Г Л А В А IV
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ, ЗАДАЧА КОШИ

1^0. Объект изучения.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

в котором функции $p_j(x)$, $q(x)$ $(j = \overline{1,n})$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b) и, если не оговорено противное, принимают на нем вещественные значения.

Df. *Линейное уравнение* (4.1) *называется однородным (ЛОУ), если функция* $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, *противном случае* (4.1) *неоднородное (ЛНУ), при этом функция* $q(x)$ *называется неоднородностью.*

2^0. Применение к ЛНУ фундаментальных теорем.

Теорема (о существовании, единственности и продолжимости решений линейных уравнений). *Для любого* $x_0 \in (a, b)$ *и любых* $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$ *существует и единственно решение задачи Коши линейного уравнения (4.1) с начальными данными* $x_0, y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, *продолжимое на весь интервал* (a, b).

3^0. Комплексные линейные уравнения.

доказано, что решение линейного уравнения (4.1) с комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал существования самого уравнения (4.1).

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Линейность пространства решений.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \;\text{ или }\; Ly = 0. \tag{4.3}$$

Действительно, если $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ это решения ЛОУ (4.3), то для $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$ линейная комбинация $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$ также является решением.

2^0. Линейная зависимость и независимость решений, определитель Вронского.

Хорошо известно, что n функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$, определенных на интервале (a, b), называются линейно зависимыми на (a, b), если существует постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, что

$$\alpha_1\psi_1(x) + \ldots + \alpha_n\psi_n(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0. \tag{4.4}$$

А функции, не являющиеся линейно зависимыми на (a, b), называются линейно независимыми.

Пусть $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x) \in C^{n-1}((a, b))$. Составим матрицу $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \ldots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Df. *Функция $W(x) = \det \Psi(x)$ называется определителем Вронского (ОВ), построенном на системе функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$.*

Лемма (о связи между линейной зависимостью функций и ОВ). *Если $n-1$ раз непрерывно дифференцируемые на (a, b) функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ линейно зависимы на (a, b), то ОВ $W(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$.*

Теорема (о связи между ОВ и линейной зависимостью решений ЛОУ). *Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – решения ЛОУ (4.3) и $\exists\, x_0 \in (a, b)$, что $W(x_0) = 0$, тогда $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно зависимы на (a, b).*

Следствие. *Если определитель Вронского $W(x)$, построенный на решениях ЛОУ (4.3), обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала (a, b), то $W(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. И наоборот, если $\exists\, x_0 \in (a, b)$, что $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$.*

3^0. Фундаментальная система решений, формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений ЛОУ (4.3) называются любые n линейно независимых на (a, b) решений этого уравнения.*

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОУ (4.3) существует.*

Теорема (об общем решении ЛОУ). *Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – фундаментальная система решений, тогда непрерывная функция $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ является общим решением ЛОУ (4.3) в области $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.*

Теорема (о размерности пространства решений ЛОУ). *Множество вещественных решений ЛОУ (4.3) образует n-мерное вещественное линейное пространство над полем вещественных чисел.*

Следствие. *Линейное однородное уравнение порядка n не может иметь более чем n линейно независимых решений.*

4^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОУ). *Пусть набор функций $\Theta_1 = \{\varphi_1(x), \overline{\varphi}_1(x), \ldots, \varphi_l(x), \overline{\varphi}_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, где $\varphi_j = u_j + \mathrm{i} v_j$ $(j = \overline{1, l})$, а $\varphi_{2l+1}, \ldots, \varphi_n$ вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОУ (4.3). Тогда набор $\Theta_2 = \{u_1(x), v_1(x), \ldots, u_l(x), v_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ является вещественной фундаментальной системой решений.*

5^0. Обратная задача.

Теорема (о построении ЛОУ по заданному набору функций). *Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — набор из n раз непрерывно дифференцируемых на интервале (a, b) функций и построенный по ним определитель Вронского $W(x) \ne 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$. Тогда существует и единственно линейное однородное уравнение (4.3), для которого $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений на (a, b).*

6^0. Формула Лиувилля.

$$W(x) = W(x_0) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} p_1(s)\, ds\Big) \qquad \text{формула Лиувилля.}$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Структура общего решения ЛНУ.

Иными словами, общее решение ЛНУ есть сумма общего решения ЛОУ и частного решения ЛНУ.

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНУ). *Пусть набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решений ЛОУ (4.3) на (a, b). Тогда частное решение $y = \psi(x)$ ЛНУ (4.1) может быть найдено в виде квадратур от $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и неоднородности $q(x)$.*

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Утверждение 1. *Функции* $x^{k_1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_n}e^{\lambda_n x}$, *где* $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $(k_j, \lambda_j) \neq (k_l, \lambda_l) \quad (j, l = \overline{1, n},\ j \neq l)$, *линейно независимы на* $\mathbb{R}^1$.

Df. *Функция* $g(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *называется характеристическим многочленом ЛОУ* (4.3^c), *а его нули или корни характеристического уравнения* $g(\lambda) = 0$ *называются характеристическими числами.*

Утверждение 2. *Пусть* λ_0 *— характеристическое число кратности* k_0, *тогда ЛОУ* (4.3^c) *имеет следующие линейно независимые решения:* $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k_0-1}e^{\lambda_0 x}$.

Теорема (о ФСР ЛОУ с постоянными коэффициентами). *Пусть характеристическое уравнение ЛОУ* (4.3^c) *имеет корни* λ_j *кратности* $k_j \quad (j = \overline{1, m})$. *Тогда ФСР уравнения* (4.3^c) *имеет вид:*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}. \qquad (4.14)$$

Замечание 2. Если ЛОУ (4.3^c) имеет вещественные коэффициенты, то комплексные решения из ФСР (4.14) следует овеществить, как это делается в лемме об овеществлении. В частности, если $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$, то $\operatorname{Re}(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\operatorname{Im}(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x}\sin\beta x$.

2^0. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = p(x)e^{\lambda x}$$

в котором $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $p(x)$ многочлен, возможно, с комплексными коэффициентами.

Df. *Говорят, что в уравнении (4.15) имеет место резонанс порядка* k, *если* $\lambda = \lambda_k$ *кратности* $k \quad (k = \overline{1,m})$, *и резонанс отсутствует (его порядок равен нулю), если* $\lambda \neq \lambda_j$ *для* $\forall\, j = \overline{1,m}$.

Теорема (о построении решения ЛНУ методом неопределенных коэффициентов). *Пусть показатель* λ *из правой части (4.15) совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* k. *Тогда существует и единственно частное решение ЛНУ (4.15)*

$$\psi(x) = x^k r(x) e^{\lambda x},$$

где $r(x) = \sum_{s=0}^{l} r_s x^s$ *— некий многочлен.*

Первое соображение обычно называют "принцип суперпозиции". Он применяется к уравнениям (4.1^c) вида

$$L^c y = q_0(x) + q_1(x) + \ldots + q_m(x) \qquad (m \geq 0) \tag{4.18}$$

и заключается в следующем: если ψ_j частное решение уравнения $L^c y = q_j(x) \quad (j = \overline{0,m})$, то функция $\psi(x) = \psi_0(x) + \ldots + \psi_m(x)$ будет частным решением уравнения (4.18).

Второе соображение связано с решением вещественных линейных неоднородных уравнений (4.1^c). Метод неопределенных коэффициентов в них применим для $q(x) = p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Введем $\tilde{\lambda} = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\tilde{q}(x) = (p_1(x) - \mathrm{i}p_2(x))e^{\tilde{\lambda}x}$. Тогда $q = \operatorname{Re}\tilde{q}$ и, если $y = \tilde{\psi}(x)$ какое-либо частное (комплексное) решение уравнения $L^c y = \tilde{q}$, то функция $y = \operatorname{Re}\tilde{\psi}$ будет частным решением вещественного уравнения $L^c y = p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.