

1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$.
2. Закон Фарадея: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$,
 $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3}$
4. $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
5. Закон Ампера: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$
6. Уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

2 В среде

1. Поляризация и намагничённость

$$\mathbf{P} :: \mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \mathbf{P},$$

$$\mathbf{M} :: \mathbf{j}_{\text{m}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

$$\{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{int}} = \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{pol}} + \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{m}}$$

2. В сильнопеременных

$$\rho_{\text{int}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$$

3. $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$

4. Уравнения Максвелла в среде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{ex}} + \mathbf{j}_c)$$

5. Материальные уравнения (простейшие)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$$

6. Дисперсия, варианты

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dV$$

f, g — функция отклика.

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\sigma E^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{ex}}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

1. Вид потенциала: $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

2. Калибровочная инвариантность:
$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi \\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

3. Калибровка Лоренца: $\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0^1$

4. Уравнения Максвелла примут вид:

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}, \quad \text{где } \square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

5 Волновые уравнения

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0$$

$$\square \mathbf{A} = 0, \quad \square \varphi = 0 \quad (\square \chi = 0)$$

Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ ²

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)$$

2. Плоская волна: $A = A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt)^3$

3. Условие поперечности: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{c}{v} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$

4. $\mathbf{S} = v w \mathbf{n}$.

5. Уравнение сферической волны: $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$

6. Его решение: $u(r, t) = \frac{1}{r} (f(r - vt) + g(r + vt))$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n} \Rightarrow u = \operatorname{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. α, \mathbf{b}

$$\alpha :: \mathbf{E}_0^2 = |E_0^2| e^{-2i\varphi_0}$$

$$\mathbf{b} :: \mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\varphi_0}, \quad \mathbf{b}^2 = |E_0^2|, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2$$

2. $\mathbf{b}^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$

3. $\frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_2)^2}{b_2^2} = 1, \quad (\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3).$

9 Почти монохроматические волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega t}, \quad \langle ? \rangle$$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$$|\overline{\mathbf{S}}| = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E}}$$

$$\rho = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}$$

$$1. \det \rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$$

$$2. \det \rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0 \quad 4$$

$$3. I^2, V^2, U^2 + Q^2 - \text{инварианты} \quad 5$$

$$4. I(\psi, \delta) = |\overline{\mathbf{S}}| = \boldsymbol{\ell}_\delta^\dagger \rho \boldsymbol{\ell}_\delta = \frac{1}{2}(I + Q \cos 2\psi + U \sin 2\psi \cos \delta - V \sin 2\psi \sin \delta),$$

$$\boldsymbol{\ell}_\delta = (\cos \psi, \sin \psi e^{-i\delta})^\top, \text{ а вот выводится это неприятно.}$$

11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$$I = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = |\overline{\mathbf{S}}|$$

$$Q = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$$

$$U = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Re} \overline{E_x^* E_y}$$

$$V = \frac{\varepsilon v}{8\pi} i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Im} \overline{E_x^* E_y}$$

$$1. Q = U = V = 0 - \text{белый свет}$$

$$2. \det \rho = 0 - \text{эллиптическая поляризация}$$

$$(a) Q = U = 0 - \text{круговая поляризация}$$

$$(b) V = 0 - \text{линейная поляризация}$$

Ещё всякие величины:

$$\triangleright R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2, r_d^2 = Q^2 + U^2$$

$$\triangleright P = R_d/I - \text{степень поляризации}$$

$$\triangleright p = r_d/I - \text{степень линейной поляризации}$$

$$\triangleright p_s = V/I - \text{степень круговой поляризации}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} 2\alpha = U/D, \alpha - \text{угол между базисом и осями эллипса.}$$

3. Частичная поляризация:

$$\triangleright \text{белый свет} + \text{эллиптическая}$$

$$\triangleright \text{сумма 2 ортогональных эллиптических}$$

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi}, \psi - \text{эйконал}^6$$

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 = 0$$

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi_1, (\nabla \psi_1)^2 = n^2(\mathbf{r}) - \text{уравнение эйконала.}$$

$$\frac{\omega}{c} \psi_1 - \omega t = \text{const} - \text{волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые производные эйконала.

13 Гадость в неоднородной среде

$$1. \varepsilon = \varepsilon(r), \mu = 1$$

$$2. \text{Волновые уравнения поменяются:}$$

$$\square \mathbf{E} - \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$\square \mathbf{H} - \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

$$3. \text{Монохроматический случай:}$$

$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{E} + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{H} + \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

14 Е,Н-волны

$$\varepsilon = \varepsilon(z)$$

$$1. \mathbf{E} \uparrow \uparrow \text{Oy}, E = (0, 1, 0) E(z) e^{i\kappa x} - \text{Е-волны}$$

$$2. \mathbf{H} \uparrow \uparrow \text{Oy}, H = (0, 1, 0) H(z) e^{i\kappa x} - \text{Н-волны}$$

Если переписать волновое уравнение выше:

$$1. E''(z) + f(z) E(z) = 0, f(z) = k^2 - \kappa^2$$

$$2. w''(z) + f(z) w(z) = 0, H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} w(z),$$

$$f(z) = k^2 - \kappa^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2$$

15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений: $\frac{1}{s^2} u'' + f u = 0$, $1/s^2$ — малый параметр.

$$1. z = s\tau, u = e^{is\psi}$$

$$2. \text{В ряд его: } \psi = \psi_0 + \frac{i}{s} \psi_1 + \dots$$

$$3. \text{ВКБ-решения (первое приближение)}$$

$$u_{1,2} = f^{-1/4} \exp \left(\pm is \int \sqrt{f} d\tau \right)$$

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$4. \text{Условия применимости } \langle ? \rangle:$$

$$\left| \frac{d\psi_0}{d\tau} \right|^2 \gg \frac{1}{s} \left| \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} \right| \Leftrightarrow |f| \gg \frac{1}{s} \left| \frac{f'}{2\sqrt{f}} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{d\sqrt{\frac{1}{f}}}{dz} \right| \ll 1$$

$$\text{Для предыдущего параграфа просто } \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$$

16 Диспергирующая среда, частотная и пространственная дисперсия

Если пространство однородно (и по времени):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dV$$

Для монохроматических можно сказать чуть больше:

$$\triangleright \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon(\omega) - \text{частотная дисперсия}$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}) - \text{пространственная дисперсия}$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega),$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \varepsilon(\omega) \rightarrow 0$$

17 Что-то про преобразование Фурье

$$\triangleright \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\triangleright 2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$$

$$\triangleright \widetilde{f * g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$$

18 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

$$\triangleright \mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

$$\triangleright \mathbf{B}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$$

$$\triangleright \mu \sim 1$$

$$\triangleright \langle \mathbf{F} \rangle$$

19 Энергетические соотношения при дисперсии

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Для монохроматических волн:

$$\triangleright \mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$$

$$\triangleright \overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{-\omega}{8\pi} \left(\varepsilon_2 \overline{|\mathbf{E}|^2} + \mu_2 \overline{|\mathbf{H}|^2} \right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0 \langle ? \rangle^7$$

$\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$ — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить $\operatorname{div} \mathbf{S}$

$$2. \text{ первый член: } \frac{1}{16\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$3. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} e^{-i\omega t}$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$5. \overline{w} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \overline{|\mathbf{E}^0|^2} + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \overline{|\mathbf{H}^0|^2} \right)$$

20 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде⁸

Здесь $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \frac{\omega}{c} = k_1 + ik_2$, $\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$.

$k_1 \nparallel k_2$ Неоднородная плоская волна:
 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-k_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i(k_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$k_1 \uparrow k_2$ Однородная плоская волна:

1. $k = (n + i\kappa) \omega/c$ — показатель преломления и затухания,
2. $E(z, t) = E_0 e^{-\kappa \omega z/c} e^{-i\omega(t - n z/c)}$
3. $\overline{S(z)} = S_0 e^{-2\kappa \omega z/c} = S_0 e^{-\alpha z}$, α — к-т поглощения.

21 Групповая скорость

$$1. v_{\text{gr}} = \frac{|\overline{\mathbf{S}}|}{\overline{w}} = \frac{c}{\frac{dn}{d\omega}}$$

$$2. v_{\text{gr}} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{dn}{d\omega}}$$

$$\text{Отсюда } v_{\text{gr}} = v_\phi \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ — нормальная дисперсия, } v_{\text{gr}} < v_\phi$$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} < 0 \text{ — аномальная дисперсия, } v_{\text{gr}} > v_\phi$$

22 Дисперсия на атоме

$$1. m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} + \gamma m \dot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

$$2. \mathbf{P} = ne \mathbf{r} \Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}},$$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

$$3. \omega \ll \omega_0$$

$$4. \omega \gg \omega_0$$

23 СТО, событие и интервал

1. Все явления природы одинаковы во всех ИСО

2. $c = \text{const}$

Мировая точка $:: (x, y, z, t)$

Событие $::$ что-то произошедшее в мировой точке

Мировая линия $::$ траектория точки (в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$)

$$\text{Интервал} :: S_{12}^2 = c(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2$$

$\triangleright S^2 > 0$ — времениподобный интервал (причинная связь)

$\triangleright S^2 < 0$ — пространственноподобный интервал

$\triangleright S^2 = 0$ — светоподобный интервал

24 Преобразования Лоренца

\triangleright Линейны

\triangleright Сохраняют интервал

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ \triangleright \text{одномерные:} \quad t' &= \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma t \mathbf{V} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}$$

\triangleright в общем случае:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) \\ \mathbf{r}' &= \gamma(\mathbf{r} - t \mathbf{V}) + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r})}{V^2} \\ \text{или} \quad t' &= \gamma \left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) \end{aligned}$$

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \frac{1}{\gamma(V)} \leq \Delta t$$

τ — собственное время, в той СО, где тело неподвижно. Именно в ней $\Delta \mathbf{r} = 0$

25 Лоренцево сокращение и сложение скоростей

В собственной СО $\Delta t' = 0$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{\parallel} &= \gamma(\Delta \mathbf{r}'_{\parallel}) \\ \Delta \mathbf{r}_{\perp} &= \Delta \mathbf{r}'_{\perp} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_0 \mapsto V_0/\gamma$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} + (1 - 1/\gamma) \mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v})/V^2}{1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}$$

$$1. \mathbf{v} \uparrow \mathbf{V} \Rightarrow v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

$$2. \mathbf{v} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} \sqrt{1 - V^2/c^2} - \mathbf{V}, \gamma(v) = \gamma(V) \gamma(v')$$

26 Инвариантные объекты в СТО и махинации с ними $\langle \mathbf{x} \rangle$

Λ — преобразование Лоренца

$$1. a = \text{const} \quad /S^2, d^4r/$$

$$2. a^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu a^\mu \quad /r, u, \nabla \dots/$$

$$3. A^\beta_\alpha = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\beta_\nu A^\nu_\mu \quad /F^{ik}, g_{ij}, \dots/$$

$$\triangleright \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle & \langle \mathbf{x} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\triangleright a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

27 Скорость и импульс в СТО

$$\triangleright u = \frac{dr}{d\tau} = \{\gamma c, \gamma \mathbf{v}\}, \beta = v/c$$

$$\triangleright p = m u = \{p_0, \mathbf{p}\}$$

$$1. \mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}, p_0 = m \gamma c$$

$$2. p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow p_0^2 = m^2 c^2 + p^2 \text{ (закон сохранения энергии-импульса)}$$

$$3. \frac{dp_0 c}{dt} = m \gamma^3 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{\mathbf{F}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$$4. p_0 = \mathcal{E}/c \quad T(p) = p_0 c - m c^2$$

28 Сложение скоростей

$$w = \frac{du}{d\tau}$$

$$\triangleright w = \gamma^2 \{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \gamma^2, \mathbf{w} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \boldsymbol{\beta} \gamma^2\}$$

$$\triangleright \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \text{ (этакая ортогональность)}$$

$$\triangleright w^2 = \gamma^2 (-\mathbf{w}^2 + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{w})^2)$$

$$u_1 = \{\gamma_1 c, \gamma_1 \mathbf{v}_1\}, u_2 = \{\gamma_2 c, \gamma_2 \mathbf{v}_2\}$$

$$1. \mathbf{V} = \mathbf{v}_1$$

$$2. u'_1 = \{c, 0\}, u'_2 = \{\gamma_r c, \gamma_r \mathbf{v}_r\}$$

$$3. \gamma_r = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2} u_1 \cdot u_2 = \text{inv}$$

$$4. \mathbf{v}_r = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left(\mathbf{v}_2 - \gamma_2 \mathbf{v}_2 + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)}{v_1^2} \right)$$

5. тосковатт

29 Импульс фотона

$$k = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right\} = \frac{\omega}{c} \{1, \mathbf{n}\}^9, p_\gamma = \hbar \mathbf{k}$$

$$1. \text{Эффект Допплера: } \omega' = \omega \gamma (1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n})$$

$$2. \text{Абберация: } \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} - \gamma \boldsymbol{\beta} + (\gamma - 1) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\beta} / \beta^2}{\gamma (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}$$

$$\triangleright \sin(\alpha' - \alpha) = \sin \alpha \frac{\beta - (1 - \gamma^{-1}) \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}$$

$$\triangleright \cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha}$$

$$\triangleright \sin \alpha' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \alpha}{1 - \beta \cos \alpha}$$

30 4-ток и потенциал

$$j :: j = \{c\rho, \rho \mathbf{v}\} \quad / \nabla j = \partial_t \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0 = \text{inv}/$$

$$A :: A = \{\varphi, \mathbf{A}\} \quad / \square A = \frac{4\pi}{c} j/$$

31 Тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$$

$$\triangleright F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

$$\triangleright F_{ik} = -F_{ki}$$

$$\triangleright F^{ik} F_{ik} = 2H^2 - 2E^2$$

$$\triangleright \frac{1}{2} e^{prst} F_{pr} F_{st} = -4 \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$$

$$\triangleright G^{ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} F_{lm} = (-\mathbf{H}, -\mathbf{E})$$

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\beta \end{cases}$$

32 Преобразование Лоренца для поля

для $\boldsymbol{\beta} \uparrow \mathbf{i} \quad F' =$

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{0,1} & -\gamma(F_{2,1}\beta - F_{0,2}) & \gamma(F_{1,3}\beta + F_{0,3}) \\ F_{1,0} & 0 & \gamma(F_{0,2}\beta - F_{2,1}) & \gamma(F_{0,3}\beta + F_{1,3}) \\ \dots & \dots & 0 & -F_{3,2} \\ \dots & \dots & F_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$$

(остальное из антисимметричности) или ¹⁰

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & \gamma(E_2 - \beta H_3) & \gamma(\beta H_2 + E_3) \\ -E_1 & 0 & -\gamma(H_3 - \beta E_2) & \gamma(H_2 + \beta E_3) \\ \dots & \dots & 0 & -H_1 \\ \dots & \dots & H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\triangleright \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H})$$

$$\triangleright \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E} + \frac{\gamma}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{H} - (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E})}{V^2}$$

$$\triangleright \mathbf{H}' = \gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{E} - (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{H})}{V^2} \quad ^{11}$$

33 Тензор энегрии-импульса

$$\triangleright m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_k^i u^k \Rightarrow \mu \frac{du^i}{dt} = \frac{1}{c} F_k^i j^k =: f_L^i$$

Поле:

$$T^{ik} := \frac{1}{4\pi} \left(-F^{is} F_s^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{ps} F^{ps} \right)$$

$T = (\omega, S/c, \sigma)$ — плотность энергии, плотность потока энегрии (импульс для поля) и плотность потока компоненты импульса. Ещё σ — Максвелловский тензор напряжений.

$$1. j = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot F \text{ (неоднородные из уравнений Максвелла)}$$

$$2. f^i = \frac{1}{4\pi} F_k^i (\nabla \cdot F)^k$$

$$3. -\partial_k T^{ik} = (\partial_k F^{is}) F_s^k + F^{is} \partial_k F_s^k + 0 = (\underbrace{\{\text{антисим}\}}_{=0} + \{\text{сим}\}) F^{is} + F_s^i \partial_k F^{ks} = f^i$$

$$4. \sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-E_i E_k - H_i H_k + \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + H^2) \right)$$

$$5. \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -f^0 = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$6. \frac{1}{c^2} \frac{\partial S^i}{\partial t} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}_i = -f_L^i$$

$$\text{Частицы: } T_{(p)}^{ik} = \frac{\mu}{\gamma} u^i u^k, \nabla(T_{(p)} + T) = 0 \Rightarrow$$

$$1. \frac{\partial w_0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S}_0 = 0$$

$$2. \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_0^i}{\partial t} + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_0)_i = 0$$

34 Потенциалы точечного заряда

запаздывающие потенциалы:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}_0'(t)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3 \mathbf{r}_1 \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1, t_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3 \mathbf{r}_1$$

$c(t - t_1) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ — условие запаздывания

35 Вычисление этих потенциалов

$$s = R_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0 \quad n_0 = \frac{R_0}{R_0}$$

$$\varphi = \frac{e}{s} \quad \mathbf{A} = \frac{e\boldsymbol{\beta}}{s}$$

$$A = \frac{e u}{u \cdot \mathbf{R}}$$

$$\text{Попутно } c^{-1} \partial_t \varphi + \nabla \mathbf{A} = 0$$

36 Напряжённость поля точечного заряда

Хлам, но оказалось полезно:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial t_1} = -c\boldsymbol{\beta} \quad \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_0$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}} \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}$$

$$\nabla t_1 = -\frac{R_0}{cs} \quad \nabla R_0 = \frac{\mathbf{R}_0}{s}$$

$$s' = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_0 + c\beta^2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}_0$$

Напряжённости:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{e}{s^3} (1 - \beta^2) (\mathbf{R}_0 - R_0 \boldsymbol{\beta})$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{e}{cs^3} \mathbf{R}_0 \times ((\mathbf{R}_0 - R_0 \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}')$$

$$\mathbf{H}_1 = -\frac{e}{s^3} (1 - \beta^2) (\mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\beta})$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{e}{cs^3} ((\mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}') \mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\beta} + (R_0 - \mathbf{R}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{R}_0 \times \boldsymbol{\beta}')$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_2$$

$$\triangleright E_1, H_1 \propto \frac{1}{R_0^2}, E_2, H_2 \propto \frac{1}{R_0}$$

$$\triangleright R_0 \gg a, R \gg \lambda \text{ (волновая зона)} - S \sim E_2 H_2 \propto \frac{1}{R_0^2} \Rightarrow \Phi = \text{const}$$

37 На больших расстояниях

$$1. \varphi, \mathbf{A}: R_0 \rightarrow R, n_0 \rightarrow n; \quad c(t_1 - T) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = t - \frac{R}{c}$$

$$2. \nabla(R^\alpha) \sim R^{\alpha-1} \Rightarrow \nabla = -\frac{\mathbf{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$3. \mathbf{E} = \mathbf{E}_2, \mathbf{H} = \mathbf{H}_2$$

$$4. \mathbf{S} = w c \mathbf{n}$$

38 Поле медленного заряда

$$\text{дипольный момент} \quad :: \quad \mathbf{d} = e \mathbf{x}$$

$$\text{магнитный момент} \quad :: \quad \mathbf{m} = \frac{e}{2c} (\mathbf{x} \times \mathbf{x}')$$

$$\text{квадрупольный момент} \quad :: \quad Q_{ij} = e(3x_i x_j - g_{ij} x_s x^s) \Rightarrow \mathbf{Q} = e(3\mathbf{x}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) - x^2 \mathbf{n})$$

$$\triangleright \mathbf{A} = \frac{1}{Rc} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{d} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \mathbf{Q}' + \frac{e}{3c} \mathbf{n}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \right)$$

$$\triangleright \mathbf{H} = \frac{1}{Rc^2} \left(\mathbf{d}'' \times \mathbf{n} + (\mathbf{m}'' \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \mathbf{Q}'' \times \mathbf{n} \right)$$

$$\triangleright \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \frac{1}{Rc^2} \left(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{d}'') + \mathbf{n} \times \mathbf{m}'' + \frac{1}{6c} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{Q}'') \right)$$

39 Дипольное приближение

$$\mathbf{H} = \frac{Rc^2}{Rc^2} \mathbf{d}'' \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{Rc^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{d}'')$$

$$1. \mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c^3 R^2} \left| \mathbf{d}'' \times \mathbf{n} \right|^2 = \mathcal{W}(\theta) d\Omega$$

$$2. \mathcal{W}(\theta) = \frac{e^2}{4\pi c^3} (\ddot{x})^2 \sin^2 \theta - \text{формула Лармора}$$

$$3. I = \int \mathcal{W}(\theta) d\Omega = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2$$

40 Излучение релятивистских

$I := -\frac{d\mathcal{E}}{dt_1}$ — инвариант. В сопутствующей СО работает формула Лармора. Так что

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{x})^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (-\{0, \ddot{x}\}) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (-\ddot{x} \cdot \ddot{x})^{12}$$

$$\{0, \mathbf{w}\} = \ddot{x}, \quad I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 (w^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{w})^2)$$

$$1. \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\gamma \mathbf{v}) = m\gamma \mathbf{w} + m\gamma^3 \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w})$$

$$2. I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} F^2 \begin{cases} 1, & \boldsymbol{\beta} \parallel \mathbf{w} \\ \gamma^2, & \boldsymbol{\beta} \perp \mathbf{w} \end{cases}$$

$$3. \gamma \gg 1 \Rightarrow \perp \text{ эффективнее.}$$

41 Угловое распределение излучения

$$1. \mathbf{E} = \frac{e}{Rc^2} \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{w})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}$$

$$2. P \, dt_1 = |\mathbf{S}| R^2 \, d\Omega \, dt \quad {}^{13}$$

$$3. \, dt = (1 - \mathbf{n} \boldsymbol{\beta}) \, dt_1$$

$$4. \mathcal{W}(\mathbf{n}) = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

$$5. \mathcal{W}(\mathbf{n}) = \frac{e}{4\pi c^3} \cdot \frac{\left(\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{w}) \right)^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}$$

$$\int \mathcal{W}(\mathbf{n}) \, d\Omega = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 (w^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{w})^2) = I,$$

$$\int \mathcal{W}(\mathbf{n}) \mathbf{n} \, d\Omega = \boldsymbol{\beta} I$$

Заметки

- 1 при этом подходят все $\chi :: \square \chi = 0$
- 2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением
- 3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.
- 4 В поляризационной матрице все E можно позаменять на E^0 (фазы всё равно сокращаются), а в предпредыдущем пунке у нас как раз $E_x^0 = b_1 e^{-i\varphi_0}$, $E_y^0 = ib_2 e^{-i\varphi_0}$
- 5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах
- 6 ψ_1 — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но $\langle ? \rangle$
- 7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то $\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$.
- 8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову
- 9 Для корректности надо доказать инвариантность фазы, а это следует из преобразований F^{ik} монохроматических волн
- 10 я это не считал, это всё maxima
- 11 Если мы имеем дело с плоской волной, то $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \beta)$, $(\mathbf{H}, \mathbf{E}, -\beta)$ будут образовывать правые тройки. Так что понятно, почему у \mathbf{V} поменялся знак
- 12 Мы здесь всё считаем в момент излучения — t_1 . Наблюдатель не нужен
- 13 А тут про наблюдателя вспомнили