§ 1 ⚒Интеграл от дифференциальной формы по пути

Параграфы со значком «⚒» лучше не читать, они недопилены.

Дифференциальные формы. Начать лучше с полилинейных форм.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем K. Тогда функция $A\colon L^k \to K$, линейная по каждому из своих аргументов, называется k-линейной формой.

< ну его>
< потом лучше напишу>

Нам тут хватит и 1-форм, так что

Определение 2. Дифференциальной 1-формой можно назвать отображение из $\mathbb{R}^n$ в линейную (по h) форму, $P \in C^0$

$$\omega = \langle P(x), \mathrm{d}x(x, h)\rangle$$

Но это как-то не очень (а что такое дифференциал?).

Гладкие пути.

Определение 3. Пусть $\gamma\colon [a; b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Тогда γ называется путём в пространстве $\mathbb{R}^n$.

- Путь гладкий, если $\gamma \in C^1$,
- путь регулярный, если $\operatorname{rk}\gamma' \geqslant 1$,
- путь простой, если γ — биекция.

Определение 4. Образ $\Gamma = \gamma([a; b]) \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой* в $\mathbb{R}^n$. Ещё говорят, что Γ — носитель пути γ, а γ — параметризация Γ.

Замечание. Путь простой $\Leftrightarrow$ кривая не имеет самопересечений.

Определение 5. Будем говорить, что простые пути имеют одинаковую ориентацию, если

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)\ \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

и противоположную, если всё наоборот. Тут ещё введу нестандартное обозначение, но так жить проще ☺.

- $\upuparrows$ — одинаковая ориентация
- $\uparrow\downarrow$ — противоположная ориентация

Замечание. Для биективных параметризаций видимо просто нет другого выбора. С петлями всё будет интереснее.

Интегралы от форм по пути

Определение 6. Просто возьмём и определим интегралы по простому гладкому пути от 1-форм так:

$$I = \int\limits_{\gamma} \omega := \int\limits_{a}^{b} \langle P, \dot{x}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

Утверждение 1 (Корректность определения выше)**.** *Интеграл по пути не зависит от параметризации.*

$\square$ Пусть γ_1, γ_2 — параметризации Γ, одинаково ориентированы. Докажем,что

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega = I_2$$

Поскольку γ_1, γ_2 — биекции, $\exists \varphi\colon\ t_2 = \varphi(t_1)$, тоже биекция, такого сорта: $t_1 \xmapsto{\gamma_1} x \xmapsto{\gamma_2^{-1}} t_2$ Тогда

$$I_2 = \int\limits_{a_2}^{b_2} \langle P(\gamma_2(t_2)), \partial_{t_2}\gamma_2(t_2) \rangle \, \mathrm{d}t_2 = \int\limits_{a_1}^{b_1} \langle P(\underbrace{\gamma_2(\varphi(t_1))}_{x}), \partial_{t_2}\gamma_2(t_2)) \rangle \, \partial_{t_1}\varphi(t_1) \, \mathrm{d}t_1$$

Покажем, что $\partial_{t_2}\gamma_2(t_2)\partial_{t_1}\varphi = \partial_{t_1}\gamma_1(t_1)$. Это просто следует равенства $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, если его продифференцировать по t_1. Так что

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \langle P(x), \partial_{t_1}\gamma_1(t_1)) \rangle \left(\partial_{t_1}\varphi(t_1)\right)^{-1} \partial_{t_1}\varphi(t_1) \, \mathrm{d}t_1 = I_1$$

$\blacksquare$

Замечание 1. Если $\gamma_1 \updownarrows \gamma_2$, то $I_2 = -I_1$.

Замечание 2. Если рассматривать только одинаково ориентированые пути, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega$$

Замечание 3. Если Γ разбивается на непересекащиеся Γ_1, Γ_2, то

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega$$

Петли и интегралы по ним

Определение 7. Кривая Γ — петля, если для всякой её параметризации $\gamma(a) = \gamma(b)$. Петля называется простой, если $\exists : \gamma|_{[a;b)}$ — биекция.

Замечание. Плохие петли можно разбивать на простые.

Определение 8. Пусть Γ — простая петля. Тогда

$$I = \oint\limits_{\gamma} \omega := \int\limits_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

Утверждение 2. *Определение выше корректно, и не зависит от выбора «начала» петли.*

▼
Можно рассмотреть 2 разные параметризации и разбить на 2 куска. Дальше работает определение интеграла по простому пути.
▲

Замечание. Чтобы посчитать интегралы по всем остальным путям, их нужно разбивать на прострые пути и простые петли

§ 2 Точные формы

Определение 1. 1-форма ω называется точной в G, если $\exists \Phi \colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что $\omega = \mathrm{d}\Phi$. Φ в таком случае называется потенциалом, а сама форма ещё иногда назыается потенциальной.

E.g. Работа в физике.

Теорема 1. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma \subset G$, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$ Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

□ $\langle P, x \rangle = (\Phi \circ \gamma)'(t)$. Дальше уже тривиально из непрерывности Φ. ■

Теорема 2. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, $\gamma_{1,2}(a) = A$, $\gamma_{1|2}(b) = B$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Теорема 3. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma \subset G$ — петля Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma} \omega = 0$$

Теорема 4. *Пусть ω — форма в G, и $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути при фиксировнных концах. Тогда ω — точна.*

□ Надо показать, что $\partial_i \Phi = P^i$. В этом месте можно забить на общности и объявить $n = 2$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P^1$. Поскольку от пути ничего не зависит,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_{A}^{(x+\Delta x, y)} \omega - \int\limits_{A}^{(x,y)} \omega \right)$$

А это по сути интеграл по пути, соединяющем $(x+\Delta x, y)$ и (x, y). А здесь уже можно взять приличную кривую (прямую) с правильной параметризацией, и воспользоваться теоремой о среднем.

$$\dots = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y) \mathrm{d}t = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Последнее равенство верно по непрерывности. ■

Теорема 5. $\oint \omega = 0 \Rightarrow \omega$ *— точна*

Теорема 6. *Пусть G, $\oint \omega = 0$ для любой прямоугольной петли. Тогда ω — точна.*

□ Аккуратно свести к теореме 0.2.4, там всё будет работать и с путями, параллельными осям координат. ■

§ 3 Замкнутые формы

Здесь уже окончательно забиваем на все $n \geqslant 2$. Там, в целом, понятно как обобщать. Тут всюду $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$

Определение 1. Форма ω замкнута в G, если

$$\forall A \in G \ \exists U(A) \colon \exists \Phi_U \colon U \to R \quad \omega = \mathrm{d}\Phi_U$$

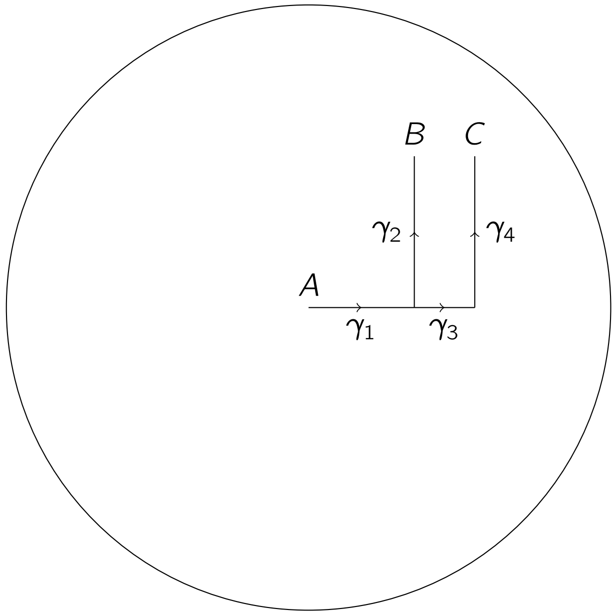
короче, локально точна.

Теорема 1. *Пусть ω — гладкая форма в G. Тогда если ω замкнута, $\partial_y P = \partial_x Q$ в G.*

□ Очевидно следует из «локальной точности». ■

Теорема 2. *Пусть ω — гладкая форма в G. Тогда если $\partial_y P = \partial_x Q$ в G, то ω замкнута.*

$\square$ Выберем произвольную A, тогда $U_\varepsilon(A) \subset G$. Надо попробовать построить потенциал. Например так $\Phi(B) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P$, $\partial_y \Phi = Q$.



$$\Delta\Phi = \Phi(C) - \Phi(B) = \int\limits_{\gamma_4} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega + \int\limits_{\gamma_3} \omega$$

$$= \int\limits_{y_A}^{y} Q(x+\Delta x, t)\mathrm{d}t - \int\limits_{y_A}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y_A)\mathrm{d}t$$

Последний сходится к $P(x, y_0)\mathrm{d}x$, а первые два надо немного преобразовать

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_{\gamma_4} \omega 0 \int\limits_{\gamma_2} \omega\right) = \int\limits_{y_0}^{y} \left(\frac{Q(x+\Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x}\right) \mathrm{d}t$$

Подинтегральную функцию можно представить как последовательность $f_n \rightrightarrows Q'$.

$$\left|\frac{Q(x + {}^1\!/_n) - Q(x)}{\frac{1}{n}} - Q'(x)\right| = |Q'(\xi) - Q(x)| < \varepsilon$$

а функция Q' равномерно непрерывна на $[x, x+\Delta x]$, ибо он отрезок. Так что можно поменять местами предел и интеграл.

$$\dots = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\mathrm{d}t = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \Delta P$$

Если сложить с оставшимся куском, то как раз и выйдет P. С равенством Q вроде все попроще, там нужно считать приращение всего лишь по одному пути. $\blacksquare$

Замечание 1. Бывают замкнутые, но не точные формы. Например $\omega = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. Она замкнута, а вот $\oint_\gamma w$ по окружности вокруг 0 не 0.

§ 4 Первообразная замкнутой формы вдоль пути

Сначала можно отметить, что $\Gamma = \gamma\big([a; b]\big)$ — компакт. Так что вроде можно пользоваться теоремой о конечном подпокрытии.

Лемма 1. *Пусть G — область, ω — гладкая точная форма в G, а Φ, Ψ — две её первообразные в G. Тогда $\Phi - \Psi \equiv C \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Пусть ω замкнута в G, $\Gamma = \gamma([a; b])$. Тогда существует первообразная вдоль пути γ и $\int\limits_\gamma \omega = f(b) - f(a)$.*

□ Поскольку кривая компактна, в любом её покрытии можно выделить конечное подпокрытие. Собственно, будем рассматривать покрытие открытыми кругами $U(p_i)$. Пусть Φ_i — произвольная первообразная в U_i. Заменим Φ_i $\widetilde{\Phi}_i$, так что $\widetilde{\Phi}_{i+1} = \widetilde{\Phi}_i$ на $U_{i+1} \cap U_i$, $\widetilde{U}_0 = U_0$.

Выберем параметризацию, тогда p_i соответствуют $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ Теперь выберем $f(\gamma(t)) = \widetilde{\Phi}_k(\gamma(t))$, $\gamma(t) \in U_k$. Здесь вроде можно прожить и без простоты пути.

вообще первообразную вдоль пути нигде не определяли, так что можно считать конструкцию, построенную выше, определением

Теперь ещё выберем $q_i \in U_{i+1} \cap U_i$, $\{\gamma_j\}$ = пути от p_i до $q_i \cap$ пути от q_i до p_{i+1}. Тогда

$$\in_\gamma \omega = \sum_j \int\limits_{\gamma_j} = \widetilde{\Phi}(p_n) - \widetilde{\Phi}p_0 = f(b) - f(a)$$

■

§ 5 ⚒Гомотопия путей

Определение 1. Непрерывным семейством путей называется непрерывная функция $g\colon [0; 1] \times [a; b] \to \mathbb{R}^n$. Часто обозначается так: $\gamma_s(t) = g(s, t)$.

По-хорошему там должны быть топологические пространства, но не сегодня и не сейчас .

Определение 2 ($\ddot{\sim}$). Пусть $\gamma_1, \gamma_2\colon [a; b] \to G$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$,$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда утверждается, что пути гомотопны, если существует семейство $\gamma_s(t)\colon\ \gamma_{s_1} = \gamma_1$, $\gamma_{s_2} = \gamma_2$.

Замечание. Таки отношение эквивалентности.

Теорема 1. *Пусть ω — замкнутая форма в области G, $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$$

Теорема 2. *Пусть ω — замкнутая форма в области G, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ — гомотопные петли. Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma_1} \omega = \oint\limits_{\gamma_2} \omega$$

Замечание. Доказывать я это пока не буду, иначе это будет выглядеть как-то так: