1. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r}(t)$, $(x, y, z)(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$.

$\dot{\boldsymbol{r}}$: $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})(t)$, $\boldsymbol{\tau}\dot{s}$.

$\ddot{\boldsymbol{r}}$: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})(t)$, $\ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2 k_1 \boldsymbol{n}$

2. В криволинейных координатах

- ▷ $\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{kj}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a^i b_i$
- ▷ $\xi_k = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_k = \sum_j \xi^j g_{jk}$,

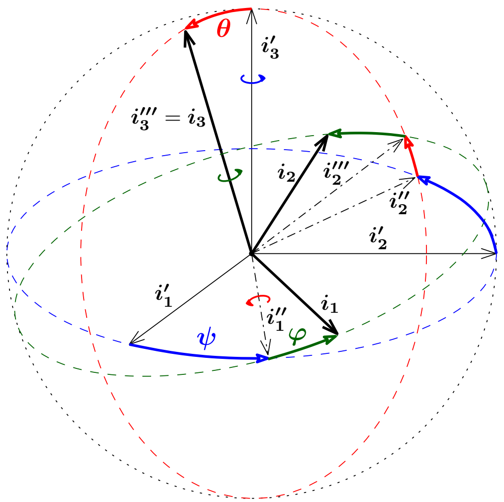
  $\xi^k = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}^k = \sum_j \xi_j g^{jk}$
- ▷ $\boldsymbol{e}^k = \sum_j g^{jk} \boldsymbol{e}_j$, $\boldsymbol{e}^k = \sum_j g^{jk} \boldsymbol{e}^j$
- ▷ $\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \delta_{\ell k}$

3. Скорость и ускорение

- ▷ $\boldsymbol{v} = \sum_k \dot{q}^k \boldsymbol{e_k}$
- ▷ $\boldsymbol{w} = \sum_k \ddot{q}^k \boldsymbol{e}_k + \sum_{k,i} \dot{q}^k \dot{q}^i \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}$
- ▷ $w^j = \ddot{q}^j + \sum_{k,i} \dot{q}^k \dot{q}^i \Gamma^j_{ki}$
- ▷ $\Gamma_{j,\,ki} = \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i} \cdot \boldsymbol{e}_j$ — I рода
- ▷ $\Gamma^j_{ki} = \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i} \cdot \boldsymbol{e}^j$ — II рода
- ▷ $w_\ell = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)\right) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)$

4. Про углы Эйлера

- ▷ $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\, \boldsymbol{i}_3' + \dot{\theta}\, \boldsymbol{i}_1'' + \dot{\varphi}\, \boldsymbol{i}_3$
- ▷ $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0(t) + \boldsymbol{r}(t)$
- ▷ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_r$
- ▷ $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{w}_r$



5. Динамика точки и систем точек

- ▷ $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(t, \{c_\ell\})$, $k \in 1 \,..\, N$, $\ell \in 1 \,..\, 6N$
- ▷ $m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{F}_k$, $m w_\ell = Q_\ell$
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell}\right) - \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q^\ell} = Q_\ell$
- ▷ $\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\sum_k m_k \boldsymbol{r}_k}{\sum_k m_k}$, $\sum_k m_k = M$

6. Закон сохранения импульса

- ▷ $\boldsymbol{p} = \sum_k \boldsymbol{p}_k$, $\boldsymbol{p}_k = m_k \boldsymbol{v}_k$
- ▷ $\boldsymbol{F} = \sum_k \left(\boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{F}_k^{(i)}\right)$
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)}$. Все сиды взаимодействия вымерли.

7. Момент импульса

- ▷ $\boldsymbol{\ell} = \sum_k \boldsymbol{\ell}_k$, $\boldsymbol{\ell}_k = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{p}_k$
- ▷ $\boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{(i)}$
- ▷ $\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \lambda(\boldsymbol{r}_{kj})\boldsymbol{r}_{kj} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol{L}_k^{(e)}$.

8. Энергия

- ▷ $T = \sum_k T_k$, $T_k = \dfrac{m_k(\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k)}{2}$

- ▷ $\delta A_k = \boldsymbol{F}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$, $A = \int_\Gamma \delta A$, а вообще-т интеграл от формы.
- ▷ $\mathrm{d}T = \delta A_k^{(e)} + \delta A_k^{(i)}$
- ▷ $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\left(T + \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)}\right) = \delta A_{\text{не пот}}$

9. В поле центральной силы¬

- ▷ $u = 1/\rho$.
- ▷ Формулы Бине

$$\begin{cases} v^2 = c^2\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right) \\ w_\rho = -c^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\right) \end{cases}$$

- ▷ Невыразимая жжесть

10. ⟨?⟩⟨`:set aflame`⟩Движение твёрдого тела ¬

- ▷ $\omega = 0$ — поступательное
- ▷ $\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{w_0} = 0, \omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3$ — вращение вокруг неподвижной оси
- ▷ $\boldsymbol{v_0} \upuparrows \boldsymbol{\omega}$ — винт
- ▷ Как попало вокруг неподвижной точки[1]¬

  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{i}_1(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi) +$

  $+ \boldsymbol{i}_2(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) +$

  $+ \boldsymbol{i}_3(\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\varphi})$

11. Скорость и ускорение точек твердого тела

- ▷ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- ▷ $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_0} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$

12. Сложение движений ТТ

- ▷ $\boldsymbol{v}_{r_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{O_kO}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\omega}_k \times \boldsymbol{r}_0$, $O_0 = O$.
- ▷ $\boldsymbol{V} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{O_kO}\right)$
- ▷ $\boldsymbol{\Omega} = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\omega}_k \quad \Rightarrow \boldsymbol{v}_{r_n} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_0$

13. Кинематический винт

- ▷ $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 0$

14. Плоское движение

- ▷ $0 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c$
- ▷ $\boldsymbol{r}_* = \left(-\dfrac{v_{0y}}{\omega}, +\dfrac{v_{0x}}{\omega}\right)$ —подвижная центроида
- ▷ $\boldsymbol{r}_*' = \boldsymbol{r}_* + \boldsymbol{r}_0$ — неподвижная центроида
- ▷ $\omega = \dfrac{|\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A|}{|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A|}$
- ▷ $\omega = \dfrac{|\boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{r}_{A*}|}{r_{A*}^2}$ и то же с B.
- ▷ центр ускорений: ⟨?⟩

15. Динамика вращения ТТ [2]

- ▷ $M = \int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)$, $\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\int_\tau \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\mu(r)}{\int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)}$
- ▷ $\boldsymbol{\ell} = \int_\tau (\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\mu$, $\boldsymbol{\ell}' = \int_\tau (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\mu$
- ▷ $\boldsymbol{\ell}' = \boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{v}_0\, M + \boldsymbol{r}_c \times \boldsymbol{v}_0\, M + \boldsymbol{R}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c) M + \boldsymbol{\ell}$
- ▷ $T = \dfrac{1}{2}\int_\tau (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2\,\mathrm{d}\mu$, $T' = \dfrac{1}{2}\int_\tau \boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\mu$
- ▷ $T' = T + \dfrac{1}{2}M\boldsymbol{v}_0^2 + M\boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c)$
- ▷ $\ell_\omega = \omega J_\omega$
- ▷ $\boldsymbol{\ell} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega} = \sum_{j,k} J_{jk}\omega_k\, \boldsymbol{i}_j$,

  $J_{jk} = \int_\tau (r^2\delta_{jk} - x_jx_k)\,\mathrm{d}\mu$
- ▷ $T = \dfrac{J_\omega\omega^2}{2} = \dfrac{\widehat{J}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}$
- ▷ $L = \dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$
- ▷ Динамические уравнения Эйлера ¬

  $L_a = J_a\dot{\omega}_a + (J_c - J_b)\,\omega_c\omega_b$

  $L_b = J_b\dot{\omega}_b + (J_a - J_c)\,\omega_a\omega_c$

  $L_c = J_c\dot{\omega}_c + (J_b - J_a)\,\omega_b\omega_a$
- ▷ Кинематические уравнения Эйлера ¬

  $\omega_a = (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)$

  $\omega_b = (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)$

  $\omega_c = (\dot{\psi}\cos\varphi + \dot{\varphi})$

16. Вращение вокруг неподвижной оси¬

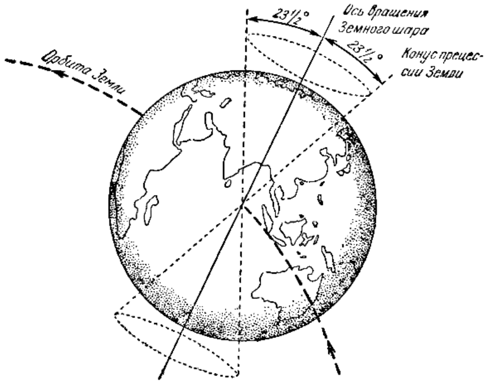
▷ $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_c}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B,\ \boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_c,\ \Rightarrow$

$$\begin{aligned} m(-\ddot{\varphi} x_{c_2} + (\dot{\varphi})^2 x_{c_1}) &= F_1 + N_{A_1} + N_{B_1} \\ m(\ddot{\varphi} x_{c_1} - (\dot{\varphi})^2 x_{c_2}) &= F_2 + N_{A_2} + N_{B_2} \\ 0 &= F_3 + N_{A_3} + N_{B_3} \end{aligned}$$

▷ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} J_{13}\ddot{\varphi} - J_{23}(\dot{\varphi})^2 &= L_1 - r_A N_{A_2} + r_B N_{B_2} \\ J_{23}\ddot{\varphi} + J_{13}(\dot{\varphi})^2 &= L_2 + r_A N_{A_1} - r_B N_{B_1} \\ J_{33}\ddot{\varphi} &= L_3 \end{aligned}$$

17. $L = 0$



18. Сила всего одна и приложена к центру масс

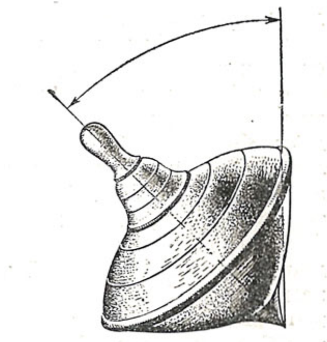
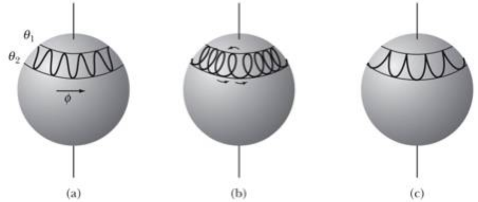


Рис. 10. Волчок.



19. Связи

- ▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ (или $= 0$)
- ▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow f(t, \boldsymbol{r}) = 0$ — голономные
- ▷ $\boldsymbol{R}_i = \Lambda_i \nabla' \varphi_i + \boldsymbol{T}_i$, [3]
  $\Lambda_i = -\dfrac{m\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + m\nabla\varphi_i \boldsymbol{v} + \nabla'\varphi_i \boldsymbol{F}}{|\nabla'\varphi_i|^2}$

20. По поверхности

- ▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda \nabla f + \boldsymbol{T}$
- ▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
- ▷ $\boldsymbol{F} = 0,\ v^2 = v_0^2 e^{-\alpha(s)}$

21. По кривой

- ▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda_1 \nabla f_1 + \Lambda_2 \nabla f_2 + \boldsymbol{T}$
- ▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
- ▷ катится мир к упадку

22. Принцип Даламбера-Лагранжа: Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю: $(M\ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{Y}) \cdot \delta \boldsymbol{y} = 0$

23. При варьировании с фиксированными концами $\left(\delta t_1 = \delta t_0 = 0,\ \begin{matrix} \delta q^\ell|_{t_1} = 0 \\ \delta q^\ell|_{t_2} = 0 \end{matrix}\right)$
$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

- ▷ $\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T,\ T = \frac{M}{2}\sum_{j,k} g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k$
- ▷ $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0}$,
  $\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot{q}^\ell \delta t$ (полная вариация)
- ▷ Лишь при этом условии работает принцип выше

25. $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \frac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0$

26. $\begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0, \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q^l \partial a^p}\right) \neq 0 \\ p_\ell = \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell},\ b_k = \dfrac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k \text{ — const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

- ▷ Ф. объём: $\int_M \rho\, \mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}\Omega = \text{“}\prod_i\text{”}\, \mathrm{d}q^i\, \mathrm{d}p_i$
- ▷ Пуанкаре: $\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k$
- ▷ Пуанкаре-Картане: $\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k - H\mathrm{d}t$

Здесь
M — сечение фазовой трубки,
C — охватывающий её контур.

29. Канонические преобразования

Когда нету зависимости от времени

- ▷ $p_k = p_k(\widetilde{p}, \widetilde{q}),\ q^k = q^k(\widetilde{p}, \widetilde{q})$,
  $\widetilde{H}(t, \widetilde{p}, \widetilde{q}) = H\big(t, p(\widetilde{p}, \widetilde{q}), q(\widetilde{p}, \widetilde{q})\big)$

Когда есть порождающая функция V.

0* $\widetilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$

1* $V_1(t, q, \widetilde{q}) = V$

2* $V_2(t, p, \widetilde{q}) = V + \sum_k p_k q^k$

3* $V_3(t, \widetilde{p}, q) = V - \sum_k \widetilde{p}_k \widetilde{q}^k$

4* $V_4(t, p, \widetilde{p}) = V + \sum_k p_k q^k - \sum_k \widetilde{p}_k \widetilde{q}^k$

При этом

⟨1⟩ $\widetilde{p}_k = +\frac{\partial V_1}{\partial \widetilde{q}^k},\ p_k = +\frac{\partial V_1}{\partial q^k},\ \widetilde{H} = H - \frac{\partial V_1}{\partial t}$

⟨2⟩ $\widetilde{p}_k = +\frac{\partial V_2}{\partial \widetilde{q}^k},\ q^k = -\frac{\partial V_2}{\partial p_k},\ \widetilde{H} = H - \frac{\partial V_2}{\partial t}$

⟨3⟩ $\widetilde{q}^k = -\frac{\partial V_3}{\partial \widetilde{p}_k},\ p_k = -\frac{\partial V_3}{\partial q^k},\ \widetilde{H} = H - \frac{\partial V_3}{\partial t}$

⟨4⟩ $\widetilde{q}^k = -\frac{\partial V_4}{\partial \widetilde{p}_k},\ q^k = +\frac{\partial V_4}{\partial p_k},\ \widetilde{H} = H - \frac{\partial V_4}{\partial t}$

Выглядит не очень, но бывают вещи и похуже

Заметки

[1] У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь $\langle \ddot{\sim} \rangle$

[2] Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить

[3] Здесь вообще градиенты, но жирная набла выглядит некрасиво: $\boldsymbol{\nabla}\varphi$