

Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов
записал со слов лектора А. А. Лодкина

8 июня 2017 г.

Оглавление

1	Теория меры	3
1	Алгебры и σ -алгебры множеств.	3
2	Борелевская σ -алгебра.	4
3	Мера на алгебре. Примеры мер.	5
4	Свойства меры	6
5	Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега и её свойства.	7
6	Измеримость функции относительно σ -алгебры. Свойства измеримых функций.	11
7	Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.	13
8	Теорема Беппо Леви.	14
9	Свойства интеграла от суммируемых функций.	15
10	Счётная аддитивность интеграла.	16
11	Абсолютная непрерывность интеграла	17
12	Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.	17
13	Сравнение подходов Римана и Лебега	18
14	Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом	19
15	Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью	20
16	Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению.	21
	16.1 Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса.	21
	16.2 Интеграл по образу меры	22
	16.3 Интеграл по распределению.	23
17	Интеграл Эйлера-Пуассона	23
18	Вероятностный смысл меры и интеграла.	24
19	Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика).	24
	19.1 «Почти всюду» и вариации теоремы Леви.	24
	19.2 Кратные интегралы	26
20	Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тоннели и Фубини).	27
21	Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании	27
22	Преобразование меры Лебега при гладком отображении	29
23	Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты).	29
24	Теорема Фату	30
25	Теорема Лебега об ограниченной сходимости.	31
26	Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Формулировка признаков Больцано-Коши, Дирихле и Абеля.	31
27	Формулировки основных теорем о несобственном интеграле с параметром.	32
	27.1 Суммируемый случай.	33
	27.2 Случай равномерной сходимости	33
28	Γ -функция Эйлера. Её свойства.	33
29	B -функция и её сведение к Γ -функции.	35
30	Объём n -мерного шара.	35

2	Дифференциальная геометрия	36
31	Регулярная кривая и её естественная параметризация	36
32	Кривизна кривой.	36
33	Векторы τ , ν , β , абсолютное кручение, кручение кривой.	38
34	Формулы Френе. Теорема о восстановлении кривой по заданным кривизне и кручению.	39
35	Регулярная поверхность, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности	39
36	Вычисление длин и площадей с помощью первой квадратичной формы.	40
	36.1 Длина кривой.	40
	36.2 Мера Лебега на поверхности.	40
37	Вторая квадратичная форма. Эллиптическая, гиперболическая и параболическая точки поверхности.	41
38	Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны поверхности. . . .	42
39	Полная (гауссова) кривизна. Теорема Гаусса.	43
40	Понятие о геодезической кривизне и геодезической кривой.	
	Формулировка теорема Гаусса-Бонне.	43
3	Теория поля	44
41	Ориентация кривой, поверхности и пространства	44
42	Интеграл второго рода на кривой, на поверхности и в \mathbb{R}^3 как интеграл от векторного поля и как интеграл от дифференциальной формы.	45
43	Дифференцирование векторных полей (ротатор, дивергенция).	46
44	Формула Грина.	46
45	Классическая формула Стокса	47
46	Формула Гаусса-Остроградского	47
47	Физический смысл дивергенции и ротора	48
48	Потенциальное, безвихревое, соленоидальное, несжимаемое векторные поля. Характеристика полей в терминах интегралов.	48
49	Примеры полей с различными свойствами. Центральное несжимаемое поле. . . .	49
4	Анализ Фурье	50
50	Гильбертово пространство. Пространство \mathcal{L}_2	50
51	Ортогональные ряды в гильбертовом пространстве. Теорема Пифагора. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.	51
52	Классические ряды Фурье по тригонометрической и экспоненциальной схеме . . .	52
53	Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега.	52
54	Теорема Дини о поточечной сходимости и следствия из неё.	53
55	Свойства коэффициентов Фурье	54
56	Формулировки результатов о сходимости рядов Фурье (включая теорема Фейера). .	55
57	Преобразование Фурье и его свойства. Интегральная формула Фурье.	55

Глава 1 Теория меры

Билет 1: Алгебры и σ -алгебры множеств.

Определение 1.1. Пусть X – некоторое множество. Тогда $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй*, если выполняются следующие условия:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, $|\mathcal{A}| < \infty$. Тогда $|\mathcal{A}| = 2^n$ для некоторого n .

Доказательство. Так как $X \in \mathcal{A}$, каждый элемент X содержится как минимум в одном элементе \mathcal{A} . Пусть $A(x)$ – пересечение всех множеств из \mathcal{A} , содержащих x . Понятно, что $A(x)$ непусто, т.к. $x \in A(x)$. Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили $A(x)$, как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение: $A(x)$ – такое множество, что если $x \in B \in \mathcal{A}$, то $A(x) \subset B$ ¹.

2. Введём отношение на X : пусть $x \sim y$, если $A(x) = A(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$.

Пусть $y \in A(x)$. Предположим, что $A(y) \neq A(x)$. Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо $A(y)$ содержит элемент, которого нет в $A(x)$, либо наоборот. Пусть первое. Тогда $B = A(x) \cap A(y)$ – элемент \mathcal{A} , который содержит y и строго меньше $A(y)$, чего не может быть. Пусть второе. Тогда если $A(y)$ не содержит x , то $A(x) \setminus A(y)$ является элементом \mathcal{A} , содержащим x , а если содержит, то снова $A(x) \cap A(y)$ является таким элементом. Причём строго меньшим, чем $A(x)$, что опять ведёт нас к противоречию.

Пусть $A(x) = A(y)$. Предположим, что $y \notin A(x)$. Но тогда $y \notin A(y)$, что точно ложь.

3. Разобьём X на классы эквивалентности по отношению \sim ; обозначим множество этих классов $\hat{\mathcal{A}}$. Понятно, что $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$, ведь $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{A}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{A}}$. Докажем, что если $B \cap \hat{B} \neq \emptyset$, то $B \cap \hat{B} = \hat{B}$.

Предположим противное: пусть $x \in B \cap \hat{B}$ и $y \in \hat{B} \setminus B$. Из определения отношения эквивалентности понятно, что $\hat{B} = A(x) = A(y)$. Но заметим тогда, что $\hat{B} \setminus B$ – множество из \mathcal{A} , содержащее y и строго меньшее \hat{B} , чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое $B \in \mathcal{A}$ можно представить, как объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$: просто для каждого $b \in B$ взять $A(b)$ и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$ лежит в \mathcal{A} . Т.к. элементы $\hat{\mathcal{A}}$ не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству $B \subset \mathcal{A}$ объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами $2^{\hat{\mathcal{A}}}$ и \mathcal{A} . Поэтому количество элементов \mathcal{A} имеет искомый вид.

□

Примеры привести не очень сложно, не будем здесь на этом останавливаться.

¹Заметим, что мы существенно используем конечность \mathcal{A} каждый раз, когда говорим, что $A(x) \in \mathcal{A}$!

Определение 1.2. σ -алгеброй называется алгебра, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$. Тогда наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} , называется борелевской оболочкой \mathcal{E} и обозначается $\sigma(\mathcal{E})$. (Ссылаясь на факт, который уже упоминался в упражнении, заметим, что $\sigma(\mathcal{E})$ совпадает с пересечением всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{E}).

Лемма 1.1. Если $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$, то $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Доказательство. Из определения борелевской оболочки понятно, что

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{E}_1)).$$

При этом понятно, что правая часть равна $\sigma(\mathcal{E}_1)$, чего нам и надо. \square

Билет 2: Борелевская σ -алгебра.

Определение 2.1. Пусть \mathcal{O}_n – множество всех открытых множеств в \mathbb{R}^n . Тогда σ -алгебра $\sigma(\mathcal{O}_n)$ называется борелевской.

Определение 2.2. Назовём n -мерной ячейкой такое подмножество \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow \Delta = \begin{cases} [a, b), [a, \infty); \\ (-\infty, b), (-\infty, \infty); \end{cases} \\ n > 1 &\Rightarrow \Delta = \prod_{i=1}^k \Delta_i, \end{aligned}$$

где Δ_i – одномерные ячейки.

Определение 2.3. Назовём n -мерной алгеброй ячеек множество

$$\text{Cell}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^k \Delta_i \mid k \in \mathbb{N} \right\},$$

где Δ_i – ячейки.

Утверждение 2.1. Cell_n – действительно алгебра.

Доказательство. Чтобы сделать, нужно увидеть, что пересечение ячеек – ячейка, а потом представить пересечение объединений, как объединение пересечений. \square

Теорема 2.1. $\sigma(\text{Cell}_n) = \sigma(\mathcal{O}_n)$.

Доказательство. Зная последний результат из предыдущего билета, имеем возможность доказывать, что

$$\text{Cell}_n \subset \sigma(\mathcal{O}_n) \text{ и } \mathcal{O}_n \subset \sigma(\text{Cell}_n).$$

Это даст нам утверждение теоремы.

Первое включение очевидно: можно представить любую ячейку, как пересечение вложенных прямоугольников, например. Поэтому и с объединением проблем не будет.

Чтобы доказать второе, рассмотрим сначала ячейки с целыми вершинами, назовём их ячейками первого ранга. Побив каждую из них на 2^n частей (поделив каждую сторону на 2), получим ячейки второго ранга, продолжая процесс – ячейки ранга n . Пусть U – произвольное открытое множество, а U_k – объединение всех ячеек ранга k , пересекающих U .

Рассмотрим x – произвольную точку не из U . Т.к. U открыто, существует такое ε , что

$$B_\varepsilon(x) \cap U = \emptyset.$$

Заметим однако, что если ячейка ранга k , то её сторона равна 2^{1-k} , а значит, диагональ –

$$\sqrt{n} 2^{1-k}.$$

Эта последовательность стремится к нулю при k стремящемся к бесконечности, поэтому можно сделать так, что диагональ ячейки станет меньше, чем ε , при всех $k > K$. Из этого будет следовать, что при $k > K$ $x \notin U_k$.

Отсюда ясно, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow U \in \sigma(\text{Cell}_n) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\text{Cell}_n).$$

□

Утверждение 2.2. Борелевской σ -алгебре принадлежат множества следующих типов:

1. Точки.
2. Открытые, замкнутые.
3. Не более чем счётные.
4. Счётные пересечения открытых множеств – множества типа G_δ .
5. Счётные объединения замкнутых – множества типа F_σ .
6. Счётные объединения множеств типа G_δ – множества типа $G_{\delta\sigma}$.
7. Счётные пересечения множеств типа F_σ – множества типа $F_{\sigma\delta}$.

Билет 3: Мера на алгебре. Примеры мер.

Определение 3.1. Пусть X – множество, \mathcal{A} – алгебра на X . Тогда мерой на \mathcal{A} называется отображение $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющее двум свойствам:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Если $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство дизъюнктивных² множеств из \mathcal{A} , то

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{A} = 2^X$, и $a \in X$ – произвольная точка. Введём меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

Проверка аксиом. Первое свойство, конечно, выполняется; чтобы проверить второе, можно увидеть, что в семействе дизъюнктивных множеств точка может содержаться лишь в одном из них. □

Такая мера называется *дельта-мерой*, *атолической мерой* или *мерой Дирака*, обозначается, как δ_a . В физике порой рассматривается (на \mathbb{R}), как интеграл от *дельта-функции Дирака* – такой функции, что она равна нулю всюду, кроме a , а интеграл по всей прямой от неё равен 1.

Пример 3.2. В той же ситуации вместо точки a зафиксируем не более, чем счётное множество точек $\{a_k\}$. Меру определим, как

$$\mu(A) = \sum_k m_k \delta_{a_k}(A),$$

где m_k – некоторые фиксированные неотрицательные вещественные числа, *веса*. Такая мера называется *молекулярной*.

²Попарно непересекающихся друг с другом. Если в объединении участвует семейство дизъюнктивных множеств, то будем его обозначать \sqcup вместо \cup , забывая упоминать дизъюнктивность.

Проверка аксиом. Первая снова тривиальна, вторая следует из счётной аддитивности дельта-меры (на самом деле, тут нужно воспользоваться теоремой о перестановке/группировке членов в абсолютно сходящемся ряде; т.к. всё положительно, никакой условной сходимости тут не бывает, и при перестановке/группировке членов сохраняется как сходимость, так и расходимость). \square

Пример 3.3. В той же ситуации пусть

$$\mu(A) = |A|.$$

Билет 4: Свойства меры

Свойство 4.1 (Монотонность). Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Доказательство.

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

\square

Свойство 4.2. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu B < \infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

Доказательство.

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Условие $\mu(B) < \infty$ было использовано, когда мы вычли $\mu(A)$ из двух частей равенства; действительно, по предыдущему свойству $\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$, поэтому $\mu(A)$ можно вычитать.³ \square

Свойство 4.3 (Усиленная монотонность). Пусть $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{A}$, $A_1, \dots, A_n \subset B$, причём множества A_k дизъюнктные. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu(B).$$

Доказательство. Очевидно. \square

Свойство 4.4 (Полуаддитивность). Пусть $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{A}$, $B \subset \cup A_k$. Тогда

$$\mu(B) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Доказательство. Введём семейство множеств:

$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Нетрудно понять, что они дизъюнктны; при этом

$$\bigsqcup_{k=1}^n C_k = \cup A_k,$$

потому что никаких точек извне $\cup A_k$ в это объединение точно попасть не может, а для любой точки a из $\cup A_k$ можно взять наименьшее k_0 такое, что $a \in A_{k_0}$; тогда $a \in C_{k_0}$.

Из этого следует, что B можно представить, как

$$B = \bigsqcup_{k=1}^n B \cap C_k = \bigsqcup_{k=1}^n D_k.$$

Заметим, что

$$\mu(D_k) = \mu(B \cap C_k) \leq \mu(C_k) \leq \mu(A_k).$$

Поэтому и

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^n \mu(D_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

\square

³ Не достаточно ли потребовать, что $\mu(A) < \infty$?

Свойство 4.5 (Непрерывность меры снизу). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из \mathcal{A} , что $A_k \subset A_{k+1}$, и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$, причём $A_0 = \emptyset$ и $k \geq 1$. Тогда нетрудно увидеть, что C_k дизъюнкты, и

$$A_k = \bigsqcup_{i=1}^k C_i.$$

При этом

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Но тогда искомое утверждение очевидно из второй аксиомы меры и определения суммы ряда. \square

Свойство 4.6 (Непрерывность меры сверху). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из \mathcal{A} , что $A_k \supset A_{k+1}$, $\mu A_1 < \infty$ и

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(B) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$, причём $A_0 = \emptyset$ и $k \geq 1$. Тогда нетрудно увидеть, что B_k дизъюнкты, и

$$A_k \sqcup \bigsqcup_{i=1}^k B_i = A_1.$$

При этом

$$B \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1.$$

Конечность всех мер позволяет завершить доказательство так же, как в прошлый раз, перенеся суммы рядов вправо и перейдя к пределу. \square

Теорема 4.1. Если мера конечно-аддитивна и непрерывна снизу (или сверху), то она счётно-аддитивна.

Билет 5: Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега и её свойства.

Определение 5.1. Объёмом ячейки $\Delta = \prod \Delta_i$ в \mathbb{R}^n называется

$$v_n(\Delta) = \prod_{i=1}^n |\Delta_i|.$$

Аналогично определим и объём открытых/замкнутых прямоугольников для удобства.

Утверждение 5.1. Любой элемент Cell_n можно представить, как дизъюнктное объединение ячеек (разбить на ячейки).

Набросок доказательства. Кажется, делается двойной индукцией по количеству ячеек. Предполагаем сначала, что мы научились объединение n прямоугольников представлять в виде дизъюнктного объединения нескольких ячеек. После этого делаем переход: доказываем, что если добавить $(n+1)$ -ю ячейку, то всё равно получится.

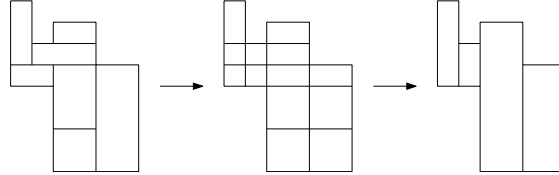
Чтобы доказать переход, вновь применяем индукцию. Предположим, что мы доказали, что можем представить в виде дизъюнктного объединения объединение ячейки и дизъюнктного

объединения k ячеек. А потом новый переход: добавляем $(k + 1)$ -ю. Здесь удобно рассматривать «сетчатую» конструкцию разбиения: на пути индукции всё время поддерживать разбиение таким, чтобы все разрезающие линии кончались на границе какой-нибудь из объединяемых в данный момент ячеек. \square

Определение 5.2. Объёмом элемента Cell_n называется сумма объёмов ячеек, входящих в его разбиение.

Утверждение 5.2 (Корректность). Объём элемента Cell_n не зависит от выбора разбиения.

Набросок доказательства. Обсудим сначала случай $n = 2$. Прделаем с разбиением операции как на картинке, проверив, что объём в смысле нашего определения сохранится:



Если у нас было какое-то другое разбиение, мы получим какое-то другое разбиение на столбцы. После этого не очень трудно доказать, что два разбиения на столбцы задают одинаковые объёмы: нужно просто нанести и те, и те линии, а после доказать, что «суммарное» разбиение задаёт тот же объём.

В n -мерном случае нужно действовать индукцией по размерности: основания «столбцов» будут многомерные, а независимость от разбиения для $n - 1$ будет использоваться, когда мы будем смотреть на разбиения оснований. \square

Теорема 5.1. Объём – конечно-аддитивная функция на Cell_n .

Доказательство. Теперь это очевидно: если в дизъюнктном объединении множеств из Cell_n разбить каждый элемент на ячейки, то мы получим разбиение объединения на ячейки; а в конечных суммах ассоциативность точно работает. \square

Теорема 5.2. Объём – счётно-аддитивная функция на Cell_n .

Доказательство. Переформулируем утверждение: $A, A_1, \dots \in \text{Cell}_n, \sqcup A_i = A$. Доказать хочется, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k) = v_n(A).$$

Рассмотрим сначала частный случай: пусть $A = \Delta$ и $A_k = \Delta_k$ – ячейки.

1. Пусть Δ – ограниченная ячейка в \mathbb{R}^n , $\varepsilon > 0$. Тогда можно взять замкнутый параллелепипед $\Delta' \subset \Delta$ и открытый $\Delta'' \supset \Delta$ такие, что

$$v_n(\Delta) - v_n(\Delta') < \varepsilon \text{ и } v_n(\Delta'') - v_n(\Delta) < \varepsilon.$$

Явно они будут выглядеть, как

$$\begin{aligned} \Delta &= \prod_{k=1}^n [a_k, b_k], \\ \Delta' &= \prod_{k=1}^n \left[a_k, b_k - \frac{1}{i} \right], \\ \Delta'' &= \prod_{k=1}^n \left(a_k + \frac{1}{i}, b_k \right), \end{aligned}$$

где $i \in \mathbb{N}$.

Протредаем это для ячеек Δ и Δ_k :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta' \subset \Delta: v_n(\Delta') > v_n(\Delta) - \varepsilon$$

$$\forall k \exists \Delta_k \subset \Delta_k'': v_n(\Delta_k'') < v_n(\Delta_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\Delta'}_{\text{компакт}} \subset \Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k''}_{\text{открытое покрытие}}.$$

По определению компакта

$$\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^N \Delta_k''.$$

Теперь запишем объёмы:

$$v_n(\Delta') \leq v_n\left(\bigcup_{k=1}^N \Delta_k''\right) \leq \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k'') < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + \varepsilon.$$

Используя неравенство для $v_n(\Delta')$ запишем

$$v_n(\Delta) < \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю и увеличивая сумму в правой части, имеем

$$v_n(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k).$$

С другой стороны,

$$\bigcup_{k=1}^N \Delta_k \subset \Delta \Rightarrow \sum_{k=1}^N v_n(\Delta_k) \leq v_n(\Delta) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k) \leq v_n(\Delta).$$

Поэтому на самом деле имеет место равенство.

2. Для неограниченной ячейки интересна лишь гипотетическая ситуация, в которой $v_n(\Delta) = \infty$, а сумма оказывается конечной (а значит, и все Δ_k ограниченные). Для неё вроде работает примерно та же оценка, что и в первом случае.

Понятно, что разбивать сразу можно на ячейки, а не на элементы Cell_n , потому что каждый из них разбивается на конечное число ячеек. Чтобы A тожн сделать ячейкой, нужно разбить его не конечное число ячеек, а потом немного изменить разбиения составных частей, чтобы каждая из этих ячеек разбивалась на составные ячейки составных частей. Лень. \square

Поэтому объём – мера на алгебре Cell_n .

Определение 5.3. Мера μ на σ -алгебре \mathcal{A} называется *полной*, если для любого $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(A) = 0$ верно, что $\forall B \subset A \mu(B) = 0$.

Определение 5.4. Мера на алгебре \mathcal{A} называется *σ -конечной*, если существуют X_k такие, что $\mu(X_k) < \infty$ и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X.$$

Например, уже введённый объём v_n – σ -конечная мера.

Определение 5.5. Пусть $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ – алгебры, и μ_1, μ_2 – меры на них. Тогда μ_2 называют *продолжением* μ_1 , если $\mu_2|_{\mathcal{A}_1} = \mu_1$.

Теорема 5.3 (Лебега-Каратеодори). Пусть μ – σ -конечная мера на алгебре \mathcal{A} . Тогда:

1. Существуют её полные продолжения на σ -алгебры.
2. Среди них есть единственное продолжение $\bar{\mu}$ такое, что если μ' – полное продолжение μ , то μ' – полное продолжение $\bar{\mu}$. Его называют *стандартным*.

Набросок доказательства.

1. Построим функцию $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, \infty]$ таким образом:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \mid \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E \right\}.$$

Она называется *внешней мерой* для меры μ , но мерой не является: ей не хватает счётной аддитивности.

2. $E \subset X$ называют *хорошо разбивающим*, если $\forall A \in \mathcal{A} \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Можно доказать, что класс хорошо разбивающих множеств $\bar{\mathcal{A}}$ является σ -алгеброй, а μ^* – мерой и является стандартным продолжением μ .

□

Определение 5.6. Мера Лебега λ_n на \mathbb{R}^n – стандартное продолжение объёма. σ -алгебра, на которой она определена, обозначается \mathcal{M}_n .

Свойство 5.1. Все борелевские множества измеримы по Лебегу.

Доказательство. σ -алгебра борелевских множеств – наименьшая, содержащая Cell_n , поэтому она содержится в \mathcal{M}_n . □

Свойство 5.2. Мера Лебега точки – ноль.

Доказательство. Это следует из того, что внешняя мера точки ноль, потому что существует сколь угодно малая ячейка, которая её содержит. □

Свойство 5.3. Конечные и счётные множества имеют нулевую меру Лебега.

Доказательство. Из-за счётной аддитивности. □

Свойство 5.4. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство размерности меньше, чем n . Тогда его мера Лебега равна нулю.

Доказательство. Нужно покрыть ячейками и сделать оценку. □

Свойство 5.5. (Регулярность) Пусть $A \in \mathcal{M}_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся открытое G и замкнутое F такие, что

$$F \subset A \subset G, \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon, \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. В случае, когда E ограничено, это совсем просто: нужно взять покрывающий набор ячеек из определения внешней меры, и каждую ячейку приблизить открытым параллелепипедом, а потом проверить оценку. Чтобы получить замкнутое множество, придётся повторить это для дополнения E относительно какого-нибудь куба, содержащего E .

Для бесконечных надо доказать! □

Билет 6: Измеримость функции относительно σ -алгебры. Свойства измеримых функций.

Определение 6.1. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{A} , если для любого промежутка $\Delta \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$.

Определение 6.2. Множества вида $X[f < a] = \{x \in X \mid f(x) < a\}$ – множества Лебега 1 типа, а $X[f \leq a]$, $X[f > a]$, $X[f \geq a]$ – 2, 3, и 4 соответственно.

Теорема 6.1. Чтобы функция f была измерима относительно \mathcal{A} , достаточно, чтобы все множества одного из четырёх типов Лебега лежали в \mathcal{A} .

Доказательство.

1. $1 \rightarrow 2$:

$$X[f \leq a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} X\left[f < a - \frac{1}{k}\right].$$

2. $2 \rightarrow 3$: $X[f > a] = X \setminus X[f \leq a]$.

3. $3 \rightarrow 4$: так же, как $1 \rightarrow 2$.

4. $4 \rightarrow 1$: так же, как $2 \rightarrow 3$.

Имея множества Лебега всех четырёх типов, нетрудно получить из них все промежутки. □

Лемма 6.1. Любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ представимо, как счётное объединение ячеек.

Доказательство. Возьмём около каждой рациональной точки G окрестность в форме параллелипипеда, лежащую в G . Понятно, что из того, что множество рациональных точек всюду плотно, следует, что мы получили счётное открытое покрытие G .

В свою очередь, любой открытый параллелипипед легко представить, как объединение счётного количества ячеек. А счётное объединение счётных объединений – счётное объединение. □

Теорема 6.2. Пусть функции $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ измеримы, а функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $\varphi = g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима.

Доказательство. Т.к. функция g непрерывна, $G = \mathbb{R}^n[g < a]$ – открытое множество. Его можно представить, как

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$

где Δ_k – ячейки. Тогда

$$X[\varphi < a] = f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\Delta_k).$$

Пусть

$$\Delta_k = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i).$$

Тогда

$$f^{-1}(\Delta_k) = \bigcap_{i=1}^n X[a_i \leq f_i < b_i].$$

Поэтому

$$X[\varphi < a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^n X[a_i^{(k)} \leq f_i < b_i^{(k)}].$$

Это измеримое множество. □

Теорема 6.3. f, g измеримы \Rightarrow измеримы $f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}, |f|, \lambda f, f \vee g = \max\{f, g\}, f \wedge g = \min\{f, g\}, f^n$.

Доказательство. Довольно очевидное следствие предыдущей теоремы. \square

Теорема 6.4. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ измеримы, то измеримы и $\sup f_i, \inf f_i, \underline{\lim} f_i, \overline{\lim} f_i, \lim f_i$.

Доказательство.

1. $g = \sup f_i; X[g \leq a] = X[\forall i f_i \leq a] = \bigcap_{i=1}^{\infty} X[f_i \leq a]$.
2. Инфимум – аналогично.
3. $g = \lim f_i \Rightarrow (g(x) \leq a \Leftrightarrow \exists N: \forall i > N f_i(x) \leq a) \Rightarrow X[g \leq a] = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{i=N+1}^{\infty} X[f_i(x) \leq a]$.
4. Верхний и нижний пределы – пределы инфимумов и супремумов, поэтому эти результаты следуют из уже доказанного.

\square

Определение 6.3. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *простой* (относительно \mathcal{A}), если она измерима относительно \mathcal{A} и принимает конечное число значений.

Определение 6.4. Индикатором множества E называется функция

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Утверждение 6.1. Индикатор E прост (измерим) тогда и только тогда, когда измеримо E .

Утверждение 6.2. Пусть f – функция, которая принимает значения $\{a_i\}_{i=1}^N$ на множествах E_i . Тогда

$$f = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(a_i)} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

Утверждение 6.3. Функция f , принимающая конечное число значений, проста (измерима) тогда и только тогда, когда множества E_i измеримы.

Теорема 6.5. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность простых функций, имеющая предел, то этот предел измерим.

Теорема 6.6. Пусть f – неотрицательная измеримая функция. Тогда найдётся неубывающая последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ простых функций, которая поточечно сходится к f .

Доказательство. Разобьём $[0, +\infty)$ следующим образом:

$$[0, \infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k,$$

где

$$\Delta_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], & 0 \leq k < n^2, \\ [n, \infty), & k = n^2. \end{cases}$$

Пусть $e_k = f^{-1}(\Delta_k) \in \mathcal{A}$, $c_k = \min \Delta_k = \frac{k}{n}$ и

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n^2} c_k \mathbb{1}_{e_k}.$$

Рассмотрим $x \in e_k$. Начиная с некоторого n эта точка точно попадёт в e_k с $k < n^2$. Значение $f(x) \in \Delta_k = \left[c_k, c_k + \frac{1}{n} \right]$, поэтому

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

начиная с некоторого n . Отсюда следует поточечная сходимость.

Чтобы сделать последовательность функций неубывающей, сохранив сходимость, введём

$$\varphi_n = \max\{\psi_1, \dots, \psi_n\}.$$

Сходимость сохранится, т.к.

$$f - \frac{1}{n} \leq \psi_n \leq \varphi_n \leq f.$$

□

Билет 7: Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.

Определение 7.1. Пусть f – простая, и представлена, как

$$\sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k).$$

Если $A \in \mathcal{A}$, то

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A).$$

Утверждение 7.1. Если f – простая на X , то

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Доказательство.

$$f \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k \cap A}.$$

□

Определение 7.2. Пусть f – измеримая, неотрицательная функция. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ – простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

При этом

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

В следующих свойствах функции измеримые и неотрицательные.

Свойство 7.1.

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Доказательство. Очевидно из определения, для g супремум берётся по большему множеству функций. \square

Свойство 7.2.

$$A \subset B \subset X \Rightarrow \int_B f \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu.$$

Доказательство. Следует из предыдущего свойства. \square

Определение 7.3. Пусть f – произвольная измеримая функция. Определим

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}, \quad f_- = \max\{-f(x), 0\}.$$

Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$

Определение 7.4. f называется суммируемой на X , если интеграл от неё конечен. Семейство суммируемых функций обозначается, как $L(X, \mu)$.

Билет 8: Теорема Беппо Леви.

Теорема 8.1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций, и $f = \lim f_n$. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f_n \leq f &\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu, \\ f_n \leq f_{n+1} &\Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu \Rightarrow \exists \lim \int_X f_n \, d\mu = L. \end{aligned}$$

Из этих двух утверждений следует, что

$$L \leq \int_X f \, d\mu.$$

Теперь проверим неравенство в другую сторону. По определению

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\varphi} \int_X \varphi \, d\mu,$$

где φ – неотрицательные простые функции, не превосходящие f . Рассмотрим какую-нибудь φ :

$$\varphi = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k},$$

причём $c_k \geq 0$. Примем $c_0 = 0$; тогда понятно, что $E_0 = \emptyset \Leftrightarrow \varphi > 0$.

Возьмём $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \min\{c_1, \dots, c_p\}$ и

$$\varphi_\varepsilon = 0 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{k=1}^p (c_k - \varepsilon) \mathbb{1}_{E_k}.$$

Рассмотрим $X_n = X[f_n \geq \varphi_\varepsilon]$. Понятно, что $E_0 \subset X_n$.

Т.к. $f_n \rightarrow f$, для любой точки x найдётся n такое, что $f_n(x) > \varphi_\varepsilon(x)$, т.е.

$$\forall x \exists n: x \in X_n.$$

Поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Т.к. последовательность неубывающая, $X_n \subset X_{n+1} \Rightarrow \mu(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(X)$. Вообще, для любого измеримого A верно, что $\mu(A \cap X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$.

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq \int_{X_n} \varphi_\varepsilon d\mu = \sum_{k=1}^p (c_k - \varepsilon) \mu(X_n \cap E_k).$$

Устремляя n к бесконечности и ε к нулю, получим

$$L \geq \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k) = \int_X \varphi d\mu.$$

Переходя к супремуму, получим

$$L \geq \int_X f d\mu.$$

Значит, на самом деле есть равенство. □

Свойство 8.1. Пусть f, g – измеримые и неотрицательные функции. Тогда

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Доказательство. Нужно сначала проверить для простых функций, записав их через индикаторы и повозившись с суммами. После этого в общем случае можно выделить возрастающие последовательности простых функций, которые сходятся к f и g и воспользоваться теоремой Леви. □

Свойство 8.2.

$$\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Билет 9: Свойства интеграла от суммируемых функций.

Свойство 9.1. Пусть f, g – суммируемые, $f \leq g$. Тогда

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Доказательство. Расписать положительную и отрицательную части и свести к свойству для неотрицательных функций; суммируемость нужна, чтобы не вычитать бесконечность из неравенства. □

Свойство 9.2. ⁴ Пусть f, g – суммируемые. Тогда

$$\int_X f + g d\mu \leq \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

⁴В конспекте был \pm , но это ведь следует из умножения на константу? И, кстати, нужна ли тут вообще суммируемость, или это верно, даже когда интеграл расходится?

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.3. Если f – суммируемая, то

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.4. Пусть $f, g \in L$, $|f| \leq g \Rightarrow |\int f| \leq \int g$.

Доказательство.

$$|f| \leq g \Rightarrow f \leq g \wedge -f \leq g \Rightarrow \left(\int f \leq \int g \right) \wedge \left(-\int f \leq \int g \right) \Rightarrow \left| \int f \right| \leq \int g.$$

□

Свойство 9.5. $|\int f| \leq \int |f|$.

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего. □

Свойство 9.6. $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$.

Доказательство. \Leftarrow :

$$|f| = f_+ + f_- \Rightarrow 0 \leq f_{\pm} \leq |f| \Rightarrow 0 \leq \int f_{\pm} \leq \int |f|.$$

\Rightarrow : Если f суммируема, то суммируемы и f_{\pm} , а $|f|$ – их сумма. □

Свойство 9.7. $f \in L$, $\mu X < \infty$, $|f| \leq M \Rightarrow |\int f \, d\mu| \leq M\mu(X)$.

Доказательство.

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \leq \int M \, d\mu \leq M\mu(X).$$

□

Билет 10: Счётная аддитивность интеграла.

Теорема 10.1. Пусть f – измеримая функция, причём либо $f \geq 0$, либо $f \in L$. Тогда для любых измеримых A, A_1, \dots таких, что $A = \sqcup A_k$ верно, что

$$\int_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f.$$

Доказательство.

1. Пусть $f \geq 0$. Тогда

$$\int_A f = \int_X f \mathbb{1}_A, \quad \int_{A_n} f = \int_X f \mathbb{1}_{A_n}.$$

При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Rightarrow f \mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} f \mathbb{1}_{A_n}$$

Рассмотрим частичные суммы:

$$S_N = \sum_{n=1}^N f \mathbb{1}_{A_n}.$$

Понятно, что они образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к $f \mathbb{1}_A$, поэтому из теоремы Леви

$$\int f \mathbb{1}_A = \lim \int S_n = \lim \int \sum_{n=1}^N f \mathbb{1}_{A_n} = \lim \sum_{n=1}^N \int_{A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f.$$

2. Пусть теперь $f \in L$. Тогда просто расписать через f_{\pm} и воспользоваться первым пунктом. □

Билет 11: Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 11.1. Пусть $f \in L$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \text{ измеримого } A \subset X, \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1. Если f ограничена, то найдётся M такое, что $|f| \leq M$. Тогда

$$\left| \int_A f \right| \leq M \mu(A) \leq \varepsilon \text{ при } \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

2. Пусть теперь $f \in L$ и всё. Тогда $|f| \in L$, и

$$\int_X |f| = \sup_g \int_X g.$$

g – простая, а потому ограниченная.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ простая } g, 0 \leq g \leq |f|: \int_X |f| - \int_X g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя ограниченность g , находим по любому ε такую δ , что

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда мгновенно получается искомая оценка:

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| = \int_A g + \int_A (|f| - g) < \varepsilon.$$

□

Билет 12: Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.

Теорема 12.1. Пусть $f \in C([a, b])$ и λ – мера Лебега. Тогда f суммируема и

$$\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_a^b f.$$

Доказательство.

1. Сначала докажем, что f измерима по Лебегу. Заметим, что $f^{-1}((-\infty, a))$ – открытое множество, т.е. измеримое множество. А значит и функция f измерима.
2. $|f|$ ограничен, т.к. f – непрерывная функция на компакте, поэтому

$$\int_{[a, b]} |f| d\lambda \leq \int_{[a, b]} M d\lambda \leq M(b-a).$$

Значит, $|f|$ – суммируемая функция, а значит, и f – суммируемая функция.

3. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{[a, x]} f d\lambda.$$

Она определена, поскольку все интегралы будут конечны. Хочется доказать, что она дифференцируема.

Запишем, что значит непрерывность функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |\Delta x| < \delta \Rightarrow \forall t \in (x - \Delta x, x + \Delta x) f(t) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x (f(x) - \varepsilon) \leq \int_{(x, x+\Delta x]} f d\lambda \leq \Delta x (f(x) + \varepsilon).$$

Разделив на Δx и подставив интеграл посередине, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Но это значит, что $F'(x) = f(x)$! Поэтому значение нашего интеграла будет такое же, как по Риману.

□

Билет 13: Сравнение подходов Римана и Лебега

Есть три разных способа определить интеграл на отрезке:

1. (подход Ньютона-Лейбница) Если f непрерывна и F – её первообразная, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

2. (подход Римана)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n+1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

3. Наше текущее определение интеграла по мере.

Пример 13.1. Функция Дирихле $f: X = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Интеграл по Риману от неё не существует, потому что при сколь угодно малом ранге разбиения можно выбрать в каждом промежутке все ξ_i рациональными, и тогда значение суммы Римана будет равно длине отрезка, или иррациональными, и тогда значение суммы будет равно нулю. Поэтому предела этих сумм при ранге разбиения, стремящемся к нулю, не существует.

При этом f является простой функцией: она принимает два значения, при этом одно из них – на счётном (а значит, измеримом) множестве точек. Поэтому и его дополнение тоже измеримо – его мера равна 1. Поэтому интеграл Лебега от этой функции будет равен 0.

В суммировании по Риману основной принцип – разбить промежуток интегрирования на малые участки. В суммировании по Лебегу, напротив, на промежутки бьётся область значений, а промежуток интегрирования оказывается разбит на множества произвольной формы. Вид этой конструкции для интеграла Лебега подробно продемонстрирован в билете 6, в доказательстве теоремы о существовании сходящейся последовательности из простых функций.

Билет 14: Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом

Определение 14.1 (Напоминание). Пусть f непрерывна на $[a, b)$. Тогда *несобственный интеграл* по этому промежутку –

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f.$$

Теорема 14.1. Пусть непрерывная f либо неотрицательна, либо суммируема на $[a, b)$, тогда

$$\int_{[a, b)} f d\lambda = \int_a^{\rightarrow b} f.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x) = \int_{[a, x]} f.$$

Понятно, что⁵

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_a^{\rightarrow b} f,$$

потому что мы уже доказали, что интегралы по отрезку от непрерывной функции по Лебегу и по Риману совпадают.

Нужно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \int_{[a, b)} f.$$

Если f суммируема, то это следует из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (и существование предела оказывается совсем очевидным).

Рассмотрим случай, когда f неотрицательна, но не суммируема. Мы знаем, что интеграл Лебега от неё по $[a, b)$ равен $+\infty$, и нужно лишь доказать, что предел $F(x)$ существует и не может быть конечен. Существует он потому, что $F(x)$ будет функцией возрастающей. Конечным же он быть не может, потому что это противоречило бы теореме Леви, что сейчас и покажем.

Возьмём последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $[a, b)$, сходящуюся к b . Заметим, что

$$\lim \int_{[a, x_n]} f d\lambda = \lim \int_{[a, b)} f \mathbb{1}_{[a, x_n]} d\lambda.$$

Функции $f \mathbb{1}_{[a, x_n]}$ образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к f , поэтому по теореме Леви этот предел будет равен как раз $+\infty$. \square

⁵Если этот предел существует.

Пример 14.1. Условно сходящийся интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

не представим в виде интеграла по мере, потому что для этой функции этот интеграл просто не определён: f_+ и f_- одновременно не являются суммируемыми, что плохо.

Билет 15: Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью

Определение 15.1. Пусть X – множество, $\mathcal{A} = 2^X$ и есть не более чем счётные множества $\{a_i\} \in X$ и $\{m_i\} \in \mathbb{R}$. Тогда дискретная мера задаётся, как

$$\mu(E) = \sum_i m_i \delta_{a_i}(E).$$

Лемма 15.1. Интеграл от любой (измеримой) функции по множеству E нулевой меры равен нулю.

Доказательство. Для начала можно заметить, что для простых функций это точно так. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_E \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^p a_k \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{E_k \cap E}}_{=0} = 0.$$

Но тогда понятно, что для неотрицательных функций это тоже будет верно, потому что супремум нулей ноль. Ещё более очевидно, что для произвольных измеримых функций ничего не изменится. \square

Лемма 15.2. Интеграл от измеримой функции f по множеству a равен $f(a)\mu(\{a\})$.

Доказательство.

$$\int_{\{a\}} f = \int_X f \mathbb{1}_{\{a\}} = \int_X f(a) \mathbb{1}_{\{a\}} = f(a) \int_X \mathbb{1}_{\{a\}} = f(a) \mu(\{a\}).$$

\square

Теорема 15.1. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ либо неотрицательна, либо суммируема относительно дискретной меры. Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_k f(a_k) m_k.$$

Доказательство. Во-первых понятно, что относительно дискретной меры все функции измеримы. Во-вторых, если $E = X \setminus \{a_k\}$, можно записать

$$\int_X f d\mu = \int_E f d\mu + \sum_k \int_{\{a_k\}} f d\mu = \sum_k f(a_k) m_k.$$

Неотрицательность или суммируемость использовалась для счётной аддитивности. \square

Утверждение 15.1. Для дискретной меры суммируемость функции равносильна абсолютной сходимости ряда, записанного в предыдущей теореме.

Доказательство. Суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. Модуль же функция неотрицательная, для него выполняется предыдущая теорема, и интеграл от него равен сумме из модулей. Значит, и их сходимости равносильны. \square

Пример 15.1. Если, например, взять $X = \mathbb{N}$, $a_k = k$ и $m_k = 1$, то мера будет обозначать просто сумму значений функции в точках. Функция из \mathbb{N} в \mathbb{R} – ряд, а суммируемость – абсолютная сходимость.

Определение 15.2. Пусть X – пространство с мерой μ , и есть измеримая неотрицательная функция $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда можно ввести меру

$$\nu(E) = \int_E \rho d\mu.$$

Утверждение 15.2. ν и правда мера.

Доказательство. Первая аксиома очевидна, а вторая следует из теоремы о счётной аддитивности интеграла – ведь наша ρ неотрицательна. \square

Теорема 15.2. Пусть f измерима на X и либо неотрицательна, либо суммируема относительно ν . Тогда

$$\int_X f d\nu = \int_X f \rho d\mu.$$

Доказательство.

1. Пусть сначала f – простая:

$$f = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int_X f d\nu = \sum_{k=1}^p a_k \nu(E_k) = \sum_{k=1}^p a_k \int_{E_k} \rho d\mu = \sum_{k=1}^p a_k \int_X \mathbb{1}_{E_k} \rho d\mu = \int_X f \rho d\mu.$$

2. Если f – измеримая неотрицательная, можно выделить неубывающую неотрицательную последовательность простых, сходящуюся к ней. От умножения на g она этих свойств не потеряет, поэтому равенство благополучно перенесётся по теореме Леви.

3. Ну и для произвольной суммируемой нужно просто написать.

\square

Определение 15.3. ρ называют *плотностью* меры ν относительно меры μ .

Пример 15.2. Например, мера Коши с

$$\rho = \frac{1}{1+x^2}.$$

Билет 16: Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению.

16.1 Интеграл по мере Лебега-Стилтьеса.

Определение 16.1. Пусть I – интервал на прямой, $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ – возрастающая, непрерывная слева ($F(x) = F(x-0)$) функция. Введём функцию

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Она счётно-аддитивна на Cell_1 ⁶ Стандартное продолжение этой функции на σ -алгебру называется *мерой Лебега-Стилтьеса*.

⁶Кажется, это делается примерно так же, как с обычным объёмом. Но вообще там тоже было не очень строго, да и как-то грустно это.

Утверждение 16.1. Все борелевские множества измеримы по Лебегу-Стилтьесу.

Доказательство. Рассуждение одинаково для всех мер, распространённых с ячеек. \square

Свойство 16.1. Пусть $\Delta = [a, b]$. Тогда $\mu(\Delta) = F(b+0) - F(a)$.

Доказательство. Нужно рассмотреть сходящуюся к отрезку справа последовательность ячеек. \square

Свойство 16.2. $\mu(\{a\}) = f(a+0) - f(a) = f(a+0) - f(a-0) = \Delta f_a$.

Свойство 16.3. $\mu((a, b)) = f(b) - f(a+0)$.

Утверждение 16.2. Любая мера, определённая на борелевских множествах, есть мера Лебега-Стилтьеса для некоторой F .

Доказательство. Это выглядит довольно логичным, но на паре доказательства не было. \square

Утверждение 16.3. Если F — гладкая на I , и $\Delta \subset I$ — ячейка, то

$$\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F' d\lambda.$$

Доказательство. Очевидно. \square

Утверждение 16.4. Это верно не только для ячеек, но и для множеств произвольной формы. На самом деле, в такой ситуации мера по сути задаётся плотностью F' .

Теорема 16.1. Пусть F — кусочно-гладкая (и обладает остальным, чтобы задать меру) на I , т.е. найдутся $c_i \in I$ такие, что F гладкая на (c_i, c_{i+1}) . Пусть f измерима (относительно борелевской алгебры \mathcal{B}) и либо суммируема относительно μ_F , либо неотрицательна. Тогда

$$\int_I f d\mu_F = \sum \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) F'(x) dx + \sum f(c_i) \Delta_{c_i}.$$

Доказательство. Надо I разбить на точки c_i и промежутки между ними. Интеграл по точкам выражается через скачки, потому что мы знаем, что интеграл в точке равен произведению значения f на меру точки. Ну а на интервалах мера по сути задаётся плотностью: про такое мы уже всё знаем. \square

16.2 Интеграл по образу меры

Определение 16.2. Пусть X — пространство с мерой, и есть $f: X \rightarrow Y$. Назовём $E \subset Y$ измеримым относительно f , если $f^{-1}(E)$ измеримо.

Утверждение 16.5. Множество измеримых относительно f множеств образует σ -алгебру.

Доказательство. Нужно просто проверить это. \square

Определение 16.3. Введём меру ν на Y следующим образом: $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$.

Утверждение 16.6. ν действительно мера.

Доказательство. Просто проверить. \square

Теорема 16.2. Пусть g — измеримая относительно заданной f σ -алгебры функция $Y \rightarrow \mathbb{R}$, причём либо неотрицательная, либо суммируемая относительно ν . Тогда

$$\int_Y g d\nu = \int_X g \circ f d\mu.$$

Доказательство.

1. Для простых функций проверяется легко: там будет сумма коэффициентов, умноженных на меры множеств, вот эти меры и нужно раскрыть.
2. Если g неотрицательна, то можно взять неубывающую последовательность неотрицательных простых, сходящуюся к g . Т.к. композиция с g этого свойства не испортит, дальше просто теорема Леви.
3. Для суммируемых тоже как обычно: нужно просто написать g_{\pm} .

□

16.3 Интеграл по распределению.

Определение 16.4. Распределением измеримой функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(X) < \infty$ называется

$$F(t) = \mu(X[f < t]).$$

Свойство 16.4. F не убывает.

Доказательство. Это следует из того, что мера подмножества не превосходит меры множества. □

Свойство 16.5. F непрерывна слева.

Доказательство. Следует из непрерывности меры снизу. □

Теорема 16.3. Пусть $\mu(X) < \infty$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и либо неотрицательна, либо суммируема. Тогда

$$\int_X f d\mu = \int_{\mathbb{R}} t d\mu_F.$$

Доказательство. Убедимся, что $\mu_F = \nu = \mu \circ f^{-1}$, как в теореме про образ меры. Для ячеек это проверяется тривиально:

$$\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a) = \mu(X[f < b]) - \mu(X[f < a]) = \mu(X[a \leq f < b]) = \mu(f^{-1}([a, b))).$$

Отсюда это вроде бы следует даже для борелевских множеств.

Но тогда

$$\int_{\mathbb{R}} t d\mu_F = \int_X f d\mu.$$

Конечность меры X нужна, чтобы F гарантированно существовала. В принципе, такое бывает и без неё. □

Билет 17: Интеграл Эйлера-Пуассона

Теорема 17.1.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 = \pi.$$

Доказательство. Найдём распределение функции $f(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$.

$$-e^{-(x^2+y^2)} < t \Rightarrow x^2 + y^2 < -\ln(-t) \Rightarrow F(t) = \mu(\mathbb{R}^2[x^2 + y^2 < -\ln(-t)]) = -\pi \ln(-t).$$

На самом деле, если внимательно следить за граничными значениями, то

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ -\pi \ln(-t), & -1 < t \leq 0, \\ +\infty, & t > 0. \end{cases}$$

Теперь мы по сути применяем слегка искажённые версии предыдущих теорем, потому что $\mu(X)$ не конечна, поэтому и F определена не на всём \mathbb{R} , а только до нуля. Но, кажется, это не сильно изменит их доказательств, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{-1}^0 t(-\pi \ln t)' dt = -\pi.$$

Значит, искомый интеграл равен π . □

Билет 18: Вероятностный смысл меры и интеграла.

Собственно, довольно легко строится соответствие между понятиями теории меры и теории вероятностей.

1. Множество X – множество элементарных событий.
2. σ -алгебра \mathcal{A} – множество событий, её элемент – событие.
3. Мера μ – вероятность (но только $\mu(X) = 1$).
4. Измеримая функция f – случайная величина.
5. Распределение функции F – распределение случайной величины.
6. $\int_X f d\mu$ – матожидание случайной величины.

Пример 18.1. Самый простой пример – кубик. Для этого надо рассмотреть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с понятием какой мерой.

Пример 18.2 (Задача Бюффона). На плоскости есть бесконечно много параллельных прямых с расстоянием d между соседними, и на неё кидают отрезок длины a случайным образом. Какова вероятность, что он пересечёт одну из прямых?

Пусть h – расстояние от нижней точки отрезка до ближайшей (снизу) линии, а α – угол от горизонтали. Этими двумя координатами положение отрезка задаётся однозначно (с учётом симметрии задачи,) причём все точки равноправны между собой.

Поэтому естественно сказать, что $X = [0, d) \times [0, \pi)$ – множество исходов, \mathcal{A} – множество измеримых по Лебегу подмножеств X , а мера $P(A) = C\lambda_2(A)$. Поскольку $P(X) = 1$,

$$C\lambda_2(X) = 1 \Rightarrow C \cdot \pi \cdot d = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi d}.$$

При этом множество исходов, когда пересечение происходит, задаётся неравенством

$$a \sin \alpha \geq d - h.$$

Отсюда

$$h \geq d - a \sin \alpha.$$

Площадь соответствующей области можно найти, как

$$\int_0^\pi a \sin \alpha d\alpha = 2a \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi d} \cdot 2a = \frac{2a}{\pi d}.$$

Билет 19: Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика).

19.1 «Почти всюду» и вариации теоремы Леви.

Определение 19.1. Пусть (X, μ) – пространство с мерой, и задана функция $P: X \rightarrow \{0, 1\}$ (утверждение, которое либо правдиво, либо ложно). Говорят, что P верно почти всюду, если $\mu(X[P = 0]) = 0$.

Лемма 19.1. Если $f(x) = 0$ почти всюду, то

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Доказательство. Можно заметить, что такая функция автоматически измерима. Ну а дальше просто разбить на два множества и записать интегралы. \square

Лемма 19.2. Пусть f и g суммируемы, причём $f = g$ почти везде. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu.$$

Доказательство. Интеграл разности будет равен нулю по предыдущей лемме. \square

Лемма 19.3 (Теорема Леви для рядов). Пусть $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность неотрицательных измеримых функций из X в \mathbb{R} . Тогда

1.

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty u_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X u_n \, d\mu.$$

2. Если эти два равных числа конечны, то ряд сходится почти всюду⁷.

Доказательство.

1. Пусть S_n – частичная сумма ряда, и $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ⁸. По теореме Леви тогда

$$\int S = \lim \int S_n.$$

Ну а дальше очевидно.

2. Пусть

$$\int_X S \, d\mu < \infty.$$

Рассмотрим E – множество точек, где ряд расходится. Выберем на E неубывающую неотрицательную последовательность простых функций g_n , сходящуюся к S : $g_n(x) = n$. По теореме Леви

$$\lim \int g_n = \int S.$$

Но

$$\lim \int g_n = \lim n\mu(E) = \infty,$$

если $\mu(E) \neq 0$. А такого не может быть, потому что в этой ситуации интеграл по X будет тоже ∞ , что не так. \square

Лемма 19.4 (Теорема Леви «вверх ногами»). Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – невозрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций из X в \mathbb{R} . Пусть f_1 суммируема. Тогда

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n.$$

Доказательство. Рассмотрим $g_n = f_1 - f_n \geq 0$. При этом g_n возрастают и неотрицательные. Ну тогда по теореме Леви

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int f_1 - \int f.$$

Т.к. все функции суммируемы, можно всё перенести, и получится то, что надо. \square

⁷А разве левое выражение определено, если ряд хоть где-то расходится? Ну то есть вроде можно определить, но это же странно, честно говоря.

⁸Почему конечен?

19.2 Кратные интегралы

Определение 19.2. Введём пару обозначений. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Возьмём какой-нибудь $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда проекция сечения E на \mathbb{R}^n «вертикальной линией» записывается, как

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\},$$

проекция множества E на \mathbb{R}^m обозначается, как

$$\pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \emptyset\},$$

и проекция сечения E на \mathbb{R}^m «горизонтальной линией» записывается, как

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in E\}.$$

Теорема 19.1 (Принцип Кавальери). Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ измеримо. Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m.$$

Доказательство.

1. Для ячеек проверяется в лоб.
2. Если

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k – ячейки, то

$$E_x = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x,$$

а дальше используется первый пункт, аддитивность меры и теорема Леви для рядов.

В таком виде можно представить любой элемент Cell_{n+m} . Ещё мы знаем, что открытое множество можно представить в виде счётного объединения ячеек, а значит можно и в виде дизъюнктного⁹

3. Пусть E – множество типа G_δ – счётное пересечение вложенных открытых множеств, мера первого из которых конечна¹⁰. Здесь должна работать «перевёрнутая» теорема Леви.
4. Дальше вообще плохо понятно. Но вроде можно приблизить ограниченное E ограниченным G_δ так, чтобы разность M имела меру ноль. Утверждается, что M_x измеримы почти всегда, и их мера равна нулю, поэтому теорема верна и для разности, и для приближения, а потому и для E .
5. Если множество не ограничено, нужно представить его, как дизъюнктное объединение ограниченных. А потом повторить рассуждение про дизъюнктное объединение ячеек.

□

Теорема 19.2 (Мера подграфика). Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая и неотрицательная, а

$$\Gamma_-^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Тогда

1. Γ_-^f измерим.
- 2.

$$\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n.$$

⁹Хотя мы этого не доказывали, конечно...

¹⁰Вроде это можно сделать не умаляя общности. Кажется. По крайней мере для ограниченных множеств типа G_δ , можно, например, объединения пересекать.

Доказательство.

1. Если функция – индикатор измеримого множества, то вроде бы должно быть очевидно, хотя вроде не так чтобы, ибо почему $\lambda_n(E) = \lambda_{n+1}(E \times [0, 1])$?
2. Переход к простой функции вроде бы и правда очевиден.
3. К произвольным измеримым как обычно, по теореме Леви.

□

Билет 20: Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тоннели и Фубини).

Теорема 20.1. (Тоннели) Пусть $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая неотрицательная функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x),$$

¹¹.

Доказательство.

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \lambda_{m+n+1} \Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} (\Gamma_-^f)_x d\lambda_m(x).$$

Введём функцию $\psi_x(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $\psi_x(y) = f(x, y)$. Тогда $(\Gamma_-^f)_x = \Gamma_-^{\psi_x}$, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} (\Gamma_-^f)_x d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1} \Gamma_-^{\psi_x} d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x).$$

□

Теорема 20.2. (Фубини) Пусть $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ – суммируемая функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d\lambda_{m+n}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(y) d\lambda_m(x),$$

Доказательство. Простое следствие из предыдущей.

□

Билет 21: Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании

Утверждение 21.1. Пусть T – параллельный перенос в \mathbb{R}^n . Тогда если E измеримо по Лебегу, то и $T(E)$ тоже, причём $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$.

Доказательство. Параллельный перенос переводит ячейки в ячейки с сохранением меры, поэтому он сохраняет внешнюю меру, а значит, он сохраняет и хорошо разбивающие множества. Поэтому он переводит измеримые в измеримые, сохраняя объём.

□

Теорема 21.1. Пусть L – линейное отображение. Тогда если E измеримо, то $L(E)$ тоже измеримо.

¹¹ Не знаю пока, что делать с измеримостями.

Почти доказательство. Если определитель равен нулю, то это очевидно, потому что подмножество линейного пространства меньшей размерности – множество меры ноль. Это следует из полноты меры.

Если определитель не равен нулю, то L – гомеоморфизм, поэтому, в частности, переводит открытые множества в открытые и множества типа G_δ в множества типа G_δ .

Посмотрим, что будет с $L(E)$, если $\lambda E = 0$. Раз мера E равна нулю, можно покрыть E конечным набором ячеек $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ таким, что сумма их мер меньше ε^{12} . Понятно, что

$$L(E) \subset \bigcup_{k=1}^N L(\Delta_k).$$

При этом

$$\lambda(L(E)) \leq \sum_{k=1}^N \lambda(L(\Delta_k))$$

Рассмотрим какую-нибудь ячейку Δ со стороной δ . Тогда $\lambda(\Delta) = \delta^n$. Пусть $x, y \in \Delta$. Тогда

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L(x - y)\| \leq \|L\| \cdot \|x - y\| \leq \|L\| \delta \sqrt{n}.$$

Образ Δ точно можно вписать в ячейку с такой стороной, поэтому

$$\lambda(L(\Delta)) \leq \|L\|^n n^{\frac{n}{2}} \lambda(\Delta).$$

Это значит, что образ множества E тоже получится ограничить ячейками, поэтому мера образа тоже ноль.

Любое измеримое множество можно представить, как $A \setminus B$, где A класса G_δ , а B – меры ноль. Но это значит, что образ будет представлен так же, что даёт нам доказательство. \square

Теорема 21.2. Пусть L – линейное отображение. Тогда если E измеримо, то $\lambda(L(E)) = C\lambda(E)$.

Доказательство. Для начала можно положить $C = \lambda(L([0, 1]^n))$. Теперь хочется как-то доказать, что любая другая ячейка будет преобразовываться так же.

Идея доказательства этого заключается в том, чтобы сначала доказать это для ячеек вида $[0, k]^n$ и $[0, \frac{1}{k}]^n$, либо разбивая ячейки на $[0, 1]^n$, либо наоборот, пользуясь доказанным фактом про параллельный перенос. После же ячейку $[0, t]$ можно представить, как счётное объединение подходящих ячеек. \square

Лемма 21.1. Для отображения $L(x) = ax$ константа $C = a^n$.

Доказательство. Ну, тут ведь ячейка переходит в ячейку, объём можно просто посчитать. \square

Лемма 21.2. Для отображения L с диагональной матрицей C равна модулю произведения диагональных членов.

Доказательство. Тут тоже можно просто посчитать объём ячейки. \square

Лемма 21.3. Для ортогонального L константа C равна 1.

Доказательство. Оно переводит единичный шар в себя. \square

Теорема 21.3. Для произвольного L верно, что $C = |\det L|$.

Доказательство. Можно представить L как $U_1 \circ D \circ U_2$, где U_1 и U_2 ортогональные, а D – диагональное. Дальше очевидно. \square

¹²Это следует из того, что набор точно можно сделать дизъюнктым, например.

Билет 22: Преобразование меры Лебега при гладком отображении

Теорема 22.1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкая инъекция. Тогда

$$\forall \text{ измеримого } E \subset G \quad \lambda(F(E)) = \int_E |J_F(x)| \, dx,$$

где $J_F(x)$ — якобиан F в точке x .

Идея доказательства. Докажем только для $E = \Delta$ — ячейки. Рассмотрим разбиение

$$\Delta = \bigsqcup_k \Delta_k.$$

Пусть x_k — угол k -й ячейки.

$$F(x) = \underbrace{F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)}_{\Phi(x)} + o(x - x_k).$$

$\Phi(x) = y_k + dF(x_k; x) = y_k + L(x)$. Тогда

$$\lambda(L(\Delta)) = \sum_k \lambda(L(\Delta_k)) \approx \sum_k |\det dF(x_k; x)| \lambda(\Delta_k) = \sum_k J_F(x_k) \lambda(\Delta_k).$$

Измельчая разбиение, получим утверждение теоремы. □

Билет 23: Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты).

Теорема 23.1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — C^1 -гладкая инъекция, $E \in F(G)$ — измеримое множество. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ — измеримая и либо неотрицательная, либо суммируемая функция. Тогда

$$\int_E f = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$

Доказательство.

1. Пусть

$$f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{B_k}.$$

Тогда

$$f \circ F = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)}.$$

При этом

$$\int_E f = \sum_{k=1}^p c_k \lambda(B_k) = \sum_{k=1}^p c_k \int_{F^{-1}(B_k)} |J_F| = \sum_{k=1}^p c_k \int_{F^{-1}(B_k)} |J_F| \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)} = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$

2. Для неотрицательных — теорема Леви, как всегда, для суммируемых расписать f_{\pm} . □

Пример 23.1. Полярные координаты задаются уравнениями

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

По сути, у нас есть гладкая инъекция $F: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Можно найти якобиан:

$$J_F = y'_\varphi x'_r - x'_\varphi y'_r = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Поэтому если E – измеримое подмножество \mathbb{R}^2 , то

$$\int_E f = \int_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot r.$$

Для сферических координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

якобиан будет равен $r^2 \cos^2 \psi$.

Билет 24: Теорема Фату

Определение 24.1. Пусть на X задана мера μ . Тогда

- Говорят, что последовательность функций $f_n \rightarrow f$ почти везде по μ , если $\exists N \subset X$, $\mu(N) = 0$ такое, что $\forall x \in X \setminus N$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$.
- Говорят, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$ сходится по мере μ , если

$$\forall \sigma > 0 \quad \mu(X[|f_n - f| > \sigma]) \rightarrow 0.$$

Это самая слабая сходимость.

Теорема 24.1. Сходимость почти везде влечёт сходимость по мере.

Теорема 24.2 (Рисс). Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.

Теорема 24.3. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X , и $\mu(X) < \infty$ ¹³. Тогда

$$\lim \int_X f_n = \int_X f.$$

Доказательство. Нужно просто оценить разность. □

Теорема 24.4 (Фату). Пусть $\{f_n\}$ – неубывающая последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся¹⁴ к f . Тогда

$$\int_X \lim f_n \leq \lim \int_X f_n.$$

Доказательство.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\inf_{m \geq n} f_m(x)}_{g_n(x)} = \sup_n g_n(x).$$

¹³Кажется, ещё нужно, чтобы они были суммируемы.

¹⁴Здесь достаточно сходимости почти всюду, кажется. Но я не уверен.

g_n образуют неубывающую неотрицательную последовательность измеримых функций, поэтому к ним применима теорема Леви. Поэтому

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int \underline{\lim} f_n.$$

Очевидно, что $g_n \leq f_n$, поэтому

$$\int g_n \leq \int f_n \Rightarrow \underline{\lim} \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int g_n \leq \underline{\lim} \int f_n.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы. \square

Билет 25: Теорема Лебега об ограниченной сходимости.

Теорема 25.1. Пусть X – пространство с мерой μ , f_n измеримы и $f_n \rightarrow f$ почти всюду. Пусть существует $\varphi \in L: \forall n |f_n| \leq \varphi$ – выполняется условие Лебега \mathcal{L} . Тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

Доказательство. Из условия $-\varphi \leq f_n \leq \varphi \Rightarrow \varphi + f_n \geq 0$ и $\varphi - f_n \geq 0$. Для этих последовательностей выполняется теорема Фату:

$$\int \varphi + f \leq \underline{\lim} \int \varphi + f_n \Rightarrow \int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

и

$$\int \varphi - f \leq \underline{\lim} \int \varphi - f_n \Rightarrow \int f \geq \overline{\lim} \int f_n,$$

откуда

$$\int f = \lim \int f_n.$$

\square

Следствие 1. Пусть X – пространство с мерой μ , f_n измеримы и $f_t \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f$ почти всюду, где t – параметр, возможно многомерный. Пусть существует $\varphi \in L: \forall t \in V(t_0) |f_t| \leq \varphi$ – выполняется локальное условие Лебега \mathcal{L}_{loc} в окрестности t_0 . Тогда

$$\lim \int f_t = \int f.$$

Доказательство. Если переформулировать на языке последовательностей. \square

Следствие 2. В ситуации предыдущей теоремы, если f_t непрерывна в t_0 , то функция

$$\int_X f_t$$

непрерывна в t_0 .

Билет 26: Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Формулировка признаков Больцано-Коши, Дирихле и Абеля.

Здесь мы рассматриваем несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx = \lim_{A \rightarrow b-0} \int_a^A f(x, t) dx.$$

Пусть I сходится при $t \in T$. Естественно, здесь и далее предполагается, что все интегралы определены в том смысле, что функции измеримы, а ещё что все интегралы до $A < b$ конечны.

Определение 26.1. Интеграл I называют *равномерно сходящимся* на T , если

$$I^A(t) = \int_a^A f(x, t) dx \Rightarrow I(t),$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: \forall t \in T |b - A| < \delta \Rightarrow |I^A(t) - I(t)| < \varepsilon.$$

Теорема 26.1 (Больцано-Коши). Равномерная сходимость на T равносильна тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \in (a, b): \forall A_1, A_2 \in (A_0, b) \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 26.2 (Дирихле). Пусть

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t)g(x, t) dx,$$

причём

1.

$$f(x, t) \Rightarrow 0, \quad x \rightarrow b-0$$

на T , при этом монотонно убывая по x , и

2.

$$G(x, t) = \int_a^x g(\xi, t) d\xi; \quad \exists M: |G(x, t)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in T.$$

Тогда интеграл I равномерно сходится на T .

Теорема 26.3 (Абея). Пусть

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t)g(x, t) dx,$$

причём

1. f убывает по $x \forall t$ и f равномерно ограничена: $|f(x, t)| \leq M \quad \forall x \forall t$.

2.

$$\int_a^{\rightarrow b} g(x, t) dx$$

равномерно сходится на T .

Тогда I равномерно сходится на T .

Билет 27: Формулировки основных теорем о несобственном интеграле с параметром.

Рассматриваем тот же интеграл с параметром.

27.1 Суммируемый случай.

$$\forall t \int_a^{\rightarrow b} |f(x, t)| dx < +\infty.$$

Теорема 27.1. Пусть $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f(x, t_0)$ для п.в. $x \in [a, b)$, и f удовлетворяет локальному условию Лебега в t_0 . Тогда $I(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} I(t_0)$.

Теорема 27.2. Пусть f дифференцируема по t для п.в. $x \in [a, b)$, и f'_t удовлетворяет локальному условию Лебега в t_0 . Тогда

$$I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Теорема 27.3. Пусть D – область изменения t , и $f \in L([a, b) \times D)$. Тогда

$$\int_D I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_D f(x, t) dt.$$

27.2 Случай равномерной сходимости

Теорема 27.4. Пусть $f(x, t)$ непрерывна по t в точке t_0 для почти всех $x \in [a, b)$, и интеграл I сходится равномерно на некоторой окрестности t_0 . Тогда I непрерывен в t_0 .

Теорема 27.5. Пусть f'_t существует для почти всех $x \in [a, b)$ и

1.

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx \text{ равномерно сходится на } T, \text{ где } T \text{ – интервал.}$$

2.

$$\int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t) dx \text{ равномерно сходится в окрестности } t_0.$$

Тогда существует

$$I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t_0) dx.$$

Теорема 27.6. Пусть $f \in C([a, b) \times [c, d])$, и пусть I равномерно сходится на $[c, d]$. Тогда

$$\int_c^d I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_c^d f(x, t) dt.$$

Билет 28: Γ -функция Эйлера. Её свойства.

Определение 28.1.

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \text{ – гамма-функция Эйлера.}$$

Утверждение 28.1. Гамма-функция определена при $t > 0$.

Доказательство. Заметим, что подинтегральное выражение неотрицательно. Сначала рассмотрим сходимость интеграла

$$\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx.$$

$x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1}$ вблизи нуля, поэтому он сходится при $t > 0$.

Теперь сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Сравним со сходящимся:

$$\frac{x^{t-1} e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{t+1}}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Это значит, что наш интеграл сходится на \mathbb{R} .

Поэтому в целом функция определена при $t > 0$. □

Свойство 28.1. $\Gamma(1) = 1$.

Свойство 28.2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Свойство 28.3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

Свойство 28.4. $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Свойство 28.5. Γ выпукла.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что $\Gamma \in C^\infty([0, +\infty))$. Рассмотрим производные подинтегрального выражения:

$$f_t^{(n)}(x, t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} (x^{t-1} e^{-x}) = x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}.$$

Чтобы использовать теоремы о несобственных интегралах, хочется $\forall n \geq 0$ и $\forall t_0 \in [0, +\infty)$ найти функцию $\varphi_n^{t_0} \in L([0, +\infty))$ такую, что

$$\exists V(t_0) = (t_1, t_2): \forall t \in V(t_0) \forall x \in [0, \infty) |f_t^{(n)}(x, t)| \leq \varphi_n^{t_0}(x).$$

Сначала сделаем эту оценку для интеграла от 0 до 1:

$$x^{t-1} < x^{t_1-1}, \ln^n(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^{-p}) \forall p > 0 \Rightarrow |\ln^n(x)| \leq \frac{C}{x^{\frac{t_1}{2}}}.$$

Отсюда вблизи нуля

$$|x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}| \leq \frac{C}{x^{1-\frac{t_1}{2}}} \in L.$$

Теперь интеграл от 0 до бесконечности.

$$\frac{x^{t-1} \ln^n(x)}{e^{\frac{x}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x^{t-1} \ln^n(x) < C e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow |x^{t-1} \ln^n(x) e^{-x}| \leq C e^{-\frac{x}{2}} \in L.$$

Функции найдены, поэтому по теоремам о несобственном интеграле можно вносить производную под знак интеграла.

2.

$$\Gamma''(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \ln^2(x) e^{-x} dx > 0 \Rightarrow \Gamma \text{ выпукла.}$$

□

Свойство 28.6. $\Gamma(t) \sim \frac{1}{t}$ вблизи нуля.

Свойство 28.7. $\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi} \sqrt{t} t^t e^{-t}$ вблизи бесконечности.

Свойство 28.8. $\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$.

Билет 29: B -функция и её сведение к Γ -функции.

Определение 29.1.

$$B(y, z) = \int_0^1 x^{y-1} (1-x)^{z-1} dx - \text{бета-функция.}$$

Интеграл сходится при $y, z > 0$.

Утверждение 29.1.

$$B(y, z) = B(z, y).$$

Утверждение 29.2.

$$B(y, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}.$$

Доказательство. Долго писать, посмотрите в конспекте, пожалуйста: тут просто выкладки. □

Билет 30: Объём n -мерного шара.

Утверждение 30.1. Пусть объём единичного n -мерного шара равен α_n . Тогда объём n -мерного шара радиуса R равен $R^n \alpha_n$.

Доказательство. Следует из теоремы о поведении меры Лебега при растяжении в R раз. □

Теорема 30.1.

$$\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Доказательство. n -мерный шар задаётся уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Если зафиксировать одну из координат, получится уравнение, задающее проекцию сечения соответствующей плоскостью:

$$x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 - x_1^2 = r(x_1)^2.$$

Согласно принципу Кавальери

$$\alpha_n = \int_{-1}^1 r(x_1)^{n-1} \alpha_{n-1} dx_1 = \alpha_{n-1} \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

Вычислим этот интеграл:

$$\int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \Big|_{x_1^2=t}^{x_1=\frac{dt}{2\sqrt{t}}} = \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1} dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Отсюда

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Теперь искомую формулу получить уже несложно. □

Глава 2 Дифференциальная геометрия

Билет 31: Регулярная кривая и её естественная параметризация

Определение 31.1. Под кривой в этой главе будем понимать гладкое отображение $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (иногда \mathbb{R}^2)¹.

Определение 31.2. Кривая называется *регулярной*, если её производная не обращается в ноль.

Определение 31.3. Регулярная кривая $r(t)$ называется *натурально параметризованной*, если

$$\int_a^t |r'(\tau)| d\tau = t.$$

Утверждение 31.1. У любой регулярной кривой существует эквивалентная натуральная параметризация.

Доказательство.

$$l(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau.$$

l – гладкая возрастающая функция из $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Раз она возрастающая, значит является инъекцией, раз непрерывная, то её образ – связный компакт, то есть отрезок. При этом непрерывная биекция из компакта в хаусдорфово – гомеоморфизм. Т.к. $|r'(\tau)|$ не обращается в ноль, обратная функция тоже будет класса C^1 вблизи каждой точки. Поэтому можно рассмотреть отображение $r \circ l^{-1}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$, и оно будет эквивалентно r в смысле, введённом нами в том семестре, т.е. будет по сути параметризацией той же кривой.² \square

Утверждение 31.2. Пусть $r(t)$ – регулярная кривая, а $r(s)$ – её натуральная параметризация. Тогда

$$\dot{r} = \frac{dr}{ds} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{r'}{|r'|}.$$

Билет 32: Кривизна кривой.

Определение 32.1. Пусть $r(s)$ – натурально параметризованная регулярная кривая, тогда $\tau = \dot{r}(s)$ – *единичный касательный вектор*.

Определение 32.2. Пусть $\Delta\theta = \angle(\tau(s), \tau(s + \Delta s))$. Тогда

$$k_1 = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta s} = |\dot{\theta}|$$

¹Под гладкостью, кажется, понимается минимум C^3 . Иногда её надо меньше, но бог с ней, пусть везде будет столько, сколько надо. Вопросы различия между путём и кривой оставим на потом, пожалуй.

²В многих местах мы будем слегка лукавить, обозначая разные параметризации одной буквой. Тут это не страшно.

Утверждение 32.1. $k_1 = |\dot{\tau}|$.

Доказательство. Из геометрии следует, что

$$|\Delta\tau| = 2 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right|.$$

Заметим, что

$$|\dot{\tau}| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\theta|}{\Delta s}.$$

□

Утверждение 32.2. Пусть $r(t) \in \mathbb{R}^n$ – регулярная кривая в \mathbb{R}^n , причём $|r(t)| = R$, т.е. кривая лежит на сфере. Тогда $r' \perp r$.

Доказательство.

$$R^2 = r \cdot r \Rightarrow 0 = (r \cdot r)' = 2rr'.$$

□

Определение 32.3.

$$R = \frac{1}{k_1} - \text{радиус кривизны кривой.}$$

Теорема 32.1. Пусть $r(t)$ – произвольно параметризованная гладкая регулярная кривая. Тогда

$$k_1 = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}.$$

Доказательство.

$$k_1 = |\dot{\tau}| = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right|.$$

Мы уже знаем, что

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{r'}{|r'|}, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) &= \frac{(\dot{r}')|r'| - |r'| \dot{r}'}{r'^2}. \end{aligned}$$

Распишем:

$$(\dot{r}') = \frac{dr'}{ds} = \frac{r''}{|r'|} \text{ и } |\dot{r}'| = \frac{d|r'|}{ds} = \frac{|r'|'}{|r'|}.$$

При этом

$$|r'|' = \sqrt{r' \cdot r'}' = \frac{1}{2|r'|} (r' \cdot r')' = \frac{r' \cdot r''}{|r'|}.$$

Подставим всё:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) = \frac{\frac{r''}{|r'|} |r'| - \frac{r' \cdot r''}{|r'|^2} r'}{r'^2} = \frac{r'' |r'|^2 - (r' \cdot r'') r'}{|r'|^4}.$$

Чтобы найти модуль, возведём это в квадрат:

$$\left(\frac{r'' |r'|^2 - (r' \cdot r'') r'}{|r'|^4} \right)^2 = \frac{r''^2 |r'|^4 - 2(r' \cdot r'')^2 |r'|^2 + (r' \cdot r'')^2 |r'|^2}{|r'|^8} = \frac{r''^2 r'^2 - (r' \cdot r'')^2}{|r'|^6}.$$

Заметим, что

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \alpha = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \alpha = |a|^2 |b|^2 - |a \cdot b|^2.$$

Поэтому

$$k_1 = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}.$$

□

Билет 33: Векторы τ , ν , β , абсолютное кручение, кручение кривой.

Определение 33.1. ν – вектор нормали к кривой в точке; определён там, где $k_1 \neq 0$.

Строгое обоснование. Пусть $r(s)$ – натуральная параметризация кривой. Тогда $\tau = \dot{r}(s)$ – единичный касательный вектор. Мы знаем, что $|\dot{r}| = k_1 \neq 0$; поэтому конец вектора τ , отложенный от начала координат, описывает регулярную кривую в пространстве. Т.к. $|\tau|$ постоянен, можно использовать последнюю теорему из последнего билета и понять, что $\dot{\tau} \perp \tau$. Таким образом, строгое определение вектора ν таково:

$$\nu = \frac{\dot{\tau}}{k_1}.$$

□

Определение 33.2. Пусть $r(s)$ – натурально параметризованная гладкая регулярная кривая с $k_1 \neq 0$. Тогда *соприкасающейся плоскостью* в точке называется плоскость, содержащая τ и ν .

Альтернативное определение. Пусть $P = r(s)$ – точка на кривой, и T – плоскость, содержащая P . Пусть h – перпендикуляр, опущенный из $r(s + \Delta s)$ на T . Если $|h| = o(\Delta s^2)$, то T – *соприкасающаяся плоскость*. □

Замечание 33.0. Если $k_1 = 0$ на некотором интервале, то наша кривая – прямая. Поэтому в смысле второго определения любая плоскость, проходящая через точку P и содержащая касательный вектор будет соприкасаться, ибо $|h| = 0$.

Теорема 33.1. Определения эквивалентны.

Доказательство. Пусть e – единичный вектор, ортогональный T . Найдём вектор h :

$$h = \alpha e; r(s + \Delta s) + h - r(s) \perp e \Rightarrow (r(s + \Delta s) + \alpha e - r(s)) \cdot e = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = (r(s) - r(s + \Delta s)) \cdot e \Rightarrow h \Rightarrow |h| = |(r(s) - r(s + \Delta s)) \cdot e|.$$

Заметим, что

$$r(s + \Delta s) - r(s) = \tau \Delta s + \frac{k_1 \nu}{2} \Delta s^2 + o(\Delta s^2).$$

Поэтому

$$|h| = \left| \tau \cdot e \Delta s + \nu \cdot e \frac{k_1 \Delta s^2}{2} + o(\Delta s^2) \right|.$$

Дальше утверждение становится очевидным. □

Теорема 33.2.

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \text{ — уравнение соприкасающейся плоскости в точке } (x, y, z).$$

Доказательство. У нас доказательства нет, кажется. Но для натуральной параметризации это очевидно из геометрических соображений. □

Определение 33.3. Вектор $\beta = \tau \times \nu$ – *бинормаль* к кривой. $|\dot{\beta}| = |k_2|$ – *абсолютное кручение* кривой в точке.

Определение 33.4. Тройка (τ, ν, β) называется *сопровождающим трёхгранником* или *сопровождающим репером*.

Теорема 33.3.

$$|k_2| = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{k_1^2} = \frac{|(r', r'', r''')|}{|r' \times r''|^2}.$$

Доказательство. $|k_2| = |\dot{\beta}|$, мы знаем, что $|\beta| = \text{const}$, поэтому $\beta \perp \dot{\beta}$. При этом

$$\dot{\beta} = \tau \times \dot{\nu} = \tau \times \dot{\nu} + \dot{\tau} \times \nu = \tau \times \dot{\nu} \Rightarrow \dot{\beta} \perp \tau.$$

В связи с этим $\dot{\beta} \parallel \nu \Rightarrow |\dot{\beta}| = |\dot{\beta} \cdot \nu|$.

$$\dot{\nu} = \frac{d}{ds} \frac{\dot{\tau}}{k_1} = \frac{\ddot{\tau}k_1 - \dot{\tau}\dot{k}_1}{k_1^2} \Rightarrow \tau \times \dot{\nu} = \frac{\tau \times \ddot{\tau}}{k_1} \Rightarrow |\dot{\beta}| = |\dot{\beta} \cdot \nu| = \left| \frac{(\dot{\tau}, \ddot{\tau}, \ddot{\tau})}{k_1^2} \right|.$$

Доказательство для произвольной параметризации – много выкладок. \square

Определение 33.5. *Кручение* –

$$k_2 = -\frac{(\dot{\tau}, \ddot{\tau}, \ddot{\tau})}{k_1^2}.$$

Билет 34: Формулы Френе. Теорема о восстановлении кривой по заданным кривизне и кручению.

Теорема 34.1. Пусть $r(s)$ – C^3 -гладкая, натурально параметризованная регулярная кривая с $k_1 > 0$. Тогда выполняются формулы Френе:

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k_1 \nu, \\ \dot{\nu} = -k_1 \tau - k_2 \beta, \\ \dot{\beta} = k_2 \nu. \end{cases}$$

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы следует третье равенство³.

$$\beta = \tau \times \nu \Rightarrow \nu = \beta \times \tau \text{ и } \tau = \nu \times \beta.$$

Отсюда

$$\dot{\nu} = \dot{\beta} \times \tau + \beta \times \dot{\tau} = k_2 \nu \times \tau + k_1 \beta \times \nu = -k_2 \beta - k_1 \tau.$$

\square

Утверждение 34.1. Если $k_2 = 0$, то решение – плоская кривая.

Теорема 34.2. Если задать k_1, k_2 , сопровождающий репер при $s = s_0$ и значение $r(s_0)$, причём $k_1 > 0$, то получится единственная кривая на $[0, A]$ (с точностью до параметризации).

Доказательство. НУО, пусть репер задан в точке $s = 0$, ну и значение $r(0)$. Тогда из теоремы о существовании и единственности решений ЛОСДУ функции τ, ν и β определены однозначно. Тогда можно найти $r(s)$:

$$r(s) = \int_0^s \tau(\sigma) d\sigma + r(0).$$

Дальнейшее пока пропустим. \square

Билет 35: Регулярная поверхность, касательная плоскость, первая квадратичная форма поверхности

Определение 35.1. *Поверхность* – отображение из $\varphi: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Поверхность называется *регулярной*, если $\text{rk } \varphi' = 2$.

Определение 35.2. Вектором *нормали* к поверхности $r(u, v)$ называют

$$N = r_u \times r_v; \quad n = \frac{N}{|N|} \text{ – единичная нормаль.}$$

³Только про знак не совсем очевидно.

Определение 35.3. Первая квадратичная форма поверхности –

$$I(u, v) = dr^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2.$$

Определение 35.4.

Определение 35.5. Касательная плоскость к поверхности – плоскость, натянутая на вектора r_u и r_v .

Билет 36: Вычисление длин и площадей с помощью первой квадратичной формы.

36.1 Длина кривой.

Определение 36.1. Кривой на поверхности $r(u, v)$ называется отображение $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое сопоставляет параметру t значения u и v .

Утверждение 36.1. Длина кривой γ на поверхности r находится, как

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I}.$$

Доказательство.

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r'(u, v)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(r_u u' + r_v v')^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r_u^2 u'^2 + 2r_u r_v u' v' + r_v^2 v'^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{I}.$$

□

Замечание 36.0. Первую квадратичную форму часто записывают в виде

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где ds – «элемент длины». Тут много записей, которые мы пока можем считать лишь формальными.

36.2 Мера Лебега на поверхности.

Здесь будет долгое определение меры Лебега на k -поверхности в \mathbb{R}^n . Эта самая поверхность – отображение $\varphi: G \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, видимо, как минимум класса C^1 .

1. Пусть сначала отображение φ линейное, т.е. поверхность является многомерной плоскостью. Рассмотрим вектора, в которые перейдёт стандартный базис \mathbb{R}^k : $a_k = \varphi(e_k)$. Заметим, что в случае $n = k$ мы знаем, чему будет равен объём натянутого на них параллелепипеда:

$$\lambda_k(\varphi(\Delta)) = |\det \varphi|.$$

Пусть L – матрица отображения φ . Тогда можно записать это иначе:

$$\lambda_k(\varphi(\Delta)) = \sqrt{\det L^T L}.$$

Введём обозначение для этой матрицы: $G = (g_{ij}) = L^T L$; $g_{ij} = a_i a_j$. Это матрица, составленная из скалярных произведений; она называется *матрица Грама*.

При этом естественно сказать, что при $k < n$ ответ на наш вопрос не изменится: представим на секунду, что наша поверхность – единичный квадрат, который превратило в параллелепипед и вложило в трёхмерное пространство. Понятно, что его можно перенести ортогональным преобразованием в такой же на плоскости, стандартным образом вложенный в пространство.

2. Теперь рассмотрим произвольную простую поверхность. Пусть $M = \varphi(D)$, $D \subset \mathbb{R}^k$ – открыто, $\varphi \in C^1$, $\text{rk } \varphi' = k$ и φ инъективно. φ называют параметризацией, а φ^{-1} – картой.

Определение 36.2. Касательное пространство – множество векторов, касательных к поверхности в точке, или

$$T_p(M) = \{\varphi'(p)(\Delta t) \mid \Delta t \in D\}.$$

Альтернативный подход. Можно ещё сказать, что это множество векторов, касательных к гладким кривым, проходящим через точку p . Этот подход гораздо проще обобщить. \square

Определение 36.3. Ну а гладкой k -мерной поверхностью в \mathbb{R}^n называют множество, каждая точка которого имеет окрестность, являющуюся k -мерной гладкой простой поверхностью.⁴

Здесь есть много наводящих рассуждений о том, почему мера определяется именно так, на самом деле идея всё та же – гладкое отображение локально линейно.

Определение 36.4.

$$\lambda_k M = \int_D \sqrt{\det G},$$

просто G теперь зависит от параметров: $G = \varphi'^T \varphi'$.

Теорема 36.1. Пусть $r(u, v)$ – поверхность, $u, v \in D$. Тогда её площадь

$$S = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Эта теорема очевидно следует из определения меры на поверхности.

Определение 36.5. Две поверхности называют изометричными, если между ними есть отображение, сохраняющее длины всех кривых.

Теорема 36.2. Если есть параметризация, при которой квадратичные формы поверхностей совпадают, то они изометричны.

Доказательство. Но тогда ведь длины будут одинаковые, т.к. интегралы будут одинаковые. \square

Билет 37: Вторая квадратичная форма. Эллиптическая, гиперболическая и параболическая точки поверхности.

Определение 37.1. Второй квадратичной формой поверхности называют

$$\mathbb{I} = -dr \cdot dn = L du^2 + 2N du dv + M dv^2,$$

где n – единичная нормаль.

Утверждение 37.1.

$$\mathbb{I} = d^2 r \cdot n = (r_{uu} \cdot n) du^2 + 2(r_{uv} \cdot n) du dv + (r_{vv} \cdot n) dv^2.$$

Доказательство. Я в упор не понимаю, как работает эта выкладка, но работает:

$$dr \perp n \Rightarrow dr \cdot n = 0 \Rightarrow 0 = d(dr \cdot n) = d^2 r \cdot n + dr \cdot dn.$$

\square

Определение 37.2. $z = \frac{1}{2}\mathbb{I}$ – соприкасающийся параболоид.

⁴Здесь проще сказать честное определение многообразия. Уже ведь очень недалеко.

Пояснение.

$$r - r_0 = \Delta r = dr + \frac{1}{2} d^2 r + \alpha \Rightarrow \Delta r \cdot n = \underbrace{dr \cdot n}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 r \cdot n + \alpha.$$

В координатах, в которых наша точка касания лежит в начале координат, а ось z направлена по нормали, это уравнение задаёт соприкасающийся параболоид. \square

Определение 37.3.

1. $\| > 0$ или $\| < 0$ – эллиптическая точка.
2. $\| > 0$ – гиперболическая точка.
3. $\| \geq 0$ или $\| \leq 0$ – точка «выпрямления» (как согнутый лист бумаги).
4. $\| = 0$ – точка уплощения.

Билет 38: Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны поверхности.

Теорема 38.1. Пусть на поверхности $r(u, v)$ расположена кривая, которая задана функциями $u = \varphi_1(t)$, $v = \varphi_2(t)$. Тогда её кривизна в любой точке равна

$$k = \frac{\|}{I \cos \theta},$$

где θ – угол между вектором ν нормали к кривой и вектором n нормали к поверхности.

Доказательство. Рассмотрим сначала натуральную параметризацию $\varphi(s)$. Пусть $\psi(s) = f(\varphi(s))$. Тогда

$$k_1 = |\ddot{\psi}(s)| = \frac{\ddot{\psi}(s) \cdot n}{\cos \theta}.$$

Заметим, что

$$\dot{\psi}(s) = f_u \dot{\varphi}_1 + f_v \dot{\varphi}_2 \Rightarrow \ddot{\psi}(s) \Rightarrow \ddot{\psi}(s) = (f_{uu} \dot{\varphi}_1 + f_{uv} \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_1 + f_u \ddot{\varphi}_1 + (f_{uv} \dot{\varphi}_1 + f_{vv} \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 + f_v \ddot{\varphi}_2.$$

Умножая на n , получим, что

$$\dot{\psi}(s) \cdot n = \frac{\|}{ds^2} \Rightarrow k_1 = \frac{\|}{ds^2 \cos \theta}.$$

Возвращаясь к нормальной параметризации, получим, что

$$k_1 = \frac{\|}{I \cos \theta}.$$

\square

Определение 38.1. Нормальной кривизной поверхности в точке P в направлении e называется

$$k_n = \frac{\|}{I}.$$

Другими словами, это кривизна кривой, лежащей на поверхности, проходящей через P в направлении e такой, что вектор $\nu \parallel n$.

Теорема 38.2 (Мёнье). Кривизна кривой на поверхности в точке зависит только от направления, в котором она проходит через неё, и от угла θ . Она вычисляется по формуле

$$k_0 = \frac{k_n}{\cos \theta}.$$

Теорема 38.3. В одном направлении нормальная кривизна достигает максимума k_1 , а в другом – минимума k_2 , причём если обозначить за θ угол от прямой, соответствующей максимуму, то

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

k_1 и k_2 называются *главными кривизнами* поверхности в точке.

Доказательство. Если разместить начало координат в нужной точке и направить z по нормали, то поворотом осей можно привести параболоид к виду

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Пусть некоторая прямая в касательной плоскости проходит через начало координат и точку (x_0, y_0) . Тогда нормальная кривизна в этом направлении будет равна

$$k_n = \frac{II(x_0, y_0)}{I(x_0, y_0)} = \frac{k_1 x_0^2 + k_2 y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} = k_1 \frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + k_2 \frac{y_0^2}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Это ровно то, что нужно. □

Билет 39: Полная (гауссова) кривизна. Теорема Гаусса.

Определение 39.1. Гауссова кривизна кривой в точке – произведение главных кривизн, обозначается K .

Определение 39.2. Сферическое отображение поверхности – отображение, которое точке поверхности сопоставляет единичный вектор нормали в ней (как точку единичной сферы).

Теорема 39.1. Пусть $\Gamma(U)$ – сферическое отображение U . Тогда

$$\lim_{U \rightarrow P} \frac{s(\Gamma(U))}{S(U)} = |K(P)|,$$

где K – гауссова кривизна в P , а U – окрестность точки P .

Доказательство. Чтобы посчитать, нужно сделать оценку через векторные произведения и теорему о среднем. □

Билет 40: Понятие о геодезической кривизне и геодезической кривой.

Формулировка теорема Гаусса-Бонне.

Определение 40.1. Пусть кривая, лежащая на поверхности, проходит через точку на ней. Вектор ν можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\nu = \nu_\tau + \nu_n.$$

Геодезической кривизной кривой называется $|\nu_\tau| = \kappa$. При этом $|\nu_n|$ – нормальная кривизна. Также кривизна проекции кривой на касательную плоскость равна геодезической кривизне.

Утверждение 40.1.

$$\kappa = \frac{|(\varphi''(t_0), \varphi'(t_0), n)|}{|\varphi'(t_0)|^3}.$$

Определение 40.2. Геодезическими кривыми называются кривые на поверхности, геодезические кривизны которых равны нулю.

Теорема 40.1 (Гаусса-Бонне). Пусть M – гладкая поверхность, $P = p_1 \dots p_k$ – криволинейный многогранник, $p_i p_{i+1} = \gamma_i$ – сторона. Тогда

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa ds = 2\pi - \int_P K dS.$$

Глава 3 Теория поля

Билет 41: Ориентация кривой, поверхности и пространства

Из физических соображений очень понятно, что иногда нужно проинтегрировать по кривой в одну сторону, а иногда – в другую; у поверхности есть нормаль, которая иногда смотрит в одну сторону, а иногда – в другую. Чтобы формализовать это, было введено понятие ориентации.

Определение 41.1. Рассмотрим два пути класса C^1 , т.е. отображения $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса C^1 . Будем говорить, что f и g задают одну и ту же кривую, если существует диффеоморфизм $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такой, что $f \circ \varphi = g$.

Определение 41.2. Назовём два пути, задающих одну и ту же кривую, *одинаково ориентированными*, если диффеоморфизм φ , связывающий их, возрастает. В противном случае будем говорить, что они *ориентированы по-разному*.

Замечание 41.0. Известно, что диффеоморфизмы отрезка в себя бывают либо возрастающие, либо убывающие; при этом можно доказать, что такой φ всегда единственен, поэтому ориентированность одинаково – отношение эквивалентности.

Эту ситуацию можно обобщить. Правда, в ситуации с большим числом размерностей нет возрастающих и убывающих функций: там речь будет идти о положительном и отрицательном якобиане. Сейчас я дам несколько более полное определение, чем нужно, но зато будет просто и понятно.

Определение 41.3. Пусть M – n -мерное гладкое многообразие. Назовём атлас \mathcal{A} , заданный на M , *ориентирующим*, если якобианы отображений перехода между всеми его картами положительны².

Определение 41.4. Многообразие M называется *ориентируемым*, если на нём существует ориентирующий атлас. *Ориентацией* на многообразии называют максимальный ориентирующий атлас, заданный на нём.

Утверждение 41.1. На связном ориентируемом многообразии положительной размерности существует ровно две ориентации.

Замечание 41.0. Конечно, всё это рассматривается на уже готовом многообразии, на котором есть гладкая структура – максимальный атлас. Максимальный ориентирующий атлас – это не то же самое, он меньше, чем наш максимальный атлас, хоть и включён в него.

Вообще здесь, безусловно, стоит повозиться, подумать и под доказывать, но как-нибудь потом.

Замечание 41.0. В случае с кривой выбор ориентации по сути равносильен выбору направления касательных векторов, а в случае с поверхностью – выбору направления нормали, т.е. тоже ориентации касательного пространства. Вообще, ориентация многообразия напрямую связана с ориентацией касательных пространств.

¹Отрезок возьмём единичным для удобства.

²Т.к. по определению многообразия они являются диффеоморфизмами, якобиан знак менять всё равно не может. На связных картах, по крайней мере.

Билет 42: Интеграл второго рода на кривой, на поверхности и в \mathbb{R}^3 как интеграл от векторного поля и как интеграл от дифференциальной формы.

Определение 42.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – область, $F: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладкое векторное поле, Γ – гладкая (ориентированная) кривая в G , $r: [a, b] \rightarrow G$ – её параметризация (соответствующая ориентации). Тогда интеграл II рода от поля вдоль кривой –

$$\int_{\Gamma} F \cdot \tau \, ds,$$

где τ – касательный вектор, а $ds = d\lambda_1$ – элемент длины.

Переформулировка.

$$ds = |r'(t)| \, dt, \quad \tau = \frac{1}{|r'(t)|} (x', y', z') \Rightarrow \int_{\Gamma} F \cdot \tau \, ds = \int_a^b (Px' + Qy' + Rz') \, dt = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz.$$

Мы представили интеграл II рода, как интеграл от дифференциальной формы ω . Если изменить ориентацию кривой, интеграл, конечно, поменяет знак.

Если форма *точная*, т.е. является дифференциалом некоторой функции Φ , то интеграл не зависит от выбора пути, и интеграл по контуру равен нулю. Нетрудно увидеть, что это эквивалентно тому, что поле F является градиентом функции Φ . Такое поле называют *консервативным*, или *потенциальным*. \square

Определение 42.2. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – двумерная гладкая ориентируемая регулярная поверхность. Тогда, если определить единичную нормаль к поверхности, как

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|},$$

интеграл второго рода по поверхности будет равен

$$\int_M F \cdot n \, dS,$$

где $ds = d\lambda_2$ – мера Лебега на поверхности.

Переформулировка.

$$r_u \times r_v = N = (A, B, C); \quad A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix},$$

откуда можно увидеть, что

$$ds = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u \cdot r_v)^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |N|.$$

Поэтому наш интеграл можно записать, как

$$\int_D PA + QB + RC \, du \, dv.$$

\square

Определение 42.3. Дифференциальная форма 2 порядка в \mathbb{R}^3 – выражение вида

$$P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy,$$

которое можно интегрировать, причём в зависимости от ориентации того, по чему интегрируешь,

$$dx \wedge dy = \begin{cases} dx dy, & \text{ориентация положительная,} \\ -dx dy & \text{ориентация отрицательная.} \end{cases}$$

Понятно, что операция \wedge внешнего умножения антисимметрична.³

Например, можно расписать

$$dy \wedge dz = (y_u du + y_v dv) \wedge (z_u du + z_v dv) = (y_u z_v - y_v z_u) du \wedge dv = A du \wedge dv.$$

Поэтому при положительной ориентации поверхности (т.е. $n = \frac{N}{|N|}$)

$$\int_M P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_D PA + QB + RC du dv.$$

Билет 43: Дифференцирование векторных полей (ротор, дивергенция).

Определение 43.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – область. Тогда *векторным полем* в G называют непрерывное отображение $G \rightarrow \mathbb{R}^3$, а *скалярным* – непрерывное отображение $G \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение 43.2. Множество векторных полей будем обозначать $\text{Vect}(G)$, а множество скалярных – $\text{Scal}(G)$ ⁴.

Определение 43.3. *Набла* – символический вектор

$$\nabla = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right).$$

На самом деле это векторный дифференциальный оператор.

Пусть на G есть векторное поле $F = (P, Q, R)$ и скалярное поле φ .

Определение 43.4. *Ротор* – отображение $\text{rot}: \text{Vect}(G) \rightarrow \text{Vect}(G)$:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Определение 43.5. *Дивергенция* – отображение $\text{div}: \text{Vect}(G) \rightarrow \text{Scal}(G)$:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz}.$$

Определение 43.6. *Градиент* – отображение $\text{grad}: \text{Scal}(G) \rightarrow \text{Vect}(G)$:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz} \right).$$

Билет 44: Формула Грина.

Теорема 44.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – гладкая ориентированная компактная область с гладкой границей Γ , на которой введена индуцированная ориентация (если область ориентирована положительно, то «область слева»). Тогда

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

³ Не кидайте в меня камней, я не знал, что с этим делать.

⁴ Вообще, мы их везде считаем гладкими, кажется.

Доказательство. Будем всё доказывать для ситуации, когда область ориентирована положительно, и $dx \wedge dy = dx dy$. Пусть сначала кривая $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, Γ_2 и Γ_4 вертикальны, а Γ_1 и Γ_3 заданы графиками функций $f_1 \leq f_2$, гладких на $[a, b]$. Пусть ещё $Q = 0$. Тогда

$$\int_{\Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_4} \omega = 0,$$

а

$$\int_{\Gamma_1} P dx = \int_a^b P(x, f_1(x)) dx \text{ и } \int_{\Gamma_3} P dx = - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x)) dx = - \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Рассмотрев ситуацию с аналогичным контуром и $P = 0$, можно найти

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_D \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

Чтобы перейти к произвольной ситуации, нужно разбить форму в сумму форм и разрезать область вертикальными и горизонтальными разрезами, сведя всё к уже решённой задаче. \square

Билет 45: Классическая формула Стокса

Теорема 45.1. Пусть M – ориентированная компактная гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 , Γ – её ориентированная граница, и в окрестности M есть гладкое векторное поле F . Тогда

$$\int_M \text{rot } F \cdot n ds = \oint_{\Gamma} F \cdot \tau ds.$$

Доказательство. Пусть $Q = R = 0$. Тогда

$$\int_M \text{rot } F \cdot n ds = \int_D AP du dv = \int_D (y_u z_v - y_v z_u) P du dv.$$

При этом

$$\oint_{\Gamma} F \cdot \tau ds = \oint_{\tilde{\gamma}} P(r(u, v)) x'_t dt = \oint_{\tilde{\gamma}} P(x_u u' + x_v v') dt.$$

Если применить к этому интегралу теорему Стокса, то докажется равенство. А после этого представить поле как сумму полей, видимо. \square

Билет 46: Формула Гаусса-Остроградского

Теорема 46.1. Пусть V – компактное тело в \mathbb{R}^3 с гладкой границей $M = \partial V$, F – гладкое векторное поле, определённое в окрестности V , n – направление внешней нормали к M . Тогда

$$\int_M F \cdot n ds = \int_V \text{div } F dV.$$

Доказательство.

1. Пусть $P = Q = 0$, а V – тело «типа z » зажатое вертикальными стенками между графиками функций $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, заданных на D . Тогда

$$M = M_{\text{бок}} \sqcup M_{\text{ниж}} \sqcup M_{\text{верх}}.$$

$$\int_{M_{\text{бок}}} F \cdot n \, ds = 0.$$

$$\int_{M_{\text{ниж}}} F \cdot n \, ds = \int_D RC \, dx \, dy.$$

Поверхность задана как

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f_1(x, y), \end{cases}$$

поэтому $C = 1$, откуда

$$\int_D RC \, dx \, dy = \int_D R(x, y, f_1(x, y)) \, dx \, dy.$$

Аналогично

$$\int_{M_{\text{верх}}} F \cdot n \, ds = \int_D RC \, dx \, dy = \int_D R(x, y, f_2(x, y)) \, dx \, dy.$$

Первый интеграл придётся взять с минусом, т.к. нужна внешняя нормаль. Поэтому

$$\int_M F \cdot n \, ds = \int_D R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y)) \, dx \, dy = \int_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dV.$$

2. Для произвольной поверхности её придётся разбить на много таких «типа z ».
3. А ещё надо рассмотреть тип x и y .

□

Билет 47: Физический смысл дивергенции и ротора

Ну, как обычно: дивергенция показывает источники поля, а ротор связан с его потенциальностью и совершением работы, а ещё с тем, как поле закручивает.

Билет 48: Потенциальное, безвихревое, соленоидальное, несжимаемое векторные поля. Характеристика полей в терминах интегралов.

Определение 48.1. Пусть F – векторное поле в $G \subset \mathbb{R}^3$.

1. Поле F называется *потенциальным*, если есть скалярное f такое, что $F = \text{grad } f$.
2. F называется *безвихревым*, если $\text{rot } F = 0$.
3. F называется *соленоидальным*, если есть векторное B такое, что $F = \text{rot } B$.
4. F называется *бездивергентным*, или *несжимаемым*, если $\text{div } F = 0$.

Утверждение 48.1. Соленоидальное всегда несжимаемое, а потенциальное всегда безвихревое.

Доказательство. Это несложно.

□

Утверждение 48.2. Форма ω точна, если $\omega = d\Omega$. Форма ω замкнута, если $d\omega = 0$.

Утверждение 48.3.

1. Поле потенциально $\Rightarrow \omega_F$ 1 порядка точная \Rightarrow интеграл по любой петле равен нулю.
2. Поле безвихревое $\Rightarrow \omega_F$ 1 порядка замкнутая \Rightarrow интеграл равен нулю для всех петель, на которые можно натянуть поверхность.
3. Поле соленоидально $\Rightarrow \omega_F$ 2 порядка точная \Rightarrow интеграл равен нулю для всех замкнутых поверхностей.
4. Поле несжимаемо $\Rightarrow \omega_F$ 2 порядка замкнутая \Rightarrow интеграл равен нулю для всех замкнутых поверхностей, которые являются границами тел.

Чтобы $2 \rightarrow 1$, нужно, чтобы любая петля стягивалась в точку. Чтобы $4 \rightarrow 3$, нужно, чтобы любая поверхность стягивалась в точку.

Билет 49: Примеры полей с различными свойствами. Центральное несжимаемое поле.

Посмотреть в пособии.

Глава 4 Анализ Фурье

Билет 50: Гильбертово пространство. Пространство \mathcal{L}_2 .

Определение 50.1. Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ и в нём задано *скалярное произведение* – отображение $\cdot: L \times L \rightarrow \mathbb{K}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $(y, x) = (x, y)$, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, или $(y, x) = \overline{(x, y)}$, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
4. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Тогда L называют *гильбертовым пространством*.

Определение 50.2. Пусть (X, μ) – пространство с мерой. Тогда \mathcal{L}_μ^2 – пространство, состоящее из всех измеримых функций из X в \mathbb{C} таких, что

$$\int_X |f|^2 d\mu < \infty.$$

На нём вводится скалярное произведение

$$f \cdot g = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

Замечание 50.0. Строго говоря, это не гильбертово, а *предгильбертово* пространство, т.к.

$$\|f\| = \sqrt{\int_X |f|^2 d\mu}$$

обращается в ноль, если f равна нулю почти везде, а не только если $f = 0$. Это можно исправить, если отождествить функции, разность которых имеет меру ноль. Пространство классов эквивалентности обозначают $L_\mu^2(X)$. На практике это не очень важно.

Утверждение 50.1. Пространство \mathcal{L} является *полным*.

Утверждение 50.2. Если $f_n \rightarrow f$, то $f_n \cdot g \rightarrow f \cdot g$.

Доказательство.

$$|f_n \cdot g - f \cdot g| = |(f_n - f) \cdot g| \leq \|f_n - f\| \|g\| \rightarrow 0.$$

□

Билет 51: Ортогональные ряды в гильбертовом пространстве. Теорема Пифагора. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.

Определение 51.1. Векторы f и g называют ортогональными, если $f \cdot g = 0$.

Теорема 51.1 (Пифагора). Пусть функции f_i попарно ортогональны, причём ряд

$$\sum_i f_i \text{ сходится.}$$

Тогда

$$\left\| \sum_i f_i \right\|^2 = \sum_i \|f_i\|^2.$$

Доказательство. Рассмотрим конечную сумму:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2,$$

т.к. остальные члены уходят в нуль из-за ортогональности. Если перейти к пределу, получится искомое равенство. \square

Определение 51.2. $\{e_i\}$ называется ортогональной системой, если все вектора попарно ортогональны и не равны нулю. И ортонормированной, если ещё и единичны.

Понятно, что ортогональная система является линейно независимой.

Утверждение 51.1. Пусть $\{e_k\}$ – ортогональная система. Тогда выражение

$$\left\| f - \sum_k a_k e_k \right\|$$

достигает минимума тогда и только тогда, когда

$$a_k = c_k(f) = \frac{f \cdot e_k}{\|e_k\|^2}.$$

Доказательство. Это классический геометрический результат, его и получить несложно. \square

Из доказательства в частности следует

Утверждение 51.2 (Неравенство Бесселя).

$$\sum_{k=1}^n |c_k(f)|^2 \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Определение 51.3. Пусть $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – ортогональная система, $f \in \mathcal{L}^2$. Тогда $c_n(f)$ называются коэффициентами Фурье, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_n e_n$$

называется рядом Фурье.

Определение 51.4. Ортогональная система называется базисом, если любая функция из \mathcal{L}^2 почти везде совпадает со своим рядом Фурье.

Билет 52: Классические ряды Фурье по тригонометрической и экспоненциальной схеме

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2\pi}^2$.

Определение 52.1. Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

называется *тригонометрической*, а система

$$\dots, e^{-2ix}, e^{-ix}, 1, e^{ix}, e^{2ix}, \dots$$

называется *экспоненциальной*.

Утверждение 52.1. Тригонометрическая и экспоненциальная система являются ортогональными.

Утверждение 52.2. Ряд Фурье для f по тригонометрической системе имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Утверждение 52.3. Ряд Фурье по экспоненциальной системе имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

Билет 53: Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега.

Замечание 53.0. Хотелось заметить, что т.к.

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} = (c_k + c_{-k}) \cos kx + i(c_k - c_{-k}) \sin kx,$$

между двумя системами есть связь:

$$a_k = c_k + c_{-k} \text{ и } b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Поэтому логично понимать сходимость для ряда Фурье в экспоненциальной системе сходимостью симметричных комбинаций, в смысле главного значения. Тогда она будет эквивалентна сходимости в тригонометрической системе.

Определение 53.1. Ядром Дирихле называют функцию

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

Утверждение 53.1.

1.

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2. D_n имеет период 2π .

3. $D_n(-x) = D_n(x)$.

4.

$$\int_a^{a+2\pi} D_n(x) dx = 2\pi.$$

Доказательство. Руками. □

Определение 53.2. Ядро Фейера – функция

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Утверждение 53.2.

1.

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. F_n чётная.

3. F_n имеет период 2π .

4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 2\pi.$$

Доказательство. Тоже руками. □

Лемма 53.1 (Римана-Лебега). Пусть $f \in L(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(nx) dx, \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx, \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{inx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. 1. Если функция имеет вид $f = \chi_{[a,b]}$, то это проверяется руками. Для индикатора другого множества (ограниченного) можно вписать его в отрезок и прижать.

2. Значит и для простых функций работает.

3. Для произвольной функции нужно лишь приблизить её близкой простой. □

Билет 54: Теорема Дини о поточечной сходимости и следствия из неё.

Теорема 54.1. Пусть $f \in \mathcal{L}_{2\pi}^1$, $x \in \mathbb{R}$, и в точке x функция удовлетворяет условию Дини:

$$u(t) = \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} - \frac{2L}{t}; \int_0^{\pi} u(t) dt < \infty.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_k e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_n(u) du. \end{aligned}$$

При этом

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2L D_n(u) du,$$

поэтому

$$s_n(x) - L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+u) + f(x-u) - 2L) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_x(u) \sin(n + \frac{1}{2})u du,$$

где

$$g_x(u) = (f(x+u) + f(x-u) - 2L) \frac{1}{\sin \frac{u}{2}}.$$

Можно подобрать такую C , что

$$|g_x(u)| \leq \frac{C}{u} |f(x+u) + f(x-u) - 2L|$$

Отсюда следует суммируемость g , а тогда наш интеграл стремится к нулю по лемме Римана-Лебега. \square

Следствие 3. Если существуют конечные $f(x-0)$, $f(x+0)$, $f'_+(x)$, $mf'_-(x)$, то f удовлетворяет условию Дини с $L = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Доказательство. Я пока не совсем понял, хотя для непрерывной f это вроде понятно. \square

Билет 55: Свойства коэффициентов Фурье

Утверждение 55.1. Пусть $\hat{f}(n)$ – соответствующий коэффициент Фурье. Если $f \in L^1_{2\pi}$, то $\hat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство. Это следует из теоремы Римана-Лебега, если записать выражение для коэффициента. \square

Утверждение 55.2. Пусть $\hat{f}(n)$ – соответствующий коэффициент Фурье. Если $f' \in L^1_{2\pi}$, то $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ и $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.

Доказательство. Нужно расписать по частям. \square

Аналогичное утверждение формулируется для $f^{(p)}$.

Утверждение 55.3. Пусть $c_n = o(\frac{1}{n^{p+2}})$, тогда есть $\varphi \in C^p_{2\pi}$ такая, что $\varphi = f$ почти везде, и $c_n = \hat{f}(n) = \hat{\varphi}(n)$.

Доказательство. φ определяется, как сумма ряда. \square

Билет 56: Формулировки результатов о сходимости рядов Фурье (включая теорема Фейера).

Теорема 56.1.

1. f суммируема \Rightarrow коэффициенты ряда определены.
2. f имеет конечную норму \Rightarrow ряд Фурье сходится к функции по норме.
3. f гладкая $\Rightarrow c_n$ убывают быстро, и наоборот.
4. f суммируема $\Rightarrow \forall \Delta \in [-\pi, \pi]$:

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \text{V.P.} \sum_{k=-n}^n c_k \int_{\Delta} e^{ikx} dx.$$

5. Теорема Дини.

6. Если f непрерывна, то $\|f - \sigma_n\|_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(x)| \rightarrow 0$, где $\sigma_n = \frac{S_n}{n}$. Эта сходимость называется *сходимостью по Чезаро*, а признак – теорема Фейера.

Билет 57: Преобразование Фурье и его свойства. Интегральная формула Фурье.

Определение 57.1. Пусть f суммируема на \mathbb{R} , тогда

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx - \text{преобразование Фурье.}$$

Свойство 57.1. $|\hat{f}(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$.

Свойство 57.2. \hat{f} непрерывна, если f суммируема.

Доказательство. Теорема о мажорированной сходимости. □

Свойство 57.3. Если $g(x) = x^n f(x)$ и g суммируема, то $\hat{f} \in C^n$.

Доказательство. Нужно внести производную под интеграл и увидеть, что интеграл будет равномерно сходиться. □

Свойство 57.4. Аналогичные рядам свойства про скорость убывания.

Свойство 57.5. $g(x) = f(x - a) \Rightarrow \hat{g}(s) = e^{-isa} \hat{f}(s)$.

Свойство 57.6. $f * g(s) = 2\pi \hat{f} * \hat{g}$.

Свойство 57.7. Обратное преобразование Фурье: если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ измерима, то

$$\hat{f}(x) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds.$$

Оно работает, когда выполняется условие Дини.