skaleringsfaktorene ω_k som er den minimale vinkelhastighed for en kendelig forflytning og v_{HB} som er farten til HB. For at baggrundsmetoden skal være anvendelig, må vi kræve at d ligger over kurven for $\min(d)$.

Resultatet på figur 6 er i matematisk forstand et fint generelt resultat, da det giver den nødvendige information og baggrundsmetodens gyldighed ved forskellige pejlingsvinkler, hastigheder til HB og ikke mindst forskellige kriterier for hvad en kendelig forflytning er. Dog er den svær at tolke direkte, da tallene på y-aksen ikke giver nogen intuitiv mening. Som fysiker ville vi nok have stoppet her, men vi skal i det følgende prøve at tolke på det generelle resultat ved at lave en række antagelser på de ukendte værdier i problemet. Dog er det værd at bemærke at kurvens top på $\theta_{HB} = 0.50 \pi$ fortæller os at baggrundsmetoden vil kræve den største afstand til kysten når pejlingen til KB er på 90° , altså vinkelret på kursen til HB. Desto nærmere vinkelen kommer at være parallel med kysten desto mindre bliver den nødvendige kystafstand for brug af metoden. Dette skal vi se nærmere på i det følgende.

E. Tolkning af det generelle resultat for grænsebetingelser

For at klargøre betydningen af det generelle fra figur 6, har vi brug for at sætte tal på hvad en kendelig forflytning er. Indtilvidere har vi defineret dette med kritiske vinkelhastighed ω_k , og vi skal nu bruge en række kvalificerede gæt for at estimere værdien af denne. Bemærk at følgende resultater derfor bygger på en del usikkerheder.

1. Estimering af kritiske vinkelhastighed

Vi forestiller os, at vi ved observation af KB vil benytte et centralt punkt på båden som referanse mod baggrunden. En mulig defintion på en kendelig forflytning kan derfor være at baggrundspunktet har flyttet sig ud til eller forbi kanten af båden i løbet af en observationsperiode. Observationsperioden kan vi sætte til 10 sekunder, svarende til den nedre grænse af tidsintervallet 10-20 sekunder som nævnes i [3]. Vi siger da at forflytningen er kendelig hvis baggrundspunktet har flyttet sig en relativ afstand større eller lig halvdelen af bådens tværlængde (set fra iagttagerens perspektiv) i løbet af de 10 sekunder. For sejlbåde i den lidt større klasse kan vi bruge en gennemsnitlig bredde på 5 m og længde på 15 m, hvilket giver 10 m som middelestimat (tilsvarende at vi gennemsnitlig ser båden fra en 45 graders sigtelinje). Til sidst må vi også bestemme den afstand der er mellem bådene når kollisionsrisikoen vurderes. Hertil bruger vi 200 meter som en minimumsværdi. Ud fra disse antagelser finder vi at den kritiske vinkelhastighed for en kendelig forflytning kan defines som:

$$\omega_k = \frac{\arctan\left(\frac{1}{2} \frac{10\text{m}}{200\text{m}}\right)}{10\text{s}} = 0.0025 \text{ s}^{-1} \approx 0.14^\circ \text{ s}^{-1} \quad (4)$$

Dette estimat giver os en ide om størrelsen på den kritiske vinkel, og vi skal tage udgangspunkt i denne værdi for de videre beregninger. Bemærk at vi har valgt de overstående værdier på en sådan måde at de effektivt set giver et maksimums estimat for ω_k og dermed et minimums estimat for den gyldige afstand d . Altså har vi valgt tallene sådan at vi giver baggrundsmetoden de bedst mulige vilkår for vores videre analyse.

Vi kan nu bruge at en typisk bådshastighed er 4 knob, hvilket tilsvarende omtrent 2 m/s. Med disse værdier kan vi skalere resultatet fra figur 6, sådan at vi får det nye resultat på figur 7 med mere meningsfyldte enheder.

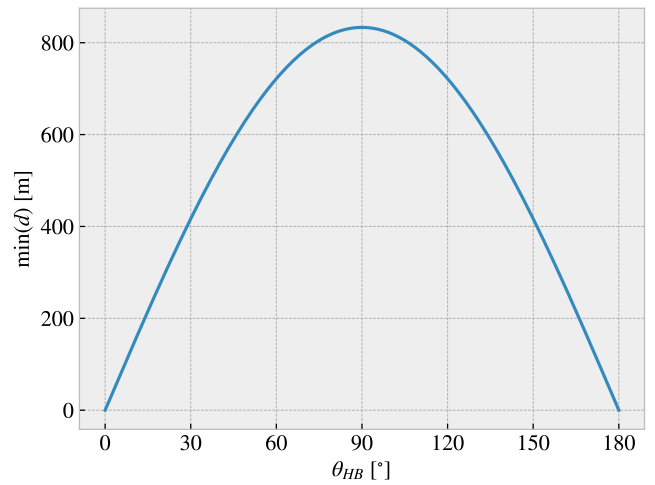


Figure 7. Den minimale afstand $\min(d)$ som funktion af pejlingen θ_{HB} , som muliggør brug af baggrundsmetoden. d beskriver afstanden til kysten via sigtelinjen i meter. Enhederne er fastlagt ud fra figur 7 med brug af estimatorne $\omega_k = 0.14^\circ \text{ s}^{-1}$ og $v_{HB} = 2 \text{ m/s}$.

På figur 7 kan vi nu aflæse afstanden d , som vi husker er afstanden langs sigtelinjen til BP, som funktion af pejlingsvinklen. For eksempel vil det kræve at afstanden til BP er større eller lig $d \approx 830 \text{ m}$ ved en pejlingsvinkel på 90° , og dermed at man i et sådan tilfælde må befinde sig omtrent 830 m eller længere væk fra kysten for at baggrundsmetoden er gyldig. Har vi i stedet en pejlingsvinkel på 30° , skal vi have at d er større eller lig $d \approx 420 \text{ m}$. Siden vi i sidste tilfælde har en pejlingsvinkel forskellig fra 90° , betyder det at vi kan befinde os endnu tættere på kysten end bare 420 m. Det er altså derfor ikke helt intuitivt at aflæse det gyldige område i form af en direkte afstand til kysten/baggrunden. Vi kan derfor omregne resultatet den korteste afstand til kysten.

I en situation hvor den retlinjede kyst har en vinkel β i forhold til HB's kurs kan vi omregne afstanden d langs sigtelinjen til den korteste afstand s_{kyst} mellem HB og kysten (linjen vinkelret på kysten). Omregning gøres som

$$s_{\text{kyst}} = d \cdot \sin(\theta_{HB} + \beta) \quad (5)$$

Ved at anvende denne omregning får vi resultatet vist på figur 8.

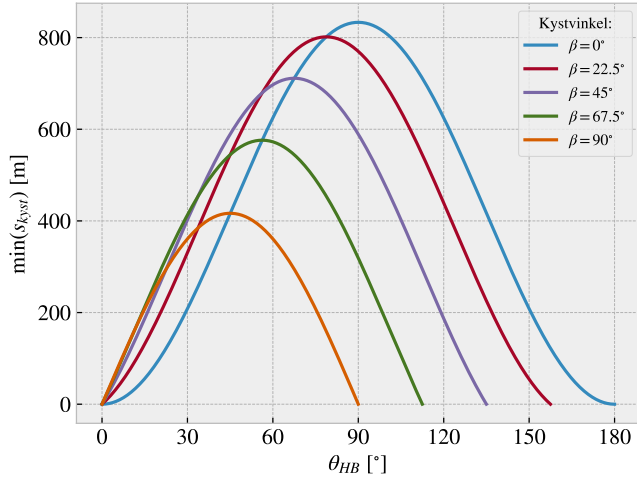


Figure 8. Den minimale afstand til kysten $\min(s_{kyst})$ som funktion af pejlingen θ_{HB} , som muliggør brug af baggrundsmetoden. s_{kyst} (se ligning 5) er den korteste afstand for HB til kysten, når kysten har en vinkel β i forhold til HB's kurs.

Resultatet på figur 8 giver os nu mulighed for at aflæse den minimum afstand til kysten som kræves i en givet situation baseret på pejlingsvinkel θ_{HB} og kystvinkel β .

I praksis er det dog lettere omstændigt at tage hensyn til kystvinklen og vi kan derfor eliminere kystvinkelsafhængighed ved at vælge den kystvinkel som giver den største afstand s . Vi kan tænke på dette som en sammensmeltning af alle graferne for de forskellige valg af β , hvor vi da har taget den største værdi herfra (dette illustreres på figur 9). Vi husker på at

$$s_{kyst} = d \cdot \sin(\theta_{HB} + \beta) \propto \sin(\theta_{HB} + \beta)$$

og derved ser vi at vi opnår maksimalværdi ved at vælge $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta_{HB}$. Da finder vi at den maksimale værdi som funktion af θ_{HB} forenkles til

$$\max[s_{kyst}](\theta_{HB}) = d \quad (6)$$

Det viser sig at denne forenkling akkurat tilsvarende samme graf som vi fik på figur 7. På figur 9 ses hvordan valg af $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta_{HB}$ netop indeholder kurverne for alle andre valg af β .

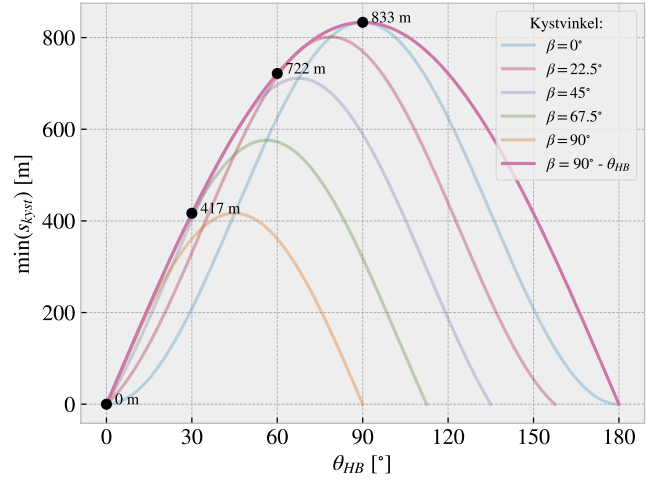


Figure 9. Den minimum afstand $\min(s_{kyst})$ som funktion af pejlingen θ_{HB} som muliggør brug af baggrundsmetoden (se figur 8). Den lyserøde kurve for $\beta = 90^\circ - \theta_{HB}$, tilsvarende det valg af β for hvert punkt som giver den største værdi. Dermed har vi et maksimumsestimater på $\min(s_{kyst})$ som kan aflæses uafhængig af kystvinkel β

F. Numeriske simuleringer

Ved brug af koden vist i afsnit IIB har vi simuleret forskellige situationer for at understøtte de matematiske resultater. I appendix VI findes en række resultater fra forskellige situationer med og uden kollisionkurs. I tillæg findes en række animationer på github'en [1], som giver et mere intuitiv indblik i bevægelserne, og hvordan pejling og baggrundspunkt forflyttes. Vi ser generelt at simuleringerne er i overensstemmelse med de matematiske resultater.

IV. DISKUSSION

Ud fra den matematiske slutning om pejlingen i teorem 1, er det klart at pejlingen kan bruges som en direkte indikator på kollisionkurs. Hvis KB nærmer sig og pejlingen ikke ændres er dette ensbetydende med at bådene vil kollidere, givet at kurs og retning fastholdes. Altså vil lokalpunktmetoden være troværdig i alle situationer og derfor også være den bedst egnede metode.

Som antydnet på Duelighed.dk [3], fandt vi også at baggrundsmetoden kan bruges som en indikator på om der er pejltræk eller ikke givet visse betingelser. I tilfælde med konstant pejling, vil baggrunden flytte sig tilsvarende HB's relative bevægelse til baggrunden. Siden denne relative bevægelse bliver mindre og mindre tydelig desto længere væk fra den observerede baggrund man befinder sig, kan baggrundsmetoden effektivt anvendes ved større afstande til kysten. Dette er i overensstemmelse med påstanden fra Duelighed.dk [3]. Med kendskab til den minimale vinkelhastighed ω_k for en kendelig forflytning,

samt HB's hastighed, kan man kortlægge det gyldige område for baggrundsmetoden via det generelle resultat fra figur 6. Med kvalificerede gæt estimerede vi $\omega_k = 0.14^\circ \text{ s}^{-1}$, og ved antagelsen om HB's fart på $v_{HB} = 2 \text{ m/s}$, kom vi frem til det mest alsidige specifikke resultat på figur 8. Her ser man hvordan den gyldige afstand til kysten (baggrunden) afhænger af pejlingsvinkel θ_{HB} og kystvinkel β . Dog er det endelige maksimumsresultat på figur 9, med alle kystvinkler taget i betragtning, mere anvendelig for sejlere i praksis. Ved aflæsning af denne figur finder vi blandt andet punkterne vist i tabel IV.

Table I. Aflæsning af punkter på figur 8.

$\theta_{HB} [^\circ]$	$s_{kyst} [\text{m}]$
0	0
30	417
60	722
90	833

Aflæsningen af denne tabel giver et hurtigt overblik af det gyldige område for baggrundsmetoden. Her ser vi at baggrundsmetoden kan bruges tættere på kysten når KB pejles med spids vinkel, mens en pejling på 90° vil være det mest kyst-afstanskrævende sted at anvende metoden.

Som en sidste note nævner vi muligheden for at baggrundsmetoden kan anvendes hos en erfaren søfarer. Hvis søfaren har erfaring med hvordan baggrundens relative forflytning opleves ved forskellige pejlingsvinkler og båd hastigheder, kan søfaren vurdere om baggrunden bag en modsejlende båd ændres mere eller mindre end dette. Altså er det muligt, at søfaren selv kan korrigere for den forflytning som skyldes søfarens egen bevægelse i forhold til baggrunden. Dog kræver det et godt kendskab til forskellige kollisionsituationer, og det er diskutabelt om

metoden stadig kan siges at være i brug i dette tilfælde. Uanset vil lokalpunktsmetoden være et mere oplagt valg, dersom man er i tvivl om en eventuel kollisionskurs.

V. KONKLUSION

Fra den matematiske udledning kan vi konkludere at pejligen kan bruges som en direkte indikator på kollisionskurs. Når to både nærmer sig hinanden, med konstant hastighed, vil pejligen mellem skibende være konstant hvis disse er på kollisionskurs. Dette medfører at lokalpunktsmetoden (se indledning) vil være en god metode i alle tilfælde.

Vi fandt dog, at baggrundsmetoden kan bruges som en indirekte metode til at bestemme om bådene er på kollisionskurs, hvis iagttageren befinder sig tilstrækkelig langt væk fra baggrunden. Når bådene er på kollisionskurs, hvilket medfører konstant pejling, vil baggrunden bag kollisionsbåden forflytte sig med samme hastighed som iagttagers relative hastighed til baggrunden. Ved længere afstande til kysten er denne forflytning ikke kendelig, og derved vil baggrunden opleves at være i ro. Resultatet fra figur 6 giver den mest generelle angivelse af det gyldige område for brug af baggrundsmetoden. Ikke desto mindre fandt vi ved brug af en række estimer for kendelig forflytning og båd hastighed, at afstanden til kysten som kræves for at anvende baggrundsmetoden kan estimeres med sammenhængen vist på figur 9. Den største afstand som kræves er her approksimeret til 833 m ved en pejling på 90° , mens det ved en pejligen på 30° eller 150° er 417 m. Det er dog vigtigt at understrege at disse estimer som formidler det generelle resultat fra figur 6 er baseret på usikre antagelser. Dette bør derfor kun tolkes som et estimat på størrelsesordenen for denne grænse.

-
- [1] Metzsch-Jensen M. (2020), *Boat myth* (GitHub repository), tilgængelig ved: https://github.com/mikkelme/boat_myth
 - [2] Respekt for vand: *Vigeregler*, tilgængelig ved: <https://soesport.dk/sejlskolen/vigeregler> (sidst læst: 16/01/2021)
 - [3] Duelighed.dk: *Skipper-kursus* (slide 03-02), tilgængelig ved: http://www.duelighed.dk/tutorial_soevsregler/03_02.htm (sidst læst: 05/01/2021)
 - [4] Hjemmeværnet: *Maritime udtryk*, tilgængelig ved: <https://www.hjv.dk/oe/HVF122/Sider/Maritime-udtryk.aspx> (sidst læst: 05/01/2021)
 - [5] Søren Toftegaard O. (2013), *LystSejlads*, s. 19 (afsnit 1.4), tilgængelig ved: <http://studienoter.dk/Sejlads/Noter/LystSejlads.pdf> (sidst læst: 05/01/2021)
 - [6] retsinformation.dk: *Bekendtgørelse om søvejsregler* 20/11/2009. Regel 7: fare for sammenstød (d) (20/11/2009), tilgængelig ved: <https://www.retsinformation.dk/eli/lt/2009/1083> (sidst læst: 05/01/2021)
 - [7] Albrechten S. (2007). *Sejlads for Begyndere* <http://www.groensund.dk/upl/website/sejlads/SejladsforBegyndere2.pdf>

VI. APPENDIX

A. Simmuleringer med kollisjon

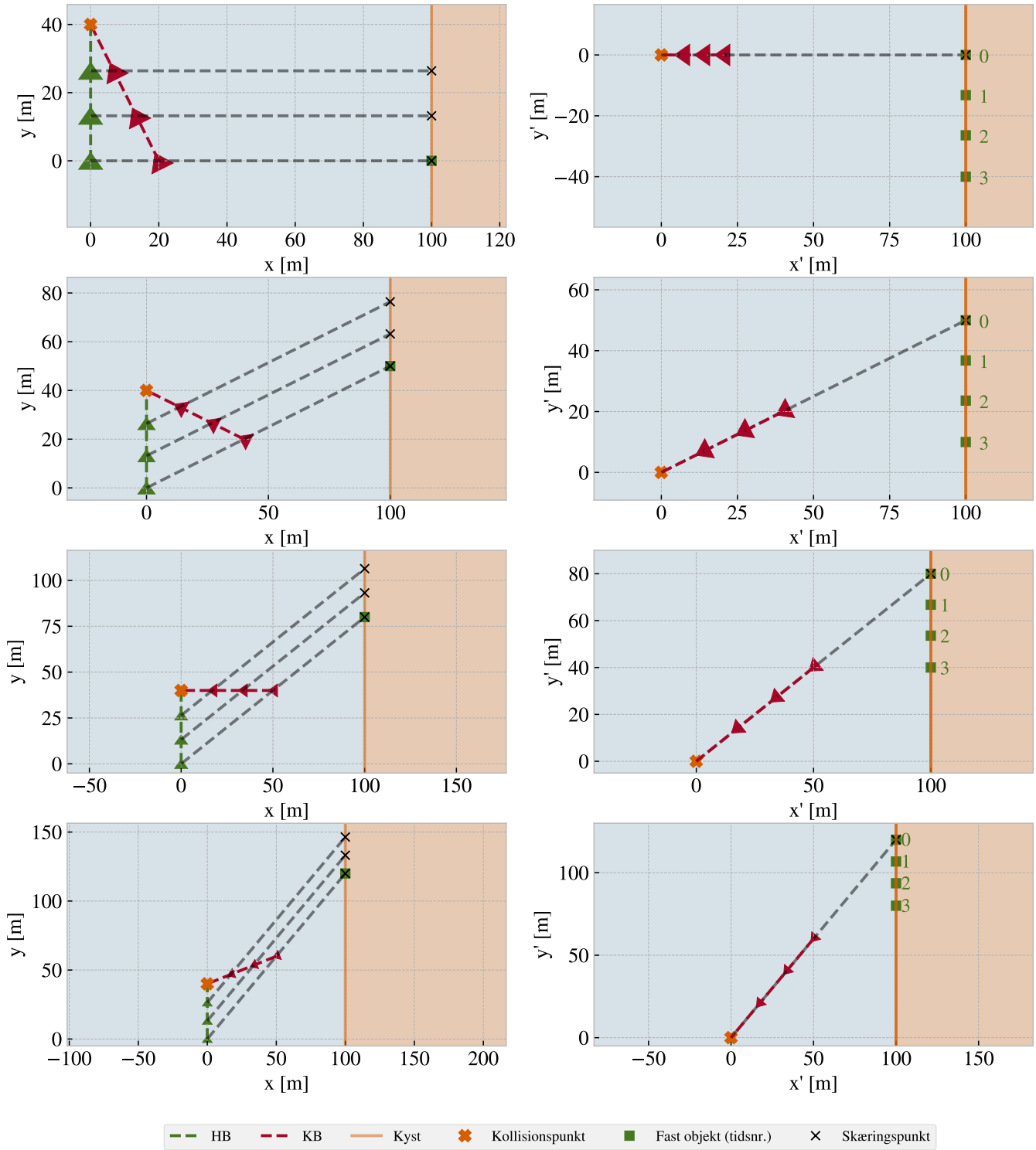


Figure 10.

Figurrække	HB_{start}	KB_{start}	HB_{slut}	KB_{slut}
1	(0,0)	(20,0)	(0, 40)	(0, 40)
2	(0,0)	(40,30)	(0, 40)	(0, 40)
3	(0,0)	(50,40)	(0, 40)	(0, 40)
4	(0,0)	(50,60)	(0, 40)	(0, 40)

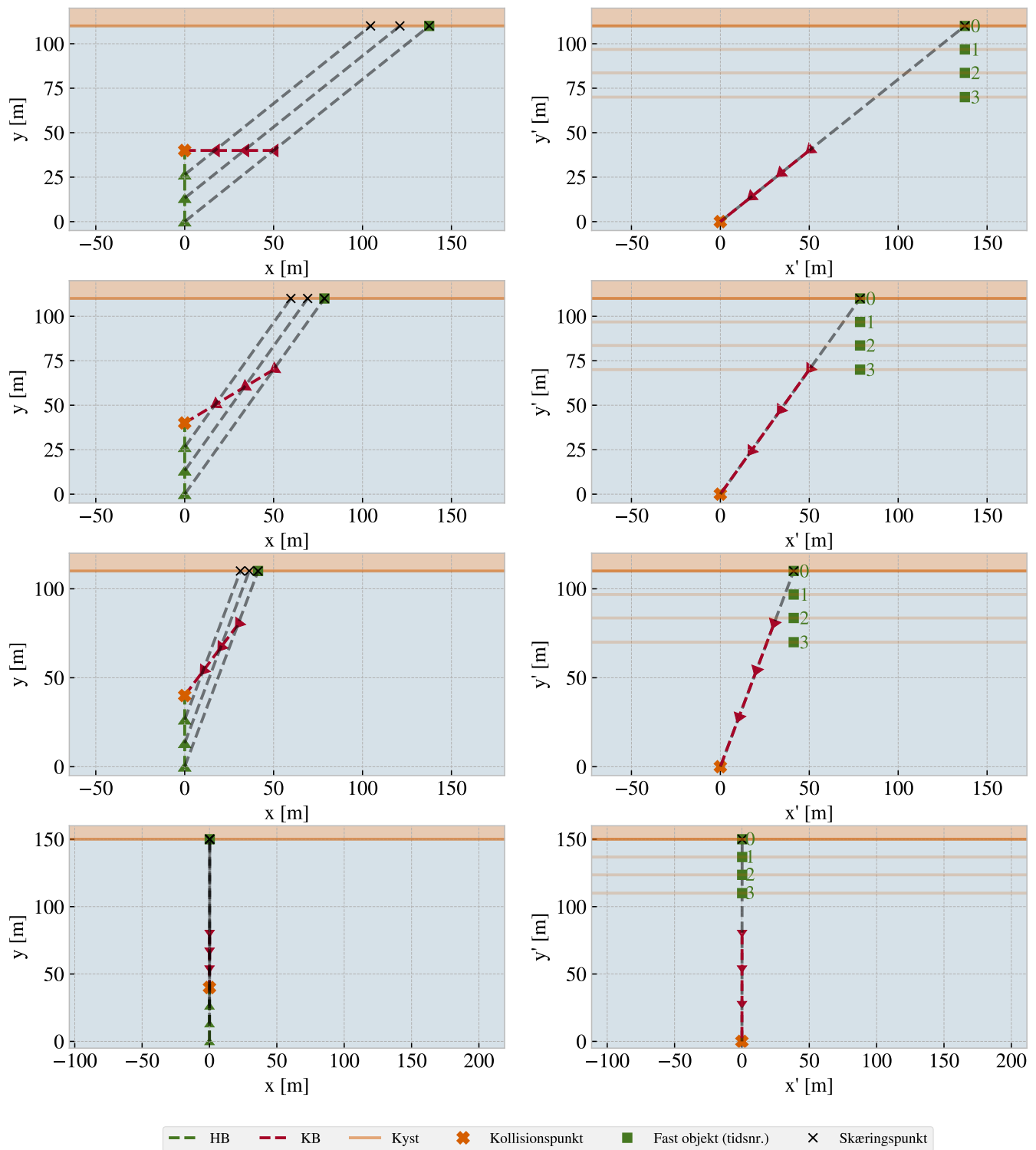


Figure 11.

Figurrække	HB_{start}	KB_{start}	HB_{slut}	KB_{slut}
1	(0,0)	(50,40)	(0, 40)	(0, 40)
2	(0,0)	(50,70)	(0, 40)	(0, 40)
3	(0,0)	(30,80)	(0, 40)	(0, 40)
4	(0,0)	(0.1,80)	(0, 40)	(0, 40)

B. Simmuleringer uden kollision

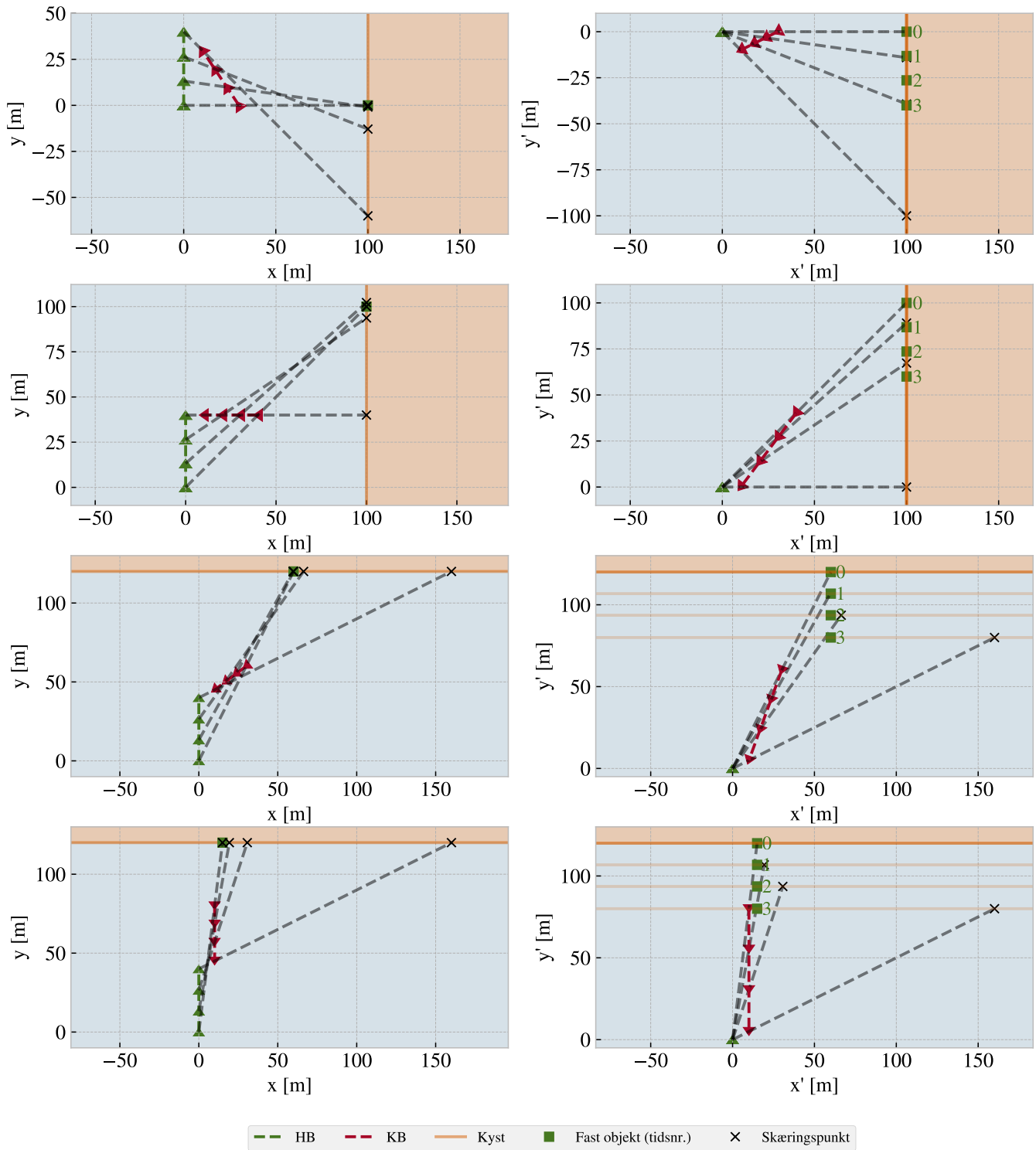


Figure 12.

Figurrække	HB_{start}	KB_{start}	HB_{slut}	KB_{slut}
1	(0,0)	(30,0)	(0, 40)	(10, 30)
2	(0,0)	(40,40)	(0, 40)	(10, 40)
3	(0,0)	(30,60)	(0, 40)	(10, 44)
4	(0,0)	(10,80)	(0, 40)	(10, 44)