Анализ, 4 семестр

Михаил Пирогов
записал со слов лектора А. А. Лодкина

4 июня 2017 г.

Оглавление

Глава 1 Теория меры

Билет 1: Алгебры и σ-алгебры множеств.

Определение 1.1. Пусть X – некоторое множество. Тогда $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй,* если выполняются следующие условия:

1. $\varnothing$, $X \in \mathcal{A}$,
2. A, $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Упражнение 1. Пусть $\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, $|\mathcal{A}| < \infty$. Тогда $|\mathcal{A}| = 2^n$ для некоторого n.

Доказательство. Так как $X \in \mathcal{A}$, каждый элемент X содержится как минимум в одном элементе $\mathcal{A}$. Пусть $A(x)$ – пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$, содержащих x. Понятно, что $A(x)$ непусто, т.к. $x \in A(x)$. Разобьём дальнейшее доказательство на несколько пунктов:

1. Мы определили $A(x)$, как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее некоторому свойству. Поэтому у него есть эквивалентное определение: $A(x)$ – такое множество, что если $x \in B \in \mathcal{A}$, то $A(x) \subset B$ [1].

2. Введём отношение на X: пусть $x \sim y$, если $A(x) = A(y)$. Очевидно, что это отношение эквивалентности. Докажем, что $x \sim y \Leftrightarrow y \in A(x)$.

   Пусть $y \in A(x)$. Предположим, что $A(y) \neq A(x)$. Тогда выполняется минимум одно из двух утверждений: либо $A(y)$ содержит элемент, которого нет в $A(x)$, либо наоборот. Пусть первое. Тогда $B = A(x) \cap A(y)$ – элемент $\mathcal{A}$, который содержит y и строго меньше $A(y)$, чего не может быть. Пусть второе. Тогда если $A(y)$ не содержит x, то $A(x) \setminus A(y)$ является элементом $\mathcal{A}$, содержащим x, а если содержит, то снова $A(x) \cap A(y)$ является таким элементом. Причём строго меньшим, чем $A(x)$, что опять ведёт нас к противоречию.

   Пусть $A(x) = A(y)$. Предположим, что $y \notin A(x)$. Но тогда $y \notin A(y)$, что точно ложь.

3. Разобьём X на классы эквивалентности по отношению $\sim$; обозначим множество этих классов $\hat{\mathcal{A}}$. Понятно, что $|\hat{\mathcal{A}}| < \infty$, ведь $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Пусть $B \in \mathcal{A}$ и $\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}$. Докажем, что если $B \cap \hat{B} \neq \varnothing$, то $B \cap \hat{B} = \hat{B}$.

   Предположим противное: пусть $x \in B \cap \hat{B}$ и $y \in \hat{B} \setminus B$. Из определения отношения эквивалентности понятно, что $\hat{B} = A(x) = A(y)$. Но заметим тогда, что $\hat{B} \setminus B$ – множество из $\mathcal{A}$, содержащее y и строго меньшее $\hat{B}$, чего не может быть.

4. Из сделанного нетрудно увидеть, что любое $B \in \mathcal{A}$ можно представить, как объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$: просто для каждого $b \in B$ взять $A(b)$ и объединить их все. При этом понятно, что любое объединение множеств из $\hat{\mathcal{A}}$ лежит в A. Т.к. элементы $\hat{\mathcal{A}}$ не пересекаются, нетрудно увидеть, что отображение, сопоставляющее множеству $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}$ объединение всех его элементов есть биекция – биекция между множествами $2^{\hat{\mathcal{A}}}$ и $\mathcal{A}$. Поэтому количество элементов $\mathcal{A}$ имеет искомый вид.

$\square$

Примеры привести не очень сложно, не будем здесь на этом останавливаться.

[1] Заметим, что мы существенно испльзуем конечность $\mathcal{A}$ каждый раз, когда говорим, что $A(x) \in \mathcal{A}$!

Определение 1.2. *σ-алгеброй* называется алгебра, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$. Тогда наименьншая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$, называется *борелевской оболочкой* $\mathcal{E}$ и обозначается $\sigma(\mathcal{E})$. (Ссылаясь на факт, который уже упоминался в упражнении, заметим, что $\sigma(\mathcal{E})$ совпадает с пересечением всех σ-алгебр, содержащих E).

Лемма 1.1. Если $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$, то $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Доказательство. Из определения борелевской оболочки понятно, что

$$\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{E}_1)).$$

При этом понятно, что правая часть равна $\sigma(\mathcal{E}_1)$, чего нам и надо. □

Билет 2: Борелевская σ-алгебра.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{O}_n$ – множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда σ-алгебра $\sigma(\mathcal{O}_n)$ называется *борелевской*.

Определение 2.2. Назовём *n-мерной ячейкой* такое подмножество $\mathbb{R}^n$:

$$n = 1 \Rightarrow \Delta = \begin{cases} [a,\, b),\ [a,\, \infty); \\ (-\infty,\, b),\ (-\infty,\, \infty); \end{cases}$$
$$n > 1 \Rightarrow \Delta = \prod_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

где Δ_i – одномерные ячейки.

Определение 2.3. Назовём *n-мерной алгеброй ячеек* множество

$$\mathsf{Cell}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

где Δ_i – ячейки.

Утверждение 2.1. Cell_n – действительно алгебра.

Доказательство. Чтобы сделать, нужно увидеть, что пересечение ячеек – ячейка, а потом представить пересечение объединений, как объединение пересечений. □

Теорема 2.1. $\sigma(\mathsf{Cell}_n) = \sigma(\mathcal{O}_n)$.

Доказательство. Зная последний результат из предыдущего билета, имеем возможность доказывать, что

$$\mathsf{Cell}_n \subset \sigma(\mathcal{O}_n) \text{ и } \mathcal{O}_n \subset \sigma(\mathsf{Cell}_n).$$

Это даст нам утверждение теоремы.

Первое включение очевидно: можно представить любую ячейку, как пересечение вложенных прямоугольников, например. Поэтому и с объединением проблем не будет.

Чтобы доказать второе, рассмотрим сначала ячейки с целыми вершинами, назовём их ячейками первого ранга. Побив каждую из них на 2^n частей (поделив каждую сторону на 2), получим ячейки второго ранга, продолжая процесс – ячейки ранга n. Пусть U – произвольное открытое множество, а U_k– объединение всех ячеек ранга k, пересекающих U.

Рассмотрим x – произвольную точку не из U. Т.к. U открыто, существует такое ε, что

$$B_\varepsilon(x) \cap U = \varnothing.$$

Заметим однако, что если ячейка ранга k, то её сторона равна 2^{1-k}, а значит, диагональ –

$$\sqrt{n}\, 2^{1-k}.$$

Эта последовательность стремится к нулю при k стремящемся к бесконечности, поэтому можно сделать так, что диагональ ячейки станет меньше, чем ε, при всех $k > K$. Из этого будет следовать, что при $k > K$ $x \notin U_k$.

Отсюда ясно, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \Rightarrow U \in \sigma(\mathsf{Cell}_n) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathsf{Cell}_n).$$

□

Утверждение 2.2. Борелевской σ-алгебре принадлежат множества следующих типов:

1. Точки.
2. Открытые, замкнутые.
3. Не более чем счётные.
4. Счётные пересечения открытых множеств – множества типа G_δ.
5. Счётные объединения замкнутых – множества типа F_σ.
6. Счётные объединения множеств типа G_δ – множества типа $G_{\delta\sigma}$.
7. Счётные пересечения множеств типа F_σ – множества типа $F_{\sigma\delta}$.

Билет 3: Мера на алгебре. Примеры мер.

Определение 3.1. Пусть X – множество, $\mathcal{A}$ – алгебра на X. Тогда *мерой* на $\mathcal{A}$ называется отображение μ: $\mathcal{A} \to [0, \infty]$, удовлетворяющее двум свойствам:

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Если $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство дизъюнктных[2] множеств из $\mathcal{A}$, то

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Пример 3.1. Пусть $\mathcal{A} = 2^X$, и $a \in X$ – произвольная точка. Введём меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, \ a \in A, \\ 0, \ a \notin A. \end{cases}$$

Проверка аксиом. Первое свойство, конечно, выполняется; чтобы проверить второе, можно увидеть, что в семействе дизъюнктных множеств точка может содержаться лишь в одном из них. □

Такая мера называется *дельта-мерой, атомической мерой* или *мерой Дирака,* обозначается, как δ_a. В физике порой рассматривается (на $\mathbb{R}$), как интеграл от *дельта-функции Дирака* – такой функции, что она равна нулю всюду, кроме a, а интеграл по всей прямой от неё равен 1.

Пример 3.2. В той же ситуации вместо точки a зафиксируем не более, чем счётное множество точек $\{a_k\}$. Меру определим, как

$$\mu(A) = \sum_k m_k \delta_{a_k}(A),$$

где m_k – некторые фиксированные неотрицательные вещественные числа, *веса*. Такая мера называетсяя*молекулярной*.

[2]Попарно непересекающихся друг с другом. Если в объединении участвует семейство дизъюнктных множеств, то будем его обозначать $\sqcup$ вместо $\cup$, забывая упоминать дизъюнктность.

Проверка аксиом. Первая снова тривиальна, вторая следует из счётной аддитивности дельта-меры (на самом деле, тут нужно воспользоваться теоремой о перестановке/группировке членов в абсолютно сходящемся ряде; т.к. всё положительно, никакой условной сходимости тут не бывает, и при перестановке/группировке членов сохраняется как сходимость, так и расходимость). □

Пример 3.3. В той же ситуации пусть
$$\mu(A) = |A|.$$

Билет 4: Свойства меры

Свойство 4.1 (Монотонность)**.** Пусть $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Доказательство.
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A).$$
□

Свойство 4.2. Пусть $A,\ B \in \mathcal{A},\ A \subset B,\ \mu B < \infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$.

Доказательство.
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$
Условие $\mu(B) < \infty$ было использовано, когда мы вычли $\mu(A)$ из двух частей равенства; действительно, по предыдущему свойству $\mu(A) \leqslant \mu(B) < \infty$, поэтому $\mu(A)$ можно вычитать. [3] □

Свойство 4.3 (Усиленная монотонность)**.** Пусть $A_1,\ ...,\ A_n,\ B \in \mathcal{A},\ A_1,\ ...,\ A_n \subset B$, причём множества A_k дизъюнктные. Тогда
$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu(B).$$

Доказательство. Очевидно. □

Свойство 4.4 (Полуаддитивность)**.** Пусть $A_1,\ ...,\ A_n,\ B \in \mathcal{A},\ B \subset \cup A_k$. Тогда
$$\mu(B) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Доказательство. Введём семейство множеств:
$$C_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$
Нетрудно понять, что они дизъюнктны; при этом
$$\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = \cup A_k,$$
потому что никаких точек извне $\cup A_k$ в это объединение точно попасть не может, а для любой точки a из $\cup A_k$ можно взять наименьшее k_0 такое, что $a \in A_{k_0}$; тогда $a \in C_{k_0}$.

Из этого следует, что B можно представить, как
$$B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap C_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} D_k.$$

Заметим, что
$$\mu(D_k) = \mu(B \cap C_k) \leqslant \mu(C_k) \leqslant \mu(A_k).$$
Поэтому и
$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu(D_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$
□

[3] Не достаточно ли потребовать, что $\mu(A) < \infty$?

Свойство 4.5 (Непрерывность меры снизу)**.** Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из $\mathcal{A}$, что $A_k \subset A_{k+1}$, и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(A) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$, причём $A_0 = \varnothing$ и $k \geqslant 1$. Тогда нетрудно увидеть, что C_k дизъюнктны, и

$$A_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} C_k.$$

При этом

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_k.$$

Но тогда искомое утверждение очевидно из второй аксиомы меры и определения суммы ряда. □

Свойство 4.6 (Непрерывность меры сверху)**.** Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – такое семейство множеств из $\mathcal{A}$, что $A_k \supset A_{k+1},\ \mu A_1 < \infty$ и

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Тогда $\mu(B) = \lim \mu(A_k)$.

Доказательство. Пусть $B_k = A_{k-1} \setminus A_k$, причём $A_0 = \varnothing$ и $k \geqslant 1$. Тогда нетрудно увидеть, что B_k дизъюнктны, и

$$A_k \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{k} B_k = A_1.$$

При этом

$$A \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_k = A_1.$$

Конечность всех мер позволяет завершить доказательство так же, как в прошлый раз, перенеся суммы рядов вправо и перейдя к пределу. □

Теорема 4.1. Если мера конечно-аддитивна и непрерывна снизу (или сверху), то она счётно-аддитивна.

Билет 5: Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега и её свойства.

Определение 5.1. *Объёмом* ячейки $\Delta = \sqcap\Delta_i$ в $\mathbb{R}^n$ называется

$$v_n(\Delta) = \prod_{i=1}^{n} |\Delta_i|.$$

Аналогично определим и объём открытых/замкнутых прямоугольников для удобства.

Утверждение 5.1. Любой элемент Cell_n можно представить, как дизъюнктное объединение ячеек (разбить на ячейки).

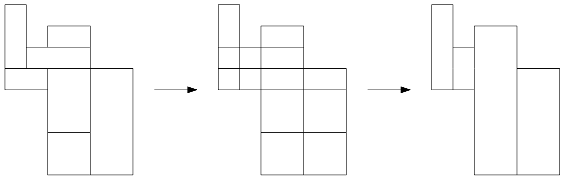
Набросок доказательства. Кажется, делается двойной индукцией по количеству ячеек. Предполагаем сначала, что мы научились объединение n прямоугольников представлять в виде дизъюнктного объединения нескольких ячеек. После этого делаем переход: доказываем, что если добавить $(n+1)$-ю ячейку, то всё равно получится.

Чтобы доказать переход, вновь применяем индукцию. Предположим, что мы доказали, что можем представить в виде дизъюнктного объединения объединение ячейки и дизъюнктного объединения k ячеек. А потом новый переход: добавляем $(k+1)$-ю. Здесь удобно рассматривать «сетчатую» конструкцию разбиения: на пути индукции всё время поддерживать разбиение таким, чтобы все разрезающие линии кончались на границе какой-нибудь из объединяемых в данный момент ячеек. □

Определение 5.2. *Объёмом* элемента Cell_n называется сумма объёмов ячеек, входящих в его разбиение.

Утверждение 5.2 (Корректность)**.** Объём элемента Cell_n не зависит от выбора разбиения.

Набросок доказательства. Обсудим сначала случай $n=2$. Проделаем с разбиением операции как на картинке, проверив, что объём в смысле нашего определения сохранится:



Если у нас было какое-то другое разбиение, мы получим какое-то другое разбиение на столбцы. После этого не очень трудно доказать, что два разбиения на столбцы задают одинкаовые объёмы: нужно просто нанести и те, и те линии, а после доказать, что «суммарное» разбиение задаёт тот же объём.

В n-мерном случае нужно действовать индукцией по размерности: основания «столбцов» будут многомерные, а независимость от разбиения для $n-1$ будет использоваться, когда мы будем смотреть на разбиения оснований. □

Теорема 5.1. Объём – конечно-аддитивная функция на Cell_n.

Доказательство. Теперь это очевидно: если в дизъюнктном объединении множеств из Cell_n разбить каждый элемент на ячейки, то мы получим разбиение объединения на ячейки; а в конечных суммах ассоциативность точно работает. □

Теорема 5.2. Объём – счётно-аддитивная функция на Cell_n.

Доказательство. Переформулируем утверждение: $A,\, A_1,\, \ldots \in \mathrm{Cell}_n$, $\sqcup A_i = A$. Доказать хочется, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(A_k) = v_n(A).$$

Рассмотрим сначала частный случай: пусть $A=\Delta$ и $A_k=\Delta_k$ – ячейки.

1. Пусть Δ – ограниченная ячейка в $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$. Тогда можно взять замкнутый параллелепипед $\Delta' \subset \Delta$ и открытый $\Delta'' \supset \Delta$ такие, что

   $$v_n(\Delta) - v_n(\Delta') < \varepsilon \text{ и } v_n(\Delta'') - v_n(\Delta) < \varepsilon.$$

   Явно они будут выглядеть, как

   $$\Delta = \prod_{k=1}^{n} [a_k,\, b_k),$$
   $$\Delta' = \prod_{k=1}^{n} \left[a_k,\, b_k - \frac{1}{i}\right],$$
   $$\Delta'' = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k + \frac{1}{i},\, b_k\right),$$

   где $i \in \mathbb{N}$.

Проделаем это для ячеек Δ и Δ_k:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta' \subset \Delta\colon v_n(\Delta') > v_n(\Delta) - \varepsilon$$
$$\forall k\ \exists \Delta_k \subset \Delta_k''\colon v_n(\Delta_k'') < v_n(\Delta_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\Delta'}_{\text{компакт}} \subset \Delta = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k''}_{\text{открытое покрытие}}.$$

По определению компакта

$$\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k''.$$

Теперь запишем объёмы:

$$v_n(\Delta') \leqslant v_n\left(\bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k''\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k'') < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + \varepsilon.$$

Используя неравенство для $v_n(\Delta')$ запишем

$$v_n(\Delta) < \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю и увеличивая сумму в правой части, имеем

$$v_n(\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k).$$

С другой стороны,

$$\bigsqcup_{k=1}^{N} \Delta_k \subset \Delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} v_n(\Delta_k) \leqslant v_n(\Delta) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_n(\Delta_k) \leqslant v_n(\Delta).$$

Поэтому на самом деле имеет место равенство.

2. Для неограниченной ячейки интересна лишь гипотетическая ситуация, в которой $v_n(\Delta) = \infty$, а сумма оказывается конечной (а значит, и все Δ_k ограниченные). Для неё вроде работает примерно та же оценка, что и в первом случае.

Понятно, что разбивать сразу можно на ячейки, а не на элементы Cell_n, потому что каждый из них разбивается на конечное число ячеек. Чтобы A тожн сделать ячейкой, нужно разбить его не конечное число ячеек, а потом немного изменить разбиения составных частей, чтобы каждая из этих ячеек разбивалась на составные ячейки составных частей. Лень. ☐

Поэтому объём – мера на алгебре Cell_n.

Определение 5.3. Мера μ на σ-алгебре $\mathcal{A}$ называется *полной,* если для любого $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\mu(A) = 0$ верно, что $\forall B \subset A\ \mu(B) = 0$.

Определение 5.4. Мера на алгебре $\mathcal{A}$ называется *σ-конечной,* если существуют X_k такие, что $\mu(X_k) < \infty$ и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X.$$

Например, уже введённый объём v_n – σ-конечная мера.

Определение 5.5. Пусть $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ – алгебры, и μ_1, μ_2 – меры на них. Тогда μ_2 называют *продолжением* μ_1, если $\mu_2|_{\mathcal{A}_1} = \mu_1$.

Теорема 5.3 (Лебега-Каратеодори). Пусть μ – σ-конечная мера на алгебре $\mathcal{A}$. Тогда:

1. Существуют её полные продолжения на σ-алгебры.
2. Среди них есть единственное продолжение $\overline{\mu}$ такое, что если μ' – полное продолжение μ, то $\overline{\mu}$ – полное продолжение μ'. Его называют *стандартным*.

Набросок доказательства.

1. Построим функцию $\mu^*\colon 2^X \to [0, \infty]$ таким образом:
$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)\middle|\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E\right\}.$$
Она называется *внешней мерой* для меры μ, но мерой не является: ей не хватает счётной аддитивности.
2. $E \subset X$ называют *хорошо разбивающим,* если $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Можно доказать, что класс хорошо разбивающих множеств $\overline{\mathcal{A}}$ является σ-алгеброй, а μ^* – мерой и является стандартным продолжением μ.

□

Определение 5.6. *Мера Лебега* λ_n на $\mathbb{R}^n$ – стандартное продолжение объёма. σ-алгебра, на которой она определена, обозначается $\mathcal{M}_n$.

Свойство 5.1. Все борелевские множества измеримы по Лебегу.

Доказательство. σ-алгебра борелевских множеств – наименьшая, содержащая Cell_n, поэтому она содержится в $\mathcal{M}_n$. □

Свойство 5.2. Мера Лебега точки – ноль.

Доказательство. Это следует из того, что внешняя мера точки ноль, потому что существует сколь угодно малая ячейка, которая её содержит. □

Свойство 5.3. Конечные и счётные множества имеют нулевую меру Лебега.

Доказательство. Из-за счётной аддитивности. □

Свойство 5.4. Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ – линейное подпространство размерности меньше, чем n. Тогда его мера Лебега равна нулю.

Доказательство. Нужно покрыть ячейками и сделать оценку. □

Свойство 5.5. (Регулярность) Пусть $A \in \mathcal{M}_n,\ \varepsilon > 0$. Тогда найдутся открытое G и замкнутое F такие, что
$$F \subset A \subset G,\ \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon,\ \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. В случае, когда E ограничено, это совсем просто: нужно взять покрывающий набор ячеек из определения внешней меры, и каждую ячейку приблизить открытым параллелипипедом, а потом провернуть оценку. Чтобы получить замкнутое множество, придётся повторить это для дополнения E относительно какого-нибудь куба, содержащего E.

Для бесконечных надо доказать! □

Билет 6: Измеримость функции относительно σ-алгебры. Свойства измеримых функций.

Определение 6.1. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *измеримой* относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, если для любого промежутка $\Delta \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$.

Определение 6.2. Множества вида $X[f < a] = \{x \in X \mid f(x) < a\}$ – *множества Лебега* 1 *типа,* а $X[f \leqslant a],\ X[f > a],\ X[f \geqslant a]$ – $2,\ 3,$ и 4 соответственно.

Теорема 6.1. Чтобы функция f была измерима относительно $\mathcal{A}$, достаточно, чтобы все множества одного из четырёх типов Лебега лежали в $\mathcal{A}$.

Доказательство.

1. $1 \to 2$:
$$X[f \leqslant a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} X\left[f < a - \frac{1}{k}\right].$$
2. $2 \to 3$: $X[f > a] = X \setminus X[f \leqslant a]$.
3. $3 \to 4$: так же, как $1 \to 2$.
4. $4 \to 1$: так же, как $2 \to 3$.

Имея множества Лебега всех четырёх типов, нетрудно получить из них все промежутки. □

Лемма 6.1. Любое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ представимо, как счётное объединение ячеек.

Доказательство. Возьмём около каждой рациональной точки G окрестность в форме параллелипипеда, лежащую в G. Понятно, что из того, что множество рациональных точек всюду плотно, следует, что мы получили счётное открытое покрытие G.

В свою очередь, любой открытый параллелипипед легко представить, как объединение счётного количества ячеек. А счётное объединение счётных объединений – счётное объединение. □

Теорема 6.2. Пусть функции f_1, ..., f_n: $X \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $\varphi = g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ измерима.

Доказательство. Т.к. функция g непрерывна, $G = \mathbb{R}^n[g < a]$ – открытое множество. Его можно представить, как
$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k,$$
где Δ_k – ячейки. Тогда
$$X[\varphi < a] = f^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(\Delta_k).$$
Пусть
$$\Delta_k = \prod_{i=1}^{n} [a_i,\, b_i).$$
Тогда
$$f^{-1}(\Delta_k) = \bigcap_{i=1}^{n} X[a_i \leqslant f_i < b_i].$$
Поэтому
$$X[\varphi < a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} X[a_i^{(k)} \leqslant f_i < b_i^{(k)}].$$
Это измеримое множество. □

Теорема 6.3. $f,\ g$ измеримы $\Rightarrow$ измеримы $f+g,\ f-g,\ fg,\ \frac{f}{g},\ |f|,\ \lambda f,\ f \vee g = \max\{f,\ g\},\ f \wedge g = \min\{f,\ g\},\ f^n$.

Доказательство. Довольно очевидное следствие предыдущей теоремы. □

Теорема 6.4. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ измеримы, то измеримы и $\sup f_i,\ \inf f_i,\ \underline{\lim} f_i,\ \overline{\lim} f_i,\ \lim f_i$.

Доказательство.

1. $g = \sup f_i$; $X[g \leqslant a] = X[\forall i\ f_i \leqslant a] = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X[f_i \leqslant a]$.
2. Инфимум – аналогично.
3. $g = \lim f_i \Rightarrow (g(x) \leqslant a \Leftrightarrow \exists\, N\colon \forall i > N\ f_i(x) \leqslant a) \Rightarrow X[g \leqslant a] = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=N+1}^{\infty} X[f_i(x) \leqslant a]$.
4. Верхний и нижний пределы – пределы инфимумов и супремумов, поэтому эти результаты следуют из уже доказанного.

□

Определение 6.3. $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *простой* (относительно $\mathcal{A}$,) если она измерима относительно $\mathcal{A}$ и принимает конечное число значений.

Определение 6.4. *Индикатором* множества E называется функция

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1,\ x \in E, \\ 0,\ x \notin E. \end{cases}$$

Утверждение 6.1. Индикатор E прост (измерим) тогда и только тогда, когда измеримо E.

Утверждение 6.2. Пусть f – функция, которая принимает значения $\{a_i\}_{i=1}^{N}$ на множествах E_i. Тогда

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{f^{-1}(a_i)} = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{E_i}.$$

Утверждение 6.3. Функция f, принимающая конечное число значений, проста (измерима) тогда и только тогда, когда множества E_i измеримы.

Теорема 6.5. Если $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность простых функций, имеющая предел, то этот предел измерим.

Теорема 6.6. Пусть f – неотрицательная измеримая функция. Тогда найдётся неубывающая последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ простых функций, которая поточечно сходится к f.

Доказательство. Разобъём $[0, +\infty)$ следующим образом:

$$[0, \infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k,$$

где

$$\Delta_k = \begin{cases} \left[\dfrac{k}{n},\ \dfrac{k+1}{n}\right],\ 0 \leqslant k < n^2, \\ [n,\ \infty),\ k = n^2. \end{cases}$$

Пусть $e_k = f^{-1}(\Delta_k) \in \mathcal{A},\ c_k = \min \Delta_k = \dfrac{k}{n}$ и

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n^2} c_k \mathbb{1}_{e_k}.$$

Рассмотрим $x \in e_k$. Начиная с некоторого n эта точка точно попадёт в e_k с $k < n^2$. Значение $f(x) \in \Delta_k = \left[c_k,\, c_k + \dfrac{1}{n}\right]$, поэтому

$$|f(x) - \psi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

начиная с некоторого n. Отсюда следует поточечная сходимость.

Чтобы сделать последовательность функций неубывающей, сохранив сходимость, введём

$$\varphi_n = \max\{\psi_1,\, ...,\, \psi_n\}.$$

Сходимость сохранится, т.к.

$$f - \frac{1}{n} \leqslant \psi_n \leqslant \varphi_n \leqslant f.$$

□

Билет 7: Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.

Определение 7.1. Пусть f – простая, и представлена, как

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k \,\mu(E_k).$$

Если $A \in \mathcal{A}$, то

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k \,\mu(E_k \cap A).$$

Утверждение 7.1. Если f – простая на X, то

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\, \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

$$f\, \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k \cap A}.$$

□

Определение 7.2. Пусть f – измеримая, неотрицательная функция. Тогда

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g - \text{простая},\ 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

При этом

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\, \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu.$$

В следующих свойствах функции измеримые и неотрицательные.

Свойство 7.1.

$$0 \leqslant f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Очевидно из определения, для g супремум берётся по большему множеству функций. □

Свойство 7.2.
$$A \subset B \subset X \Rightarrow \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Следует из предыдущего свойства. □

Определение 7.3. Пусть f – произвольная измеримая функция. Определим
$$f_+ = \max\{f(x),\, 0\},\;\; f_- = \max\{-f(x),\, 0\}.$$
Тогда
$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

Определение 7.4. f называется *суммируемой* на X, если интеграл от неё конечен. Семейство суммируемых функций обозначается, как $L(X,\, \mu)$.

Билет 8: Теорема Беппо Леви.

Теорема 8.1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций, и $f = \lim f_n$. Тогда
$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.
$$f_n \leqslant f \Rightarrow \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu,$$
$$f_n \leqslant f_{n+1} \Rightarrow \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \Rightarrow \exists \lim \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = L.$$
Из этих двух утверждений следует, что
$$L \leqslant \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Теперь проверим неравенство в другую сторону. По определению
$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi} \int\limits_X \varphi \,\mathrm{d}\mu,$$
где φ – неотрицательные простые функции, не превосходящие f. Рассмотрим какую-нибудь φ:
$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k},$$
причём $c_k \geqslant 0$. Примем $c_0 = 0$; тогда понятно, что $E_0 = \varnothing \Leftrightarrow \varphi > 0$.

Возьмём ε: $0 < \varepsilon < \min\{c_1,\, ...,\, c_p\}$ и
$$\varphi_\varepsilon = 0 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon) \mathbb{1}_{E_k}.$$
Рассмотрим $X_n = X[f_n \geqslant \varphi_\varepsilon]$. Понятно, что $E_0 \subset X_n$.

Т.к. $f_n \to f$, для любой точки x найдётся n такое, что $f_n(x) > \varphi_\varepsilon(x)$, т.е.

$$\forall x\ \exists\, n\colon x \in X_n.$$

Поэтому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Т.к. последовательность неубывающая, $X_n \subset X_{n+1} \Rightarrow \mu(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(X)$. Вообще, для любого измеримого A верно, что $\mu(A \cap X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(A)$.

$$\int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \int\limits_{X_n} \varphi_\varepsilon \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon)\, \mu(X_n \cap E_k).$$

Устремляя n к бесконечности и ε к нулю, получим

$$L \geqslant \sum_{k=1}^{p} c_k\, \mu(E_k) = \int\limits_X \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Переходя к супремуму, получим

$$L \geqslant \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Значит, на самом деле есть равенство. □

Свойство 8.1. Пусть f, g – измеримые и неотрицательные функции. Тогда

$$\int\limits_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Нужно сначала проверить для простых функций, записав их через индикаторы и повозившись с суммами. После этого в общем случае можно выделить возрастающие последовательности простых функций, которые сходятся к f и g и воспользоваться теоремой Леви. □

Свойство 8.2.

$$\int\limits_X \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Билет 9: Свойства интеграла от суммируемых функций.

Свойство 9.1. Пусть $f,\ g$ – суммируемые, $f \leqslant g$. Тогда

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Расписать положительную и отрицательную части и свести к свойству для неотрицательных функций; суммируемость нужна, чтобы не вычитать бесконечность из неравенства. □

Свойство 9.2. [4] Пусть $f,\ g$ – суммируемые. Тогда

$$\int\limits_X f + g \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

[4] В конспекте был $\pm$, но это ведь следует из умножения на константу? И, кстати, нужна ли тут вообще суммируемость, или это верно, даже когда интеграл расходится?

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.3. Если f – суммируемая, то

$$\int\limits_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Аналогично. □

Свойство 9.4. Пусть $f,\ g \in L,\ |f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int f\right| \leqslant \int g$.

Доказательство.

$$|f| \leqslant g \Rightarrow f \leqslant g \wedge -f \leqslant g \Rightarrow \left(\int f \leqslant \int g\right) \wedge \left(-\int f \leqslant \int g\right) \Rightarrow \left|\int f\right| \leqslant \int g.$$

□

Свойство 9.5. $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего. □

Свойство 9.6. $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$.

Доказательство. $\Leftarrow$:

$$|f| = f_+ + f_- \Rightarrow 0 \leqslant f_\pm \leqslant |f| \Rightarrow 0 \leqslant \int f_\pm \leqslant \int |f|.$$

$\Rightarrow$: Если f суммируема, то суммируемы и $f_\pm$, а $|f|$ – их сумма. □

Свойство 9.7. $f \in L, \mu X \leqslant \infty,\ |f| \leqslant M \Rightarrow \left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu(X)$.

Доказательство.

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int M \,\mathrm{d}\mu \leqslant M\mu(X).$$

□

Билет 10: Счётная аддитивность интеграла.

Теорема 10.1. Пусть f – измеримая функция, причём либо $f \geqslant 0$, либо $f \in L$. Тогда для любых измеримых $A,\ A_1$, ... таких, что $A = \sqcup A_k$ верно, что

$$\int\limits_A f = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f.$$

Доказательство.

1. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда

   $$\int\limits_A f = \int\limits_X f\,\mathbb{1}_A,\ \int\limits_{A_n} f = \int\limits_X f\,\mathbb{1}_{A_n}.$$

   При этом

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A \Rightarrow f\,\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} f\,\mathbb{1}_{A_n}$$

   Рассмотрим частичные суммы:

   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} f\,\mathbb{1}_{A_n}.$$

Понятно, что они образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к $f\,\mathbb{1}_A$, поэтому из теоремы Леви

$$\int f\,\mathbb{1}_A = \lim \int S_n = \lim \int \sum_{n=1}^{N} f\,\mathbb{1}_{A_n} = \lim \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f.$$

2. Пусть теперь $f \in L$. Тогда просто расписать через $f_\pm$ и воспользоваться первым пунктом.

□

Билет 11: Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 11.1. Пусть $f \in L$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall \text{ измеримого } A \subset X,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \left|\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1. Если f ограничена, то найдётся M такое, что $|f| \leqslant M$. Тогда

$$\left|\int\limits_A f\right| \leqslant M\mu(A) \leqslant \varepsilon \text{ при } \delta = \frac{\varepsilon}{M}.$$

2. Пусть теперь $f \in L$ и всё. Тогда $|f| \in L$, и

$$\int\limits_X |f| = \sup_g \int\limits_X g.$$

g – простая, а потому ограниченная.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ простая } g,\ 0 \leqslant g \leqslant |f|\colon \int\limits_X |f| - \int\limits_X g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя ограниченность g, находим по любому ε такую δ, что

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int\limits_A g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда мгновенно получается искомая оценка:

$$\left|\int\limits_A f\right| \leqslant \int\limits_A |f| = \int\limits_A g + \int\limits_A \big(|f| - g\big) < \varepsilon.$$

□

Билет 12: Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.

Теорема 12.1. Пусть $f \in C([a,\,b])$ и λ – мера Лебега. Тогда f суммируема и

$$\int\limits_{[a,\,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_a^b f.$$

Доказательство.

1. Сначала докажем, что f измерима по Лебегу. Заметим, что $f^{-1}\big((-\infty,\, a)\big)$ – открытое множество, т.е. измеримое множество. А значит и функция f измерима.

2. $|f|$ ограничен, т.к. f – непрерывная функция на компакте, поэтому

$$\int\limits_{[a,\,b]} |f|\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \int\limits_{[a,\,b]} M\,\mathrm{d}\lambda \leqslant M(b-a).$$

Значит, $|f|$ – суммируемая функция, а значит, и f – суммируемая функция.

3. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_{[a,\,x]} f\,\mathrm{d}\lambda.$$

Она определена, поскольку все интегралы будут конечны. Хочется доказать, что она дифференцируема.

Запишем, что значит непрерывность функции:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\colon |\Delta x| < \delta \Rightarrow \forall t \in (x-\Delta x,\, x+\Delta x)\ f(t) \in (f(x)-\varepsilon,\, f(x)+\varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x\,(f(x)-\varepsilon) \leqslant \int\limits_{(x,\,x+\Delta x]} f\,\mathrm{d}\lambda \leqslant \Delta x\,(f(x)+\varepsilon).$$

Разделив на Δx и подставив интеграл посередине, получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta\colon |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Но это значит, что $F'(x) = f(x)$! Поэтому значение нашего интеграла будет такое же, как по Риману.

□

Билет 13: Сравнение подходов Римана и Лебега

Есть три разных способа определить интеграл на отрезке:

1. (подход Ньютона-Лейбница) Если f непрерывна и F – её первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

2. (подход Римана)

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=0}^{n+1} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \xi_i \in [x_i,\, x_{i+1}],\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

3. Наше текущее определение интеграла по мере.

Пример 13.1. Функция Дирихле $f\colon X = [0,\,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0,\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Интеграл по Риману от неё не существует, потому что при сколь угодно малом ранге разбиения можно выбрать в каждом промежутке все ξ_i рациональными, и тогда значение суммы Римана будет равно длине отрезка, или иррациональными, и тогда значение суммы будет равно нулю. Поэтому предела этих сумм при ранге разбиения, стремящемся к нулю, не существует.

При этом f является простой функцией: она принимает два значения, при этом одно из них – на счётном (а значит, измеримом) множестве точек. Поэтому и его дополнение тоже измеримо – его мера равна 1. Поэтому интеграл Лебега от этой функции будет равен 1.

В суммировании по Риману основной принцип – разбить промежуток интегрирования на малые участки. В суммировании по Лебегу, напротив, на промежутки бьётся область значений, а промежуток интегрирования оказывается разбит на множества произвольной формы. Вид этой конструкции для интеграла Лебега подробно продемонстрирован в билете 6, в доказательстве теоремы о существовании сходящейся последовательности из простых функций.

Билет 14: Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом

Определение 14.1 (Напоминание)**.** Пусть f непрерывна на $[a,\, b)$. Тогда *несобственный интеграл* по этому промежутку –

$$\int\limits_a^{\to b} f = \lim_{x\to b-0} \int\limits_a^{x} f.$$

Теорема 14.1. Пусть непрерывная f либо неотрицательна, либо суммируема на $[a,\, b)$, тогда

$$\int\limits_{[a,\, b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int\limits_a^{\to b} f.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(x) = \int\limits_{[a,\, x]} f.$$

Понятно, что[5]

$$\lim_{x\to b} F(x) = \int\limits_a^{\to b} f,$$

потому что мы уже доказали, что интегралы по отрезку от непрерывной функции по Лебегу и по Риману совпадают.

Нужно доказать, что

$$\lim_{x\to b} F(x) = \int\limits_{[a,\, b)} f.$$

Если f суммируема, то это следует из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (и существование предела оказывается совсем очевидным).

Рассмотрим случай, когда f неотрицательна, но не суммируема. Мы знаем, что интеграл Лебега от неё по $[a,\, b)$ равен $+\infty$, и нужно лишь доказать, что предел $F(x)$ существует и не может быть конечен. Существует он потому, что $F(x)$ будет функцией возрастающей. Конечным же он быть не может, потому что это противоречило бы теореме Леви, что сейчас и покажем.

Возьмём последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $[a,\, b)$, сходящуюся к b. Заметим, что

$$\lim \int\limits_{[a,\, x_n]} f \, \mathrm{d}\lambda = \lim \int\limits_{[a,\, b)} f \, \mathbb{1}_{[a,\, x_n]} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Функции $f \, \mathbb{1}_{[a,\, x_n]}$ образуют неубывающую неотрицательную последовательность, сходящуюся к f, поэтому по теореме Леви этот предел будет равен как раз $+\infty$. $\square$

[5] Если этот предел существует.

Пример 14.1. Условно сходящийся интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

не представим в виде интеграла по мере, потому что для этой функции этот интеграл просто не определён: f_+ и f_- одновременно не являются суммируемыми, что плохо.

Билет 15: Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью

Определение 15.1. Пусть X – множество, $\mathcal{A} = 2^X$ и есть не более чем счётные множества $\{a_i\} \in X$ и $\{m_i\} \in \mathbb{R}$. Тогда *дискретная мера* задаётся, как

$$\mu(E) = \sum_i m_i \delta_{a_i}(E).$$

Лемма 15.1. Интеграл от любой (измеримой) функции по множеству E нулевой меры равен нулю.

Доказательство. Для начала можно заметить, что для простых функций это точно так. Действительно, пусть

$$f = \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$

Тогда

$$\int\limits_E \sum_{k=1}^p a_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_{k=1}^p a_k \int\limits_X \underbrace{\mathbb{1}_{E_k \cap E}}_{=0} = 0.$$

Но тогда понятно, что для неотрицательных функций это тоже будет верно, потому что супремум нулей ноль. Ещё более очевидно, что для произвольных измеримых функций ничего не изменится. □

Лемма 15.2. Интеграл от измеримой функции f по множеству a равен $f(a)\mu\big(\{a\}\big)$.

Доказательство.

$$\int\limits_{\{a\}} f = \int\limits_X f\,\mathbb{1}_{\{a\}} = \int\limits_X f(a)\,\mathbb{1}_{\{a\}} = f(a)\int\limits_X \mathbb{1}_{\{a\}} = f(a)\,\mu(\{a\}).$$

□

Теорема 15.1. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ либо неотрицательна, либо суммируема относительно дискретной меры. Тогда

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k)m_k.$$

Доказательство. Во-первых понятно, что относительно дискретной меры все функции измеримы. Во-вторых, если $E = X \setminus \{a_k\}$, можно записать

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f\,\mathrm{d}\mu + \sum_k \int\limits_{\{a_k\}} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k)m_k.$$

Неотрицательность или суммируемость использовалась для счётной аддитивности. □

Утверждение 15.1. Для дискретной меры суммируемость функции равносильна абсолютной сходимости ряда, записанного в предыдущей теореме.

Доказательство. Суммируемость функции равносильна суммируемости её модуля. Модуль же функция неотрицательная, для него выполняется предыдущая теорема, и интеграл от него равен сумме из модулей. Значит, и их сходимости равносильны. □

Пример 15.1. Если, например, взять $X = \mathbb{N},\ a_k = k$ и $m_k = 1$, то мера будет обозначать просто сумму значений функции в точках. Функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ – ряд, а суммируемость – абсолютная сходимость.

Определение 15.2. Пусть X – пространство с мерой μ, и есть измеримая неотрицательная функция ρ: $X \to \mathbb{R}$. Тогда можно ввести меру

$$\nu(E) = \int\limits_E \rho \, \mathrm{d}\mu.$$

Утверждение 15.2. ν и правда мера.

Доказательство. Первая аксиома очевидна, а вторая следует из теоремы о счётной аддитивности интеграла – ведь наша ρ неотрицательна. □

Теорема 15.2. Пусть f измерима на X и либо неотрицательна, либо суммируема относительно ν. Тогда

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f\rho \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

1. Пусть сначала f – простая:
$$f = \sum_{k=1}^{p} a_k \mathbb{1}_{E_k}.$$
Тогда
$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \sum_{k=1}^{p} a_k \nu(E_k) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int\limits_{E_k} \rho \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{p} a_k \int\limits_X \mathbb{1}_{E_k} \rho \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\rho \, \mathrm{d}\mu.$$
2. Если f – измеримая неотрицательная, можно выделить неубывающую неотрицательную последовательность простых, сходящуюся к ней. От умножения на g она этих свойств не потеряет, поэтому равенство благополучно перенесётся по теореме Леви.
3. Ну и для произвольной суммируемой нужно просто написать.

□

Определение 15.3. ρ называют *плотностью* меры ν относительно меры μ.

Пример 15.2. Например, *мера Коши* с

$$\rho = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Билет 16: Интеграл по мере Лебега-Стильетса. Интеграл по распределению.

16.1 Интеграл по мере Лебега-Стильетса.

Определение 16.1. Пусть I – интервал на прямой, F: $I \to \mathbb{R}$ – возрастающая, непрерывная слева ($F(x) = F(x - 0)$) функция. Введём функцию

$$\mu\left([a, b)\right) = F(b) - F(a).$$

Она счётно-аддитивна на Cell_1[6] Стандартное продолжение этой функции на σ-алгебру называется *мерой Лебега-Стильетса*.

[6]Кажется, это делается примерно так же, как с обычным объёмом. Но вообще там тоже было не очень строго, да и как-то грустно это.

Утверждение 16.1. Все борелевсеие множества измеримы по Лебегу-Стильетсу.

Доказательство. Рассуждение одинаково для всех мер, распространённых с ячеек. □

Свойство 16.1. Пусть $\Delta = [a, b]$. Тогда $\mu(\Delta) = F(b+0) - F(a)$.

Доказательство. Нужно рассмотреть сходящуюся к отрезку справа последовательность ячеек. □

Свойство 16.2. $\mu\big(\{a\}\big) = f(a+0) - f(a) = f(a+0) - f(a-0) = \Delta f_a$.

Свойство 16.3. $\mu\big((a, b)\big) = f(b) - f(a+0)$.

Утверждение 16.2. Любая мера, определённая на борелевских множествах, есть мера Лебега-Стильетса для некоторой F.

Доказательство. Это выглядит довольно логичным, но на паре доказательства не было. □

Утверждение 16.3. Если F – гладкая на I, и $\Delta \subset I$ – ячейка, то

$$\mu_F(\Delta) = \int\limits_{\Delta} F' \,\mathrm{d}\lambda.$$

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 16.4. Это верно не только для ячеек, но и для множеств произвольной формы. На самом деле, в такой ситуации мера по сути задаётся плотностью F'.

Теорема 16.1. Пусть F – кусочно-гладкая (и обладает остальным, чтобы задать меру) на I, т.е. найдутся $c_i \in I$ такие, что F гладкая на (c_i, c_{i+1}). Пусть f измерима (относительно борелевской алгебры $\mathcal{B}$) и либо суммируема относительно μ_F, либо неотрицательна. Тогда

$$\int\limits_I f \,\mathrm{d}\mu_F = \sum \int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)F'(x)\,\mathrm{d}x + \sum f(c_i)\Delta_{c_i}.$$

Доказательство. Надо I разбить на точки c_i и промежутки между ними. Интеграл по точкам выражается через скачки, потому что мы знаем, что интеграл в точке равен произведению значения f на меру точки. Ну а на интервалах мера по сути задаётся плотностью: про такое мы уже всё знаем. □

16.2 Интеграл по образу меры

Определение 16.2. Пусть X – пространство с мерой, и есть $f\colon X \to Y$. Назовём $E \subset Y$ *измеримым относительно* f, если $f^{-1}(E)$ измеримо.

Утверждение 16.5. Множество измеримых относительно f множеств образует σ-алгебру.

Доказательство. Нужно просто проверить это. □

Определение 16.3. Введём меру ν на Y следующим образом: $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$.

Утверждение 16.6. ν действительно мера.

Доказательство. Просто проверить. □

Теорема 16.2. Пусть g – измеримая относительно заданной f σ-алгебры функция $Y \to \mathbb{R}$, причём либо неотрицательная, либо суммируемая относительно ν. Тогда

$$\int\limits_Y g \,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказательство.

1. Для простых функций проверяется легко: там будет сумма коэффициентов, умноженных на меры множеств, вот эти меры и нужно раскрыть.

2. Если g неотрицательна, то можно взять неубывающую последовательность неотрицательных простых, сходящуюся к g. Т.к. композиция с g этого свойства не испортит, дальше просто теорема Леви.

3. Для суммируемых тоже как обычно: нужно просто написать $g_\pm$.

□

16.3 Интеграл по распределению.

Определение 16.4. *Распределением* измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{R},\ \mu(X) < \infty$ называется

$$F(t) = \mu\big(X[f < t]\big).$$

Свойство 16.4. F не убывает.

Доказательство. Это следует из того, что мера подмножества не превосходит меры множества. □

Свойство 16.5. F непрерывна слева.

Доказательство. Следует из непрерывности меры снизу. □

Теорема 16.3. Пусть $\mu(X) < \infty,\ f\colon X \to \mathbb{R}$ измерима и либо неотрицательна, либо суммируема. Тогда

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}\mu_F.$$

Доказательство. Убедимся, что $\mu_F = \nu = \mu \circ f^{-1}$, как в теореме про образ меры. Для ячеек это проверяется тривиально:

$$\mu_F\big([a,\, b)\big) = F(b) - F(a) = \mu\big(X[f < b]\big) - \mu\big(X[f < a]\big) = \mu\big(X[a \leqslant f < b]\big) = \mu\big(f^{-1}([a,\, b)\big).$$

Отсюда это вроде бы следует даже для борелевских множеств.

Но тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} t \,\mathrm{d}\mu_F = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Конечность меры X нужна, чтобы F гарантированно существовала. В принципе, такое бывает и без неё. □

Билет 17: Интеграл Эйлера-Пуассона

Теорема 17.1.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}\lambda_2 = \pi.$$

Доказательство. Найдём распределение функции $f(x,\, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$.

$$-e^{-(x^2+y^2)} < t \Rightarrow x^2 + y^2 < -\ln(-t) \Rightarrow F(t) = \mu\big(\mathbb{R}^2[x^2 + y^2 < -\ln(-t)]\big) = -\pi\ln(-t).$$

На самом деле, если внимательно следить за граничными значениями, то

$$F(t) = \begin{cases} 0,\ t \leqslant -1, \\ -\pi\ln(-t),\ -1 < t \leqslant 0, \\ +\infty,\ t > 0. \end{cases}$$

Теперь мы по сути применяем слегка искажённые версии предыдущих теорем, потому что $\mu(X)$ не конечна, поэтому и F определена не на всём $\mathbb{R}$, а только до нуля. Но, кажется, это не сильно изменит их доказательств, поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int\limits_{-1}^{0} t(-\pi \ln t)'\,\mathrm{d}t = -\pi.$$

Значит, искомый интеграл равен π. □

Билет 18: Вероятностный смысле меры и интеграла.

Собственно, довольно легко строится соответствие между понятиями теории меры и теории вероятностей.

1. Множество X – множество элементарных событий.
2. σ-алгебра $\mathcal{A}$ – множество событий, её элемент – событие.
3. Мера μ – вероятность (но только $\mu(X) = 1$).
4. Измеримая функция f – случайная величина.
5. Распределение функции F – распределение случайной величины.
6. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ – матожидание случайной величины.

Пример 18.1. Самый простой пример – кубик. Для этого надо рассмотреть $X = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$ с понятно какой мерой.

Пример 18.2 (Задача Бюффона)**.** На плоскости есть бесконечно много параллельных прямых с расстоянием d между соседними, и на неё кидают отрезок длины a случайным образом. Какова вероятность, что он пересечёт одну из прямых?

Пусть h – расстояние от нижней точки отрезка до ближайшей (снизу) линии, а α – угол от горизонтали. Этими двумя координатами положение отрезка задаётся однозначно (с учётом симметрии задачи,) причём все точки равноправны между собой.

Поэтому естественно сказать, что $X = [0,\, d) \times [0,\, \pi)$ – множество исходов, $\mathcal{A}$ – множество измеримых по Лебегу подмножеств X, а мера $P(A) = C\lambda_2(A)$. Поскольку $P(X) = 1$,

$$C\lambda_2(X) = 1 \Rightarrow C \cdot \pi \cdot d = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\pi d}.$$

При этом множество исходов, когда пересечение происходит, задаётся неравенством

$$a \sin\alpha \geqslant d - h.$$

Отсюда

$$h \geqslant d - a\sin\alpha.$$

Площадь соответствующей области можно найти, как

$$\int\limits_0^\pi a\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2a \Rightarrow P(A) = \frac{1}{\pi d} \cdot 2a = \frac{2a}{\pi d}.$$

Билет 19: Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика).

19.1 «Почти всюду» и вариаци теоремы Леви.

Определение 19.1. Пусть $(X,\, \mu)$ – пространство с мерой, и задана функция $P\colon\ X \to \{0,\, 1\}$ (утверждение, которое либо правдиво, либо ложно). Говорят, что P верно *почти всюду,* если $\mu\big(X[P = 0]\big) = 0$.

Лемма 19.1. Если $f(x) = 0$ почти всюду, то

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Доказательство. Можно заметить, что такая функция автоматически измерима. Ну а дальше просто разбить на два множества и записать интегралы. □

Лемма 19.2. Пусть f и g суммируемы, причём $f = g$ почти везде. Тогда

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Доказательство. Интеграл разности будет равен нулю по предыдущей лемме. □

Лемма 19.3 (Теорема Леви для рядов)**.** Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных измеримых функций из X в $\mathbb{R}$. Тогда

1. $$\int\limits_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n \, \mathrm{d}\mu.$$

2. Если эти два равных числа конечны, то ряд сходится почти всюду [7].

Доказательство.

1. Пусть S_n – частичная сумма ряда, и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ [8]. По теореме Леви тогда

   $$\int S = \lim \int S_n.$$

   Ну а дальше очевидно.

2. Пусть

   $$\int\limits_X S \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

   Рассмотрим E – множество точек, где ряд расходится. Выберем на E неубывающую неотрицательную последовательность простых функций g_n, сходящуюся к S: $g_n(x) = n$. По теореме Леви

   $$\lim \int g_n = \int S.$$

   Но

   $$\lim \int g_n = \lim n\mu(E) = \infty,$$

   если $\mu(E) \neq 0$. А такого не может быть, потому что в этой ситуации интеграл по X будет тоже ∞, что не так.

□

Лемма 19.4 (Теорема Леви «вверх ногами»)**.** Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций из X в $\mathbb{R}$. Пусть f_1 суммируема. Тогда

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n.$$

Доказательство. Рассмотрим $g_n = f_1 - f_n \geqslant 0$. При этом g_n возрастают и неотрицательные. Ну тогда по теореме Леви

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int f_1 - \int f.$$

Т.к. все функции суммируемы, можно всё перенести, и получится то, что надо. □

[7] А разве левое выражение определено, если ряд хоть где-то расходится? Ну то есть вроде можно определить, но это же странно, честно говоря.

[8] Почему конечен?

19.2 Кратные интегралы

Определение 19.2. Введём пару обозначений. Пусть $E \subset \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Возьмём какой-нибудь $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда проекция сечения E на $\mathbb{R}^n$ «вертикальной линией» записывается, как

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,\, y) \in E\},$$

проекция множества E на $\mathbb{R}^m$ обозначается, как

$$\pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \varnothing\},$$

и проекция сечения E на $\mathbb{R}^m$ «горизонтальной линией» записывается, как

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,\, y) \in E\}.$$

Теорема 19.1 (Принцип Кавальери)**.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ измеримо. Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x)\, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Доказательство.

1. Для ячеек проверяется в лоб.
2. Если
$$E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$
где E_k – ячейки, то
$$E_x = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x,$$
а дальше используется первый пункт, аддитивность меры и теорема Леви для рядов.

   В таком виде можно представить любой элемент Cell_{n+m}. Ещё мы знаем, что открытое множество можно представить в виде счётного объединения ячеек, а значит можно и в виде дизъюнктного[9]
3. Пусть E– множество типа G_δ – счётное пересечение вложенных открытых множеств, мера первого из которых конечна[10]. Здесь должна работать «перевёрнутая» теорема Леви.
4. Дальше вообще плохо понятно. Но вроде можно приблизить ограниченное E ограниченным G_δ так, чтобы разность M имела меру ноль. Утверждается, что M_x измеримы почти всегда, и их мера равна нулю, поэтому теорема верна и для разности, и для приближения, а потому и для E.
5. Если множество не ограничено, нужно представить его, как дизъюнктное объединение ограниченных. А потом повторить рассуждение про дизъюнктное объединение ячеек.

□

Теорема 19.2 (Мера подграфика)**.** Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – измеримая и неотрицательная, а

$$\Gamma_-^f = \{(x,\, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}.$$

Тогда

1. Γ_-^f измерим.
2. $$\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\, \mathrm{d}\lambda_n.$$

[9]Хотя мы этого не доказывали, конечно...

[10]Вроде это можно сделать не умаляя общности. Кажется. По крайней мере для ограниченных множеств типа G_δ, можно, например, объединения пересекать.

Доказательство.

1. Если функция – индикатор измеримого множества, то вроде бы должно быть очевидно, хотя вроде не так чтобы, ибо почему $\lambda_n(E) = \lambda_{n+1}\big(E \times [0,\,1]\big)$?
2. Переход к простой функции вроде бы и правда очевиден.
3. К произвольным измеримым как обычно, по теореме Леви.

□

Билет 20: Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тоннели и Фубини).

Теорема 20.1. (Тоннели) Пусть $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ – измеримая неотрицательная функция. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_{m+n}(x,\,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y)\,\mathrm{d}\lambda_m(x),$$

[11].

Доказательство.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_{m+n}(x,\,y) = \lambda_{m+n+1}\Gamma_-^f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1}(\Gamma_-^f)_x\,\mathrm{d}\lambda_m(x).$$

Введём функцию $\psi_x(y)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $\psi_x(y) = f(x,\,y)$. Тогда $(\Gamma_-^f)_x = \Gamma_-^{\psi_x}$, поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1}(\Gamma_-^f)_x\,\mathrm{d}\lambda_m(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_{n+1}\Gamma_-^{\psi}\,\mathrm{d}\lambda_m(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y)\,\mathrm{d}\lambda_m(x).$$

□

Теорема 20.2. (Фубини) Пусть $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ – суммируемая функция. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_{m+n}(x,\,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,\,y)\,\mathrm{d}\lambda_n(y)\,\mathrm{d}\lambda_m(x),$$

Доказательство. Простое следствие из предыдущей. □

Билет 21: Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании

Утверждение 21.1. Пусть T – параллельный перенос в $\mathbb{R}^n$. Тогда если E измеримо по Лебегу, то и $T(E)$ тоже, причём $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$.

Доказательство. Параллельный перенос переводит ячейки в ячейки с сохранением меры, поэтому он сохраняет внешнюю меру, а значит, он сохраняет и хорошо разбивающие множества. Поэтому он переводит измеримые в измеримые, сохраняя объём. □

Теорема 21.1. Пусть L – линейное отображение. Тогда если E измеримо, то $L(E)$ тоже измеримо.

[11] Не знаю пока, что делать с измеримостями.

Почти доказательство. Если определитель равен нулю, то это очевидно, потому что подмножество линейного пространства меньшей размерности – множество меры ноль. Это следует из полноты меры.

Если определитель не равен нулю, то L – гомеоморфизм, поэтому, в частности, переводит открытые множества в открытые и множества типа G_δ в множества типа G_δ.

Посмотрим, что будет с $L(E)$, если $\lambda E = 0$. Раз мера E равна нулю, можно покрыть E конечным набором ячеек $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ таким, что сумма их мер меньше ε[12]. Понятно, что

$$L(E) \subset \bigcup_{k=1}^{N} L(\Delta_k).$$

При этом

$$\lambda\big(L(E)\big) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \lambda\big(L(\Delta_k)\big)$$

Рассмотрим какую-нибудь ячейку Δ со стороной δ. Тогда $\lambda(\Delta) = \delta^n$. Пусть $x,\, y \in \Delta$. Тогда

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L(x-y)\| \leqslant \|L\| \cdot \|x-y\| \leqslant \|L\|\delta\sqrt{n}.$$

Образ Δ точно можно вписать в ячейку с такой стороной, поэтому

$$\lambda\big(L(\Delta)\big) \leqslant \|L\|^n n^{\frac{n}{2}} \lambda(\Delta).$$

Это значит, что образ множества E тоже получтися ограничить ячейками, поэтому мера образа тоже ноль.

Любое измеримое множество можно представить, как $A \setminus B$, где A класса G_δ, а B – меры нуль. Но это значит, что образ будет представлен так же, что даёт нам доказательство. ☐

Теорема 21.2. Пусть L – линейное отображение. Тогда если E измеримо, то $\lambda\big(L(E)\big) = C\lambda(E)$.

Доказательство. Для начала можно положить $C = \lambda\big(L([0,\, 1)^n)\big)$. Теперь хочется как-то доказать, что любая другая ячейка будет преобразовываться так же.

Идея доказательства этого заключается в том, чтобы сначала доказать это для ячеек вида $[0,\, k)^n$ и $[0,\, \frac{1}{k})^n$, либо разбивая ячейки на $[0,\, 1)^n$, либо наоборот, пользуясь доказанным фактом про параллельный перенос. После же ячейку $[0,\, t)$ можно представить, как счётное объединение подходящих ячеек. ☐

Лемма 21.1. Для отображения $L(x) = ax$ константа $C = a^n$.

Доказательство. Ну, тут ведь ячейка переходит в ячейку, объём можно просто посчитать. ☐

Лемма 21.2. Для отображения L с диагональной матрицей C равна модулю произведения диагональных членов.

Доказательство. Тут тоже можно просто посчитать объём ячейки. ☐

Лемма 21.3. Для ортогонального L константа C равна 1.

Доказательство. Оно переводит единичный шар в себя. ☐

Теорема 21.3. Для произвольного L верно, что $C = |\det L|$.

Доказательство. Можно представить L как $U_1 \circ D \circ U_2$, где U_1 и U_2 ортогональные, а D – диагональное. Дальше очевидно. ☐

[12] Это следует из того, что набор точно можно сделать дизъюнктным, например.

Билет 22: Преобразование меры Лебега при гладком отображении

Теорема 22.1. Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^1-гладкая инъекция. Тогда

$$\forall \text{ измеримого } E \subset G\ \lambda\big(F(E)\big) = \int\limits_E |J_F(x)|\,\mathrm{d}x,$$

где $J_F(x)$ – якобиан F в точке x.

Идея доказательства. Докажем только для $E = \Delta$ – ячейки. Рассмотрим разбиение

$$\Delta = \bigsqcup_k \Delta_k.$$

Пусть x_k – угол k-й ячейки.

$$F(x) = \underbrace{F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)}_{\Phi(x)} + o(x - x_k).$$

$\Phi(x) = y_k + \mathrm{d}F(x_k; x) = y_k + L(x)$. Тогда

$$\lambda\big(L(\Delta)\big) = \sum_k \lambda\big(L(\Delta_k)\big) \approx \sum_k |\det \mathrm{d}F(x_k; x)|\lambda(\Delta_k) = \sum_k J_F(x_k)\lambda(\Delta_k).$$

Измельчая разбиение, получим утверждение теоремы. □

Билет 23: Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты).

Теорема 23.1. Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^1-гладкая инъекция, $E \in F(G)$ – измеримое множество. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ – измеримая и либо неотрицательная, либо суммируемая функция. Тогда

$$\int\limits_E f = \int\limits_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$

Доказательство.

1. Пусть
$$f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{B_k}.$$
Тогда
$$f \circ F = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)}.$$
При этом
$$\int\limits_E f = \sum_{k=1}^p c_k \lambda(B_k) = \sum_{k=1}^p c_k \int\limits_{F^{-1}(B_k)} |J_F| = \sum_{k=1}^p c_k \int\limits_{F^{-1}(E)} |J_F| \mathbb{1}_{F^{-1}(B_k)} = \int\limits_{F^{-1}(E)} f \circ F \cdot |J_F|.$$
2. Для неотрицательных – теорема Леви, как всегда, для суммируемых расписать $f_\pm$.

□

Пример 23.1. Полярные координаты задаются уравнениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

По сути, у нас есть гладкая инъекция $F\colon (0,\,\infty)\times[0,\,2\pi)\to\mathbb{R}^2$. Можно найти якобиан:

$$J_F = y'_\varphi x'_r - x'_\varphi y'_r = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Поэтому если E – измеримое подмножество $\mathbb{R}^2$, то

$$\int\limits_E f = \int\limits_{F^{-1}(E)} f\circ F\cdot r.$$

Для сферических координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi, \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

якобиан будет равен $r^2\cos^2\psi$.

Билет 24: Теорема Фату

Определение 24.1. Пусть на X задана мера μ. Тогда

- Говорят, что последовательность функций $f_n\to f$ *почти везде по* μ, если $\exists\, N\subset X,\ \mu(N)=0$ такое, что $\forall x\in X\setminus N\ f_n(x)\to f(x)$.
- Говорят, что $f_n\xrightarrow{\mu} f$ *сходится по мере* μ, если

$$\forall\sigma>0\ \mu\big(X[|f_n-f|>\sigma]\big)\to 0.$$

  Это самая слабая сходимость.

Теорема 24.1. Сходимость почти везде влечёт сходимость по мере.

Теорема 24.2 (Рисс)**.** Если $f_n\xrightarrow{\mu} f$, то из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.

Теорема 24.3. Пусть $f_n\rightrightarrows f$ на X, и $\mu(X)<\infty$[13]. Тогда

$$\lim\int\limits_X f_n = \int\limits_X f.$$

Доказательство. Нужно просто оценить разность. □

Теорема 24.4 (Фату)**.** Пусть $\{f_n\}$ – неубывающая последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся[14] к f. Тогда

$$\int\limits_X \underline{\lim} f_n \leqslant \underline{\lim}\int\limits_X f_n.$$

Доказательство.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\inf_{m\geqslant n} f_m(x)}_{g_n(x)} = \sup_n g_n(x).$$

[13] Кажется, ещё нужно, чтобы они были суммируемы.
[14] Здесь достаточно сходимости почти всюду, кажется. Но я не уверен.

g_n образуют неубывающую неотрицательную последовательность измеримых функций, поэтому к ним применима теорема Леви. Поэтому

$$\lim \int g_n = \int \lim g_n = \int \underline{\lim} f_n.$$

Очевидно, что $g_n \leqslant f_n$, поэтому

$$\int g_n \leqslant \int f_n \Rightarrow \underline{\lim} \int g_n \leqslant \underline{\lim} \int f_n \Rightarrow \lim \int g_n \leqslant \underline{\lim} \int f_n.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы. □

Билет 25: Теорема Лебега об ограниченной сходимости.

Теорема 25.1. Пусть X – пространство с мерой μ, f_n измеримы и $f_n \to f$ почти всюду. Пусть существует $\varphi \in L$: $\forall n\ |f_n| \leqslant \varphi$ – выполняется условие Лебега $\mathcal{L}$. Тогда

$$\lim \int f_n = \int f.$$

Доказательство. Из условия $-\varphi \leqslant f_n \leqslant \varphi \Rightarrow \varphi + f_n \geqslant 0$ и $\varphi - f_n \geqslant 0$. Для этих последовательностей выполяняется теорема Фату:

$$\int \varphi + f \leqslant \underline{\lim} \int \varphi + f_n \Rightarrow \int f \leqslant \underline{\lim} \int f_n$$

и

$$\int \varphi - f \leqslant \underline{\lim} \int \varphi - f_n \Rightarrow \int f \geqslant \overline{\lim} \int f_n,$$

откуда

$$\int f = \lim \int f_n.$$

□

Следствие 1. Пусть X – пространство с мерой μ, f_n измеримы и $f_t \xrightarrow{t \to t_0} f$ почти всюду, где t – параметр, возможно многомерный. Пусть существует $\varphi \in L$: $\forall t \in V(t_0)\ |f_t| \leqslant \varphi$ – выполняется локальное условие Лебега $\mathcal{L}_{loc}$ в окрестности t_0. Тогда

$$\lim \int f_t = \int f.$$

Доказательство. Если переформулировать на языке последовательностей. □

Следствие 2. В ситуации предыдущей теоремы, если f_t непрерывна в t_0, то функция

$$\int\limits_X f_t$$

непрерывна в t_0.