§ 1 Оценка приращения дифференциального отображения

Утверждение 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. *Тогда формула Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

не работает.

E.g. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), \;\; b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения)**.** *Пусть* $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G *— выпуклое,* f *— дифференцируема,*

$$\forall x \in G \;\; \|f'(x)\| \leqslant M$$

Тогда $\forall\, a, b \in G \;\; \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

Вот тут как раз нужна выпуклость, иначе отрезок $[a; b]$ может и не лежать в G

где

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n & \varphi(t) := t(b-a) + a, & t \in [0,1] \\ \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists\, c \in [0,1]\colon F(1) - F(0) = F'(c)(1-0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leqslant \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$\mathrm{d}L(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, l \rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leqslant M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

§ 2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall\, x \in G\ \exists\, \partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f(x)$. Тогда

$$\partial^{k+1}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f(x) := \partial_{i_{k+1}}(\partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p-го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p-го порядка от перестановки переменных)**.** *Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом*

$$\begin{aligned} &i = \{i_1, \ldots, i_p \mid i_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &j = \{j_1, \ldots, j_p \mid j_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &j = \pi(i) \end{aligned}$$

Тогда $\partial^p_i f(x) = \partial^p_j f(x)$

□ Сначала докажем всё для $p = 2$, $n = 2$, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Пусть $(x, y) \in G$, $(x_0 + \Delta x, y) \in G$, $(x, y + \Delta y) \in G$, $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in G$ Введём ещё 2 функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t, y + \Delta y) - f(t, y) \\ \psi(t) &= f(x + \Delta x, t) - f(x, t) \end{aligned}$$

Тогда $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(c_1)\Delta x = W,\ c_1 \in [x, x + \Delta x]$. При этом

$$W = \varphi'(x)\Delta x \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2)\, \Delta x \Delta y,\ \ c_2 \in [y, y + \Delta y]$$

Аналогично

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4)\Delta x \Delta y,\ \ c_4 \in [y, y + \Delta y], c_3 \in [x, x + \Delta x]$$

По непрерывности второй производной f ($f \in C^2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned}$$

По теореме о предельном переходе в равенствах $\smile$ смешанные производные равны.

Теперь поймём, что делать в случае произвольных p, n.

Представим подстановку π как произведение транспозиций соседних элементов. Будем дальше разбираться с такими транспозициями.

Пусть $\tau_k = (j, j+1)$. Сначала посчитаем производные по $x_1, \ldots, x_{j-1} = i'$. А теперь обозначим $\widetilde{f} = \partial_{i'} f$. По доказанному утверждению для двух переменных, $\partial_{j,j+1}\widetilde{f} = \partial_{j+1,j}\widetilde{f}$. А теперь продифференцируем это равенство по оставшимся переменным.

Таким образом, для произвольной транспозиции $\tau_k = (j, j+1)$ верно утверждение теоремы. А значит, и для произвольной подстановки $\pi = \prod_k \tau_k$ теорема верна. ■

Замечание 1. Тут важно, что $f \in C^p(G)$. Одной точки бы не хватило, мы ведь рассматриваем маленький параллелепипед в $U(x)$ и используем одномерную теорему Лагранжа внутри него. А для неё нужна дифференцируемость на интервале.

§ 3 Обобщение бинома

«Обычный» бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Его нетрудно обобщить до полинома Ньютона

$$(a_1 + \cdots + a_n)^p = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1} \cdots a_{i_p} = \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0,\ldots,p\} \\ \sum \alpha_i = 1}} a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n} \cdot C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

Введём обозначения:

- $a = (a_1, \ldots, a_n)$
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, по сути вектор индексов, для которого вводится своя куча обозначений, дабы упростить жизнь
  1. $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i=1}^n$
  2. $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
  3. $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
- $a^\alpha = \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$
- $\partial_\alpha = \partial^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \dfrac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_n}}$
- $C_\alpha = C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$

Утверждение 1. $C_\alpha = \dfrac{p!}{\alpha!}$

▼

Ну, это просто число перестановок с повторениями. Нужно взять по множителю из p скобок, причём перестановки одинаковых множителей входят в одно слагаемое. В итоге нужно делить общее число перестановок на число перестановок одинаковых множителей. А дальше можно сказать, что в каждое слагаемое входит каждый множитель, просто некоторые в нулевой степени.

▲

§ 4 «Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$. Тогда

$$\mathrm{d}^p f(x) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} \,\mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

Или ещё можно вот так записать

$$\left(\sum_i \mathrm{d}x_i \, \partial_i \right)^p f(x)$$

Утверждение 1. *Если частные производные можно переставлять, то*

$$\mathrm{d}^p f(x) = \sum_{\substack{0 \leqslant \alpha_i \leqslant p \\ |\alpha_i| = p}} \frac{p!}{\alpha!} \partial_\alpha f(x) \,\mathrm{d}x^\alpha$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C^{p+1}(G), G \in \mathbb{R}^n, G$ –выпуклая, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n\colon a + h \in G$. Тогда*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \mathrm{d}^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. *В форме Пеано: $R_p(h) = o(\|h\|^p)$*
2. *В форме Лагранжа: $R_p(h) = \dfrac{1}{(p+1)!} \mathrm{d}^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0,1)$*

□ Рассмотрим $\varphi(t) = a + th$, $t \in [0,1]$, $F(t) = f(\varphi(t))$, $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. По одномерной теореме Тейлора

$$F(1) = F(0) + 1 \cdot F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) 1^2 + \dots + \frac{1}{p^2} F^{(p)}(0) \cdot 1^p + R_p$$

Докажем, что $F^{(k)}(0) = \mathrm{d}^k f(a, h)$. Проще всего по индукции, давайте ещё такое нестандартное обозначение введём: $(k) = (1, \dots, k)$, и будем понимать под $i_{(k)}$ вектор индексов, а под $h_{i(k)}$ — произведение соответствующих h.

база: $F(0) = f(a)$

переход: Пусть $F^{(k-1)}(t) = \sum\limits_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_{k-1} \leqslant n} \partial_{i_{(k-1)}} f(a+th)\, h_{i_{(k-1)}}$. При дифференцировании по t всякие h_{i_j} в каждом слагаемом вынесутся за знак производной, а частная производная от f даст $\sum_{i_k} \partial_{i_{(k)}} f(a+ht) h_{i_k}$. Если скомпоновать все суммы и подставить $t = 0$, как раз получается $d^k f(a, h)$

Теперь разберёмся с остатком

$$R_p = \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta) \cdot 1^{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} \mathrm{d}^{(p+1)} f(a + h\theta, h)$$

Поскольку $\forall\, i \;\; |h_i| \leqslant \|h\|$

$$d^{(p+1)} f(a + \theta\, h, h) = O(\|h\|^{p+1}) = o(\|h\|^p)$$

Следовательно, $R_p = o(\|h\|^p)$ ■

§ 5 Понятие экстремума, необходимое условие

Определение 1. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что f имеет в a максимум (нестрогий), если

$$\exists\, U(a) \colon \forall\, x \in U \;\; f(x) \leqslant f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколотая, то максимум — строгий Для минимума нужно $\geqslant$.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть a внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если f имеет в a экстремум, то*

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; \partial_i f(a) = 0$$

□ Рассмотрим $\varphi_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Тогда у такой функции есть экстремум в a_i. А тогда, из одномерной теоремы Ферма $d\varphi_i(t) = 0$. А значит $\partial_i f = 0$ ■

§ 6 Про квадратичные формы

тут изложение больше по [?]

Определение 1. Функция $A \colon V \times V \to \mathbb{R}$, где V — векторное пространство, называется *билинейной формой*, если она линейна по обеим своим аргументам.

Определение 2. Билинейная форма A называется *симметрической*, если $\forall\, x, y \;\; A(x, y) = A(y, x)$.

Определение 3. Пусть A — билинейная форма, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в векторном пространстве. Тогда

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i, e_j) x^i y^j$$

и матрица A, элементы которой $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы.

Определение 4. Пусть A — симметрическая билинейная форма. Тогда $A(x) = A(x, x)$ — *квадратичная форма*. При этом $A(x, y)$ называется *полярной формой* по отношению к $A(x)$.

Определение 5. Матрица квадратичной формы — матрица соответствующей полярной формы.

Определение 6 («Определённость» формы)**.** Если что-то верно, то про форму $A(x, y)$ говорят:

- $\forall x, y \neq 0 \;\; A(x, y) > 0$ — положительно определена
- $\forall x, y \neq 0 \;\; A(x, y) < 0$ — отрицательно определена
- $\forall x, y \neq 0 \;\; A(x, y) \geqslant 0$ — полуопределена в положительном смысле
- $\forall x, y \neq 0 \;\; A(x, y) \leqslant 0$ — полуопределена в отрицательном смысле

E.g. Скалярное произведение — положительно определённая билинейная форма.

Теорема 1. *Пусть в некотором базисе $f_1, \dots, f_n$ квадратичная форма A имеет матрицу (a_{ij}). Пусть к тому же все «северо-западные» миноры Δ_i отличны от нуля. Тогда существует базис $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица A имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

□ По сути, нам нужно построить ортогональный базис, только вместо скалярного произведения используется билинейная форма A(причём не обязательно положительно определённая). За подробностями см. [**?**]. ■

Теорема 2 (Правило Сильвестра)**.** *Квадратичная форма положительно определена, если все миноры из теоремы 0.6.1 положительны, и отрицательно определена, если их знаки чередуются, начиная с «-».*

□ Следствие предыдущей теоремы. Определённость формы не зависит от выбора базиса. ■

§ 7 Достаточное условие экстремума

Теорема 1 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка, $f \in C^2(a)$.*

1. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) > 0 \Rightarrow f$ *имеет в a* min
2. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) < 0 \Rightarrow f$ *имеет в a* max
3. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) \lessgtr 0 \Rightarrow$ *ничего нет*
4. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) \leqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в a* min

5. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a,h) \geqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в* a max

□ Поскольку $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\Delta f(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}^2 f(a) + \alpha)$, где $\alpha = o(\|h\|)$. Для упрощения жизни примем $t = \frac{h}{\|h\|}$. Тогда приращение функции можно переписать в виде

$$\Delta f = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \sum b_{ij} t_i t_j + \frac{\alpha}{\|h\|^2} \right)$$

Поскольку $\frac{\alpha}{\|h\|^2} \to 0$, существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ в которой знак приращения определяется лишь первым слагаемым. Нетрудно заметитить, что все значения t лежат на единичной сфере, которая компакт. Причём значения t покрывают всю сферу, ведь направление h можно выбирать в окрестности a произвольно. Так что можно просто сделать второе слагаемое меньшим минимума квадратичной формы на единичной сфере.

Таким способом можно расправиться с пунктами 1–2.

Для пункта 3 отыщем $h_1 \colon \mathrm{d}^2(a, h_1) > 0$, $h_2 \colon \mathrm{d}^2(a, h_1) < 0$. Заметим, что если A — квадратичная форма, то $A(h) > 0 \Rightarrow \forall s \ A(sh) = s^2 A(h) > 0$. По сути, мы считаем значение формы вдоль прямой, проходящей через a. Если, как и выше, записать приращение в виде

$$\Delta f = s^2 \left(\frac{1}{2} \mathrm{d}^2(a, h_{1|2}) + \frac{\alpha}{s^2} \right)$$

то видно, что можно получить в окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ всё, что угодно, просто $s \to 0$.

4–5 легко доказываются от противного. ■

§ 8 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Последовательность (x_n) называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \colon \forall m, n > N \ \ \rho(x_n - x_m) < \varepsilon$$

Определение 2. Метрическое пространство (X, ρ) — полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится

E.g. $\mathbb{R} \setminus 0$ — не полное метрическое пространство, $x_n = {}^1\!/_n$ тому пример.

Замечание 1. Если (X, ρ) — полно, то X вообще-то замкнуто. Хорошо видно на примере выше.

Замечание 2. Если (X, ρ) — полно, $Y \subset X$ — замкнуто. Тогда и Y — полно.

Утверждение 1. $\mathbb{R}^n$ — *полное метрическое пространство.*

▼

$\sphericalangle$ произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho(x_n - x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \ \rho(x_m^i e_i - x_n^i e_i) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \ |x_m^i - x_n^i| < \varepsilon$$

Таким образом $(x_n^i) \in \mathbb{R}$ — фундаментальная. А в $\mathbb{R}$ по теореме из первого семестра фундаментальные последовательности сходятся. Тогда $\forall\, x_n^i \to a^i$. Значит и $x_n \to a$.
▲

Кусок дальше не шибко нужен

Давайте введём метрику на пространстве непрерывных функций

Определение 3. Пусть $f, g, h \in C\big([a;b]\big)$. Тогда

$$\rho(f,g) := \sup_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$$

Здесь супремум можно заменить на максимум по теореме Вейерштрасса.
Докажем что это правда расстояние:

- $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ — очевидно
- $\rho(f,g) \geqslant 0$ — тоже очевидно
- $\rho(f,g) = \rho(f,h) + \rho(h,g)$ — не так очевидно

$$\max_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)| = |f(x_0) - g(x_0)| \leqslant |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)|$$
$$\leqslant \max_{x\in[a;b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a;b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Утверждение 2. *Пространство $C\big([a;b]\big)$ с указанной выше метрикой полно.*

▼
Поточечная сходимость очевидна из полноты $\mathbb{R}$. А равномерную можно получить, устремив m к ∞, зафиксировав n. А из равномерной сходимости следует непрерывность предельной функции.
▲

Замечание. Если взять в качестве метрики $\int_a^b |f - g|$, то полнота поломается. Пополнение будет пространством суммируемых функций.

§ 9 Теорема о сжимающем отображении

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда отображение $T\colon X \to X$ называется сжимающим, если

$$\exists\, C \in (0,1)\colon \forall\, x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leqslant C \cdot \rho(x', x'')$$

Теорема 1 (Банах)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а отображение $T\colon X \to X$ — сжимающее. Тогда $\exists!\, x_* \in X\colon Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).*

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall\, x_0 \in X \ \exists \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x_*$$

$\square \lessdot x_n = T^n x_0$, где $x_0 \in X$ — произвольное. Докажем, что

1. $x_n \to x_*$
2. $Tx_* = x_*$
3. других таких x_* нет.

Поехали

1. (x_n) сходится в себе, ведь $C \in (0,1)$.

$$\rho(x_m, x_{m+p}) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \dots + \rho(x_{m+p-1}, x_{m+p}) \leqslant \rho(x_0, x_1) C^m (1 + \dots + C^{p-1}) < \rho(x_0, x_1) \frac{C^m}{1-C} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

раз пространство полное, $\exists \lim_\infty x_n$

2. отображение T непрерывно $\Rightarrow Tx_n \to Tx_*$. Но по теореме о подпоследовательности и единственности предела $Tx_* = x_*$.

3. Пусть x_{**} — другая неподвижная точка. Но тогда

$$\rho\left(x_{**}, x_*\right) = \rho\left(Tx_{**}, Tx_*\right) \leqslant C\rho\left(x_{**}, x_*\right) \Rightarrow (C-1)\,\rho\left(x_{**}, x_*\right) \geqslant 0 \underset{C<1}{\Longrightarrow} \rho\left(x_{**}, x_*\right) = 0$$

$\blacksquare$

§ 10 Метод Ньютона

Пусть $f \in C\big([a;b]\big)$, $f(a)\cdot f(b)$, $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$. Сам метод выглядит как-то так:
Проводится касательная к графику в текущей точке, ищется её пересечение с осью x, оттуда восставляется перпендикуляр, пересечение которого с графиком — новая точка.

$$x - Tx = \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Докажем, что это вообще работает.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^2\left([a;b]\right)$, $x_* \in [a;b]$:*

a) $f(x_*) = 0$

b) $f'(x_*) \neq 0$

Тогда $\exists\, U(x_*)\colon \forall\, x_0 \in U$, такая что $T^n x_0 \to x_*$ и $x_{n+1} - x_* = O\big((x_n - x_*)^2\big)$

☐ Сначала оценим T'.

$$T'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{(f\in C^2)} \frac{f(x_*)f''(x_*)}{f'(x_*^2)} = 0$$

Так что $\exists\, U(x_*): c \in \overline{U} \Rightarrow |T'(c)| \leqslant {}^1\!/_2$.

Теперь покажем, что $T(\overline{U}) \subset \overline{U}$. Из вышесказанного

$$|Tx - Tx_*| \leqslant \frac{1}{2}|x - x_*| \tag{1}$$

Поскольку $Tx_* = x_* - 0 = x_*$, то (1) равносильно

$$|Tx - x_*| \leqslant \frac{1}{2}|x - x_*|$$

А это как раз то, что надо. Значит T как раз сжимающее отображение, и по теореме 0.9.1 такой $x_*: f(x_*) = 0$ единственный.

Вторая часть тривиально получается из разложения f в ряд Тейлора в окрестности x_n. ■

§ 11 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать F^{-1}.

Рассмотрим, например, линейное отображение.

$$y = F(x) = Ax \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists\, U(a), V(b) : \; F : U \leftrightarrow V$$

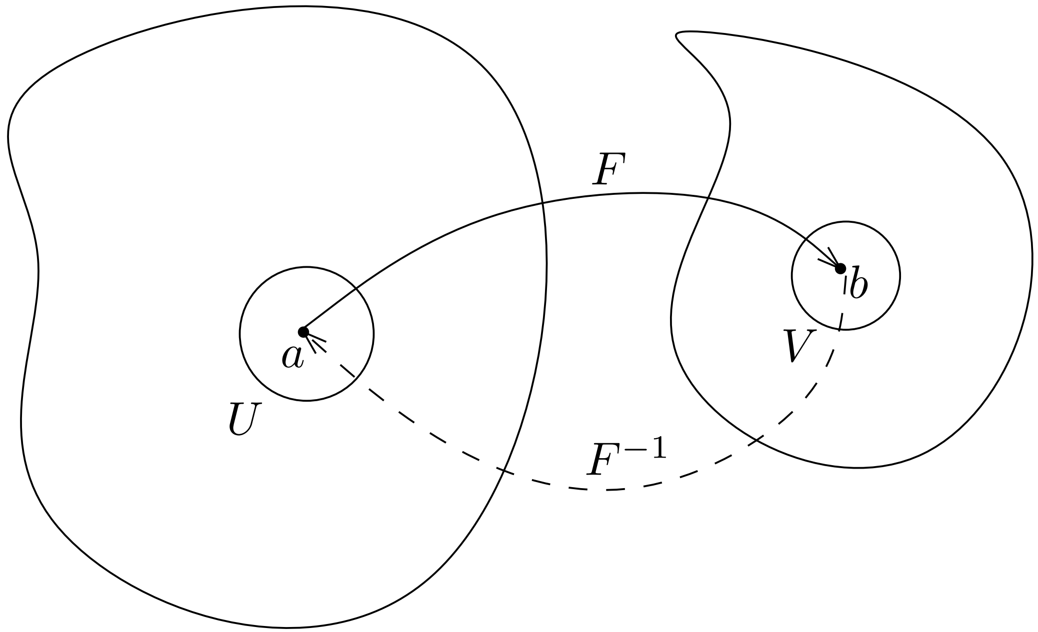
$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \tag{1}$$

$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \tag{2}$$

$$\mathrm{d}F(a) = \mathrm{d}y(b) \tag{3}$$

Условие разрешимости (3) — $\det\big(F'(a)\big) \neq 0$. Утверждается, что у (1) условие разрешимости такое же.

Соответственно, формулировка



Теорема 1. *Пусть $F\colon G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $a\in G$, $b=F(a)$. Пусть ещё Fдифференцируема в a,* $\det(F'(a))\neq 0$
Тогда

$$\exists\, U(a),V(b):\;\; F\colon U\leftrightarrow V$$
$$\exists\, F^{-1}\colon V\to U,\; F^{-1}\in C^0$$

§ 12 Доказательство теоремы об обратимости

☐ (*Теорема об обратимости отображения*) Введём обозначения:

$$F'(a)=\Gamma$$
$$\Phi(x)=x-\Gamma^{-1}(F(x)-y)$$

Нетрудно заметить, что x — неподвижная точка $\Phi \Leftrightarrow F(x)=y$. Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (0.9.1). Тогда отображение в окрестности a будет взаимно-однозначным.

Тут y фиксируется и от x не зависит. Так что $y'=0$

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$. Попутно примем $\|y-b\|<\delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

$$\Phi'(x)=E-\Gamma^{-1}(F'(x))=\Gamma^{-1}(F'(a)-F'(x))$$

$$\|\Phi'(x)\|\leqslant\|\Gamma^{-1}\|\cdot\|(F'(a)-F'(x))\|$$

Последний множитель явно $\xrightarrow[x\to a]{} 0$ (так как $F\in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\|\to 0$. А значит найдётся $U_{\varepsilon_0}(a)\colon \|\Phi'(x)\|\leqslant\frac{1}{2}$.

Тогда по теореме 0.1.2

$$x, x' \in U_{\varepsilon_0}(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри U_{ε_0} компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\exists\, \overline{U} \colon \Phi(\overline{U}) \subset \overline{U}$$

$$\begin{aligned}\|\Phi(x) - a\| = \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x-a) - F(x) + y + b - b\| \\ \leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \big(\| - \underbrace{(F(x) - F'(a)(x-a) - F(a))}_{\alpha}\| + \|y - b\|\big)\end{aligned}$$

Выберем произвольный $\varepsilon \colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Однако мы ещё можем подкрутить ε_1.

$$\exists\, U_{\varepsilon_1} \colon \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (0.4.2), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда ε, а не ε_1.

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\ldots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x - a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists!\, x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a) \colon \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность a с прообразом $V(b)$: $U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность, за счёт произвольно выбранного ε:

$$\forall\, U_\varepsilon\ \exists\, V_\delta(b) \colon F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

∎

§ 13 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

Теорема 1 (о дифференцируемости F^{-1})**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F : U \leftrightarrow V$. *Пусть также* F *дифференцируема в* $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. *Тогда* F^{-1} *дифференцируемо в* b.

☐ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцируемости F

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha, \;\; \alpha = o(h) \; (h \to 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists\, A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k) \; (k \to 0)$

$$A\beta \leqslant \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leqslant \frac{\|h\|}{\big|\|Ah\| - \|\alpha\|\big|} = \frac{1}{\left|\frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|}\right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$
■

Следствие. $(F^{-1})'(b) = \big(F'(a)\big)^{-1}$

§ 14 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 1. *Пусть* $F : U \leftrightarrow V$, *биективна,* $\in C^p$. *Пусть к тому же* $\det F'(x) \neq 0$. *Тогда* $F^{-1} \in C^p$

☐ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij}) = A$$
$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n} = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \dfrac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$ (здесь $\mathcal{A}$ — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что b_{ij} — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \dots, a_{kl}, \dots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\big(F(x)\big) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \dots, a_{kl}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = \big(\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)}\big)(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные F^{-1} принадлежат C^i. Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бобром мы доберёмся до C^p. Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. ■

§ 15 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

Теорема 1. *Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет n корней (x_j^0), $x_j^0 \in \mathbb{R}$, таких что $\forall\, i, j$ $x_i^0 \neq x_j^0$. Пусть ещё старший коэффициент = 1. Тогда*

$$x_i = x_i(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n x_1 \cdots x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= (-1) \sum_i x_i \end{aligned}$$

Рассмотрим P как отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$.

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\det(F')$. Этот определитель можно рассмотреть как многочлен $\in R[x_1, \dots, x_n]$ Его степень не превосходит $0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что если хоть какая-то пара столбиков равны, то определитель равен нулю. Так что $\det(F')$ делится на всевозможные многочлены вида $x_i - x_j$. А их как раз $\frac{n(n-1)}{2}$ и они неприводимые. Следовательно,

Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

$$\det(F')(x_1, \dots, x_n) = C \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой.

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

§ 16 Теорема о неявном отображении

В доказательстве потом весомо пользуются, что функция действует в пространство той же размерности, что и y

Определение 1. Пусть $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$ такие, что $F(x^0, y^0) = 0$.

Тогда если $\exists\, P(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, $Q(y^0) \subset \mathbb{R}^m$, такие что

$$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q\colon F(x, y) = 0$$

то говорят, что уравнение (1) задаёт неявную функцию $f\colon P \to Q$.

Сначала всякие комментарии.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases} \mathrm{d}F_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathrm{d}F_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j. \end{cases} \tag{2}$$

При этом $\mathrm{d}y_j$ мы хотим выразить через $\mathrm{d}x_j$. Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1. $k = m$
2. $\det\left(\dfrac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right) \neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (2) $\Rightarrow$ (1).

Теорема 1 (Теорема о неявном отображении)**.** *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^p$, $p \geqslant 1$.

$$F(x, y) = 0, \quad (x_0, y_0) \in G$$

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists\, P(x_0), Q(x_0)$, *такие, что* (1) *задаёт неявное отображение* $f\colon P \to Q$. *При этом* $f \in C^p$ *и*

$$f'(x) = -\big(F'_y(x, y)\big)^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

☐ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [**?**, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1. $\Phi\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Работает как-то так:
$$(x, y) \mapsto (u, v), \begin{cases} u = x, & u \in R^n \\ v = F(x, y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$
2. $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ такого сорта $x \mapsto (x, 0)$
3. $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такого сорта $(x, y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель $\Phi'(x, y)$. Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right) \Rightarrow \det\big(\Phi'(x_0, y_0)\big) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (0.11.1) $\exists\, \Phi^{-1}(x_0, y_0)$ и ещё окрестности $U(x_0, y_0), V(x_0, 0)$. Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \ \land \ Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$. Вполне очевидно, что $f \in C^p$. Ну $i, \pi \in C^\infty$, $\Phi^{-1} \in C^p$.

К тому же

$$\forall x \in P \ x \overset{i}{\mapsto} (x, 0) \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} (x, y) \overset{\pi}{\mapsto} y \in Q$$

При этом такой y — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение f.

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию F'_y — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

■

§ 17 Функциональная зависимость системы функций

Определение 1. Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, $x_0 \in G$. Тогда g называются функционально зависимой от $f_1, \ldots, f_m$ в $V(x_0)$, если

$$\exists\, \varphi\colon U(f(x_0)) \to \mathbb{R}, \varphi \in C^1 : \; g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

Определение 2. Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально *не*зависимыми, если определение выше не выполняется ни для какой $V \subset G$ ни для какой из функций из набора.

Теорема 1. *(о функциональной зависимости) Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. К тому же $a \in G$, $f = (f_i)_i$, $y = f(x)$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \end{pmatrix} = m$ в точке $x \in U(a)$. Тогда, если $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \\ g' \end{pmatrix} = m$ в точке a, то $\exists V(a)$ в которой g функционально зависит от $f_1, \ldots, f_m$.*

тут тонкость. Если ранг равен m, то определитель не 0 и в некой окрестности a по непрерывности. А вот со вторым так не прокатит, там наоборот нужно равенство 0

☐ Пусть сразу $n \geqslant m$, иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там m векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x, \ldots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}), \; \bar{y} = (y_1, \ldots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в $f'(x), x \in U(a)$ существует ненулевой минор порядка m. Можно НУО считать, что он соответствует $\bar{x}$. Тогда это равносильно тому, что $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a)\right) \neq 0$.

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \; F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей P, Q и

$$\exists\, \varphi\colon P \subset \mathbb{R}^n \to Q \subset \mathbb{R}^m, \; \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$. Заметим, что здесь $y, \bar{\bar{x}}$ — независимые переменные. Так что если $j > m$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x), \; x \in U(a)$$

Нам для того чтобы показать, что g функционально зависит от f, необходимо приравнять в окрестности точки a g к функции от y. Пусть снова $j > m$, тогда

$$g(x) = g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}})$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g$$

А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности a — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \right) = 0$$

Из того, что g, φ — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 0.17.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

§ 18 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

Определение 1 (Коразмерность)**.** Пусть V — подпространство U. Тогда $\operatorname{codim} V = \dim U - \dim V$.

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in G$, $b = F(a)$, $\exists V(a)\colon \forall x \in V \;\; \operatorname{rk} F'(x) = r$. *Тогда*

1. $\exists U(a)\colon F(U)$ *имеет вид графика* $\bar{\bar{y}} = \varphi(\bar{y})$
2. $\exists U(a) \subset F^{-1}(b)$ *имеет вид графика* $\bar{x} = \psi(\bar{\bar{x}})$

□ Аккуратное следствие 0.17.1 и 0.16.1. Единственное нетривиальное место — во второй половине, где нужно показать, почему из m уравнений вида $F_i(x) = b_i$, можно оставить лишь r. Здесь можно сказать, что последние уравнения не накладывают дополнительных ограничений на $\{x_i\}$, ведь там по сути написано, что-то такое: $\varphi(\bar{b}) = \bar{\bar{b}}$. А эти уравнения точно верны из 1 пункта. ■

Замечание. Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

Есть кстати шансы, что в этой теореме попутно определили размерность образа при отображении, но неточно. Собственно, график $\bar{\bar{y}} = \varphi(\bar{y})$ можно считать заданным на $y \in \mathbb{R}^m$, которое уже «прямое», а дальше размерностью объявить $\dim\{\bar{y}\}$.

§ 19 Три способа локального задания поверхности

1. Параметрическое
$$f\colon D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n : \;\; \operatorname{rk} f' = k \; \forall x \in D (\geqslant k)$$
Тогда $M = f(D)$ — поверхность размерности k.

Условие на ранг означает, что нигде нету изломов, параметр же по сути — скорость.

2. Задание графиком

$$D \subset \mathbb{R}^k,\ f\colon D \to \mathbb{R}^{n-k} \text{ — гладкое}$$

Тогда $M = \{(t, f(t)) \mid t \in D\} = \Gamma_f$.

Определение 1 (Поверхность(нестрого))**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^m$ можно называть k-мерной гладкой поверхностью, если в окрестности любой своей точки оно задаётся графиком гладкого отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$.

3. Неявное

Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, $\operatorname{rk} F = n - k$. Тогда

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

По сути уравнения связи.

Теорема 1. *Если в некой окрестности $a \in R^n$ k-мерная поверхность может быть задана один из 3 способов, то она может быть задана и всеми остальными.*

□

$1 \to 2$ см 0.18.1 (1)

$2 \to 3$ $F(t, y) = f(t) - y$, $F' = (f'_t \mid -E) \Rightarrow \operatorname{rk} F' = n - k$

$3 \to 2$ см 0.18.1 (2)

$2 \to 1$ $(x, y) \mapsto (x(t), f(x(t))$, где $t = x$. С рангами очевидно проблем нет, единичная матрица же.

■

§ 20 Условный экстремум(нестрого)

Определение 1 (Безусловный экстремум)**.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$ — внутренняя точка. Тогда в точке a max / min если

$$\exists\, U(a)\colon \forall x \in U\ \ f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Определение 2 (Экстремум на подмножестве)**.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка. Тогда в точке a max / min относительно M, если

$$\exists\, U(a)\colon \forall x \in U \cap M\ \ f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Чаще всего M задают неявно — «накладывают условия» на значения f.

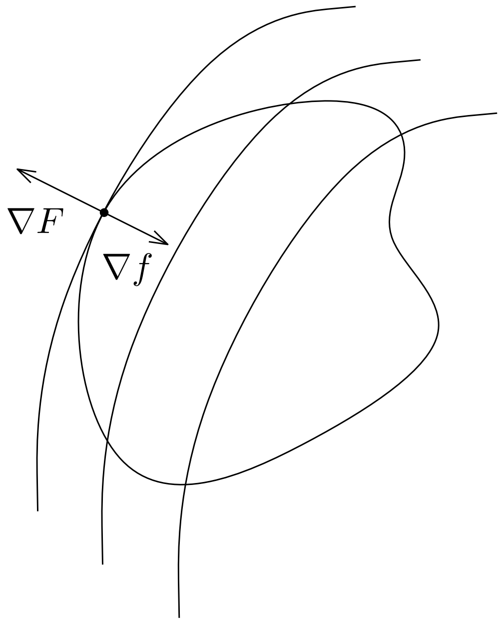
Определение 3 (Условный экстремум)**.** Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_1, \ldots, F_m: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка, $F_1(a) = \cdots = F_m(a) = 0$. Тогда в точке a *условный* max / min если

$$\exists\, U(a): \forall x \in U, F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0 \;\; f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Теорема 1. *Пусть $f, F_1, \ldots, F_m \in C^1(G)$, $a \in G$.*

Тогда если f имеет в a экстремум при условии $F(a) = 0$, то $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_m(a)$ — линейно зависимы.

E.g. Можно двумерный случай рассмотреть.



$$\nabla f = \lambda \nabla F$$

Следствие 1 (Правило Лагранжа)**.** *f имеет в a экстремум при условии $F_1(a) = \cdots = F_m(a) = 0$, то*

1. *либо $\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_m(a)$ ЛЗ*
2. *либо $\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i(a)$*

§ 21 Доказательство теоремы об условном экстремуме

□

1. Пусть $m = n-1$. Будем доказывать от противного. Пусть в a условный max, но $\nabla f(a)$, $\nabla F_1(a), \ldots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ. Рассмотрим $\Phi(x) = (f(x), F_1(x), \ldots, F_m(x))$. Тогда такое $\Phi: G \to \mathbb{R}^n$. Из линейной независимости градиентов

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix}, \;\det \Phi'(a) \neq 0$$

Пусть $b = \Phi(a) = (f(a), 0, \ldots, 0)$. Тогда по теореме об обратном отображении (0.14.1)

$$\exists\, U(a), V(b): \; \Phi: U \to V \text{ — диффеоморфизмъ}$$

Пусть $V \supset B_\varepsilon(b)$, $y = (f(a) + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in V$, тогда $\exists!\, x \in U \colon \Phi(x) = y$. Получается, что $f(x) > f(a)$, $\forall\, i\ F_i(x) = 0$, что немного противоречит тому, что в a условный max.

2. Теперь рассмотрим случай $m < n - 1$ (всё остальное неинтересно, точно будет ЛЗ).
   Будем доказывать от противного. Пусть в a условный max, но $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ. Тогда $\operatorname{rk}\Phi'(a) = m + 1 < n$. Добавим ещё функций $F_{m+1}, \dots, F_{n-1}$ таких, что $F_i(x) = x_{i+1} - ai + 1$.

   Введём ещё стандартное обозначение

$$x = (\underbrace{x, \dots, x_{m+1}}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+2}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}})$$

   И не совсем стандартное

$$A = \frac{\partial(f_1, F_1, \dots, F_m)}{\partial x_1, \dots, x_{m+1}}(a)$$

   Обычно такой «дробью» обозначают якобиан, но, пожалуй, сохраню обозначения с лекции.

   Итак

$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & E_{n-m-1} \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rk}\Phi'(a) = n$$

   А теперь можно подвести всё к первому пункту. Рассмотрим $\widetilde{M} = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$ (а $M = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$). Поскольку $\widetilde{M} \subset M$, f будет иметь в a максимум и относительно $\widetilde{M}$.

   Аналогично 1 пункту получаем бред какой-то.

■

Замечание 1. Такая теорема может найти лишь точки, «подозрительные» на экстремум. Надо ещё отдельно думать. Например, вдруг там на компакте всё определено.

Замечание 2. Можно рассматривать функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x) = f(x, \lambda) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x)$$

Тогда если в a условный экстремум, то в $(a, \lambda_)$ стационарная точка ($\mathcal{L}'(a) = 0$) функции Лагранжа.