

§1 ✕ Интеграл от комплексной дифференциальной формы

здесь надо сильно больше определений

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z - a| < \varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0 < |z - a| < \varepsilon\}$. Далее можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в \mathbb{R}^2 . Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывна, $f = f_1 + if_2$, $\omega(z, dz) = f(z)dz$ — комплексная дифференциальная форма. Пусть $\Gamma \subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int_{\gamma} := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2(t)) dt + \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1(t)) dt$$

Свойства:

Утверждение 1. см ??

Утверждение 2. Пусть $\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$, $z_i = \gamma(t_i)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\xi_i = \gamma(\tau_i)$. Пусть ещё

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta z_i$$

$$r = \max |\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

Следствие 1. Пусть $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leq M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

.....
{censored by galactic vimperor}
.....

§ 30 Свойства дробно-линейного отображения

Определение 1 (Дробно-линейное отображение). $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad \neq bc$ В ∞ определим её как a/c , а в $-d/c$ как ∞ .

Утверждение 1. Дробно-линейное отображение — гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение 2. Углом между двумя путями на бесконечности называется угол между образами этих путей при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$

Замечание. Геометрическая мотивировка связана с углами между путями через северный полюс сферы Римана.

Утверждение 2. Дробно-линейное отображение конформно во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$

Утверждение 3. Дробно-линейные отображения образуют группу.

Утверждение 4. Дробно-линейные отображения переводят обобщённые окружности (прямые или окружности) в обобщённые окружности.

▼

Дробно-линейное — композиция линейного и инверсии (с отражением относительно вещественной оси). С линейными всё ясно, а с инверсией надо доказывать. Окружность можно записать уравнением

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

А прямую

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = (z - b)(\bar{z} - \bar{b}) \Leftrightarrow \overline{(a - b)}z + (a - b)\bar{z} + |b|^2 - |a|^2 = 0$$

Посмотрим, прообразом чего она является

$$(w^{-1} - a)(\bar{w}^{-1} - \bar{a}) = \frac{(1 - aw)(1 - \bar{a}\bar{w})}{|w|^2} = R^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)|w|^2 - a\bar{w} - \bar{a}w + 1 = 0$$

Дальше есть два случая:

$|a| = 1$: Это уравнение прямой с $|b| \neq |a|$. А такие прямые не проходят через 0. Ну, точки на одной окружности равноудалены от её центра. А центр у неё в 0.

$|a| \neq 1$ Поделим на $|a|^2 - 1$.

$$\left(w - \frac{a}{|a|^2 - 1}\right) \overline{\left(w - \frac{a}{|a|^2 - 1}\right)} = \frac{|a|^2}{|a|^2 - 1} - 1 = \frac{1}{|a|^2 - 1}$$

а сие есть уравнение окружности.

Ну, оставшиеся случаи разбираются аналогично. Разве что прямая через начало координат проще задаётся как

$$(e^{-ia} - e^{-ib})z + (e^{ia} - e^{ib})\bar{z} = 0$$

Ну и видно что не будет членов с $|w|^2$ — выйдет прямая.

▲

Утверждение 5. *Дробно-линейное отображение сохраняет анггармоническое отношение:*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} / \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$$

Утверждение 6. *Дробно-линейное отображение однозначно задаётся 3 точками и их образами.*

.....
 {censored by galactic vimperor}

§ 42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

§ 46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a .

Теорема 1. Пусть a — полюс первого порядка функции f . Тогда

$$\text{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

Теорема 2. Пусть a — ноль первого порядка для ψ , $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда

$$\text{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. Пусть a — полюс p -го порядка функции f . Тогда

$$\text{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \left((z-a)^p f(z) \right)'_{z=a}$$

§ 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I) Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции g \sin / \cos заменены на $\frac{1}{2}(z \pm z^{-1})$

II) Интеграл от рациональной функции на \mathbb{R}

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leq \deg Q - 2$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

$$\text{III)} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\lambda z} dz = I$$

Пусть $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на \mathbb{R} . Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана). Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

§ 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение $f: G \rightarrow H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f: G \rightarrow G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу $\operatorname{Aut} G$.

▼

Пусть $f, g, h \in \operatorname{Aut} G$. Тогда $f \circ g: G \rightarrow G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

- $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- $\forall f \exists f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, \Rightarrow конформно и однолистно.
- $\text{id}: G \rightarrow G$ — конформно и однолистно.



Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$
2. \mathbb{C}
3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана). Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $G \cong$ одной из классических областей

1. $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}, |U| > 1$

§ 56 Лемма Шварца

§ 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \text{Aut } G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall z_1, z_2 \in G \exists f \in \Gamma: f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, Γ — транзитивна. Пусть к тому же $\exists z_0: \text{Stab}(z_0) < \Gamma$. Тогда $\Gamma = \text{Aut } G$.



Выберем произвольный $f \in \text{Aut } G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности $G \exists \gamma \in \Gamma: \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma \circ f \in \text{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\text{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$. Но тогда

$$\forall f \in \text{Aut } G \quad f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in \Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in \Gamma} \in \Gamma$$



§ 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь все константы по умолчанию $\in \mathbb{C}$.

Теорема 1. $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0\}$

□ Пусть

$$\Gamma = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}\}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для \mathbb{C} хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен $\text{Stab } \infty$. Нам нужно чтобы $\infty \mapsto \infty$. А значит $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Но из теоремы 0.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что $\text{Stab } \infty < \Gamma$. А тогда по лемме 0.57.1 $\Gamma = \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$ ■

Теорема 2. $\text{Aut } \mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

□ Пусть $A = U(\infty)$. Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть ∞ — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого $f(A)$ всюду плотно в \mathbb{C} . А значит в $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$ есть точка из $f(A)$ — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть ∞ — устранимая особая точка. Но тогда в кольце $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots + c_0$$

Но $f \in \text{Aut } G \Rightarrow f$ голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в ∞ — полюс. Но тогда $f(z)$ — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени n имеет в \mathbb{C} ровно n корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. ■

Теорема 3. $\text{Aut } \mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

□ Опять рассмотрим Γ как в условии и покажем, что $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$. Надо сначала показать хотя бы, что $\Gamma < \text{Aut } \mathbb{D}$.

$$\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) > 0$$

Так что при $|z| < 1 \wedge |a| < 1$ это верно.

Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев $f(1/z)$ в $U(0)$

Дальше легко найти обратное к $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1} \frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta} a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$f_1(z) = \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}$$

$$f_2(z) = \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$

$$a = \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}}$$

$$|a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1$$

$$f_2(f_1(z)) = e^{i\theta_2} \frac{e^{i\theta} z - e^{i\theta} a_2 - a_1 + a_1 \bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}$$

Осталось показать оба условия из леммы [0.57.1](#)

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Будем строить так: $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

$$f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}$$

$$f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на $f \in \text{Stab } 0$. По лемме Шварца $\forall z \in D \quad |f(z)| \leq |z|$. Поскольку $\text{Stab } 0$ — группа, $\exists f^{-1}$ и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

А тогда по второму пункту леммы Шварца $f(z) = cz$, $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$. Следовательно, $\text{Stab } 0 < \Gamma$. Тогда по уже упомянутой лемме $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$

■