Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов
записал со слов лектора А. А. Лодкина

30 мая 2017 г.

Глава 1 Теория меры

Билет 1: Алгебры и σ-алгебры множеств.

Определение 1.1. Пусть X – некоторое множество. Тогда $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй,* если выполняются следующие условия:

1. $\varnothing$, $X \in \mathcal{A}$,
2. A, $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, $|\mathcal{A}| < \infty$. Тогда $|\mathcal{A}| = 2^n$ для некоторого n.

Доказательство. Так как $X \in \mathcal{A}$, каждый элемент X содержится как минимум в одном элементе $\mathcal{A}$. Пусть $A(x)$ – пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$, содержащих x. Понятно, что $A(x)$ непусто, т.к. $x \in A(x)$. Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили $A(x)$, как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение: $A(x)$ – такое множество, что если $x \in B \in \mathcal{A}$, то $A(x) \subset B$ [1].

2. Введём отношение на X: пусть $x \sim y$, если $A(x) = A(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$.

   Пусть $y \in A(x)$. Предположим, что $A(y) \neq A(x)$. Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо $A(y)$ содержит элемент, которого нет в $A(x)$, либо наоборот. Пусть первое. Тогда $B = A(x) \cap A(y)$ – элемент $\mathcal{A}$, который содержит y и строго меньше $A(y)$, чего не может быть. Пусть второе. Тогда если $A(y)$ не содержит x, то $A(x) \setminus A(y)$ является элементом $\mathcal{A}$, содержащим x, а если содержит, то снова $A(x) \cap A(y)$ является таким элементом. Причём строго меньшим, чем $A(x)$, что опять ведёт нас к противоречию.

   Пусть $A(x) = A(y)$. Предположим, что $y \notin A(x)$. Но тогда $y \notin A(y)$, что точно ложь.

3. Разобьём X на классы эквивалентности по отношению $\sim$; обозначим множество этих классов $\hat{\mathcal{A}}$. Понятно, что $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$, ведь $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{A}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}$. Докажем, что если $B \cap \hat{B} \neq \varnothing$, то $B \cap \hat{B} = \hat{B}$.

   Предположим противное: пусть $x \in B \cap \hat{B}$ и $y \in \hat{B} \setminus B$. Из определения отношения эквивалентности понятно, что $\hat{B} = A(x) = A(y)$. Но заметим тогда, что $\hat{B} \setminus B$ – множество из $\mathcal{A}$, содержащее y и строго меньшее $\hat{B}$, чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое $B \in \mathcal{A}$ можно представить, как объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$: просто для каждого $b \in B$ взять $A(b)$ и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$ лежит в A. Т.к. элементы $\hat{\mathcal{A}}$ не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}$ объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами $2^{\hat{\mathcal{A}}}\mathcal{A}$. Поэтому количество элементов $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

$\square$

[1] Заметим, что мы существенно испльзуем конечность $\mathcal{A}$ каждый раз, когда говорим, что $A(x) \in \mathcal{A}$!