Assignment 6: Visualisering af Parametriske Flader

Marie Elkjær Rødsgaard - dck495
Department of Computer Science

November 29, 2022

Contents

1 Introduktion

Dette er den sidste aflevering i Grafik og omhandler Visualisering af parametriske flader. Denne opgave går ud på at forklare og implementere algoritmer for at Visualisering af parametriske flader. Vi kommer til at kigge på to slags parametriske flader: generelle 'parametrisk flader', og 'Bezier flader'. Og to metoder for at visualisere dem hhv. sampling og subdivision.

2 Teori

En parametriske flade er en flade som er defineret med en funktion der hedder Q(s,t). Q er en vektor funktion og s og t er parameter. For hver s og t værdi får vi en tre dimensional vektor. Når vi holder den ene parameter fast foreksempel s så når vi kører med den and parameter og så får vi en parametriseret kurve. Det kan være en Hermite eller Bezier kurve. Det kan vi skrive op som.

$$Q(s,t) : \begin{cases} Q(s_0, t) \text{ er en parametreret kurve for en bestemt } s = s_0 \\ Q(s, t_0) \text{ er en parametreret kurve for en bestemt } t = t_0 \end{cases}$$

En parametriseret kurve kan vi udtrykke ved en geometri og basis matrix og en parameter vektor.

$$Q(t) = GMt = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \end{pmatrix} Mt$$

Det vi så gør nu er at gøre vores kontrolpunkter til funktioner i stedet for faste værdier som det var før. De nye sæt af kontrol punkter bliver så

$$Q(s,t) = G(s)Mt = \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) & G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix} Mt$$

De fire funktioner vil vi nu have skal være en paratrimetrisk kurve.

$$G_i(s) = G \begin{pmatrix} g_{ix}(s) \\ g_{iy}(s) \\ g_{iz}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1i} & G_{2i}) & G_{3i} & G_{4i} \end{pmatrix} MS$$

Her er vores $\begin{pmatrix} G_{1i} & G_{2i}) & G_{3i} & G_{4i} \end{pmatrix}$ Vores kontrolpunkter som er faste størrelser. Vores parameter vektor hedder nu S i stedet for t. De fire kontrolpunkter kan vi nu skrive op som

$$\begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \\ G_3(s) \\ G_4(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} & G_{41} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} & G_{42} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & G_{43} \\ G_{14} & G_{24} & G_{34} & G_{44} \end{pmatrix} MS$$

Vi skal bruge vores G_{ij} som en række, ovenover har vi det som en søjle. Vi bliver derfor nødt til at transponere den. Vi får så

$$\begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) & G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix} = S^T M^T \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}$$

Vi indsætter nu dette i vores parametrisk flade funktion $Q(s,t)$, og får

$$Q(s,t) = S^T M^T \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} Mt$$

Vi har nu både Mt og $S^T M^T$. Mt kan skrives op som en vektor hvis elementer er 3. gradspolynomiener. som vi kan repræsentere med p(t).

$$Mt = \begin{pmatrix} m_{11}t^3 + m_{12}t^2 + m_{13}t + m_{14} \\ m_{21}t^3 + m_{22}t^2 + m_{23}t + m_{24} \\ m_{31}t^3 + m_{32}t^2 + m_{33}t + m_{34} \\ m_{41}t^3 + m_{42}t^2 + m_{43}t + m_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix}$$

Så ville $S^T M^T$ være

$$S^T M^T = \begin{pmatrix} p_1(s) & p_2(s) & p_3(s) & p_4(s) \end{pmatrix}$$

Det kan vi nu indsætte i vores $Q(s,t)$ funktion

$$Q(s,t) = \begin{pmatrix} p_1(s) & p_2(s) & p_3(s) & p_4(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix}$$

Vores p'er er 3. gradspolynomier er bestemt af vores basis matrix M. Vores G er nu vægtet af vores p polynomier.

For Bezier flader har vi geometri matrix G som er

$$G_B = \begin{pmatrix} Q(0,0) & G_{12} & G_{13} & Q(0,1) \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ Q(1,0) & G_{42} & G_{43} & Q(1,1) \end{pmatrix}$$

Q punkterne i geometri matrixen er hjørnepunkterne for Bezier fladen, de andre punkter er kontrol punkter der typisk ligger uden for fladen. Det kan ses på figure 1 nedefor.

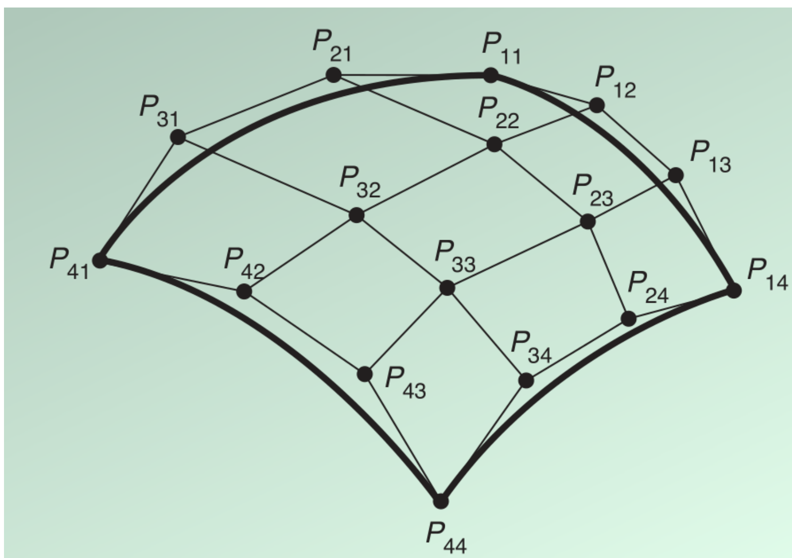

Figure 1: Bezier flade.

Vores Bezier flade funktion er den samme funktion, Q som vi har set før. Nu har vi bare basis matrix M_B for Bezier og geometri matrixen som ses ovenover.

For at visualisere vores flader benytter vi os af sampling til generelle parametriske flader og subdivision for Bezier flader. Når vi sampler generelle flader beregner vi punkterne

$$f(ui, vj), \quad f(ui+u, vj), \quad f(ui+u, vj+v), \quad f(ui, vj+v)$$

De punkter danner en firkant som vi splitter til to trekanter. Når det er blevet lavet til trekanter kan det der efter tegnes da openGL kun kan arbejde med trekanter. Når vi sampler arbejder vi med intervallet $(u, v) \in [u_{min}, u_{max}] \times [v_{min}, v_{max}]$. Hvis vi så vil have N samples for u og M samples for v så har vi at

$$\Delta u = (u_{max} - u_{min})/N$$

$$u_0 = u_m in$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u$$

$$\Delta v = (v_{max} - v_{min})/M$$

$$v_0 = v_m in$$

$$v_i = v_{i-1} + \Delta v$$

For Bezier flader bruger vi subdivision, vi har formen for flade

$$Q(s, t) = S^T M^T G M t$$

$$Q(s, t) = G(s) M t$$

$$Q(s, t) = \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) & G_3(s) & G_4(s) \end{pmatrix} M t$$

Vi har så at

$$G(s) = S^T M^T G \Leftrightarrow G(s)^T = G^T M S$$

Vores flader bliver så delt i 2 nye flader så $s = 1/2$, en højre og en venstre flade. Vi får nye kontrol punkter for de to flader DLB og DRB. Vi kan også betragte vores flade ud fra t. Så har vi

$$Q(s, t) = S^T M^T G M t$$

$$Q(s, t) = S^T M^T G(t)$$

$$Q(s, t) = \begin{pmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ G_3(t) \\ G_4(t) \end{pmatrix} M t$$

Så har vi at G(t)

$$G(t) = G M t$$

Her ville vi også kunne splitte op til to nye flader hvor $t = 1/2$. Igen har vi en DLB og DRB. Hvis vi ganger punkterne sammen som ses på figure 2 så vil vi få vores 16 kontrolpunkter til en ny flade. Dette vil vi gøre rekursiv så vi tegne fladen.

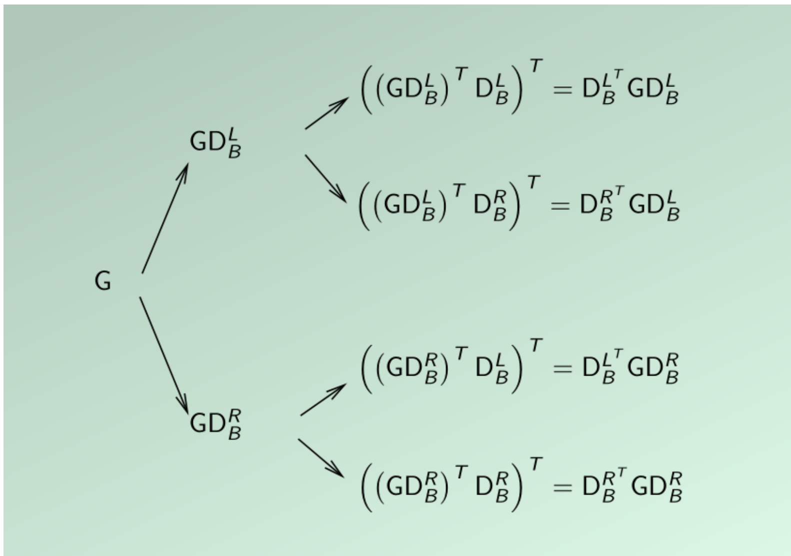

Figure 2: subdivision

Normalen på en Bezier får vi ved at krydse hjørne vektorene.

3 Implementation

Implementationen består af de to metoder for at tegne parametriske flader, hhv. sampling og subdivision. Sampling for generelle parametriske flader har vi vores u og v som nævnt tidligere. Vi definere først vores delta u og v. Derefter laver vi fire punkter for vores øvre og nedre hjørne og for vores normaler. Så definere vi vores u paremeter som er fire hjørner, vi gør det samme for vores v'er i vores loop. Vi deler igen vores firkant i to trekanter. Vi sampler så på den måde at vi går et skridt i u retning og et skridt i v retningen og laver vores firkant på den måde. Den består af to loop en der kører en v med M samples løkke og en der køre en u løkke med N samples. Så regner vi vores vertices og normal koordinater ud. Efter vi har gjort det skal vi opdatere vores fire v'er og u'er. Vi har også to statements der laver `CreateFrontFacingData` og `CreateBackFacingData` som pusher vores vertices og normaler. Sampling bruger vi til at tegne klein flasken og dini fladen. Klein flasken bliver der tegne dens forskellige dele som til sidst bliver sat sammen til flasken.

Implementationen for subdivision for Bezier flader starter med at vi krydser vores forskellige hjørne punkter for at få vores normaler. Efter vi har fået vores fire normaler tjekker vi om der er `frontfacing` hvis der er pusher vi vores vertecies og normalen. Dette gør vi for begge trekanter. Hvis ikke der er frontfacing betyder det at vi ikke er færdige med at dele og at vi skal lave en ny Bezier patch, når vi har lavet den kalder vi så rekursivt vores subdivide med den nye patch og vi tæller level en ned. Det vi laver der er det der svare til figure 2. Vi bruger subdivision implementationen for at tegne de fire figure Teapot, pain, rocket og patches. Parameterne for de forskellige parametriske figure er givet på forhånd.

4 Test

Vi kan se at vi ved brug af sampling og subdivision får de ønskede figure. De første to figure er lavet ved at bruge sampling på generelle parametriske flader. Klein flasken er flere dele sat sammen som til sidst giver det ønskede resultat. De sidste fire figure er Bezier flader der er lavet ved subdivision metoden.

Figure 3: Klein Flasken

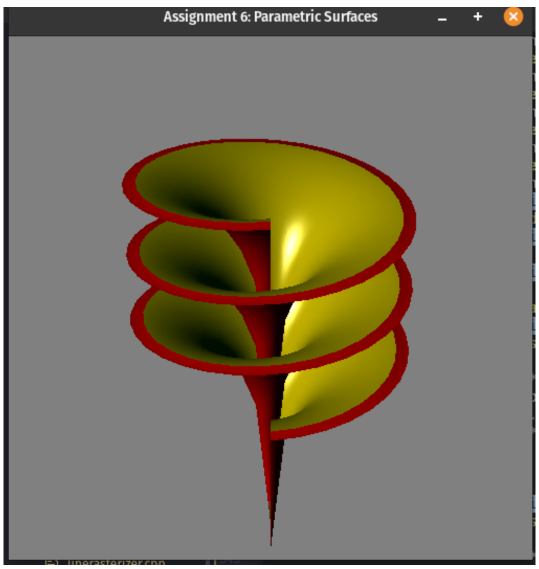

Figure 4: Dini's flade for a = 1.0 og b = 0.2.

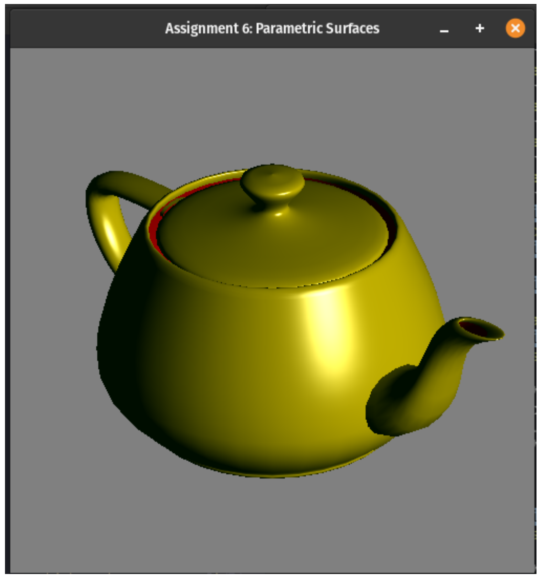

Figure 5: Tekande

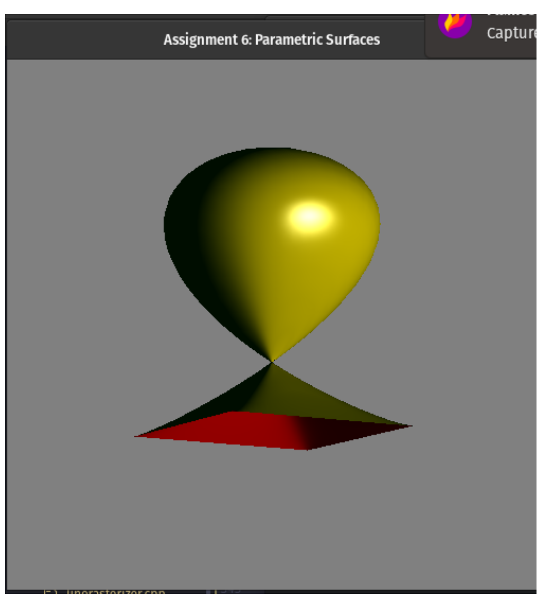

Figure 6: Pain

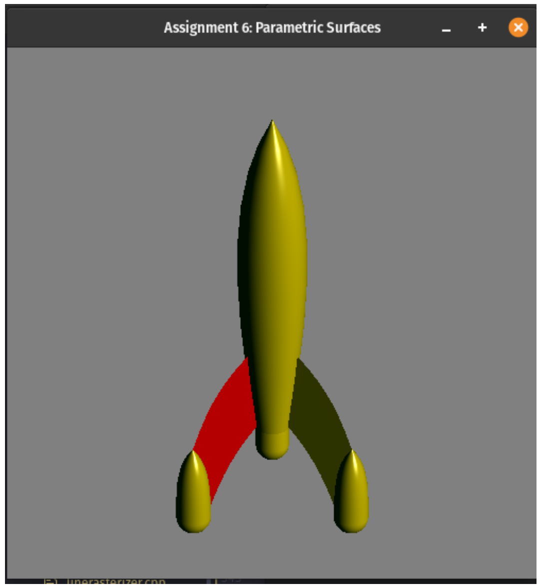

Figure 7: Raket

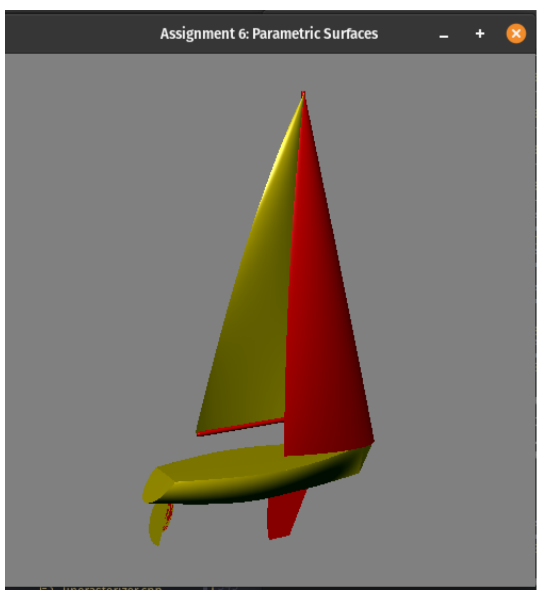

Figure 8: skib

5 konklusion

Vi har nu forklaret og implementeret algoritmerne for visualisering af parametriske flader. Vi har kigget på den generelle formel for parametriske flader og på Bezier flader. Derudover har vi gennemgået de to metoder for at tegne parametriske flader hhv. sampling og subdivision. Vi har testede om implementationen virker ved at se at alle figurerne ser rigtige ud, på den måde kan vi konkludere at implementationen virker som ønsket.

References