

## 1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса:  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$ .
2. Закон Фарадея:  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ,  
 $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа:  $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3}$
4.  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
5. Закон Ампера:  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$
6. Уравнение неразрывности:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:  
 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$   
 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$   
 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$   
 $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

## 2 В среде

1. Поляризация и намагничённость  
 $\mathbf{P} :: \mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \mathbf{P},$   
 $\mathbf{M} :: \mathbf{j}_{\text{m}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$   
 $\{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{int}} = \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{pol}} + \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{m}}$
2. В сильнопеременных  
 $\rho_{\text{int}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$   
 $\mathbf{j}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$
3.  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$
4. Уравнения Максвелла в среде:  
 $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}$   
 $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{ex}} + \mathbf{j}_{\text{c}})$

## 5. Материальные уравнения (простейшие)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{j}_{\text{c}} = \sigma \mathbf{E}$$

## 6. Дисперсия, варианты

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dV$$

$f, g$  — функция отклика.

## 3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$
$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\sigma E^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{ex}}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

## 4 Потенциал

1. Вид потенциала:  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

2. Калибровочная инвариантность:  $\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi \\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$

3. Калибровка Лоренца:  $\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0^1$

4. Уравнения Максвелла примут вид:

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}, \text{ где } \square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

## 5 Волновые уравнения

$$\square \mathbf{E} = 0, \square \mathbf{B} = 0$$

$$\square \mathbf{A} = 0, \square \varphi = 0 \quad (\square \chi = 0)$$

Ещё можно  $\varphi$  занулить, выбрав нужную  $\chi$  <sup>2</sup>

## 6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)$$

2. Плоская волна:  $A = A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt)^3$

3. Условие поперечности:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{c}{v} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$

4.  $\mathbf{S} = v w \mathbf{n}$ .

5. Уравнение сферической волны:  $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$

6. Его решение:  $u(r, t) = \frac{1}{r} (f(r - vt) + g(r + vt))$  Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

## 7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0, \mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n} \Rightarrow u = \operatorname{Re} \left( E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$

## 8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1.  $\alpha, \mathbf{b}$

$$\alpha :: E_0^2 = |E_0|^2 e^{-2i\varphi_0}$$

$$\mathbf{b} :: E_0 = \mathbf{b} e^{-i\varphi_0}, \mathbf{b}^2 = |E_0|^2, \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2$$

2.  $\mathbf{b}^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$

$$3. \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_2)^2}{b_2^2} = 1, (\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3).$$

## 9 Почти монохроматические волны

$$\mathbf{E} = E_0(t) e^{-i\omega t}, \langle ? \rangle$$

## 10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$$|\overline{\mathbf{S}}| = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E}}$$

$$\rho = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}$$

$$1. \det \rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$$

$$2. \det \rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0 \quad 4$$

$$3. I^2, V^2, U^2 + Q^2 - \text{инварианты} \quad 5$$

$$4. I(\psi, \delta) = |\overline{\mathbf{S}}| = \boldsymbol{\ell}_\delta^\dagger \rho \boldsymbol{\ell}_\delta = \frac{1}{2}(I + Q \cos 2\psi + U \sin 2\psi \cos \delta - V \sin 2\psi \sin \delta),$$

$$\boldsymbol{\ell}_\delta = (\cos \psi, \sin \psi e^{-i\delta})^\top, \text{ а вот выводится это неприятно.}$$

## 11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$$I = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = |\overline{\mathbf{S}}|$$

$$Q = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$$

$$U = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Re} \overline{E_x^* E_y}$$

$$V = \frac{\varepsilon v}{8\pi} i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Im} \overline{E_x^* E_y}$$

$$1. Q = U = V = 0 - \text{белый свет}$$

$$2. \det \rho = 0 - \text{эллиптическая поляризация}$$

$$(a) Q = U = 0 - \text{круговая поляризация}$$

$$(b) V = 0 - \text{линейная поляризация}$$

Ещё всякие величины:

$$\triangleright R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2, r_d^2 = Q^2 + U^2$$

$$\triangleright P = R_d/I - \text{степень поляризации}$$

$$\triangleright p = r_d/I - \text{степень линейной поляризации}$$

$$\triangleright p_s = V/I - \text{степень круговой поляризации}$$

$$\triangleright \operatorname{tg} 2\alpha = U/D, \alpha - \text{угол между базисом и осями эллипса.}$$

## 3. Частичная поляризация:

$$\triangleright \text{белый свет} + \text{эллиптическая}$$

$$\triangleright \text{сумма 2 ортогональных эллиптических}$$

## 12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi}, \psi - \text{эйконал} \quad 6$$

$$\frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 = 0$$

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi_1, (\nabla \psi_1)^2 = n^2(\mathbf{r}) - \text{уравнение эйконала.}$$

$$\frac{\omega}{c} \psi_1 - \omega t = \text{const} - \text{волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые производные эйконала.

## 13 Гадость в неоднородной среде

$$1. \varepsilon = \varepsilon(r), \mu = 1$$

$$2. \text{Волновые уравнения поменяются:}$$

$$\square \mathbf{E} - \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$\square \mathbf{H} - \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

$$3. \text{Монохроматический случай:}$$

$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{E} + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{H} + \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

## 14 Е,Н-волны

$$\varepsilon = \varepsilon(z)$$

$$1. \mathbf{E} \uparrow \uparrow \text{Oy}, E = (0, 1, 0) E(z) e^{i\kappa x} - \text{Е-волны}$$

$$2. \mathbf{H} \uparrow \uparrow \text{Oy}, H = (0, 1, 0) H(z) e^{i\kappa x} - \text{Н-волны}$$

Если переписать волновое уравнение выше:

$$1. E''(z) + f(z) E(z) = 0, f(z) = k^2 - \kappa^2$$

$$2. w''(z) + f(z) w(z) = 0, H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} w(z),$$

$$f(z) = k^2 - \kappa^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2$$

## 15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений:  $\frac{1}{s^2} u'' + f u = 0, 1/s^2 - \text{малый параметр.}$

$$1. z = s \tau, u = e^{is\psi}$$

$$2. \text{В ряд его: } \psi = \psi_0 + \frac{i}{s} \psi_1 + \dots$$

$$3. \text{ВКБ-решения (первое приближение)}$$

$$u_{1,2} = f^{-1/4} \exp \left( \pm is \int \sqrt{f} d\tau \right)$$

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$4. \text{Условия применимости } \langle ? \rangle:$$

$$\left| \frac{d\psi_0}{d\tau} \right|^2 \gg \frac{1}{s} \left| \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} \right| \Leftrightarrow |f| \gg \frac{1}{s} \left| \frac{f'}{2\sqrt{f}} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{d\sqrt{\frac{1}{f}}}{dz} \right| \ll 1$$

$$\text{Для предыдущего параграфа просто } \lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$$

## 16 Диспергирующая среда, частотная и пространственная дисперсия

Если пространство однородно (и по времени):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') dV$$

Для монохроматических можно сказать чуть больше:

$$\triangleright \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon(\omega) - \text{частотная дисперсия}$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}) - \text{пространственная дисперсия}$$

$$\triangleright \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega),$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \varepsilon(\omega) \rightarrow 0$$

## 17 Что-то про преобразование Фурье

$$\triangleright \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\triangleright 2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$$

$$\triangleright \widetilde{f * g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$$

## 18 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

$$\triangleright \mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

$$\triangleright \mathbf{B}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$$

$$\triangleright \mu \sim 1$$

$$\triangleright \langle \mathbf{f} \rangle$$

## 19 Энергетические соотношения при дисперсии

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Для монохроматических волн:

$$\triangleright \mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$$

$$\triangleright \overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{-\omega}{8\pi} \left( \varepsilon_2 |\mathbf{E}|^2 + \mu_2 |\mathbf{H}|^2 \right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0 \langle ? \rangle^7$$

$\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$  — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить  $\operatorname{div} \mathbf{S}$

$$2. \text{ первый член: } \frac{1}{16\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$3. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} e^{-i\omega t}$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$5. \overline{w} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \overline{|\mathbf{E}^0|^2} + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \overline{|\mathbf{H}^0|^2} \right)$$

## 20 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде<sup>8</sup>

Здесь  $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \frac{\omega}{c} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$ ,  $\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$ .

$\mathbf{k}_1 \nparallel \mathbf{k}_2$  Неоднородная плоская волна:  
 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$\mathbf{k}_1 \uparrow \mathbf{k}_2$  Однородная плоская волна:

1.  $k = (n + i\kappa)\omega/c$  — показатель преломления и затухания,
2.  $E(z, t) = E_0 e^{-\kappa\omega z/c} e^{-i\omega(t - n z/c)}$
3.  $\overline{S(z)} = S_0 e^{-2\kappa\omega z/c} = S_0 e^{-\alpha z}$ ,  $\alpha$  — к-т поглощения.

## 21 Групповая скорость

$$1. v_{\text{gr}} = \frac{|\overline{\mathbf{S}}|}{\overline{w}} = \frac{c}{\frac{dn\omega}{d\omega}}$$

$$2. v_{\text{gr}} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{dn\omega}{d\omega}}$$

Отсюда  $v_{\text{gr}} = v_\phi \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ — нормальная дисперсия, } v_{\text{gr}} < v_\phi$$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} < 0 \text{ — аномальная дисперсия, } v_{\text{gr}} > v_\phi$$

# Заметки

1 при этом подходят все  $\chi :: \square \chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.

4 В поляризационной матрице все  $E$  можно позаменять на  $E^0$  (фазы всё равно сокращаются), а в предыдущем пункте у нас как раз  $E_x^0 = b_1 e^{-i\varphi_0}$ ,  $E_y^0 = ib_2 e^{-i\varphi_0}$

5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах

6  $\psi_1$  — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но  $\langle ? \rangle$

7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то  $\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$ .

8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову