Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов
записал со слов лектора А. А. Лодкина

31 мая 2017 г.

Глава 1 Теория меры

Билет 1: Алгебры и σ-алгебры множеств.

Определение 1.1. Пусть X – некоторое множество. Тогда $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй,* если выполняются следующие условия:

1. $\varnothing,\, X \in \mathcal{A}$,
2. $A,\, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\, A \cap B,\, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, $|\mathcal{A}| < \infty$. Тогда $|\mathcal{A}| = 2^n$ для некоторого n.

Доказательство. Так как $X \in \mathcal{A}$, каждый элемент X содержится как минимум в одном элементе $\mathcal{A}$. Пусть $A(x)$ – пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$, содержащих x. Понятно, что $A(x)$ непусто, т.к. $x \in A(x)$. Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили $A(x)$, как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение: $A(x)$ – такое множество, что если $x \in B \in \mathcal{A}$, то $A(x) \subset B$ [1].

2. Введём отношение на X: пусть $x \sim y$, если $A(x) = A(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$.

   Пусть $y \in A(x)$. Предположим, что $A(y) \neq A(x)$. Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо $A(y)$ содержит элемент, которого нет в $A(x)$, либо наоборот. Пусть первое. Тогда $B = A(x) \cap A(y)$ – элемент $\mathcal{A}$, который содержит y и строго меньше $A(y)$, чего не может быть. Пусть второе. Тогда если $A(y)$ не содержит x, то $A(x) \setminus A(y)$ является элементом $\mathcal{A}$, содержащим x, а если содержит, то снова $A(x) \cap A(y)$ является таким элементом. Причём строго меньшим, чем $A(x)$, что опять ведёт нас к противоречию.

   Пусть $A(x) = A(y)$. Предположим, что $y \notin A(x)$. Но тогда $y \notin A(y)$, что точно ложь.

3. Разобьём X на классы эквивалентности по отношению $\sim$; обозначим множество этих классов $\hat{\mathcal{A}}$. Понятно, что $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$, ведь $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{A}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}$. Докажем, что если $B \cap \hat{B} \neq \varnothing$, то $B \cap \hat{B} = \hat{B}$.

   Предположим противное: пусть $x \in B \cap \hat{B}$ и $y \in \hat{B} \setminus B$. Из определения отношения эквивалентности понятно, что $\hat{B} = A(x) = A(y)$. Но заметим тогда, что $\hat{B} \setminus B$ – множество из $\mathcal{A}$, содержащее y и строго меньшее $\hat{B}$, чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое $B \in \mathcal{A}$ можно представить, как объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$: просто для каждого $b \in B$ взять $A(b)$ и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$ лежит в A. Т.к. элементы $\hat{\mathcal{A}}$ не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}$ объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами $2^{\hat{\mathcal{A}}}$ и $\mathcal{A}$. Поэтому количество элементов $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

$\square$

Примеры привести не очень сложно, не будем здесь на этом останавливаться.

[1] Заметим, что мы существенно испльзуем конечность $\mathcal{A}$ каждый раз, когда говорим, что $A(x) \in \mathcal{A}$!

Определение 1.2. *σ-алгеброй* называется алгебра, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$. Тогда наименьншая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$, называется *борелевской оболочкой* $\mathcal{E}$ и обозначается $\sigma(\mathcal{E})$. (Ссылаясь на факт, который уже упоминался в упражнении, заметим, что $\sigma(\mathcal{E})$ совпадает с пересечением всех σ-алгебр, содержащих E).

Лемма 1.1. Если $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$, то $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Доказательство. Из определения борелевской оболочки понятно, что

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{E}_1)).$$

При этом понятно, что правая часть равна $\sigma(\mathcal{E}_1)$, чего нам и надо. □

Билет 2: Борелевская σ-алгебра.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{O}_n$ – множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда σ-алгебра $\sigma(\mathcal{O}_n)$ называется *борелевской*.

Определение 2.2. Назовём *n-мерной ячейкой* такое подмножество $\mathbb{R}^n$:

$$n = 1 \Rightarrow \Delta = \begin{cases} [a,\, b),\ [a,\, \infty); \\ (-\infty,\, b),\ (-\infty,\, \infty); \end{cases}$$

$$n > 1 \Rightarrow \Delta = \prod_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

где Δ_i – одномерные ячейки.

Определение 2.3. Назовём *n-мерной алгеброй ячеек* множество

$$\mathrm{Cell}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где Δ_i – ячейки.

Утверждение 2.1. Cell_n – действительно алгебра.

Доказательство. Чтобы сделать, нужно увидеть, что пересечение ячеек – ячейка, а потом представить пересечение объединений, как объединение пересечений. □

Теорема 2.1. $\sigma(\mathrm{Cell}_n) = \sigma(\mathcal{O}_n)$.

Доказательство. Зная последний результат из предыдущего билета, имеем возможность доказывать, что

$$\mathrm{Cell}_n \subset \sigma(\mathcal{O}_n) \text{ и } \mathcal{O}_n \subset \sigma(\mathrm{Cell}_n).$$

Это даст нам утверждение теоремы.

Первое включение очевидно: можно представить любую ячейку, как пересечение вложенных прямоугольников, например. Поэтому и с объединением проблем не будет.

Чтобы доказать второе, рассмотрим сначала ячейки с целыми вершинами, назовём их ячейками первого ранга. Побив каждую из них на 2^n частей (поделив каждую сторону на 2), получим ячейки второго ранга, продолжая процесс – ячейки ранга n. Пусть U – произвольное открытое множество, а U_k– объединение всех ячеек ранга k, пересекающих U.

Рассмотрим x – произвольную точку не из U. Т.к. U открыто, существует такое ε, что

$$B_\varepsilon(x) \cap U = \varnothing.$$

Заметим однако, что если ячейка ранга k, то её сторона равна 2^{1-k}, а значит, диагональ –

$$\sqrt{n}2^{1-k}.$$

Эта последовательность стремится к нулю при k стремящемся к бесконечности, поэтому можно сделать так, что диагональ ячейки станет меньше, чем ε, при всех $k > K$. Из этого будет следовать, что при $k > K$ $x \notin U_k$.

Отсюда следует, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow U \in \sigma(\mathrm{Cell}_n) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathrm{Cell}_n).$$

□

Утверждение 2.2. Борелевской σ-алгебре принадлежат множества следующих типов:

1. Точки.
2. Открытые, замкнутые.
3. Не более чем счётные.
4. Счётные пересечения открытых множеств – множества типа G_δ.
5. Счётные объединения замкнутых – множества типа F_σ.
6. Счётные объединения множеств типа G_δ – множества типа $G_{\delta\sigma}$.
7. Счётные пересечения множеств типа F_σ – множества типа $F_{\sigma\delta}$.