

# Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов  
записал со слов лектора А. А. Лодкина

5 июня 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория меры</b>	<b>2</b>
1	Алгебры и $\sigma$ -алгебры множеств. . . . .	2
2	Борелевская $\sigma$ -алгебра. . . . .	3
3	Мера на алгебре. Примеры мер. . . . .	4
4	Свойства меры . . . . .	5
5	Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега и её свойства. . . . .	6
6	Измеримость функции относительно $\sigma$ -алгебры. Свойства измеримых функций. . . . .	10
7	Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций. . . . .	12
8	Теорема Беппо Леви. . . . .	13
9	Свойства интеграла от суммируемых функций. . . . .	14
10	Счётная аддитивность интеграла. . . . .	15
11	Абсолютная непрерывность интеграла . . . . .	16
12	Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега. . . . .	16
13	Сравнение подходов Римана и Лебега . . . . .	17
14	Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом . . . . .	18
15	Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью . . . . .	19
16	Интеграл по мере Лебега-Стильетса. Интеграл по распределению. . . . .	20
	16.1 Интеграл по мере Лебега-Стильетса. . . . .	20
	16.2 Интеграл по образу меры . . . . .	21
	16.3 Интеграл по распределению. . . . .	22
17	Интеграл Эйлера-Пуассона . . . . .	22
18	Вероятностный смысл меры и интеграла. . . . .	23
19	Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика). . . . .	23
	19.1 «Почти всюду» и вариации теоремы Леви. . . . .	23
	19.2 Кратные интегралы . . . . .	25
20	Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тоннели и Фубини). . . . .	26
21	Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании . . . . .	26
22	Преобразование меры Лебега при гладком отображении . . . . .	28
23	Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты). . . . .	28
24	Теорема Фату . . . . .	29
25	Теорема Лебега об ограниченной сходимости. . . . .	30
26	Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Формулировка признаков Больцано-Коши, Дирихле и Абеля. . . . .	30
27	Формулировки основных теорем о несобственном интеграле с параметром. . . . .	31
	27.1 Суммируемый случай. . . . .	32
	27.2 Случай равномерной сходимости . . . . .	32
28	$\Gamma$ -функция Эйлера. Её свойства. . . . .	32
29	$B$ -функция и её сведение к $\Gamma$ -функции. . . . .	34
30	Объём $n$ -мерного шара. . . . .	34

# Глава 1 Теория меры

## Билет 1: Алгебры и $\sigma$ -алгебры множеств.

**Определение 1.1.** Пусть  $X$  – некоторое множество. Тогда  $\mathcal{A} \subset 2^X$  называется *алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ ,
2.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

**Упражнение 1.** Пусть  $\mathcal{A} \subset 2^X$  – алгебра,  $|\mathcal{A}| < \infty$ . Тогда  $|\mathcal{A}| = 2^n$  для некоторого  $n$ .

*Доказательство.* Так как  $X \in \mathcal{A}$ , каждый элемент  $X$  содержится как минимум в одном элементе  $\mathcal{A}$ . Пусть  $A(x)$  – пересечение всех множеств из  $\mathcal{A}$ , содержащих  $x$ . Понятно, что  $A(x)$  непусто, т.к.  $x \in A(x)$ . Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили  $A(x)$ , как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение:  $A(x)$  – такое множество, что если  $x \in B \in \mathcal{A}$ , то  $A(x) \subset B$ <sup>1</sup>.

2. Введём отношение на  $X$ : пусть  $x \sim y$ , если  $A(x) = A(y)$ . Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что  $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$ .

Пусть  $y \in A(x)$ . Предположим, что  $A(y) \neq A(x)$ . Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо  $A(y)$  содержит элемент, которого нет в  $A(x)$ , либо наоборот. Пусть первое. Тогда  $B = A(x) \cap A(y)$  – элемент  $\mathcal{A}$ , который содержит  $y$  и строго меньше  $A(y)$ , чего не может быть. Пусть второе. Тогда если  $A(y)$  не содержит  $x$ , то  $A(x) \setminus A(y)$  является элементом  $\mathcal{A}$ , содержащим  $x$ , а если содержит, то снова  $A(x) \cap A(y)$  является таким элементом. Причём строго меньшим, чем  $A(x)$ , что опять ведёт нас к противоречию.

Пусть  $A(x) = A(y)$ . Предположим, что  $y \notin A(x)$ . Но тогда  $y \notin A(y)$ , что точно ложь.

3. Разобьём  $X$  на классы эквивалентности по отношению  $\sim$ ; обозначим множество этих классов  $\hat{\mathcal{A}}$ . Понятно, что  $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$ , ведь  $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ . Пусть  $B \in \mathcal{A}$  и  $\hat{B} \in \hat{\mathcal{A}}$ . Докажем, что если  $B \cap \hat{B} \neq \emptyset$ , то  $B \cap \hat{B} = \hat{B}$ .

Предположим противное: пусть  $x \in B \cap \hat{B}$  и  $y \in \hat{B} \setminus B$ . Из определения отношения эквивалентности понятно, что  $\hat{B} = A(x) = A(y)$ . Но заметим тогда, что  $\hat{B} \setminus B$  – множество из  $\mathcal{A}$ , содержащее  $y$  и строго меньшее  $\hat{B}$ , чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое  $B \in \mathcal{A}$  можно представить, как объединение множеств из  $\hat{\mathcal{A}}$ : просто для каждого  $b \in B$  взять  $A(b)$  и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из  $\hat{\mathcal{A}}$  лежит в  $\mathcal{A}$ . Т.к. элементы  $\hat{\mathcal{A}}$  не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству  $\hat{B} \subset \hat{\mathcal{A}}$  объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами  $2^{\hat{\mathcal{A}}}$  и  $\mathcal{A}$ . Поэтому количество элементов  $\mathcal{A}$  имеет искомый вид.

□

Примеры привести не очень сложно, не будем здесь на этом останавливаться.

<sup>1</sup>Заметим, что мы существенно используем конечность  $\mathcal{A}$  каждый раз, когда говорим, что  $A(x) \in \mathcal{A}$ !

**Определение 1.2.**  $\sigma$ -алгеброй называется алгебра, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений.

**Определение 1.3.** Пусть  $\mathcal{E} \subset 2^X$ . Тогда наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ , называется борелевской оболочкой  $\mathcal{E}$  и обозначается  $\sigma(\mathcal{E})$ . (Ссылаясь на факт, который уже упоминался в упражнении, заметим, что  $\sigma(\mathcal{E})$  совпадает с пересечением всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{E}$ ).

**Лемма 1.1.** Если  $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ , то  $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ .

*Доказательство.* Из определения борелевской оболочки понятно, что

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{E}_1)).$$

При этом понятно, что правая часть равна  $\sigma(\mathcal{E}_1)$ , чего нам и надо.  $\square$

## Билет 2: Борелевская $\sigma$ -алгебра.

**Определение 2.1.** Пусть  $\mathcal{O}_n$  – множество всех открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\sigma$ -алгебра  $\sigma(\mathcal{O}_n)$  называется борелевской.

**Определение 2.2.** Назовём  $n$ -мерной ячейкой такое подмножество  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow \Delta = \begin{cases} [a, b), [a, \infty); \\ (-\infty, b), (-\infty, \infty); \end{cases} \\ n > 1 &\Rightarrow \Delta = \prod_{i=1}^k \Delta_i, \end{aligned}$$

где  $\Delta_i$  – одномерные ячейки.

**Определение 2.3.** Назовём  $n$ -мерной алгеброй ячеек множество

$$\text{Cell}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^k \Delta_i \mid k \in \mathbb{N} \right\},$$

где  $\Delta_i$  – ячейки.

**Утверждение 2.1.**  $\text{Cell}_n$  – действительно алгебра.

*Доказательство.* Чтобы сделать, нужно увидеть, что пересечение ячеек – ячейка, а потом представить пересечение объединений, как объединение пересечений.  $\square$

**Теорема 2.1.**  $\sigma(\text{Cell}_n) = \sigma(\mathcal{O}_n)$ .

*Доказательство.* Зная последний результат из предыдущего билета, имеем возможность доказывать, что

$$\text{Cell}_n \subset \sigma(\mathcal{O}_n) \text{ и } \mathcal{O}_n \subset \sigma(\text{Cell}_n).$$

Это даст нам утверждение теоремы.

Первое включение очевидно: можно представить любую ячейку, как пересечение вложенных прямоугольников, например. Поэтому и с объединением проблем не будет.

Чтобы доказать второе, рассмотрим сначала ячейки с целыми вершинами, назовём их ячейками первого ранга. Побив каждую из них на  $2^n$  частей (поделив каждую сторону на 2), получим ячейки второго ранга, продолжая процесс – ячейки ранга  $n$ . Пусть  $U$  – произвольное открытое множество, а  $U_k$  – объединение всех ячеек ранга  $k$ , пересекающих  $U$ .

Рассмотрим  $x$  – произвольную точку не из  $U$ . Т.к.  $U$  открыто, существует такое  $\varepsilon$ , что

$$B_\varepsilon(x) \cap U = \emptyset.$$

Заметим однако, что если ячейка ранга  $k$ , то её сторона равна  $2^{1-k}$ , а значит, диагональ –

$$\sqrt{n} 2^{1-k}.$$

Эта последовательность стремится к нулю при  $k$  стремящемся к бесконечности, поэтому можно сделать так, что диагональ ячейки станет меньше, чем  $\varepsilon$ , при всех  $k > K$ . Из этого будет следовать, что при  $k > K$   $x \notin U_k$ .

Отсюда ясно, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow U \in \sigma(\text{Cell}_n) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\text{Cell}_n).$$

□

**Утверждение 2.2.** Борелевской  $\sigma$ -алгебре принадлежат множества следующих типов:

1. Точки.
2. Открытые, замкнутые.
3. Не более чем счётные.
4. Счётные пересечения открытых множеств – множества типа  $G_\delta$ .
5. Счётные объединения замкнутых – множества типа  $F_\sigma$ .
6. Счётные объединения множеств типа  $G_\delta$  – множества типа  $G_{\delta\sigma}$ .
7. Счётные пересечения множеств типа  $F_\sigma$  – множества типа  $F_{\sigma\delta}$ .

## Билет 3: Мера на алгебре. Примеры мер.

**Определение 3.1.** Пусть  $X$  – множество,  $\mathcal{A}$  – алгебра на  $X$ . Тогда мерой на  $\mathcal{A}$  называется отображение  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , удовлетворяющее двум свойствам:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Если  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  – семейство дизъюнктивных<sup>2</sup> множеств из  $\mathcal{A}$ , то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

**Пример 3.1.** Пусть  $\mathcal{A} = 2^X$ , и  $a \in X$  – произвольная точка. Введём меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

*Проверка аксиом.* Первое свойство, конечно, выполняется; чтобы проверить второе, можно увидеть, что в семействе дизъюнктивных множеств точка может содержаться лишь в одном из них. □

Такая мера называется *дельта-мерой*, *атолической мерой* или *мерой Дирака*, обозначается, как  $\delta_a$ . В физике порой рассматривается (на  $\mathbb{R}$ ), как интеграл от *дельта-функции Дирака* – такой функции, что она равна нулю всюду, кроме  $a$ , а интеграл по всей прямой от неё равен 1.

**Пример 3.2.** В той же ситуации вместо точки  $a$  зафиксируем не более, чем счётное множество точек  $\{a_k\}$ . Меру определим, как

$$\mu(A) = \sum_k m_k \delta_{a_k}(A),$$

где  $m_k$  – некоторые фиксированные неотрицательные вещественные числа, *веса*. Такая мера называется *молекулярной*.

<sup>2</sup>Попарно непересекающихся друг с другом. Если в объединении участвует семейство дизъюнктивных множеств, то будем его обозначать  $\sqcup$  вместо  $\cup$ , забывая упоминать дизъюнктивность.

*Проверка аксиом.* Первая снова тривиальна, вторая следует из счётной аддитивности дельта-меры (на самом деле, тут нужно воспользоваться теоремой о перестановке/группировке членов в абсолютно сходящемся ряде; т.к. всё положительно, никакой условной сходимости тут не бывает, и при перестановке/группировке членов сохраняется как сходимость, так и расходимость).  $\square$

**Пример 3.3.** В той же ситуации пусть

$$\mu(A) = |A|.$$

## Билет 4: Свойства меры

**Свойство 4.1** (Монотонность). Пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ . Тогда  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

*Доказательство.*

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

$\square$

**Свойство 4.2.** Пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ ,  $\mu B < \infty$ . Тогда  $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$ .

*Доказательство.*

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Условие  $\mu(B) < \infty$  было использовано, когда мы вычли  $\mu(A)$  из двух частей равенства; действительно, по предыдущему свойству  $\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$ , поэтому  $\mu(A)$  можно вычитать.<sup>3</sup>  $\square$

**Свойство 4.3** (Усиленная монотонность). Пусть  $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{A}$ ,  $A_1, \dots, A_n \subset B$ , причём множества  $A_k$  дизъюнктные. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu(B).$$

*Доказательство.* Очевидно.  $\square$

**Свойство 4.4** (Полуаддитивность). Пусть  $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{A}$ ,  $B \subset \cup A_k$ . Тогда

$$\mu(B) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

*Доказательство.* Введём семейство множеств:

$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Нетрудно понять, что они дизъюнктны; при этом

$$\bigsqcup_{k=1}^n C_k = \cup A_k,$$

потому что никаких точек извне  $\cup A_k$  в это объединение точно попасть не может, а для любой точки  $a$  из  $\cup A_k$  можно взять наименьшее  $k_0$  такое, что  $a \in A_{k_0}$ ; тогда  $a \in C_{k_0}$ .

Из этого следует, что  $B$  можно представить, как

$$B = \bigsqcup_{k=1}^n B \cap C_k = \bigsqcup_{k=1}^n D_k.$$

Заметим, что

$$\mu(D_k) = \mu(B \cap C_k) \leq \mu(C_k) \leq \mu(A_k).$$

Поэтому и

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^n \mu(D_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

$\square$

<sup>3</sup>Не достаточно ли потребовать, что  $\mu(A) < \infty$ ?

**Свойство 4.5** (Непрерывность меры снизу). Пусть  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  – такое семейство множеств из  $\mathcal{A}$ , что  $A_k \subset A_{k+1}$ , и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда  $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$ .

*Доказательство.* Пусть  $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$ , причём  $A_0 = \emptyset$  и  $k \geq 1$ . Тогда нетрудно увидеть, что  $C_k$  дизъюнкты, и

$$A_k = \bigsqcup_{i=1}^k C_i.$$

При этом

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Но тогда искомое утверждение очевидно из второй аксиомы меры и определения суммы ряда.  $\square$

**Свойство 4.6** (Непрерывность меры сверху). Пусть  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  – такое семейство множеств из  $\mathcal{A}$ , что  $A_k \supset A_{k+1}$ ,  $\mu A_1 < \infty$  и

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда  $\mu(B) = \lim \mu(A_k)$ .

*Доказательство.* Пусть  $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$ , причём  $A_0 = \emptyset$  и  $k \geq 1$ . Тогда нетрудно увидеть, что  $B_k$  дизъюнкты, и

$$A_k \sqcup \bigsqcup_{i=1}^k B_i = A_1.$$

При этом

$$B \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1.$$

Конечность всех мер позволяет завершить доказательство так же, как в прошлый раз, перенеся суммы рядов вправо и перейдя к пределу.  $\square$

**Теорема 4.1.** Если мера конечно-аддитивна и непрерывна снизу (или сверху), то она счётно-аддитивна.

## Билет 5: Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега и её свойства.

**Определение 5.1.** Объёмом ячейки  $\Delta = \prod \Delta_i$  в  $\mathbb{R}^n$  называется

$$v_n(\Delta) = \prod_{i=1}^n |\Delta_i|.$$

Аналогично определим и объём открытых/замкнутых прямоугольников для удобства.

**Утверждение 5.1.** Любой элемент  $\text{Cell}_n$  можно представить, как дизъюнктное объединение ячеек (разбить на ячейки).

*Набросок доказательства.* Кажется, делается двойной индукцией по количеству ячеек. Предполагаем сначала, что мы научились объединение  $n$  прямоугольников представлять в виде дизъюнктного объединения нескольких ячеек. После этого делаем переход: доказываем, что если добавить  $(n+1)$ -ю ячейку, то всё равно получится.

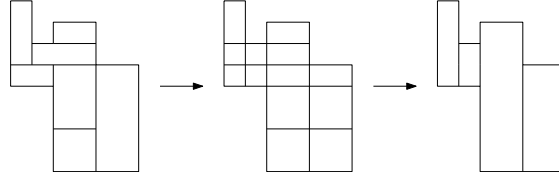
Чтобы доказать переход, вновь применяем индукцию. Предположим, что мы доказали, что можем представить в виде дизъюнктного объединения объединение ячейки и дизъюнктного

объединения  $k$  ячеек. А потом новый переход: добавляем  $(k + 1)$ -ю. Здесь удобно рассматривать «сетчатую» конструкцию разбиения: на пути индукции всё время поддерживать разбиение таким, чтобы все разрезающие линии кончались на границе какой-нибудь из объединяемых в данный момент ячеек.  $\square$

**Определение 5.2.** Объёмом элемента  $\text{Cell}_n$  называется сумма объёмов ячеек, входящих в его разбиение.

**Утверждение 5.2** (Корректность). Объём элемента  $\text{Cell}_n$  не зависит от выбора разбиения.

*Набросок доказательства.* Обсудим сначала случай  $n = 2$ . Прделаем с разбиением операции как на картинке, проверив, что объём в смысле нашего определения сохранится:



Если у нас было какое-то другое разбиение, мы получим какое-то другое разбиение на столбцы. После этого не очень трудно доказать, что два разбиения на столбцы задают одинаковые объёмы: нужно просто нанести и те, и те линии, а после доказать, что «суммарное» разбиение задаёт тот же объём.

В  $n$ -мерном случае нужно действовать индукцией по размерности: основания «столбцов» будут многомерные, а независимость от разбиения для  $n - 1$  будет использоваться, когда мы будем смотреть на разбиения оснований.  $\square$

**Теорема 5.1.** Объём – конечно-аддитивная функция на  $\text{Cell}_n$ .

*Доказательство.* Теперь это очевидно: если в дизъюнктном объединении множеств из  $\text{Cell}_n$  разбить каждый элемент на ячейки, то мы получим разбиение объединения на ячейки; а в конечных суммах ассоциативность точно работает.  $\square$

**Теорема 5.2.** Объём – счётно-аддитивная функция на  $\text{Cell}_n$ .

*Доказательство.* Переформулируем утверждение:  $A, A_1, \dots \in \text{Cell}_n, \sqcup A_i = A$ . Доказать хочется, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k) = v_n(A).$$

Рассмотрим сначала частный случай: пусть  $A = \Delta$  и  $A_k = \Delta_k$  – ячейки.

1. Пусть  $\Delta$  – ограниченная ячейка в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда можно взять замкнутый параллелепипед  $\Delta' \subset \Delta$  и открытый  $\Delta'' \supset \Delta$  такие, что

$$v_n(\Delta) - v_n(\Delta') < \varepsilon \text{ и } v_n(\Delta'') - v_n(\Delta) < \varepsilon.$$

Явно они будут выглядеть, как

$$\begin{aligned} \Delta &= \prod_{k=1}^n [a_k, b_k], \\ \Delta' &= \prod_{k=1}^n \left[ a_k, b_k - \frac{1}{i} \right], \\ \Delta'' &= \prod_{k=1}^n \left( a_k + \frac{1}{i}, b_k \right), \end{aligned}$$

где  $i \in \mathbb{N}$ .



Проведем это для ячеек  $\Delta$  и  $\Delta_k$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta' \subset \Delta: v_n(\Delta') > v_n(\Delta) - \varepsilon$$

$$\forall k \exists \Delta_k \subset \Delta_k'': v_n(\Delta_k'') < v_n(\Delta_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\Delta'}_{\text{компакт}} \subset \Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k''}_{\text{открытое покрытие}}.$$

По определению компакта

$$\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^N \Delta_k''.$$

Теперь запишем объёмы:

$$v_n(\Delta') \leq v_n\left(\bigcup_{k=1}^N \Delta_k''\right) \leq \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k'') < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + \varepsilon.$$

Используя неравенство для  $v_n(\Delta')$  запишем

$$v_n(\Delta) < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + 2\varepsilon.$$

Устремляя  $\varepsilon$  к нулю и увеличивая сумму в правой части, имеем

$$v_n(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k).$$

С другой стороны,

$$\bigcup_{k=1}^N \Delta_k \subset \Delta \Rightarrow \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) \leq v_n(\Delta) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k) \leq v_n(\Delta).$$

Поэтому на самом деле имеет место равенство.

2. Для неограниченной ячейки интересна лишь гипотетическая ситуация, в которой  $v_n(\Delta) = \infty$ , а сумма оказывается конечной (а значит, и все  $\Delta_k$  ограниченные). Для неё вроде работает примерно та же оценка, что и в первом случае.

Понятно, что разбивать сразу можно на ячейки, а не на элементы  $\text{Cell}_n$ , потому что каждый из них разбивается на конечное число ячеек. Чтобы  $A$  тоже сделать ячейкой, нужно разбить его не на конечное число ячеек, а потом немного изменить разбиения составных частей, чтобы каждая из этих ячеек разбивалась на составные ячейки составных частей. Лень.  $\square$

Поэтому объём – мера на алгебре  $\text{Cell}_n$ .

**Определение 5.3.** Мера  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  называется *полной*, если для любого  $A \in \mathcal{A}$  такого, что  $\mu(A) = 0$  верно, что  $\forall B \subset A \mu(B) = 0$ .

**Определение 5.4.** Мера на алгебре  $\mathcal{A}$  называется  *$\sigma$ -конечной*, если существуют  $X_k$  такие, что  $\mu(X_k) < \infty$  и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X.$$

Например, уже введённый объём  $v_n$  –  $\sigma$ -конечная мера.

**Определение 5.5.** Пусть  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$  – алгебры, и  $\mu_1, \mu_2$  – меры на них. Тогда  $\mu_2$  называют *продолжением*  $\mu_1$ , если  $\mu_2|_{\mathcal{A}_1} = \mu_1$ .

**Теорема 5.3** (Лебега-Каратеодори). Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера на алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда:

1. Существуют её полные продолжения на  $\sigma$ -алгебры.
2. Среди них есть единственное продолжение  $\bar{\mu}$  такое, что если  $\mu'$  – полное продолжение  $\mu$ , то  $\bar{\mu}$  – полное продолжение  $\mu'$ . Его называют *стандартным*.

*Набросок доказательства.*

1. Построим функцию  $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  таким образом:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \mid \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E \right\}.$$

Она называется *внешней мерой* для меры  $\mu$ , но мерой не является: ей не хватает счётной аддитивности.

2.  $E \subset X$  называют *хорошо разбивающим*, если  $\forall A \in \mathcal{A} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$ . Можно доказать, что класс хорошо разбивающих множеств  $\bar{\mathcal{A}}$  является  $\sigma$ -алгеброй, а  $\mu^*$  – мерой и является стандартным продолжением  $\mu$ .

□

**Определение 5.6.** Мера Лебега  $\lambda_n$  на  $\mathbb{R}^n$  – стандартное продолжение объёма.  $\sigma$ -алгебра, на которой она определена, обозначается  $\mathcal{M}_n$ .

**Свойство 5.1.** Все борелевские множества измеримы по Лебегу.

*Доказательство.*  $\sigma$ -алгебра борелевских множеств – наименьшая, содержащая  $\text{Cell}_n$ , поэтому она содержится в  $\mathcal{M}_n$ . □

**Свойство 5.2.** Мера Лебега точки – ноль.

*Доказательство.* Это следует из того, что внешняя мера точки ноль, потому что существует сколь угодно малая ячейка, которая её содержит. □

**Свойство 5.3.** Конечные и счётные множества имеют нулевую меру Лебега.

*Доказательство.* Из-за счётной аддитивности. □

**Свойство 5.4.** Пусть  $L \subset \mathbb{R}^n$  – линейное подпространство размерности меньше, чем  $n$ . Тогда его мера Лебега равна нулю.

*Доказательство.* Нужно покрыть ячейками и сделать оценку. □

**Свойство 5.5.** (Регулярность) Пусть  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдутся открытое  $G$  и замкнутое  $F$  такие, что

$$F \subset A \subset G, \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon, \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

*Доказательство.* В случае, когда  $E$  ограничено, это совсем просто: нужно взять покрывающий набор ячеек из определения внешней меры, и каждую ячейку приблизить открытым параллелепипедом, а потом проверить оценку. Чтобы получить замкнутое множество, придётся повторить это для дополнения  $E$  относительно какого-нибудь куба, содержащего  $E$ .

Для бесконечных надо доказать! □

## Билет 6: Измеримость функции относительно $\sigma$ -алгебры. Свойства измеримых функций.

**Определение 6.1.** Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$ , если для любого промежутка  $\Delta \in \mathbb{R}$   $f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$ .

**Определение 6.2.** Множества вида  $X[f < a] = \{x \in X \mid f(x) < a\}$  – множества Лебега 1 типа, а  $X[f \leq a]$ ,  $X[f > a]$ ,  $X[f \geq a]$  – 2, 3, и 4 соответственно.

**Теорема 6.1.** Чтобы функция  $f$  была измерима относительно  $\mathcal{A}$ , достаточно, чтобы все множества одного из четырёх типов Лебега лежали в  $\mathcal{A}$ .

*Доказательство.*

1.  $1 \rightarrow 2$ :

$$X[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} X\left[f < a - \frac{1}{k}\right].$$

2.  $2 \rightarrow 3$ :  $X[f > a] = X \setminus X[f \leq a]$ .

3.  $3 \rightarrow 4$ : так же, как  $1 \rightarrow 2$ .

4.  $4 \rightarrow 1$ : так же, как  $2 \rightarrow 3$ .

Имея множества Лебега всех четырёх типов, нетрудно получить из них все промежутки. □

**Лемма 6.1.** Любое открытое множество  $G \subset \mathbb{R}^n$  представимо, как счётное объединение ячеек.

*Доказательство.* Возьмём около каждой рациональной точки  $G$  окрестность в форме параллелипипеда, лежащую в  $G$ . Понятно, что из того, что множество рациональных точек всюду плотно, следует, что мы получили счётное открытое покрытие  $G$ .

В свою очередь, любой открытый параллелипипед легко представить, как объединение счётного количества ячеек. А счётное объединение счётных объединений – счётное объединение. □

**Теорема 6.2.** Пусть функции  $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы, а функция  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда функция  $\varphi = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  измерима.

*Доказательство.* Т.к. функция  $g$  непрерывна,  $G = \mathbb{R}^n[g < a]$  – открытое множество. Его можно представить, как

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$

где  $\Delta_k$  – ячейки. Тогда

$$X[\varphi < a] = f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\Delta_k).$$

Пусть

$$\Delta_k = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i).$$

Тогда

$$f^{-1}(\Delta_k) = \bigcap_{i=1}^n X[a_i \leq f_i < b_i].$$

Поэтому

$$X[\varphi < a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^n X[a_i^{(k)} \leq f_i < b_i^{(k)}].$$

Это измеримое множество. □

**Теорема 6.3.**  $f, g$  измеримы  $\Rightarrow$  измеримы  $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}, |f|, \lambda f, f \vee g = \max\{f, g\}, f \wedge g = \min\{f, g\}, f^n$ .

*Доказательство.* Довольно очевидное следствие предыдущей теоремы.  $\square$

**Теорема 6.4.** Если  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  измеримы, то измеримы и  $\sup f_i, \inf f_i, \underline{\lim} f_i, \overline{\lim} f_i, \lim f_i$ .

*Доказательство.*

1.  $g = \sup f_i; X[g \leq a] = X[\forall i f_i \leq a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} X[f_i \leq a]$ .
2. Инфимум – аналогично.
3.  $g = \lim f_i \Rightarrow (g(x) \leq a \Leftrightarrow \exists N: \forall i > N f_i(x) \leq a) \Rightarrow X[g \leq a] = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{i=N+1}^{\infty} X[f_i(x) \leq a]$ .
4. Верхний и нижний пределы – пределы инфимумов и супремумов, поэтому эти результаты следуют из уже доказанного.

$\square$

**Определение 6.3.**  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *простой* (относительно  $\mathcal{A}$ ), если она измерима относительно  $\mathcal{A}$  и принимает конечное число значений.

**Определение 6.4.** Индикатором множества  $E$  называется функция

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

**Утверждение 6.1.** Индикатор  $E$  прост (измерим) тогда и только тогда, когда измеримо  $E$ .

**Утверждение 6.2.** Пусть  $f$  – функция, которая принимает значения  $\{a_i\}_{i=1}^N$  на множествах  $E_i$ . Тогда

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(a_i)} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

**Утверждение 6.3.** Функция  $f$ , принимающая конечное число значений, проста (измерима) тогда и только тогда, когда множества  $E_i$  измеримы.

**Теорема 6.5.** Если  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  – последовательность простых функций, имеющая предел, то этот предел измерим.

**Теорема 6.6.** Пусть  $f$  – неотрицательная измеримая функция. Тогда найдётся неубывающая последовательность  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  простых функций, которая поточечно сходится к  $f$ .

*Доказательство.* Разобьём  $[0, +\infty)$  следующим образом:

$$[0, \infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k,$$

где

$$\Delta_k = \begin{cases} \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], & 0 \leq k < n^2, \\ [n, \infty), & k = n^2. \end{cases}$$

Пусть  $e_k = f^{-1}(\Delta_k) \in \mathcal{A}$ ,  $c_k = \min \Delta_k = \frac{k}{n}$  и

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n^2} c_k \mathbb{1}_{e_k}.$$

Рассмотрим  $x \in e_k$ . Начиная с некоторого  $n$  эта точка точно попадёт в  $e_k$  с  $k < n^2$ . Значение  $f(x) \in \Delta_k = \left[ c_k, c_k + \frac{1}{n} \right]$ , поэтому

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

начиная с некоторого  $n$ . Отсюда следует поточечная сходимость.

Чтобы сделать последовательность функций неубывающей, сохранив сходимость, введём

$$\varphi_n = \max\{\psi_1, \dots, \psi_n\}.$$

Сходимость сохранится, т.к.

$$f - \frac{1}{n} \leq \psi_n \leq \varphi_n \leq f.$$

□

## Билет 7: Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.

**Определение 7.1.** Пусть  $f$  – простая, и представлена, как

$$\sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k).$$

Если  $A \in \mathcal{A}$ , то

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A).$$

**Утверждение 7.1.** Если  $f$  – простая на  $X$ , то

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

*Доказательство.*

$$f \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k \cap A}.$$

□

**Определение 7.2.** Пусть  $f$  – измеримая, неотрицательная функция. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ – простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

При этом

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

В следующих свойствах функции измеримые и неотрицательные.

**Свойство 7.1.**

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

*Доказательство.* Очевидно из определения, для  $g$  супремум берётся по большему множеству функций.  $\square$

**Свойство 7.2.**

$$A \subset B \subset X \Rightarrow \int_B f \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu.$$

*Доказательство.* Следует из предыдущего свойства.  $\square$

**Определение 7.3.** Пусть  $f$  – произвольная измеримая функция. Определим

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}, \quad f_- = \max\{-f(x), 0\}.$$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

**Определение 7.4.**  $f$  называется суммируемой на  $X$ , если интеграл от неё конечен. Семейство суммируемых функций обозначается, как  $L(X, \mu)$ .

## Билет 8: Теорема Беппо Леви.

**Теорема 8.1.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  – неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций, и  $f = \lim f_n$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f_n \leq f &\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu, \\ f_n \leq f_{n+1} &\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \Rightarrow \exists \lim \int_X f_n \, d\mu = L. \end{aligned}$$

Из этих двух утверждений следует, что

$$L \leq \int_X f \, d\mu.$$

Теперь проверим неравенство в другую сторону. По определению

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int_X \varphi \, d\mu,$$

где  $\varphi$  – неотрицательные простые функции, не превосходящие  $f$ . Рассмотрим какую-нибудь  $\varphi$ :

$$\varphi = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k},$$

причём  $c_k \geq 0$ . Примем  $c_0 = 0$ ; тогда понятно, что  $E_0 = \emptyset \Leftrightarrow \varphi > 0$ .

Возьмём  $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \min\{c_1, \dots, c_p\}$  и

$$\varphi_\varepsilon = 0 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{k=1}^p (c_k - \varepsilon) \mathbb{1}_{E_k}.$$

Рассмотрим  $X_n = X[f_n \geq \varphi_\varepsilon]$ . Понятно, что  $E_0 \subset X_n$ .

Т.к.  $f_n \rightarrow f$ , для любой точки  $x$  найдётся  $n$  такое, что  $f_n(x) > \varphi_\varepsilon(x)$ , т.е.

$$\forall x \exists n: x \in X_n.$$

Поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Т.к. последовательность неубывающая,  $X_n \subset X_{n+1} \Rightarrow \mu(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(X)$ . Вообще, для любого измеримого  $A$  верно, что  $\mu(A \cap X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$ .

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq \int_{X_n} \varphi_\varepsilon d\mu = \sum_{k=1}^p (c_k - \varepsilon) \mu(X_n \cap E_k).$$

Устремляя  $n$  к бесконечности и  $\varepsilon$  к нулю, получим

$$L \geq \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k) = \int_X \varphi d\mu.$$

Переходя к супремуму, получим

$$L \geq \int_X f d\mu.$$

Значит, на самом деле есть равенство. □

**Свойство 8.1.** Пусть  $f, g$  – измеримые и неотрицательные функции. Тогда

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

*Доказательство.* Нужно сначала проверить для простых функций, записав их через индикаторы и повозившись с суммами. После этого в общем случае можно выделить возрастающие последовательности простых функций, которые сходятся к  $f$  и  $g$  и воспользоваться теоремой Леви. □

**Свойство 8.2.**

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

*Доказательство.* Аналогично. □

## Билет 9: Свойства интеграла от суммируемых функций.

**Свойство 9.1.** Пусть  $f, g$  – суммируемые,  $f \leq g$ . Тогда

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

*Доказательство.* Расписать положительную и отрицательную части и свести к свойству для неотрицательных функций; суммируемость нужна, чтобы не вычитать бесконечность из неравенства. □

**Свойство 9.2.** <sup>4</sup> Пусть  $f, g$  – суммируемые. Тогда

$$\int_X f + g d\mu \leq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

---

<sup>4</sup>В конспекте был  $\pm$ , но это ведь следует из умножения на константу? И, кстати, нужна ли тут вообще суммируемость, или это верно, даже когда интеграл расходится?

Доказательство. Аналогично. □

**Свойство 9.3.** Если  $f$  – суммируемая, то

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

**Свойство 9.4.** Пусть  $f, g \in L$ ,  $|f| \leq g \Rightarrow |\int f| \leq \int g$ .

Доказательство.

$$|f| \leq g \Rightarrow f \leq g \wedge -f \leq g \Rightarrow \left( \int f \leq \int g \right) \wedge \left( -\int f \leq \int g \right) \Rightarrow \left| \int f \right| \leq \int g.$$

□

**Свойство 9.5.**  $|\int f| \leq \int |f|$ .

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего. □

**Свойство 9.6.**  $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$ .

Доказательство.  $\Leftarrow$  :

$$|f| = f_+ + f_- \Rightarrow 0 \leq f_{\pm} \leq |f| \Rightarrow 0 \leq \int f_{\pm} \leq \int |f|.$$

$\Rightarrow$  : Если  $f$  суммируема, то суммируемы и  $f_{\pm}$ , а  $|f|$  – их сумма. □

**Свойство 9.7.**  $f \in L$ ,  $\mu X < \infty$ ,  $|f| \leq M \Rightarrow |\int f \, d\mu| \leq M\mu(X)$ .

Доказательство.

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \leq \int M \, d\mu \leq M\mu(X).$$

□

## Билет 10: Счётная аддитивность интеграла.

**Теорема 10.1.** Пусть  $f$  – измеримая функция, причём либо  $f \geq 0$ , либо  $f \in L$ . Тогда для любых измеримых  $A, A_1, \dots$  таких, что  $A = \sqcup A_k$  верно, что

$$\int_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f.$$

Доказательство.

1. Пусть  $f \geq 0$ . Тогда

$$\int_A f = \int_X f \mathbb{1}_A, \quad \int_{A_n} f = \int_X f \mathbb{1}_{A_n}.$$

При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Rightarrow f \mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \mathbb{1}_{A_n}$$

Рассмотрим частичные суммы:

$$S_N = \sum_{n=1}^N f \mathbb{1}_{A_n}.$$



Понятно, что они образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к  $f \mathbb{1}_A$ , поэтому из теоремы Леви

$$\int f \mathbb{1}_A = \lim \int S_n = \lim \int \sum_{n=1}^N f \mathbb{1}_{A_n} = \lim \sum_{n=1}^N \int_{A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f.$$

2. Пусть теперь  $f \in L$ . Тогда просто расписать через  $f_{\pm}$  и воспользоваться первым пунктом.

□

## Билет 11: Абсолютная непрерывность интеграла

**Теорема 11.1.** Пусть  $f \in L$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \text{ измеримого } A \subset X, \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

*Доказательство.*

1. Если  $f$  ограничена, то найдётся  $M$  такое, что  $|f| \leq M$ . Тогда

$$\left| \int_A f \right| \leq M \mu(A) \leq \varepsilon \text{ при } \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

2. Пусть теперь  $f \in L$  и всё. Тогда  $|f| \in L$ , и

$$\int_X |f| = \sup_g \int_X g.$$

$g$  – простая, а потому ограниченная.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ простая } g, 0 \leq g \leq |f|: \int_X |f| - \int_X g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя ограниченность  $g$ , находим по любому  $\varepsilon$  такую  $\delta$ , что

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда мгновенно получается искомая оценка:

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| = \int_A g + \int_A (|f| - g) < \varepsilon.$$

□

## Билет 12: Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.

**Теорема 12.1.** Пусть  $f \in C([a, b])$  и  $\lambda$  – мера Лебега. Тогда  $f$  суммируема и

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_a^b f.$$

Доказательство.

1. Сначала докажем, что  $f$  измерима по Лебегу. Заметим, что  $f^{-1}((-\infty, a))$  – открытое множество, т.е. измеримое множество. А значит и функция  $f$  измерима.
2.  $|f|$  ограничен, т.к.  $f$  – непрерывная функция на компакте, поэтому

$$\int_{[a, b]} |f| d\lambda \leq \int_{[a, b]} M d\lambda \leq M(b-a).$$

Значит,  $|f|$  – суммируемая функция, а значит, и  $f$  – суммируемая функция.

3. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{[a, x]} f d\lambda.$$

Она определена, поскольку все интегралы будут конечны. Хочется доказать, что она дифференцируема.

Запишем, что значит непрерывность функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |\Delta x| < \delta \Rightarrow \forall t \in (x - \Delta x, x + \Delta x) f(t) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x (f(x) - \varepsilon) \leq \int_{(x, x+\Delta x]} f d\lambda \leq \Delta x (f(x) + \varepsilon).$$

Разделив на  $\Delta x$  и подставив интеграл посередине, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Но это значит, что  $F'(x) = f(x)$ ! Поэтому значение нашего интеграла будет такое же, как по Риману.

□

## Билет 13: Сравнение подходов Римана и Лебега

Есть три разных способа определить интеграл на отрезке:

1. (подход Ньютона-Лейбница) Если  $f$  непрерывна и  $F$  – её первообразная, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

2. (подход Римана)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n+1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

3. Наше текущее определение интеграла по мере.

**Пример 13.1.** Функция Дирихле  $f: X = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Интеграл по Риману от неё не существует, потому что при сколь угодно малом ранге разбиения можно выбрать в каждом промежутке все  $\xi_i$  рациональными, и тогда значение суммы Римана будет равно длине отрезка, или иррациональными, и тогда значение суммы будет равно нулю. Поэтому предела этих сумм при ранге разбиения, стремящемся к нулю, не существует.

При этом  $f$  является простой функцией: она принимает два значения, при этом одно из них – на счётном (а значит, измеримом) множестве точек. Поэтому и его дополнение тоже измеримо – его мера равна 1. Поэтому интеграл Лебега от этой функции будет равен 1.

В суммировании по Риману основной принцип – разбить промежуток интегрирования на малые участки. В суммировании по Лебегу, напротив, на промежутки бьётся область значений, а промежуток интегрирования оказывается разбит на множества произвольной формы. Вид этой конструкции для интеграла Лебега подробно продемонстрирован в билете 6, в доказательстве теоремы о существовании сходящейся последовательности из простых функций.

## Билет 14: Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом

**Определение 14.1** (Напоминание). Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b)$ . Тогда *несобственный интеграл* по этому промежутку –

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f.$$

**Теорема 14.1.** Пусть непрерывная  $f$  либо неотрицательна, либо суммируема на  $[a, b)$ , тогда

$$\int_{[a, b)} f d\lambda = \int_a^{\rightarrow b} f.$$

*Доказательство.* Рассмотрим

$$F(x) = \int_{[a, x]} f.$$

Понятно, что<sup>5</sup>

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_a^{\rightarrow b} f,$$

потому что мы уже доказали, что интегралы по отрезку от непрерывной функции по Лебегу и по Риману совпадают.

Нужно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_{[a, b)} f.$$

Если  $f$  суммируема, то это следует из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (и существование предела оказывается совсем очевидным).

Рассмотрим случай, когда  $f$  неотрицательна, но не суммируема. Мы знаем, что интеграл Лебега от неё по  $[a, b)$  равен  $+\infty$ , и нужно лишь доказать, что предел  $F(x)$  существует и не может быть конечен. Существует он потому, что  $F(x)$  будет функцией возрастающей. Конечным же он быть не может, потому что это противоречило бы теореме Леви, что сейчас и покажем.

Возьмём последовательность точек  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  из  $[a, b)$ , сходящуюся к  $b$ . Заметим, что

$$\lim \int_{[a, x_n]} f d\lambda = \lim \int_{[a, b)} f \mathbb{1}_{[a, x_n]} d\lambda.$$

Функции  $f \mathbb{1}_{[a, x_n]}$  образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к  $f$ , поэтому по теореме Леви этот предел будет равен как раз  $+\infty$ .  $\square$

<sup>5</sup>Если этот предел существует.

**Пример 14.1.** Условно сходящийся интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

не представим в виде интеграла по мере, потому что для этой функции этот интеграл просто не определён:  $f_+$  и  $f_-$  одновременно не являются суммируемыми, что плохо.

## Билет 15: Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью

**Определение 15.1.** Пусть  $X$  – множество,  $\mathcal{A} = 2^X$  и есть не более чем счётные множества  $\{a_i\} \in X$  и  $\{m_i\} \in \mathbb{R}$ . Тогда дискретная мера задаётся, как

$$\mu(E) = \sum_i m_i \delta_{a_i}(E).$$

**Лемма 15.1.** Интеграл от любой (измеримой) функции по множеству  $E$  нулевой меры равен нулю.

*Доказательство.* Для начала можно заметить, что для простых функций это точно так. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_E \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^p a_k \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{E_k \cap E}}_{=0} = 0.$$

Но тогда понятно, что для неотрицательных функций это тоже будет верно, потому что супремум нулей ноль. Ещё более очевидно, что для произвольных измеримых функций ничего не изменится.  $\square$

**Лемма 15.2.** Интеграл от измеримой функции  $f$  по множеству  $a$  равен  $f(a)\mu(\{a\})$ .

*Доказательство.*

$$\int_{\{a\}} f = \int_X f \mathbb{1}_{\{a\}} = \int_X f(a) \mathbb{1}_{\{a\}} = f(a) \int_X \mathbb{1}_{\{a\}} = f(a) \mu(\{a\}).$$

$\square$

**Теорема 15.1.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  либо неотрицательна, либо суммируема относительно дискретной меры. Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_k f(a_k) m_k.$$

*Доказательство.* Во-первых понятно, что относительно дискретной меры все функции измеримы. Во-вторых, если  $E = X \setminus \{a_k\}$ , можно записать

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \sum_k \int_{\{a_k\}} f d\mu = \sum_k f(a_k) m_k.$$

Неотрицательность или суммируемость использовалась для счётной аддитивности.  $\square$

**Утверждение 15.1.** Для дискретной меры суммируемость функции равносильна абсолютной сходимости ряда, записанного в предыдущей теореме.

*Доказательство.* Суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. Модуль же функция неотрицательная, для него выполняется предыдущая теорема, и интеграл от него равен сумме из модулей. Значит, и их сходимости равносильны.  $\square$

**Пример 15.1.** Если, например, взять  $X = \mathbb{N}$ ,  $a_k = k$  и  $m_k = 1$ , то мера будет обозначать просто сумму значений функции в точках. Функция из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{R}$  – ряд, а суммируемость – абсолютная сходимость.

**Определение 15.2.** Пусть  $X$  – пространство с мерой  $\mu$ , и есть измеримая неотрицательная функция  $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда можно ввести меру

$$\nu(E) = \int_E \rho d\mu.$$

**Утверждение 15.2.**  $\nu$  и правда мера.

*Доказательство.* Первая аксиома очевидна, а вторая следует из теоремы о счётной аддитивности интеграла – ведь наша  $\rho$  неотрицательна.  $\square$

**Теорема 15.2.** Пусть  $f$  измерима на  $X$  и либо неотрицательна, либо суммируема относительно  $\nu$ . Тогда

$$\int_X f d\nu = \int_X f \rho d\mu.$$

*Доказательство.*

1. Пусть сначала  $f$  – простая:

$$f = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_X f d\nu = \sum_{k=1}^p a_k \nu(E_k) = \sum_{k=1}^p a_k \int_{E_k} \rho d\mu = \sum_{k=1}^p a_k \int_X \mathbb{1}_{E_k} \rho d\mu = \int_X f \rho d\mu.$$

2. Если  $f$  – измеримая неотрицательная, можно выделить неубывающую неотрицательную последовательность простых, сходящуюся к ней. От умножения на  $g$  она этих свойств не потеряет, поэтому равенство благополучно перенесётся по теореме Леви.

3. Ну и для произвольной суммируемой нужно просто написать.

$\square$

**Определение 15.3.**  $\rho$  называют *плотностью* меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

**Пример 15.2.** Например, мера Коши с

$$\rho = \frac{1}{1+x^2}.$$

Билет 16: Интеграл по мере Лебега-Стильетса. Интеграл по распределению.

## 16.1 Интеграл по мере Лебега-Стильетса.

**Определение 16.1.** Пусть  $I$  – интервал на прямой,  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  – возрастающая, непрерывная слева ( $F(x) = F(x-0)$ ) функция. Введём функцию

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Она счётно-аддитивна на  $\text{Cell}_1$ <sup>6</sup> Стандартное продолжение этой функции на  $\sigma$ -алгебру называется *мерой Лебега-Стильетса*.

<sup>6</sup>Кажется, это делается примерно так же, как с обычным объёмом. Но вообще там тоже было не очень строго, да и как-то грустно это.

**Утверждение 16.1.** Все борелевские множества измеримы по Лебегу-Стилтьесу.

*Доказательство.* Рассуждение одинаково для всех мер, распространённых с ячеек.  $\square$

**Свойство 16.1.** Пусть  $\Delta = [a, b]$ . Тогда  $\mu(\Delta) = F(b+0) - F(a)$ .

*Доказательство.* Нужно рассмотреть сходящуюся к отрезку справа последовательность ячеек.  $\square$

**Свойство 16.2.**  $\mu(\{a\}) = f(a+0) - f(a) = f(a+0) - f(a-0) = \Delta f_a$ .

**Свойство 16.3.**  $\mu((a, b)) = f(b) - f(a+0)$ .

**Утверждение 16.2.** Любая мера, определённая на борелевских множествах, есть мера Лебега-Стилтьеса для некоторой  $F$ .

*Доказательство.* Это выглядит довольно логичным, но на паре доказательства не было.  $\square$

**Утверждение 16.3.** Если  $F$  — гладкая на  $I$ , и  $\Delta \subset I$  — ячейка, то

$$\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F' d\lambda.$$

*Доказательство.* Очевидно.  $\square$

**Утверждение 16.4.** Это верно не только для ячеек, но и для множеств произвольной формы. На самом деле, в такой ситуации мера по сути задаётся плотностью  $F'$ .

**Теорема 16.1.** Пусть  $F$  — кусочно-гладкая (и обладает остальным, чтобы задать меру) на  $I$ , т.е. найдутся  $c_i \in I$  такие, что  $F$  гладкая на  $(c_i, c_{i+1})$ . Пусть  $f$  измерима (относительно борелевской алгебры  $\mathcal{B}$ ) и либо суммируема относительно  $\mu_F$ , либо неотрицательна. Тогда

$$\int_I f d\mu_F = \sum \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) F'(x) dx + \sum f(c_i) \Delta_{c_i}.$$

*Доказательство.* Надо  $I$  разбить на точки  $c_i$  и промежутки между ними. Интеграл по точкам выражается через скачки, потому что мы знаем, что интеграл в точке равен произведению значения  $f$  на меру точки. Ну а на интервалах мера по сути задаётся плотностью: про такое мы уже всё знаем.  $\square$

## 16.2 Интеграл по образу меры

**Определение 16.2.** Пусть  $X$  — пространство с мерой, и есть  $f: X \rightarrow Y$ . Назовём  $E \subset Y$  измеримым относительно  $f$ , если  $f^{-1}(E)$  измеримо.

**Утверждение 16.5.** Множество измеримых относительно  $f$  множеств образует  $\sigma$ -алгебру.

*Доказательство.* Нужно просто проверить это.  $\square$

**Определение 16.3.** Введём меру  $\nu$  на  $Y$  следующим образом:  $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ .

**Утверждение 16.6.**  $\nu$  действительно мера.

*Доказательство.* Просто проверить.  $\square$

**Теорема 16.2.** Пусть  $g$  — измеримая относительно заданной  $f$   $\sigma$ -алгебры функция  $Y \rightarrow \mathbb{R}$ , причём либо неотрицательная, либо суммируемая относительно  $\nu$ . Тогда

$$\int_Y g d\nu = \int_X g \circ f d\mu.$$

*Доказательство.*

1. Для простых функций проверяется легко: там будет сумма коэффициентов, умноженных на меры множеств, вот эти меры и нужно раскрыть.
2. Если  $g$  неотрицательна, то можно взять неубывающую последовательность неотрицательных простых, сходящуюся к  $g$ . Т.к. композиция с  $g$  этого свойства не испортит, дальше просто теорема Леви.
3. Для суммируемых тоже как обычно: нужно просто написать  $g_{\pm}$ .

□

### 16.3 Интеграл по распределению.

**Определение 16.4.** Распределением измеримой функции  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu(X) < \infty$  называется

$$F(t) = \mu(X[f < t]).$$

**Свойство 16.4.**  $F$  не убывает.

*Доказательство.* Это следует из того, что мера подмножества не превосходит меры множества. □

**Свойство 16.5.**  $F$  непрерывна слева.

*Доказательство.* Следует из непрерывности меры снизу. □

**Теорема 16.3.** Пусть  $\mu(X) < \infty$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  измерима и либо неотрицательна, либо суммируема. Тогда

$$\int_X f d\mu = \int_{\mathbb{R}} t d\mu_F.$$

*Доказательство.* Убедимся, что  $\mu_F = \nu = \mu \circ f^{-1}$ , как в теореме про образ меры. Для ячеек это проверяется тривиально:

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) = \mu(X[f < b]) - \mu(X[f < a]) = \mu(X[a \leq f < b]) = \mu(f^{-1}([a, b))).$$

Отсюда это вроде бы следует даже для борелевских множеств.

Но тогда

$$\int_{\mathbb{R}} t d\mu_F = \int_X f d\mu.$$

Конечность меры  $X$  нужна, чтобы  $F$  гарантированно существовала. В принципе, такое бывает и без неё. □

## Билет 17: Интеграл Эйлера-Пуассона

**Теорема 17.1.**

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 = \pi.$$

*Доказательство.* Найдём распределение функции  $f(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$ .

$$-e^{-(x^2+y^2)} < t \Rightarrow x^2 + y^2 < -\ln(-t) \Rightarrow F(t) = \mu(\mathbb{R}^2[x^2 + y^2 < -\ln(-t)]) = -\pi \ln(-t).$$

На самом деле, если внимательно следить за граничными значениями, то

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ -\pi \ln(-t), & -1 < t \leq 0, \\ +\infty, & t > 0. \end{cases}$$

Теперь мы по сути применяем слегка искажённые версии предыдущих теорем, потому что  $\mu(X)$  не конечна, поэтому и  $F$  определена не на всём  $\mathbb{R}$ , а только до нуля. Но, кажется, это не сильно изменит их доказательств, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{-1}^0 t(-\pi \ln t)' dt = -\pi.$$

Значит, искомый интеграл равен  $\pi$ . □

## Билет 18: Вероятностный смысл меры и интеграла.

Собственно, довольно легко строится соответствие между понятиями теории меры и теории вероятностей.

1. Множество  $X$  – множество элементарных событий.
2.  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  – множество событий, её элемент – событие.
3. Мера  $\mu$  – вероятность (но только  $\mu(X) = 1$ ).
4. Измеримая функция  $f$  – случайная величина.
5. Распределение функции  $F$  – распределение случайной величины.
6.  $\int_X f d\mu$  – матожидание случайной величины.

**Пример 18.1.** Самый простой пример – кубик. Для этого надо рассмотреть  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  с понятием какой мерой.

**Пример 18.2** (Задача Бюффона). На плоскости есть бесконечно много параллельных прямых с расстоянием  $d$  между соседними, и на неё кидают отрезок длины  $a$  случайным образом. Какова вероятность, что он пересечёт одну из прямых?

Пусть  $h$  – расстояние от нижней точки отрезка до ближайшей (снизу) линии, а  $\alpha$  – угол от горизонтали. Этими двумя координатами положение отрезка задаётся однозначно (с учётом симметрии задачи,) причём все точки равноправны между собой.

Поэтому естественно сказать, что  $X = [0, d) \times [0, \pi)$  – множество исходов,  $\mathcal{A}$  – множество измеримых по Лебегу подмножеств  $X$ , а мера  $P(A) = C\lambda_2(A)$ . Поскольку  $P(X) = 1$ ,

$$C\lambda_2(X) = 1 \Rightarrow C \cdot \pi \cdot d = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi d}.$$

При этом множество исходов, когда пересечение происходит, задаётся неравенством

$$a \sin \alpha \geq d - h.$$

Отсюда

$$h \geq d - a \sin \alpha.$$

Площадь соответствующей области можно найти, как

$$\int_0^\pi a \sin \alpha d\alpha = 2a \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi d} \cdot 2a = \frac{2a}{\pi d}.$$

## Билет 19: Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика).

### 19.1 «Почти всюду» и вариации теоремы Леви.

**Определение 19.1.** Пусть  $(X, \mu)$  – пространство с мерой, и задана функция  $P: X \rightarrow \{0, 1\}$  (утверждение, которое либо правдиво, либо ложно). Говорят, что  $P$  верно почти всюду, если  $\mu(X[P = 0]) = 0$ .



**Лемма 19.1.** Если  $f(x) = 0$  почти всюду, то

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

*Доказательство.* Можно заметить, что такая функция автоматически измерима. Ну а дальше просто разбить на два множества и записать интегралы.  $\square$

**Лемма 19.2.** Пусть  $f$  и  $g$  суммируемы, причём  $f = g$  почти везде. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

*Доказательство.* Интеграл разности будет равен нулю по предыдущей лемме.  $\square$

**Лемма 19.3** (Теорема Леви для рядов). Пусть  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  – последовательность неотрицательных измеримых функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Тогда

1.

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty u_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X u_n \, d\mu.$$

2. Если эти два равных числа конечны, то ряд сходится почти всюду<sup>7</sup>.

*Доказательство.*

1. Пусть  $S_n$  – частичная сумма ряда, и  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ <sup>8</sup>. По теореме Леви тогда

$$\int S = \lim \int S_n.$$

Ну а дальше очевидно.

2. Пусть

$$\int_X S \, d\mu < \infty.$$

Рассмотрим  $E$  – множество точек, где ряд расходится. Выберем на  $E$  неубывающую неотрицательную последовательность простых функций  $g_n$ , сходящуюся к  $S$ :  $g_n(x) = n$ . По теореме Леви

$$\lim \int g_n = \int S.$$

Но

$$\lim \int g_n = \lim n\mu(E) = \infty,$$

если  $\mu(E) \neq 0$ . А такого не может быть, потому что в этой ситуации интеграл по  $X$  будет тоже  $\infty$ , что не так.  $\square$

**Лемма 19.4** (Теорема Леви «вверх ногами»). Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  – невозрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций из  $X$  в  $\mathbb{R}$ . Пусть  $f_1$  суммируема. Тогда

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $g_n = f_1 - f_n \geq 0$ . При этом  $g_n$  возрастают и неотрицательны. Ну тогда по теореме Леви

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int f_1 - \int f.$$

Т.к. все функции суммируемы, можно всё перенести, и получится то, что надо.  $\square$

<sup>7</sup>А разве левое выражение определено, если ряд хоть где-то расходится? Ну то есть вроде можно определить, но это же странно, честно говоря.

<sup>8</sup>Почему конечен?

## 19.2 Кратные интегралы

**Определение 19.2.** Введём пару обозначений. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . Возьмём какой-нибудь  $x \in \mathbb{R}^m$ . Тогда проекция сечения  $E$  на  $\mathbb{R}^n$  «вертикальной линией» записывается, как

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\},$$

проекция множества  $E$  на  $\mathbb{R}^m$  обозначается, как

$$\pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \emptyset\},$$

и проекция сечения  $E$  на  $\mathbb{R}^m$  «горизонтальной линией» записывается, как

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}.$$

**Теорема 19.1** (Принцип Кавальери). Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  измеримо. Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m.$$

*Доказательство.*

1. Для ячеек проверяется в лоб.
2. Если

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где  $E_k$  – ячейки, то

$$E_x = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x,$$

а дальше используется первый пункт, аддитивность меры и теорема Леви для рядов.

В таком виде можно представить любой элемент  $\text{Cell}_{n+m}$ . Ещё мы знаем, что открытое множество можно представить в виде счётного объединения ячеек, а значит можно и в виде дизъюнктного<sup>9</sup>

3. Пусть  $E$  – множество типа  $G_\delta$  – счётное пересечение вложенных открытых множеств, мера первого из которых конечна<sup>10</sup>. Здесь должна работать «перевёрнутая» теорема Леви.
4. Дальше вообще плохо понятно. Но вроде можно приблизить ограниченное  $E$  ограниченным  $G_\delta$  так, чтобы разность  $M$  имела меру ноль. Утверждается, что  $M_x$  измеримы почти всегда, и их мера равна нулю, поэтому теорема верна и для разности, и для приближения, а потому и для  $E$ .
5. Если множество не ограничено, нужно представить его, как дизъюнктное объединение ограниченных. А потом повторить рассуждение про дизъюнктное объединение ячеек.

□

**Теорема 19.2** (Мера подграфика). Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая и неотрицательная, а

$$\Gamma_-^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Тогда

1.  $\Gamma_-^f$  измерим.
- 2.

$$\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n.$$

<sup>9</sup>Хотя мы этого не доказывали, конечно...

<sup>10</sup>Вроде это можно сделать не умаляя общности. Кажется. По крайней мере для ограниченных множеств типа  $G_\delta$ , можно, например, объединения пересекать.

*Доказательство.*

1. Если функция – индикатор измеримого множества, то вроде бы должно быть очевидно, хотя вроде не так чтобы, ибо почему  $\lambda_n(E) = \lambda_{n+1}(E \times [0, 1])$ ?
2. Переход к простой функции вроде бы и правда очевиден.
3. К произвольным измеримым как обычно, по теореме Леви.

□

## Билет 20: Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тоннели и Фубини).

**Теорема 20.1.** (Тоннели) Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая неотрицательная функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x),$$

<sup>11</sup>.

*Доказательство.*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \lambda_{m+n+1} \Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} (\Gamma_-^f)_x d\lambda_m(x).$$

Введём функцию  $\psi_x(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что  $\psi_x(y) = f(x, y)$ . Тогда  $(\Gamma_-^f)_x = \Gamma_-^{\psi_x}$ , поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} (\Gamma_-^f)_x d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} \Gamma_-^{\psi_x} d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x).$$

□

**Теорема 20.2.** (Фубини) Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  – суммируемая функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x),$$

*Доказательство.* Простое следствие из предыдущей.

□

## Билет 21: Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании

**Утверждение 21.1.** Пусть  $T$  – параллельный перенос в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда если  $E$  измеримо по Лебегу, то и  $T(E)$  тоже, причём  $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$ .

*Доказательство.* Параллельный перенос переводит ячейки в ячейки с сохранением меры, поэтому он сохраняет внешнюю меру, а значит, он сохраняет и хорошо разбивающие множества. Поэтому он переводит измеримые в измеримые, сохраняя объём.

□

**Теорема 21.1.** Пусть  $L$  – линейное отображение. Тогда если  $E$  измеримо, то  $L(E)$  тоже измеримо.

<sup>11</sup> Не знаю пока, что делать с измеримостями.

*Почти доказательство.* Если определитель равен нулю, то это очевидно, потому что подмножество линейного пространства меньшей размерности – множество меры ноль. Это следует из полноты меры.

Если определитель не равен нулю, то  $L$  – гомеоморфизм, поэтому, в частности, переводит открытые множества в открытые и множества типа  $G_\delta$  в множества типа  $G_\delta$ .

Посмотрим, что будет с  $L(E)$ , если  $\lambda E = 0$ . Раз мера  $E$  равна нулю, можно покрыть  $E$  конечным набором ячеек  $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$  таким, что сумма их мер меньше  $\varepsilon^{12}$ . Понятно, что

$$L(E) \subset \bigcup_{k=1}^N L(\Delta_k).$$

При этом

$$\lambda(L(E)) \leq \sum_{k=1}^N \lambda(L(\Delta_k))$$

Рассмотрим какую-нибудь ячейку  $\Delta$  со стороной  $\delta$ . Тогда  $\lambda(\Delta) = \delta^n$ . Пусть  $x, y \in \Delta$ . Тогда

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L(x - y)\| \leq \|L\| \cdot \|x - y\| \leq \|L\| \delta \sqrt{n}.$$

Образ  $\Delta$  точно можно вписать в ячейку с такой стороной, поэтому

$$\lambda(L(\Delta)) \leq \|L\|^n n^{\frac{n}{2}} \lambda(\Delta).$$

Это значит, что образ множества  $E$  тоже получится ограничить ячейками, поэтому мера образа тоже ноль.

Любое измеримое множество можно представить, как  $A \setminus B$ , где  $A$  класса  $G_\delta$ , а  $B$  – меры ноль. Но это значит, что образ будет представлен так же, что даёт нам доказательство.  $\square$

**Теорема 21.2.** Пусть  $L$  – линейное отображение. Тогда если  $E$  измеримо, то  $\lambda(L(E)) = C\lambda(E)$ .

*Доказательство.* Для начала можно положить  $C = \lambda(L([0, 1]^n))$ . Теперь хочется как-то доказать, что любая другая ячейка будет преобразовываться так же.

Идея доказательства этого заключается в том, чтобы сначала доказать это для ячеек вида  $[0, k]^n$  и  $[0, \frac{1}{k}]^n$ , либо разбивая ячейки на  $[0, 1]^n$ , либо наоборот, пользуясь доказанным фактом про параллельный перенос. После же ячейку  $[0, t]$  можно представить, как счётное объединение подходящих ячеек.  $\square$

**Лемма 21.1.** Для отображения  $L(x) = ax$  константа  $C = a^n$ .

*Доказательство.* Ну, тут ведь ячейка переходит в ячейку, объём можно просто посчитать.  $\square$

**Лемма 21.2.** Для отображения  $L$  с диагональной матрицей  $C$  равна модулю произведения диагональных членов.

*Доказательство.* Тут тоже можно просто посчитать объём ячейки.  $\square$

**Лемма 21.3.** Для ортогонального  $L$  константа  $C$  равна 1.

*Доказательство.* Оно переводит единичный шар в себя.  $\square$

**Теорема 21.3.** Для произвольного  $L$  верно, что  $C = |\det L|$ .

*Доказательство.* Можно представить  $L$  как  $U_1 \circ D \circ U_2$ , где  $U_1$  и  $U_2$  ортогональные, а  $D$  – диагональное. Дальше очевидно.  $\square$

<sup>12</sup>Это следует из того, что набор точно можно сделать дизъюнктым, например.

## Билет 22: Преобразование меры Лебега при гладком отображении

**Теорема 22.1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  –  $C^1$ -гладкая инъекция. Тогда

$$\forall \text{ измеримого } E \subset G \quad \lambda(F(E)) = \int_E |J_F(x)| \, dx,$$

где  $J_F(x)$  – якобиан  $F$  в точке  $x$ .

*Идея доказательства.* Докажем только для  $E = \Delta$  – ячейки. Рассмотрим разбиение

$$\Delta = \bigsqcup_k \Delta_k.$$

Пусть  $x_k$  – угол  $k$ -й ячейки.

$$F(x) = \underbrace{F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)}_{\Phi(x)} + o(x - x_k).$$

$\Phi(x) = y_k + dF(x_k; x) = y_k + L(x)$ . Тогда

$$\lambda(L(\Delta)) = \sum_k \lambda(L(\Delta_k)) \approx \sum_k |\det dF(x_k; x)| \lambda(\Delta_k) = \sum_k J_F(x_k) \lambda(\Delta_k).$$

Измельчая разбиение, получим утверждение теоремы. □

## Билет 23: Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты).

**Теорема 23.1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  –  $C^1$ -гладкая инъекция,  $E \in F(G)$  – измеримое множество. Пусть  $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  – измеримая и либо неотрицательная, либо суммируемая функция. Тогда

$$\int_E f = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$

*Доказательство.*

1. Пусть

$$f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{B_k}.$$

Тогда

$$f \circ F = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)}.$$

При этом

$$\int_E f = \sum_{k=1}^p c_k \lambda(B_k) = \sum_{k=1}^p c_k \int_{F^{-1}(B_k)} |J_F| = \sum_{k=1}^p c_k \int_{F^{-1}(B_k)} |J_F| \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)} = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$

2. Для неотрицательных – теорема Леви, как всегда, для суммируемых расписать  $f_{\pm}$ . □

**Пример 23.1.** Полярные координаты задаются уравнениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

По сути, у нас есть гладкая инъекция  $F: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Можно найти якобиан:

$$J_F = y'_\varphi x'_r - x'_\varphi y'_r = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Поэтому если  $E$  – измеримое подмножество  $\mathbb{R}^2$ , то

$$\int_E f = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot r.$$

Для сферических координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

якобиан будет равен  $r^2 \cos^2 \psi$ .

## Билет 24: Теорема Фату

**Определение 24.1.** Пусть на  $X$  задана мера  $\mu$ . Тогда

- Говорят, что последовательность функций  $f_n \rightarrow f$  почти везде по  $\mu$ , если  $\exists N \subset X$ ,  $\mu(N) = 0$  такое, что  $\forall x \in X \setminus N$   $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .
- Говорят, что  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  сходится по мере  $\mu$ , если

$$\forall \sigma > 0 \quad \mu(X[|f_n - f| > \sigma]) \rightarrow 0.$$

Это самая слабая сходимость.

**Теорема 24.1.** Сходимость почти везде влечёт сходимость по мере.

**Теорема 24.2** (Рисс). Если  $f_n \xrightarrow{\mu} f$ , то из  $\{f_n\}$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к  $f$  почти всюду.

**Теорема 24.3.** Пусть  $f_n \rightrightarrows f$  на  $X$ , и  $\mu(X) < \infty$ <sup>13</sup>. Тогда

$$\lim \int_X f_n = \int_X f.$$

*Доказательство.* Нужно просто оценить разность. □

**Теорема 24.4** (Фату). Пусть  $\{f_n\}$  – неубывающая последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся<sup>14</sup> к  $f$ . Тогда

$$\int_X \lim f_n \leq \lim \int_X f_n.$$

*Доказательство.*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\inf_{m \geq n} f_m(x)}_{g_n(x)} = \sup_n g_n(x).$$

<sup>13</sup>Кажется, ещё нужно, чтобы они были суммируемы.

<sup>14</sup>Здесь достаточно сходимости почти всюду, кажется. Но я не уверен.

$g_n$  образуют неубывающую неотрицательную последовательность измеримых функций, поэтому к ним применима теорема Леви. Поэтому

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int \underline{\lim} f_n.$$

Очевидно, что  $g_n \leq f_n$ , поэтому

$$\int g_n \leq \int f_n \Rightarrow \underline{\lim} \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы.  $\square$

## Билет 25: Теорема Лебега об ограниченной сходимости.

**Теорема 25.1.** Пусть  $X$  – пространство с мерой  $\mu$ ,  $f_n$  измеримы и  $f_n \rightarrow f$  почти всюду. Пусть существует  $\varphi \in L: \forall n |f_n| \leq \varphi$  – выполняется условие Лебега  $\mathcal{L}$ . Тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

*Доказательство.* Из условия  $-\varphi \leq f_n \leq \varphi \Rightarrow \varphi + f_n \geq 0$  и  $\varphi - f_n \geq 0$ . Для этих последовательностей выполняется теорема Фату:

$$\int \varphi + f \leq \underline{\lim} \int \varphi + f_n \Rightarrow \int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

и

$$\int \varphi - f \leq \underline{\lim} \int \varphi - f_n \Rightarrow \int f \geq \overline{\lim} \int f_n,$$

откуда

$$\int f = \lim \int f_n.$$

$\square$

**Следствие 1.** Пусть  $X$  – пространство с мерой  $\mu$ ,  $f_n$  измеримы и  $f_t \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f$  почти всюду, где  $t$  – параметр, возможно многомерный. Пусть существует  $\varphi \in L: \forall t \in V(t_0) |f_t| \leq \varphi$  – выполняется локальное условие Лебега  $\mathcal{L}_{loc}$  в окрестности  $t_0$ . Тогда

$$\lim \int f_t = \int f.$$

*Доказательство.* Если переформулировать на языке последовательностей.  $\square$

**Следствие 2.** В ситуации предыдущей теоремы, если  $f_t$  непрерывна в  $t_0$ , то функция

$$\int_X f_t$$

непрерывна в  $t_0$ .

## Билет 26: Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Формулировка признаков Больцано-Коши, Дирихле и Абеля.

Здесь мы рассматриваем несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x, t) dx.$$

Пусть  $I$  сходится при  $t \in T$ . Естественно, здесь и далее предполагается, что все интегралы определены в том смысле, что функции измеримы, а ещё что все интегралы до  $A < b$  конечны.

**Определение 26.1.** Интеграл  $I$  называют *равномерно сходящимся* на  $T$ , если

$$I^A(t) = \int_a^A f(x, t) dx \Rightarrow I(t),$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall t \in T |b - A| < \delta \Rightarrow |I^A(t) - I(t)| < \varepsilon.$$

**Теорема 26.1** (Больцано-Коши). Равномерная сходимость на  $T$  равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \in (a, b): \forall A_1, A_2 \in (A_0, b) \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 26.2** (Дирихле). Пусть

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t)g(x, t) dx,$$

причём

1.

$$f(x, t) \Rightarrow 0, \quad x \rightarrow b-0$$

на  $T$ , при этом монотонно убывая по  $x$ , и

2.

$$G(x, t) = \int_a^x g(\xi, t) d\xi; \quad \exists M: |G(x, t)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in T.$$

Тогда интеграл  $I$  равномерно сходится на  $T$ .

**Теорема 26.3** (Абея). Пусть

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t)g(x, t) dx,$$

причём

1.  $f$  убывает по  $x \forall t$  и  $f$  равномерно ограничена:  $|f(x, t)| \leq M \quad \forall x \forall t$ .

2.

$$\int_a^{\rightarrow b} g(x, t) dx$$

равномерно сходится на  $T$ .

Тогда  $I$  равномерно сходится на  $T$ .

**Билет 27:** Формулировки основных теорем о несобственном интеграле с параметром.

Рассматриваем тот же интеграл с параметром.



## 27.1 Суммируемый случай.

$$\forall t \int_a^{\rightarrow b} |f(x, t)| dx < +\infty.$$

**Теорема 27.1.** Пусть  $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f(x, t_0)$  для п.в.  $x \in [a, b)$ , и  $f$  удовлетворяет локальному условию Лебега в  $t_0$ . Тогда  $I(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} I(t_0)$ .

**Теорема 27.2.** Пусть  $f$  дифференцируема по  $t$  для п.в.  $x \in [a, b)$ , и  $f'_t$  удовлетворяет локальному условию Лебега в  $t_0$ . Тогда

$$I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

**Теорема 27.3.** Пусть  $D$  – область изменения  $t$ , и  $f \in L([a, b) \times D)$ . Тогда

$$\int_D I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_D f(x, t) dt.$$

## 27.2 Случай равномерной сходимости

**Теорема 27.4.** Пусть  $f(x, t)$  непрерывна по  $t$  в точке  $t_0$  для почти всех  $x \in [a, b)$ , и интеграл  $I$  сходится равномерно на некоторой окрестности  $t_0$ . Тогда  $I$  непрерывен в  $t_0$ .

**Теорема 27.5.** Пусть  $f'_t$  существует для почти всех  $x \in [a, b)$  и

1.

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx \text{ равномерно сходится на } T, \text{ где } T \text{ – интервал.}$$

2.

$$\int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t) dx \text{ равномерно сходится в окрестности } t_0.$$

Тогда существует

$$I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t_0) dx.$$

**Теорема 27.6.** Пусть  $f \in C([a, b) \times [c, d])$ , и пусть  $I$  равномерно сходится на  $[c, d]$ . Тогда

$$\int_c^d I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_c^d f(x, t) dt.$$

## Билет 28: $\Gamma$ -функция Эйлера. Её свойства.

**Определение 28.1.**

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \text{ – гамма-функция Эйлера.}$$

**Утверждение 28.1.** Гамма-функция определена при  $t > 0$ .

*Доказательство.* Заметим, что подинтегральное выражение неотрицательно. Сначала рассмотрим сходимость интеграла

$$\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx.$$

$x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1}$  вблизи нуля, поэтому он сходится при  $t > 0$ .

Теперь сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Сравним со сходящимся:

$$\frac{x^{t-1} e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{t+1}}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Это значит, что наш интеграл сходится на  $\mathbb{R}$ .

Поэтому в целом функция определена при  $t > 0$ . □

**Свойство 28.1.**  $\Gamma(1) = 1$ .

**Свойство 28.2.**  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

**Свойство 28.3.**  $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ .

**Свойство 28.4.**  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Свойство 28.5.**  $\Gamma$  выпукла.

*Доказательство.*

1. Докажем сначала, что  $\Gamma \in C^\infty([0, +\infty))$ . Рассмотрим производные подинтегрального выражения:

$$f_t^{(n)}(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} (x^{t-1} e^{-x}) = x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}.$$

Чтобы использовать теоремы о несобственных интегралах, хочется  $\forall n \geq 0$  и  $\forall t_0 \in [0, +\infty)$  найти функцию  $\varphi_n^{t_0} \in L([0, +\infty))$  такую, что

$$\exists V(t_0) = (t_1, t_2): \forall t \in V(t_0) \forall x \in [0, \infty) |f_t^{(n)}(x, t)| \leq \varphi_n^{t_0}(x).$$

Сначала сделаем эту оценку для интеграла от 0 до 1:

$$x^{t-1} < x^{t_1-1}, \ln^n(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{-p}) \forall p > 0 \Rightarrow |\ln^n(x)| \leq \frac{C}{x^{\frac{t_1}{2}}}.$$

Отсюда вблизи нуля

$$|x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}| \leq \frac{C}{x^{1-\frac{t_1}{2}}} \in L.$$

Теперь интеграл от 0 до бесконечности.

$$\frac{x^{t-1} \ln^n(x)}{e^{\frac{x}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x^{t-1} \ln^n(x) < C e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow |x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}| \leq C e^{-\frac{x}{2}} \in L.$$

Функции найдены, поэтому по теоремам о несобственном интеграле можно вносить производную под знак интеграла.

- 2.

$$\Gamma''(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \ln^2(x) e^{-x} dx > 0 \Rightarrow \Gamma \text{ выпукла.}$$

□

**Свойство 28.6.**  $\Gamma(t) \sim \frac{1}{t}$  вблизи нуля.

**Свойство 28.7.**  $\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi} \sqrt{t} t^t e^{-t}$  вблизи бесконечности.

**Свойство 28.8.**  $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$ .

Билет 29:  $B$ -функция и её сведение к  $\Gamma$ -функции.

**Определение 29.1.**

$$B(y, z) = \int_0^1 x^{y-1} (1-x)^{z-1} dx - \text{бета-функция.}$$

Интеграл сходится при  $y, z > 0$ .

**Утверждение 29.1.**

$$B(y, z) = B(z, y).$$

**Утверждение 29.2.**

$$B(y, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}.$$

*Доказательство.* Долго писать, посмотрите в конспекте, пожалуйста: тут просто выкладки. □

Билет 30: Объём  $n$ -мерного шара.

**Утверждение 30.1.** Пусть объём единичного  $n$ -мерного шара равен  $\alpha_n$ . Тогда объём  $n$ -мерного шара радиуса  $R$  равен  $R^n \alpha_n$ .

*Доказательство.* Следует из теоремы о поведении меры Лебега при растяжении в  $R$  раз. □

**Теорема 30.1.**

$$\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

*Доказательство.*  $n$ -мерный шар задаётся уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Если зафиксировать одну из координат, получится уравнение, задающее проекцию сечения соответствующей плоскостью:

$$x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 - x_1^2 = r(x_1)^2.$$

Согласно принципу Кавальери

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 r(x_1)^{n-1} \alpha_{n-1} dx_1 = \alpha_{n-1} \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

Вычислим этот интеграл:

$$\int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \Big|_{x_1^2=t}^{x_1=\frac{dt}{2\sqrt{t}}} = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1} dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Отсюда

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Теперь искомую формулу получить уже несложно. □

## **Глава 2 Дифференциальная геометрия**