# Глава 1: Кинематика точки

## § 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть $V$ — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли, $g_{ik} = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_k}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь $a^k$ — коэффициенты разложения по $\mathbf{e_k}$ — называются контравариантными координатами.

Пусть $V^*$ — сопряжённое к $V$, его базисом являются координатные функции $\mathrm{f_k} :: \mathrm{f_k}(\mathbf{x}) = x^k$. Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм $V \to V^*$. Нам, правда, потребуется $V^* \to V$.

Введём ещё одну систему *векторов* в $V$ : $\mathbf{e^k} = \mathrm{f}^*_\mathrm{k}$, то есть $\mathrm{f_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{e^k} \cdot \mathbf{x}$. Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в $V^*$. Линейную независимость легко получить из ЛНЗ $\mathrm{f_k}$, а раз их $\dim V$, то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.

- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

Ещё можно определить $g^{ij} = \mathbf{e^i} \cdot \mathbf{e^j}$, и перенести это на соответствующие линейные формы. Обобщая дальше, можно вообще сказать, что $g^k_i = \delta_{ij}$. Тогда $g$ будет задавать действие формы на вектор. Вроде физикам это зачем-то надо.

А после тирады выше уже развлекаться с индексами.

**Утверждение 1.** $\mathbf{e^k} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{kj}$

▼
Следует из определения координатной функции, ведь $\mathbf{e^k} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{f_k}(\mathbf{x})$
▲

**Утверждение 2.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a^i b_i$

**Утверждение 3.** *Пусть* $\mathbf{r} = \sum_k \xi^k \mathbf{e_k}$ *и* $= \sum_k \xi_k \mathbf{e^k}$. *Тогда* $\xi_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e_k} = \sum_j \xi^j g_{jk}$

▼
Ну, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e_k} = \sum_j \xi_j \, \mathbf{e^j} \cdot \mathbf{e_k} = \sum_j \xi_j \, \delta_{jk} = \xi_k$. Вроде всё.
▲

Аналогичная ситуация с $\xi^k$.

**Утверждение 4.** $\xi^k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e^k} = \sum_j \xi_j g^{jk}$.

**Утверждение 5.**

$$\mathbf{e^k} = \sum_j g^{jk} \mathbf{e_j}, \quad \mathbf{e_k} = \sum_j g_{jk} \mathbf{e^j}$$

▼

*Первое домножить на* $\mathbf{e^i}$*, второе на* $\mathbf{e_i}$.

▲

**Утверждение 6.** $\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \delta_{\ell k}$

▼

$$\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \sum_i g^{i\ell} \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_k} = \mathbf{e}^\ell \cdot \mathbf{e_k} = \delta_{\ell k}$$

▲

Как видно, когда определения безкоординатные, жызнъ прекрасна!. [1]

[1]тут не опечатка, а отсылка к известной картинке ;)

# Глава А: Обозначения

$\mathrm f$ — линейная форма. ⟨`\mathrm f`⟩

$\mathbf x$ — вектор. ⟨`\mathbf x`⟩