§ 1 Оценка приращения дифференциального отображения

Утверждение 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. *Тогда формула Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

не работает.

E.g. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения)**.** *Пусть* $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G *— выпуклое,* f *— дифференцируема,*

$$\forall\, x \in G \;\; \|f'(x)\| \leqslant M$$

Тогда $\forall\, a, b \in G \;\; \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m & \varphi(t) := t(b-a) + a, & t \in [0,1] \\ \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists\, c \in [0,1]\colon F(1) - F(0) = F'(c)(1-0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leqslant \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$\mathrm{d}L(x,h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b-a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b-a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, l \rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leqslant M \cdot \|\ell\| \cdot \|b-a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

§ 2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, существуют производные k-го порядка. Тогда

$$\partial^{k+1}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f(x) := \partial_{i_{k+1}}(\partial^k_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p-го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p-го порядка от перестановки переменных)**.** *Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом*

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \ldots, i_p \mid i_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \ldots, j_p \mid j_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

Тогда $\partial^p_i f(x) = \partial^p_j f(x)$

Замечание 1. Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

§ 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$

$$\mathrm{d}^p f(x) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_p}} \,\mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

Утверждение 1. *Если частные производные можно переставлять, то*

$$\mathrm{d}^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geqslant 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n} \,\mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

§ 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

Теорема 1. *Пусть $f \in C^p(G), G \in \mathbb{R}^n$, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n\colon a + h \in G$. Тогда*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. *В форме Пеано:* $R_p(h) = o(\|h\|^p)$
2. *В форме Лагранжа:* $R_p(h) = \dfrac{1}{(p+1)!} \mathrm{d}^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0, 1)$

§ 5 Экстремумы

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что f имеет в a максимум (нестрогий), если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U \;\; f(x) \leqslant f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколотая, то максимум — строгий Для минимума нужно $\geqslant$.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть а внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если f имеет в а экстремум, то*

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; \partial_i f(a) = 0$$

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума). *Пусть $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка, $f \in C^2(a)$.*

1. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) > 0 \Rightarrow f$ *имеет в a* $\min$
2. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) < 0 \Rightarrow f$ *имеет в a* $\max$
3. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \lesseqgtr 0 \Rightarrow$ *ничего нет*
4. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \leqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в a* $\min$
5. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \geqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в a* $\max$

§ 6 Понятие о неявной функции

Определение 1. Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Пусть $a = (x_0, y_0)$ удовлетворяет 1, а U — окрестность a: $U = U_x \times U_y$. Тогда будем говорить, что уравнение 1 определяет неявную функцию f в U, если

$$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q\colon F(x, y) = 0 \qquad (y = f(x))$$

Теорема 1 (О неявной функции). *Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(x_0, y_0)$, а $a = (x_0, y_0)$:*

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists\, P(x_0), Q(y_0)$: в $U = P \times Q$ уравнение 1 задаёт неявную функцию $f\colon P \to Q$. При этом

$$f \in C^1 \wedge f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

□

1. (Доказательство существования)
   Рассмотрим $\varphi(y) = F(x_0, y)$. Пусть НУО $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда
   $$\exists\, U_\varepsilon(x_0, y_0)\colon \forall\, x, y \in U\ \ F'_y(x, y) > 0$$
   Обозначим соответствующие проекции U (шар) на координатные оси за U_x, U_y Получается, что $\varphi \uparrow U_y = (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$. Тогда
   $$\begin{aligned} &\exists\, V_1(x_0)\colon \forall\, x \in V_1 F(x, y + \varepsilon) > 0 \\ &\exists\, V_2(x_0)\colon \forall\, x \in V_2 F(x, y - \varepsilon) < 0 \\ &P = V_1 \cap V_2 \end{aligned}$$
   Тогда из теоремы Больцано-Коши и монотонности φ
   $$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q = U_y\colon F(x, y) = 0$$
   В итоге получилось определение неявной функции.
2. Непрерывность в (x_0, y_0) вроде очевидна, мы же каждому x из P сопоставили 1 y из Q. Принадлежность классу C можно установить проведя аналогичные рассуждения для $x \in P(x_0)$
3. С гладкостью что-то странное. Можно наверное сделать как в Зориче.
4. $F(x, f(x)) \equiv 0 \Rightarrow F'_x \cdot 1 + F'_2 f'(x) = 0$

■

§ 7 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

§ 8 Теорема о сжимающем отображении

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда отображение $T\colon X \to X$ называется сжимающим, если

$$\exists\, C \in (0,1)\colon \forall\, x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leqslant C \cdot \rho(x', x'')$$

Теорема 1 (Банах)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а отображение $T\colon X \to X$ — сжимающее. Тогда $\exists!\, x_* \in X\colon Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).*

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall\, x_0 \in X \;\exists \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x_*$$

§ 9 Метод Ньютона

потом

§ 10 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать F^{-1}.

Рассмотрим, например, линейное отображение.

$$y = F(x) = Ax \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

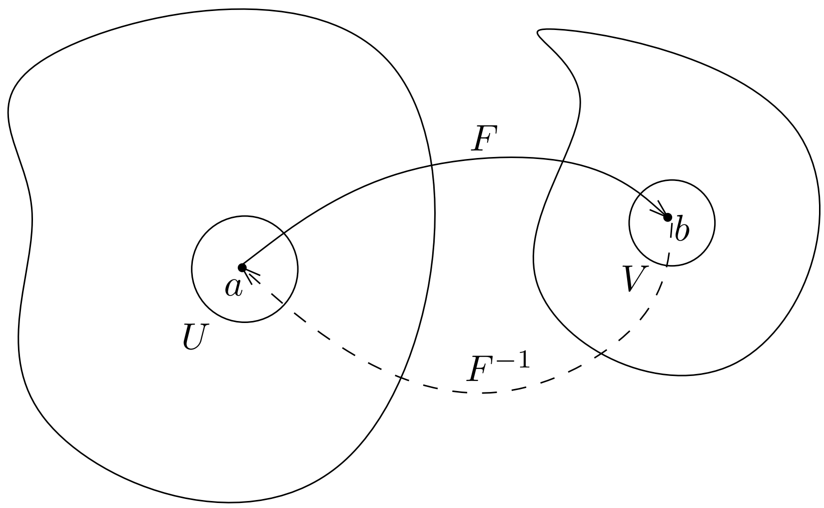
Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists\, U(a), V(b) :\; F\colon U \leftrightarrow V$$



$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \tag{1}$$
$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \tag{2}$$
$$\mathrm{d}F(a) = \mathrm{d}y(b) \tag{3}$$

Условие разрешимости 3 — $\det\big(F'(a)\big) \neq 0$. Утверждается, что 3 $\Rightarrow$ 1
Соответственно, формулировка

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $b = F(a)$. *Пусть ещё* $F \in C^1$, $\det(F'(a)) \neq 0$
Тогда

$$\exists\, U(a), V(b):\ \ F\colon U \leftrightarrow V$$
$$\exists\, F^{-1}V \to U,\ F^{-1} \in C^1$$

§ 11 Доказательство теоремы об обратимости

□ (*Теорема об обратимости отображения*) Введём обозначения:

$$F'(a) = \Gamma$$
$$\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y)$$

Нетрудно заметить, что x — неподвижная точка Φ (что $\Leftrightarrow$ $F(x) = y$). Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (0.8.1). Тогда отображение в окрестности a будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$.

   $$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

   Можно норму оценить
   $$\|\Phi'(x)\| = \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|(F'(a) - F'(x))\|$$
   Последний множитель явно $\xrightarrow[x \to a]{} 0$ (так как $F \in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\| \to 0$. А значит найдётся $U_\varepsilon(a)\colon \|\Phi'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

   Тогда по теореме 0.1.2

   $$x, x' \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

   Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри U_ε компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что
   $$\exists \overline{U}\colon \Phi(U) \subset U$$
   Попутно примем $\|y - b\| < \delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

   $$\|\Phi(x) - a\| = \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\|$$
   $$\leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \big(\| - \underbrace{(F(x) - F'(a)(x - a) - F(a))}_{\alpha}\| + \|y - b\|\big)$$

   Выберем произвольный $\varepsilon\colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

   Однако мы ещё можем подкрутить ε_1.

   $$\exists\, U_{\varepsilon_1}\colon \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (0.4.1), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда ε, а не ε_1.

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\ldots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x-a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x-a\| \leqslant \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists!\, x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a) \colon \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность a с прообразом $V(b) : U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность:

$$\forall\, U\ \exists\, V_\delta(b) \colon F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

■

§ 12 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

Теорема 1 (о дифференцируемости F^{-1}). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F \colon U \leftrightarrow V$. Пусть также F — дифференцируемо в $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. Тогда F^{-1} дифференцируемо в b.*

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцирумости F

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha \alpha = o(h)\ (h \to 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists\, A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =\colon \beta = o(k)\ (k \to 0)$

$$\beta \leqslant \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последнй член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah+\alpha\|} \leqslant \frac{\|h\|}{\big|\|Ah\| - \|\alpha\|\big|} = \frac{1}{\left|\frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|}\right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$

■

Следствие. $(F^{-1})'(b) = \big(F'(a)\big)^{-1}$

§ 13 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 1. *Пусть* $F\colon U \leftrightarrow V$, *биективна,* $\in C^p$. *Пусть к тому же* $\det F'(x) \neq 0$. *Тогда* $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} \quad = (a_{ij}) = A$$

$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n} \quad = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \dfrac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$ (здесь $\mathcal{A}$ — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что b_{ij} — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \ldots, a_{kl}, \ldots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}\big(F(x)\big) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \ldots, akl(x), \ldots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = \big(\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)}\big)(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные F^{-1} принадлежат C^i. Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бобром мы доберёмся до C^p. Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. ■