Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов
записал со слов лектора А. А. Лодкина

2 июня 2017 г.

Глава 1 Теория меры

Билет 1: Алгебры и σ-алгебры множеств.

Определение 1.1. Пусть X – некоторое множество. Тогда $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй,* если выполняются следующие условия:

1. $\varnothing,\, X \in \mathcal{A}$,
2. $A,\, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\, A \cap B,\, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, $|\mathcal{A}| < \infty$. Тогда $|\mathcal{A}| = 2^n$ для некоторого n.

Доказательство. Так как $X \in \mathcal{A}$, каждый элемент X содержится как минимум в одном элементе $\mathcal{A}$. Пусть $A(x)$ – пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$, содержащих x. Понятно, что $A(x)$ непусто, т.к. $x \in A(x)$. Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили $A(x)$, как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение: $A(x)$ – такое множество, что если $x \in B \in \mathcal{A}$, то $A(x) \subset B$ [1].

2. Введём отношение на X: пусть $x \sim y$, если $A(x) = A(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$.

   Пусть $y \in A(x)$. Предположим, что $A(y) \neq A(x)$. Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо $A(y)$ содержит элемент, которого нет в $A(x)$, либо наоборот. Пусть первое. Тогда $B = A(x) \cap A(y)$ – элемент $\mathcal{A}$, который содержит y и строго меньше $A(y)$, чего не может быть. Пусть второе. Тогда если $A(y)$ не содержит x, то $A(x) \setminus A(y)$ является элементом $\mathcal{A}$, содержащим x, а если содержит, то снова $A(x) \cap A(y)$ является таким элементом. Причём строго меньшим, чем $A(x)$, что опять ведёт нас к противоречию.

   Пусть $A(x) = A(y)$. Предположим, что $y \notin A(x)$. Но тогда $y \notin A(y)$, что точно ложь.

3. Разобьём X на классы эквивалентности по отношению $\sim$; обозначим множество этих классов $\hat{\mathcal{A}}$. Понятно, что $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$, ведь $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{A}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}$. Докажем, что если $B \cap \hat{B} \neq \varnothing$, то $B \cap \hat{B} = \hat{B}$.

   Предположим противное: пусть $x \in B \cap \hat{B}$ и $y \in \hat{B} \setminus B$. Из определения отношения эквивалентности понятно, что $\hat{B} = A(x) = A(y)$. Но заметим тогда, что $\hat{B} \setminus B$ – множество из $\mathcal{A}$, содержащее y и строго меньшее $\hat{B}$, чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое $B \in \mathcal{A}$ можно представить, как объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$: просто для каждого $b \in B$ взять $A(b)$ и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$ лежит в A. Т.к. элементы $\hat{\mathcal{A}}$ не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}$ объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами $2^{\hat{\mathcal{A}}}$ и $\mathcal{A}$. Поэтому количество элементов $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

$\square$

Примеры привести не очень сложно, не будем здесь на этом останавливаться.

[1] Заметим, что мы существенно испльзуем конечность $\mathcal{A}$ каждый раз, когда говорим, что $A(x) \in \mathcal{A}$!

Определение 1.2. *σ-алгеброй* называется алгебра, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$. Тогда наименьншая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$, называется *борелевской оболочкой* $\mathcal{E}$ и обозначается $\sigma(\mathcal{E})$. (Ссылаясь на факт, который уже упоминался в упражнении, заметим, что $\sigma(\mathcal{E})$ совпадает с пересечением всех σ-алгебр, содержащих E).

Лемма 1.1. Если $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$, то $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Доказательство. Из определения борелевской оболочки понятно, что

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{E}_1)).$$

При этом понятно, что правая часть равна $\sigma(\mathcal{E}_1)$, чего нам и надо. □

Билет 2: Борелевская σ-алгебра.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{O}_n$ – множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда σ-алгебра $\sigma(\mathcal{O}_n)$ называется *борелевской*.

Определение 2.2. Назовём *n-мерной ячейкой* такое подмножество $\mathbb{R}^n$:

$$n = 1 \Rightarrow \Delta = \begin{cases} [a,\, b),\ [a,\, \infty); \\ (-\infty,\, b),\ (-\infty,\, \infty); \end{cases}$$

$$n > 1 \Rightarrow \Delta = \prod_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

где Δ_i – одномерные ячейки.

Определение 2.3. Назовём *n-мерной алгеброй ячеек* множество

$$\mathsf{Cell}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где Δ_i – ячейки.

Утверждение 2.1. Cell_n – действительно алгебра.

Доказательство. Чтобы сделать, нужно увидеть, что пересечение ячеек – ячейка, а потом представить пересечение объединений, как объединение пересечений. □

Теорема 2.1. $\sigma(\mathsf{Cell}_n) = \sigma(\mathcal{O}_n)$.

Доказательство. Зная последний результат из предыдущего билета, имеем возможность доказывать, что

$$\mathsf{Cell}_n \subset \sigma(\mathcal{O}_n) \text{ и } \mathcal{O}_n \subset \sigma(\mathsf{Cell}_n).$$

Это даст нам утверждение теоремы.

Первое включение очевидно: можно представить любую ячейку, как пересечение вложенных прямоугольников, например. Поэтому и с объединением проблем не будет.

Чтобы доказать второе, рассмотрим сначала ячейки с целыми вершинами, назовём их ячейками первого ранга. Побив каждую из них на 2^n частей (поделив каждую сторону на 2), получим ячейки второго ранга, продолжая процесс – ячейки ранга n. Пусть U – произвольное открытое множество, а U_k– объединение всех ячеек ранга k, пересекающих U.

Рассмотрим x – произвольную точку не из U. Т.к. U открыто, существует такое ε, что

$$B_\varepsilon(x) \cap U = \varnothing.$$

Заметим однако, что если ячейка ранга k, то её сторона равна 2^{1-k}, а значит, диагональ –

$$\sqrt{n}\, 2^{1-k}.$$

Эта последовательность стремится к нулю при k стремящемся к бесконечности, поэтому можно сделать так, что диагональ ячейки станет меньше, чем ε, при всех $k > K$. Из этого будет следовать, что при $k > K$ $x \notin U_k$.

Отсюда ясно, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow U \in \sigma(\mathrm{Cell}_n) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathrm{Cell}_n).$$

□

Утверждение 2.2. Борелевской σ-алгебре принадлежат множества следующих типов:

1. Точки.
2. Открытые, замкнутые.
3. Не более чем счётные.
4. Счётные пересечения открытых множеств – множества типа G_δ.
5. Счётные объединения замкнутых – множества типа F_σ.
6. Счётные объединения множеств типа G_δ – множества типа $G_{\delta\sigma}$.
7. Счётные пересечения множеств типа F_σ – множества типа $F_{\sigma\delta}$.

Билет 3: Мера на алгебре. Примеры мер.

Определение 3.1. Пусть X – множество, $\mathcal{A}$ – алгебра на X. Тогда *мерой* на $\mathcal{A}$ называется отображение μ: $\mathcal{A} \to [0, \infty]$, удовлетворяющее двум свойствам:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Если $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство дизъюнктных[2] множеств из $\mathcal{A}$, то

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{A} = 2^X$, и $a \in X$ – произвольная точка. Введём меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

Проверка аксиом. Первое свойство, конечно, выполняется; чтобы проверить второе, можно увидеть, что в семействе дизъюнктных множеств точка может содержаться лишь в одном из них. □

Такая мера называется *дельта-мерой, атомической мерой* или *мерой Дирака,* обозначается, как δ_a. В физике порой рассматривается (на $\mathbb{R}$), как интеграл от *дельта-функции Дирака* – такой функции, что она равна нулю всюду, кроме a, а интеграл по всей прямой от неё равен 1.

Пример 3.2. В той же ситуации вместо точки a зафиксируем не более, чем счётное множество точек $\{a_k\}$. Меру определим, как

$$\mu(A) = \sum_k m_k \delta_{a_k}(A),$$

где m_k – некторые фиксированные неотрицательные вещественные числа, *веса*. Такая мера называется*молекулярной*.

[2] Попарно непересекающихся друг с другом. Если в объединении участвует семейство дизъюнктных множеств, то будем его обозначать $\sqcup$ вместо $\cup$, забывая упоминать дизъюнктность.

Проверка аксиом. Первая снова тривиальна, вторая следует из счётной аддитивности дельта-меры (на самом деле, тут нужно воспользоваться теоремой о перестановке/группировке членов в абсолютно сходящемся ряде; т.к. всё положительно, никакой условной сходимости тут не бывает, и при перестановке/группировке членов сохраняется как сходимость, так и расходимость). □

Пример 3.3. В той же ситуации пусть
$$\mu(A) = |A|.$$

Билет 4: Свойства меры

Свойство 4.1 (Монотонность)**.** Пусть $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Доказательство.
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$
□

Свойство 4.2. Пусть $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B,\ \mu B < \infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

Доказательство.
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$
Условие $\mu(B) < \infty$ было использовано, когда мы вычли $\mu(A)$ из двух частей равенства; действительно, по предыдущему свойству $\mu(A) \leqslant \mu(B) < \infty$, поэтому $\mu(A)$ можно вычитать. [3] □

Свойство 4.3 (Усиленная монотонность)**.** Пусть $A_1,\ ...,\ A_n,\ B \in \mathcal{A},\ A_1,\ ...,\ A_n \subset B$, причём множества A_k дизъюнктные. Тогда
$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu(B).$$

Доказательство. Очевидно. □

Свойство 4.4 (Полуаддитивность)**.** Пусть $A_1,\ ...,\ A_n,\ B \in \mathcal{A},\ B \subset \cup A_k$. Тогда
$$\mu(B) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Доказательство. Введём семейство множеств:
$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$
Нетрудно понять, что они дизъюнктны; при этом
$$\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = \cup A_k,$$
потому что никаких точек извне $\cup A_k$ в это объединение точно попасть не может, а для любой точки a из $\cup A_k$ можно взять наименьшее k_0 такое, что $a \in A_{k_0}$; тогда $a \in C_{k_0}$.

Из этого следует, что B можно представить, как
$$B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap C_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} D_k.$$

Заметим, что
$$\mu(D_k) = \mu(B \cap C_k) \leqslant \mu(C_k) \leqslant \mu(A_k).$$
Поэтому и
$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu(D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$
□

[3] Не достаточно ли потребовать, что $\mu(A) < \infty$?

Свойство 4.5 (Непрерывность меры снизу). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из $\mathcal{A}$, что $A_k \subset A_{k+1}$, и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$, причём $A_0 = \varnothing$ и $k \geqslant 1$. Тогда нетрудно увидеть, что C_k дизъюнктны, и

$$A_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_k.$$

При этом

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_k.$$

Но тогда искомое утверждение очевидно из второй аксиомы меры и определения суммы ряда. □

Свойство 4.6 (Непрерывность меры сверху). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из $\mathcal{A}$, что $A_k \supset A_{k+1},\ \mu A_1 < \infty$ и

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(B) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$, причём $A_0 = \varnothing$ и $k \geqslant 1$. Тогда нетрудно увидеть, что B_k дизъюнктны, и

$$A_k \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{k} B_k = A_1.$$

При этом

$$A \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_k = A_1.$$

Конечность всех мер позволяет завершить доказательство так же, как в прошлый раз, перенеся суммы рядов вправо и перейдя к пределу. □

Теорема 4.1. Если мера конечно-аддитивна и непрерывна снизу (или сверху), то она счётно-аддитивна.

Билет 5: Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега и её свойства.

Определение 5.1. *Объёмом* ячейки $\Delta = \Pi\Delta_i$ в $\mathbb{R}^n$ называется

$$v_n(\Delta) = \prod_{i=1}^{n} |\Delta_i|.$$

Аналогично определим и объём открытых/замкнутых прямоугольников для удобства.

Утверждение 5.1. Любой элемент Cell_n можно представить, как дизъюнктное объединение ячеек (разбить на ячейки).

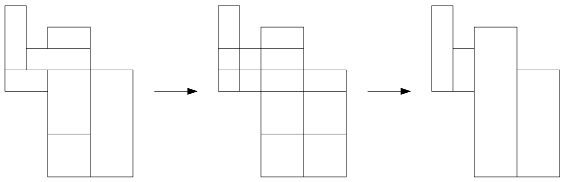
Набросок доказательства. Кажется, делается двойной индукцией по количеству ячеек. Предполагаем сначала, что мы научились объединение n прямоугольников представлять в виде дизъюнктного объединения нескольких ячеек. После этого делаем переход: доказываем, что если добавить $(n+1)$-ю ячейку, то всё равно получится.

Чтобы доказать переход, вновь применяем индукцию. Предположим, что мы доказали, что можем представить в виде дизъюнктного объединения объединение ячейки и дизъюнктного объединения k ячеек. А потом новый переход: добавляем $(k+1)$-ю. Здесь удобно рассматривать «сетчатую» конструкцию разбиения: на пути индукции всё время поддерживать разбиение таким, чтобы все разрезающие линии кончались на границе какой-нибудь из объединяемых в данный момент ячеек. □

Определение 5.2. *Объёмом* элемента Cell_n называется сумма объёмов ячеек, входящих в его разбиение.

Утверждение 5.2 (Корректность)**.** Объём элемента Cell_n не зависит от выбора разбиения.

Набросок доказательства. Обсудим сначала случай $n = 2$. Проделаем с разбиением операции как на картинке, проверив, что объём в смысле нашего определения сохранится:



Если у нас было какое-то другое разбиение, мы получим какое-то другое разбиение на столбцы. После этого не очень трудно доказать, что два разбиения на столбцы задают одинкаовые объёмы: нужно просто нанести и те, и те линии, а после доказать, что «суммарное» разбиение задаёт тот же объём.

В n-мерном случае нужно действовать индукцией по размерности: основания «столбцов» будут многомерные, а независимость от разбиения для $n-1$ будет использоваться, когда мы будем смотреть на разбиения оснований. □

Теорема 5.1. Объём – конечно-аддитивная функция на Cell_n.

Доказательство. Теперь это очевидно: если в дизъюнктном объединении множеств из Cell_n разбить каждый элемент на ячейки, то мы получим разбиение объединения на ячейки; а в конечных суммах ассоциативность точно работает. □

Теорема 5.2. Объём – счётно-аддитивная функция на Cell_n.

Доказательство. Переформулируем утверждение: $A,\ A_1,\ \ldots \in \mathrm{Cell}_n$, $\sqcup A_i = A$. Доказать хочется, что
$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k) = v_n(A).$$
Рассмотрим сначала частный случай: пусть $A = \Delta$ и $A_k = \Delta_k$ – ячейки.

1. Пусть Δ – ограниченная ячейка в $\mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0$. Тогда можно взять замкнутый параллелепипед $\Delta' \subset \Delta$ и открытый $\Delta'' \supset \Delta$ такие, что
$$v_n(\Delta) - v_n(\Delta') < \varepsilon \text{ и } v_n(\Delta'') - v_n(\Delta) < \varepsilon.$$
Явно они будут выглядеть, как
$$\Delta = \prod_{k=1}^{n} [a_k,\ b_k),$$
$$\Delta' = \prod_{k=1}^{n} \left[a_k,\ b_k - \frac{1}{i}\right],$$
$$\Delta'' = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{i},\ b_k\right),$$
где $i \in \mathbb{N}$.

Проделаем это для ячеек Δ и Δ_k:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta' \subset \Delta\colon v_n(\Delta') > v_n(\Delta) - \varepsilon$$
$$\forall k\ \exists\, \Delta_k \subset \Delta_k''\colon v_n(\Delta_k'') < v_n(\Delta_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\Delta'}_{\text{компакт}} \subset \Delta = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k''}_{\text{открытое покрытие}}.$$

По определению компакта

$$\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k''.$$

Теперь запишем объёмы:

$$v_n(\Delta') \leqslant v_n\left(\bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k''\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k'') < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + \varepsilon.$$

Используя неравенство для $v_n(\Delta')$ запишем

$$v_n(\Delta) < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю и увеличивая сумму в правой части, имеем

$$v_n(\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k).$$

С другой стороны,

$$\bigsqcup_{k=1}^{N} \Delta_k \subset \Delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) \leqslant v_n(\Delta) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k) \leqslant v_n(\Delta).$$

Поэтому на самом деле имеет место равенство.

2. Для неограниченной ячейки интересна лишь гипотетическая ситуация, в которой $v_n(\Delta) = \infty$, а сумма оказывается конечной (а значит, и все Δ_k ограниченные). Для неё вроде работает примерно та же оценка, что и в первом случае.

Понятно, что разбивать сразу можно на ячейки, а не на элементы Cell_n, потому что каждый из них разбивается на конечное число ячеек. Чтобы A тожн сделать ячейкой, нужно разбить его не конечное число ячеек, а потом немного изменить разбиения составных частей, чтобы каждая из этих ячеек разбивалась на составные ячейки составных частей. Лень. $\square$

Поэтому объём – мера на алгебре Cell_n.

Определение 5.3. Мера μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется *полной,* если для любого $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(A) = 0$ верно, что $\forall B \subset A\ \mu(B) = 0$.

Определение 5.4. Мера на алгебре $\mathcal{A}$ называется *σ-конечной,* если существуют X_k такие, что $\mu(X_k) < \infty$ и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X.$$

Например, уже введённый объём v_n – σ-конечная мера.

Определение 5.5. Пусть $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ – алгебры, и μ_1, μ_2 – меры на них. Тогда μ_2 называют *продолжением* μ_1, если $\mu_2|_{\mathcal{A}_1} = \mu_1$.

Теорема 5.3 (Лебега-Каратеодори)**.** Пусть μ – σ-конечная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда:

1. Существуют её полные продолжения на σ-алгебры.

2. Среди них есть единственное продолжение $\overline{\mu}$ такое, что если μ' – полное продолжение μ, то $\overline{\mu}$ – полное продолжение μ'. Его называют *стандартным*.

Набросок доказательства.

1. Построим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0, \infty]$ таким образом:

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)\middle|\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E\right\}.$$

   Она называется *внешней мерой* для меры μ, но мерой не является: ей не хватает счётной аддитивности.

2. $E \subset X$ называют *хорошо разбивающим,* если $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Можно доказать, что класс хорошо разбивающих множеств $\overline{\mathcal{A}}$ является σ-алгеброй, а μ^* – мерой и является стандартным продолжением μ.

□

Определение 5.6. *Мера Лебега* λ_n на $\mathbb{R}^n$ – стандартное продолжение объёма. σ-алгебра, на которой она определена, обозначается $\mathcal{M}_n$.

Свойство 5.1. Все борелевские множества измеримы по Лебегу.

Доказательство. σ-алгебра борелевских множеств – наименьшая, содержащая Cell_n, поэтому она содержится в $\mathcal{M}_n$. □

Свойство 5.2. Мера Лебега точки – ноль.

Доказательство. Это следует из того, что внешняя мера точки ноль, потому что существует сколь угодно малая ячейка, которая её содержит. □

Свойство 5.3. Конечные и счётные множества имеют нулевую меру Лебега.

Доказательство. Из-за счётной аддитивности. □

Свойство 5.4. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство размерности меньше, чем n. Тогда его мера Лебега равна нулю.

Доказательство. Нужно покрыть ячейками и сделать оценку. □

Свойство 5.5. (Регулярность) Пусть $A \in \mathcal{M}_n,\ \varepsilon > 0$. Тогда найдутся открытое G и замкнутое F такие, что

$$F \subset A \subset G,\ \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon,\ \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. В случае, когда E ограничено, это совсем просто: нужно взять покрывающий набор ячеек из определения внешней меры, и каждую ячейку приблизить открытым параллелепипедом, а потом провернуть оценку. Чтобы получить замкнутое множество, придётся повторить это для дополнения E относительно какого-нибудь куба, содержащего E.

Для бесконечных надо доказать! □

Билет 6: Измеримость функции относительно σ-алгебры. Свойства измеримых функций.

Определение 6.1. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *измеримой* относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, если для любого промежутка $\Delta \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$.

Определение 6.2. Множества вида $X[f < a] = \{x \in X \mid f(x) < a\}$ – *множества Лебега* 1 *типа,* а $X[f \leqslant a],\ X[f > a],\ X[f \geqslant a]$ – $2,\ 3,$ и 4 соответственно.

Теорема 6.1. Чтобы функция f была измерима относительно $\mathcal{A}$, достаточно, чтобы все множества одного из четырёх типов Лебега лежали в $\mathcal{A}$.

Доказательство.

1. $1 \to 2$:
$$X[f \leqslant a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} X\left[f < a - \frac{1}{k}\right].$$
2. $2 \to 3$: $X[f > a] = X \setminus X[f \leqslant a]$.
3. $3 \to 4$: так же, как $1 \to 2$.
4. $4 \to 1$: так же, как $2 \to 3$.

Имея множества Лебега всех четырёх типов, нетрудно получить из них все промежутки. □

Лемма 6.1. Любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ представимо, как счётное объединение ячеек.

Доказательство. Возьмём около каждой рациональной точки G окрестность в форме параллелипипеда, лежащую в G. Понятно, что из того, что множество рациональных точек всюду плотно, следует, что мы получили счётное открытое покрытие G.

В свою очередь, любой открытый параллелипипед легко представить, как объединение счётного количества ячеек. А счётное объединение счётных объединений – счётное объединение. □

Теорема 6.2. Пусть функции f_1, ..., f_n: $X \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $\varphi = g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ измерима.

Доказательство. Т.к. функция g непрерывна, $G = \mathbb{R}^n[g < a]$ – открытое множество. Его можно представить, как
$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$
где Δ_k – ячейки. Тогда
$$X[\varphi < a] = f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\Delta_k).$$
Пусть
$$\Delta_k = \prod_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i).$$
Тогда
$$f^{-1}(\Delta_k) = \bigcap_{i=1}^{n} X[a_i \leqslant f_i < b_i].$$
Поэтому
$$X[\varphi < a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} X[a_i^{(k)} \leqslant f_i < b_i^{(k)}].$$
Это измеримое множество. □

Теорема 6.3. $f,\, g$ измеримы $\Rightarrow$ измеримы $f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g},\ |f|,\ \lambda f,\ f\vee g=\max\{f,\, g\},\ f\wedge g=\min\{f,\, g\},\ f^n$.

Доказательство. Довольно очевидное следствие предыдущей теоремы. ☐

Теорема 6.4. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ измеримы, то измеримы и $\sup f_i,\ \inf f_i,\ \underline{\lim} f_i,\ \overline{\lim} f_i,\ \lim f_i$.

Доказательство.

1. $g=\sup f_i$; $X[g\leqslant a]=X[\forall i\ f_i\leqslant a]=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}X[f_i\leqslant a]$.
2. Инфимум – аналогично.
3. $g=\lim f_i\Rightarrow (g(x)\leqslant a\Leftrightarrow \exists\, N\colon \forall i>N\ f_i(x)\leqslant a)\Rightarrow X[g\leqslant a]=\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=N+1}^{\infty}X[f_i(x)\leqslant a]$.
4. Верхний и нижний пределы – пределы инфимумов и супремумов, поэтому эти результаты следуют из уже доказанного.

☐

Определение 6.3. $f\colon X\to\mathbb{R}$ называется *простой* (относительно $\mathcal{A}$,) если она измерима относительно $\mathcal{A}$ и принимает конечное число значений.

Определение 6.4. *Индикатором* множества E называется функция

$$\mathbb{1}_E(x)=\begin{cases}1,\ x\in E,\\ 0,\ x\notin E.\end{cases}$$

Утверждение 6.1. Индикатор E прост (измерим) тогда и только тогда, когда измеримо E.

Утверждение 6.2. Пусть f – функция, которая принимает значения $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ на множествах E_i. Тогда

$$f=\sum_{i=1}^{N}a_i\mathbb{1}_{f^{-1}(a_i)}=\sum_{i=1}^{N}a_i\mathbb{1}_{E_i}.$$

Утверждение 6.3. Функция f, принимающая конечное число значений, проста (измерима) тогда и только тогда, когда множества E_i измеримы.

Теорема 6.5. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность простых функций, имеющая предел, то этот предел измерим.

Теорема 6.6. Пусть f – неотрицательная измеримая функция. Тогда найдётся неубывающая последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ простых функций, которая поточечно сходится к f.

Доказательство. Разобъём $[0,+\infty)$ следующим образом:

$$[0,\infty)=\bigsqcup_{k=0}^{n^2}\Delta_k,$$

где

$$\Delta_k=\begin{cases}\left[\dfrac{k}{n},\ \dfrac{k+1}{n}\right],\ 0\leqslant k<n^2,\\[2ex] [n,\,\infty),\ k=n^2.\end{cases}$$

Пусть $e_k=f^{-1}(\Delta_k)\in\mathcal{A},\ c_k=\min\Delta_k=\dfrac{k}{n}$ и

$$\psi_n=\sum_{k=0}^{n^2}c_k\mathbb{1}_{e_k}.$$

Рассмотрим $x \in e_k$. Начиная с некоторого n эта точка точно попадёт в e_k с $k < n^2$. Значение $f(x) \in \Delta_k = \left[c_k,\, c_k + \dfrac{1}{n}\right]$, поэтому

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

начиная с некоторого n. Отсюда следует поточечная сходимость.

Чтобы сделать последовательность функций неубывающей, сохранив сходимость, введём

$$\varphi_n = \max\{\psi_1,\, ...,\, \psi_n\}.$$

Сходимость сохранится, т.к.

$$f - \frac{1}{n} \leqslant \psi_n \leqslant \varphi_n \leqslant f.$$

□

Билет 7: Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.

Определение 7.1. Пусть f – простая, и представлена, как

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(E_k).$$

Если $A \in \mathcal{A}$, то

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(E_k \cap A).$$

Утверждение 7.1. Если f – простая на X, то

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

$$f\,\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k \cap A}.$$

□

Определение 7.2. Пусть f – измеримая, неотрицательная функция. Тогда

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \sup\left\{ \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g \text{ – простая, } 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

При этом

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$$

В следующих свойствах функции измеримые и неотрицательные.

Свойство 7.1.

$$0 \leqslant f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Очевидно из определения, для g супремум берётся по большему множеству функций. ☐

Свойство 7.2.

$$A \subset B \subset X \Rightarrow \int\limits_B f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Следует из предыдущего свойства. ☐

Определение 7.3. Пусть f – произвольная измеримая функция. Определим

$$f_+ = \max\{f(x),\, 0\},\ \ f_- = \max\{-f(x),\, 0\}.$$

Тогда

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Определение 7.4. f называется *суммируемой* на X, если интеграл от неё конечен. Семейство суммируемых функций обозначается, как $L(X,\, \mu)$.

Билет 8: Теорема Беппо Леви.

Теорема 8.1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций, и $f = \lim f_n$. Тогда

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

$$f_n \leqslant f \Rightarrow \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

$$f_n \leqslant f_{n+1} \Rightarrow \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \, \mathrm{d}\mu \Rightarrow \exists \lim \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu = L.$$

Из этих двух утверждений следует, что

$$L \leqslant \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Теперь проверим неравенство в другую сторону. По определению

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi} \int\limits_X \varphi \, \mathrm{d}\mu,$$

где φ – неотрицательные простые функции, не превосходящие f. Рассмотрим какую-нибудь φ:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k},$$

причём $c_k \geqslant 0$. Примем $c_0 = 0$; тогда понятно, что $E_0 = \varnothing \Leftrightarrow \varphi > 0$.

Возьмём ε: $0 < \varepsilon < \min\{c_1,\, ...,\, c_p\}$ и

$$\varphi_\varepsilon = 0 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon) \mathbb{1}_{E_k}.$$

Рассмотрим $X_n = X[f_n \geqslant \varphi_\varepsilon]$. Понятно, что $E_0 \subset X_n$.

Т.к. $f_n \to f$, для любой точки x найдётся n такое, что $f_n(x) > \varphi_\varepsilon(x)$, т.е.

$$\forall x\ \exists\, n\colon x \in X_n.$$

Поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Т.к. последовательность неубывающая, $X_n \subset X_{n+1} \Rightarrow \mu(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(X)$. Вообще, для любого измеримого A верно, что $\mu(A \cap X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(A)$.

$$\int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon)\, \mu(X_n \cap E_k).$$

Устремляя n к бесконечности и ε к нулю, получим

$$L \geqslant \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(E_k) = \int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Переходя к супремуму, получим

$$L \geqslant \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Значит, на самом деле есть равенство. □

Свойство 8.1. Пусть f, g – измеримые и неотрицательные функции. Тогда

$$\int\limits_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Нужно сначала проверить для простых функций, записав их через индикаторы и повозившись с суммами. После этого в общем случае можно выделить возрастающие последовательности простых функций, которые сходятся к f и g и воспользоваться теоремой Леви. □

Свойство 8.2.

$$\int\limits_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Билет 9: Свойства интеграла от суммируемых функций.

Свойство 9.1. Пусть $f,\ g$ – суммируемые, $f \leqslant g$. Тогда

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Расписать положительную и отрицательную части и свести к свойству для неотрицательных функций; суммируемость нужна, чтобы не вычитать бесконечность из неравенства. □

Свойство 9.2. [4] Пусть $f,\ g$ – суммируемые. Тогда

$$\int\limits_X f + g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

[4] В конспекте был $\pm$, но это ведь следует из умножения на константу? И, кстати, нужна ли тут вообще суммируемость, или это верно, даже когда интеграл расходится?

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.3. Если f – суммируемая, то

$$\int\limits_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.4. Пусть $f,\ g \in L,\ |f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int f\right| \leqslant \int g$.

Доказательство.

$$|f| \leqslant g \Rightarrow f \leqslant g \wedge -f \leqslant g \Rightarrow \left(\int f \leqslant \int g\right) \wedge \left(-\int f \leqslant \int g\right) \Rightarrow \left|\int f\right| \leqslant \int g.$$

□

Свойство 9.5. $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего. □

Свойство 9.6. $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$.

Доказательство. $\Leftarrow$:

$$|f| = f_+ + f_- \Rightarrow 0 \leqslant f_\pm \leqslant |f| \Rightarrow 0 \leqslant \int f_\pm \leqslant \int |f|.$$

$\Rightarrow$: Если f суммируема, то суммируемы и $f_\pm$, а $|f|$ – их сумма. □

Свойство 9.7. $f \in L, \mu X \leqslant \infty,\ |f| \leqslant M \Rightarrow \left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu(X)$.

Доказательство.

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M \,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(X).$$

□

Билет 10: Счётная аддитивность интеграла.

Теорема 10.1. Пусть f – измеримая функция, причём либо $f \geqslant 0$, либо $f \in L$. Тогда для любых измеримых $A,\ A_1,$ ... таких, что $A = \sqcup A_k$ верно, что

$$\int\limits_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f.$$

Доказательство.

1. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда

   $$\int\limits_A f = \int\limits_X f\, \mathbb{1}_A,\ \int\limits_{A_n} f = \int\limits_X f\, \mathbb{1}_{A_n}.$$

   При этом

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Rightarrow f\, \mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} f\, \mathbb{1}_{A_n}$$

   Рассмотрим частичные суммы:

   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} f\, \mathbb{1}_{A_n}.$$

Понятно, что они образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к $f\,\mathbb{1}_A$, поэтому из теоремы Леви

$$\int f\,\mathbb{1}_A = \lim \int S_n = \lim \int \sum_{n=1}^{N} f\,\mathbb{1}_{A_n} = \lim \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f.$$

2. Пусть теперь $f \in L$. Тогда просто расписать через $f_\pm$ и воспользоваться первым пунктом.

□

Билет 11: Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 11.1. Пусть $f \in L$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0\colon \forall \text{ измеримого } A \subset X,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1. Если f ограничена, то найдётся M такое, что $|f| \leqslant M$. Тогда

$$\left| \int\limits_A f \right| \leqslant M\mu(A) \leqslant \varepsilon \text{ при } \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

2. Пусть теперь $f \in L$ и всё. Тогда $|f| \in L$, и

$$\int\limits_X |f| = \sup_g \int\limits_X g.$$

g – простая, а потому ограниченная.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \text{ простая } g,\ 0 \leqslant g \leqslant |f|\colon \int\limits_X |f| - \int\limits_X g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя ограниченность g, находим по любому ε такую δ, что

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int\limits_A g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда мгновенно получается искомая оценка:

$$\left| \int\limits_A f \right| \leqslant \int\limits_A |f| = \int\limits_A g + \int\limits_A \big(|f| - g\big) < \varepsilon.$$

□

Билет 12: Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.