Меры и меры по борьбе с ними

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :taxus

8 июня 2017 г.

А эти множества?
Какой для них язык?.. Горé душа летит,
Все необъятное в единый вздох теснится,
И лишь молчание понятно говорит.

Студент на экзамене по теории меры

Оглавление

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

Билет № 1: Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 \mathinner{..} n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

Билет № 2: Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{C}ell_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. *Тогда* $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

▼
$\sigma(.)$ от обеих частей.
▲

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{C}ell_n)$.

□

$\sigma(\mathcal{O}) \supset \mathcal{C}ell$ Покроем открытыми квадратиками.

$\sigma(\mathcal{C}ell) \supset \mathcal{O}$ Для упрощения жизни $\mathcal{O} \supset G \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим классы ячеек

$$\mathcal{C}_k = \left\{ \left[\frac{m}{2}; \frac{m+1}{2^k}\right) \times \left[\frac{n}{2}; \frac{n+1}{2^k}\right) \subset G \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Осталось показать, что любую точку из G покрывает ячейка какого-то класса.

Каждая точка открытого множества входит с какой-то окрестностью, которую можно считать обединением множеств из базы топологии. Короче, есть маленький открытый квадратик, содержащий точку.

Так что теперь можно думать просто про одномерье. Ясно, что

$$\exists\, m, k \;::\; \begin{cases} x - \varepsilon < \frac{m}{2^k} < x \\ x + \varepsilon > \frac{m+1}{2^k} > x \end{cases}$$

Для этого хватит, чтобы $|x - \varepsilon; x| > \frac{1}{2^k}$, например.

■

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

Билет № 3: Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)}_{\in \mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ-измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера. [1]

Билет № 4: Свойства меты

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры)**.** *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.
Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

▼
$B = A \sqcup C$. Дальше очевидно
▲

Утверждение 2. *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$.
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Мемы A, B конечны, иначе нельзя вычитать.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность)**.** *Пусть* $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $\bigsqcup_i A_i \subset B$.
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$

Замечание 1. Можно усилить и на случай $n = \infty$, предел есть, так как члены возрастают.

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры)**.** *Пусть* $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.

Тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

[1] она считает, не считывает ◡̈

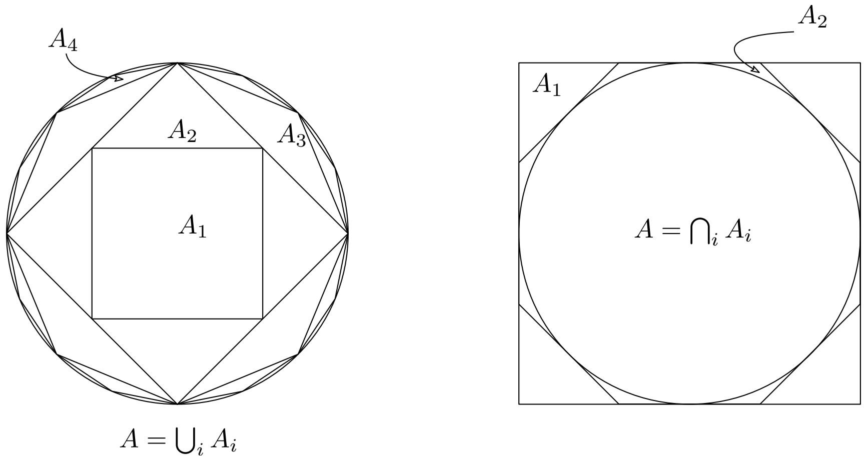


Рис. 1.1: Метод исчерпывания Евдокса

▼

Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k: $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу). *Пусть* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $\left(A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{A}$. [1]

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

▼

Строим разности $C_k = A_{k+1} \setminus A_k$,$C_0 = A_1$ а $A = \bigsqcup_k C_k$.

Вот ещё картинка: 1.1, для пущей очевидности.

▲

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху). *Пусть* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

▼

Сначала заметим, что все меры сделаны конечными, ведь нужно считать разности мер, а это так себе.

Снова сделаем разности $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = A_1 \setminus A_{n+1} \Rightarrow \mu(A_{n+1}) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right)$$

[1] Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Понятно, что
$$\lim_{n\to\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \sqcup A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k \sqcup A = A_1$$
Так что
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \mu(A_1) - \mu(B)$$
Но тогда
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}) = \mu B$$

▲

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если
$$\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu A = 0 \ \ \forall\, B \subset A, B \in \mathcal{A} \ :: \ \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на $\mathcal{A}$ называется σ-конечной, если
$$\exists\, X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty \ :: \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \colon \mathcal{A}_1 \to [0; +\infty]$, $\mu_2 \colon \mathcal{A}_2 \to [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1.

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора)**.** *Пусть μ — сигма-конечная мера на $\mathcal{A}$. Тогда*

1. *Существуют её полные сигма-конечные продожения*
2. *Среди них есть наименьшее: $\overline{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.*

Определение 4 (Внешняя мема)**.** Пусть $E \subset X$. Положим
$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \ \middle|\ A_k \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$
Тогда μ^* — внешняя мема, порождённая μ. Она не мера.

Пример 1. Например, сигма-алгебра из вертикальных полос на квадратике. Аддитивность сломается, если взять 2 непересекающихся горизонтальных «лоскутка» один по другим.

Так, вот про идею доказательства. Внешняя мема — очень привлекательная вещь, но не мера.

Давайте разрешим лишь определённый набор множеств. Назовём их хорошо разбивающими.

Определение 5. Пусть $E \subset A$. Тогда E — хорошо разбивающее, если
$$\forall\, A \in \mathcal{A} \ :: \ \mu A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Хорошо разбивающие явно содержат исходную алгебру.

Для тех же вертикальных полос в хорошо разбивающие попадут все множества, проектирующиеся в точку на ось $\perp$ полосками.

Билет № 5: Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1\Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v\Delta \overset{(\in R^n)}{\equiv} v_n\Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{Cell}_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j. Тогда $vA := \sum_{j=1}^{q} v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. *v — конечно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k \quad :: \; vA = \sum_{k=1}^{p} vA_k$$

$\square$ На клеточки побить. $\blacksquare$

Теорема 2. *v — счётно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad :: \; vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

Сначала докажем маленькую лемму.

Лемма 3. *Пусть Δ — ограниченная ячейка в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\exists\, \Delta' \in \mathcal{O}, \Delta'' \in \mathcal{F} \;::\; \begin{cases} v\Delta' < v\Delta + \varepsilon \\ v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon \end{cases}$$

▼
Например, для $\Delta = \prod_k [a_k; b_k)$

$$\Delta'_i = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k - \frac{1}{i}; b_k \right)$$

$$\Delta''_i = \prod_{k=1}^{n} \left[a_k; b_k - \frac{1}{i} \right]$$

Увеличивая i можно добраться до любого ε.
▲
$\square$ (*Счётной аддитивности объема*) Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. А по-хорошему $\mathcal{Cell}$ содержит и любые конечные объединения ячеек. Утверждается, что там тоже самое, только возни сильно больше.

Пусть $A = \Delta$, $A_k = \Delta_k$, причём они все конечны. Рассмотрим

$$\Delta'_k \supset \Delta \;::\; v\Delta'_k < v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$\Delta'' \subset \Delta \;::\; v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon,$$

штрихи имеют смысл как в лемме.

Тогда

$$\Delta'' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_k$$

По определению компактности,

$$\exists\,(l_k) \;::\; \Delta' \subset \bigcup_{l=1}^{N} \Delta''_{k_l}$$

Так что из счётной аддитивности

$$v\Delta'' \leqslant v\left(\bigcup_{l=1}^{N} \Delta'_{k_l}\right) = \sum_{l=1}^{N} v\Delta'_{k_l} < \sum_{l=1}^{N} v\Delta_{k_l} + \varepsilon$$

А

$$\sum_{l=1}^{N} v\Delta_{k_l} < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k$$

Так что

$$v\Delta < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k + 2\varepsilon \Rightarrow v\Delta \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k$$

В другую сторону не так понятно. Для частных сумм из конечной аддитивности

$$\forall\,N \;::\; \sum_{k=1}^{N} v\Delta_k \leqslant v\Delta$$

При увеличении N сумма лишь возрастает, но она и ограничена. Значит предел есть. Тогда $\sum_k v\Delta_k \leqslant v\Delta$. ■

Определение 2 (Мера Лебега)**.** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

(1) ▷ $\lambda\{x\} = 0$

(2) ▷ $\lambda\big(\{x_k\}_k\big) = 0$

(3) ▷ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Это, кстати, не очевидно. С другой стороны, для них есть покрытие квадратиками.

(4) ▷ $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теормема.

Теорема 4 (Регулярность меры Лебега)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\exists\,G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} \;::\; F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□

(1) Сначала разберёмся с конечными множествами. Из определения инфимума, $\exists \{\Delta_k\} \ :: \ \lambda(A) > \sum_k \Delta_k - \frac{\varepsilon}{2}$.

Снова подберём Δ'_k, как в 1.5.2, только $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. В таком случае

$$\lambda(A) > \sum_k \Delta_k - \varepsilon/2 > \sum_k \Delta'_k - \varepsilon$$

(2) ⟨⚒⟩, но что-то жесть. Обычно доказывают что $\lambda \inf G_k = \lambda A$.

Кажется, победа. Для замкнутых можно доказывать все для $X \setminus A$ сводя к первому пунку. Как-то так

$$(F^c \setminus A^c) = (F^c \cap A) = (A \cap F^c) = A \setminus F$$

■

Следствие 1. $\forall A \, \exists D \in G_\delta \ :: \ A = D \cup N, \ \mu(N) = 0.$

Пример 1 (Пример неизмеримого множества (по Лебегу))**.** Пусть $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$ и всё это лежит на отрезке $I = [0;1]$. Пусть R_k — k-ый смежный класс по $\sim$. Тогда $S = \sqcup_k R_k$.

Выберем $E \colon \forall k \ :: \ |E \cap R_k| = 1$. Как видно, $\{E_j\}$ отличаются сдвигом на $r \in \mathbb{Q}$. Будем считать, что сдвиг — это скорее поворот, как бы замыкаем начало и конец отрезка, так что $E_j + r \in I \ \ \forall k \in \mathbb{Z}, r \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$.

Тогда $I = \sqcup_k E_k$, $\forall j, k \ :: \ \lambda E_j = \lambda E_l$.

Но теперь

$$1 = \lambda I = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda E_k = \sum_{k=1}^{\infty} a$$

А бесконечная сумма вещественных чисел либо 0 либо ∞.

Билет № 6: Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Пусть ещё $f \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R}, \Delta \text{ — связно } :: \ f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. *Пусть f измеримо относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества*

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} \equiv X[f \leqslant a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} \equiv X[f \geqslant a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то f измерима.

□ Просто представляем множества одного типа, как пересечение или дополнение множеств другого. Можно бесконечные, потому что здесь $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.
■

Теорема 2. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ измеримы относительно $\mathcal{A}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$.*

□ Взять, например, $I = (-\infty, a)$. Он открыт, так что $g^{-1}(I) \in \mathcal{O}$. Из теоремы 1.2.2 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$. А прообраз объединения — объединение прообразов. Так что $f^{-1}(G)$ измеримо. ■

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \dots$ измеримы относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы $\sup f_n, \inf f_n, \underline{\lim} f_n, \overline{\lim} f_n, \lim f_n$. Последний, правда, может не существовать.*

□ Например, для супремума. Он же по n, что

$$X[\sup f_n(x) < a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} X[f_n < a]$$

Каждое множество из пересечения $\in \mathcal{A}$, значит и $\cap .. \in \mathcal{A}$. ■

Определение 2. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества)**.**

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

Утверждение 5. *Пусть $\sqcup_j A_j = A$, тогда $\sum_j \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_A$.*

Утверждение 6. *f — простая $\Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}$, E_k — дизъюнктны.*

Теорема 7. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $f \geqslant 0$. Тогда*

$$\exists\, (\varphi_n)\colon 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \;::\; \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

Причём все φ_i — простые.

□ Зафиксируем какое-то n. Тогда

$$[0; +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k, \quad \Delta_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \; \Delta_{n^2} = [n; +\infty)$$

Здесь мы порезали ось значений на n^2 интервалов. Выберем $e_k = f^{-1}(\Delta_k)$, $c_k = \min_{e_k} f(x) = \min \Delta_k = \frac{k}{n}$.

Пусть $\psi_n = \sum\limits_{k=0}^{n^2} c_k \mathbb{1}_{e_k}$. Тогда $\psi_n(x) \leqslant f(x) < \psi_k(x) + \frac{1}{n}$. Видно, что поточечная сходимость есть.

Теперь ещё обеспечим возрастание:

$$\varphi_n = \max\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$$

■

Билет № 7: Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu E_k$$

[2] $f \geqslant 0$.

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int_X g \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; g\text{-простая}, 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание 1. Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость f будет периодически называться «обычными» условиями.

Замечание 2. Вторая половина корректна по 1.6.7, а с первой пока непонятно. Но кажется, там все довольно просто.

Утверждение 1. $\displaystyle\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu$.

▼
Для простых — следствие 1.6.4, для остальных получается из определения.
▲

Замечание 1. Если $\displaystyle\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(E_k \cap A)$ включить в определение интеграла по мере для простых функций, то 1.7.1 станет утверждением. Иначе его стоит рассматривать как определение интеграла по подмножеству.

Свойства интеграла от неотрицательных функций

Утверждение 2. *Пусть все функции неотрицательны и измеримы. Тогда*

$[A_1]$ $0 \leqslant f \leqslant g$. *Тогда* $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

$[A_2]$ $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geqslant 0$, *измерима. Тогда* $\displaystyle\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f \, \mathrm{d}\mu$

$[A_3]$ *см теорему 1.8.1.*

$[A_4]$ $\displaystyle\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$

$[A_5]$ $\displaystyle\int_X (\lambda g) \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \, \mathrm{d}\mu$

Замечание 1. Предпоследнее не сходу очевидно для индикаторов, так что побыстрому докажем тут его. По лемме 1.6.4

$$\sum_k c_k \mathbb{1}_{E_k} + \sum_j d_j \mathbb{1}_{D_j} = \sum_k c_k \mathbb{1}_{E_k} \sum_j \mathbb{1}_{D_j} + \sum_j d_j \mathbb{1}_{D_j} \sum_k \mathbb{1}_{E_k} = \sum_k \sum_j (c_k + d_j)\, \mathbb{1}_{E_k \cap D_j}$$

Теперь запишем определение интеграла, размотаем все обратно и получим желаемое.

Билет № 8: Теорема Беппо Лéви

Теорема 1. *Пусть* (f_n) *— измеримы на* X, $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots$, $f = \lim_n f_n$. *Тогда*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

☐ Заметим, что из 1 пункта 1.7.2 $\int_X f_n$ возрастают. Значит,

$$\exists\, L := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \ \wedge\ L \leqslant \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Докажем неравенство в другую сторону.

По определению $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup_n \int_X \varphi_n \,\mathrm{d}\mu$. Выберем какую-то φ, и рассмотрим

$$c_0 = 0, c_k > 0 \quad \varepsilon\colon 0 < \varepsilon < \min\{c_1, \dots, c_p\}$$

$$\varphi_\varepsilon = 0 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon) \cdot \mathbb{1}_{E_k},$$

[1]. Таким образом, мы добились строгого неравенства $\varphi_\varepsilon < f$.

Рассмотрим $X_n = X[f_n < \varphi_\varepsilon]$. Оно измеримо как объединение измеримых. К тому же

1. $\forall\, n \ :: \ X_n \subset X_{n+1}$.
2. $\forall\, x \,\exists\, N \ :: \ \forall\, n > N \ :: \ x \in X_n$.
3. 2 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \Rightarrow \mu X_n \to \mu X$

В итоге

$$L \leftarrow \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_{X_n} f_n \,\mathrm{d}\mu > \int_{X_n} \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon) \cdot \mu(X_n \cap E_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{p} (c_k - \varepsilon) \cdot \mu(E_k) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

А значит

$$L \geqslant \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

■

Часто пользуются сочетание теоремы Леви и теоремы про последовательность простых функций (1.6.7). Ссылаться на такое будем как просто на теорему (1.8.1)

[1] В крайнем случае $E_0 = \varnothing$

Определение 1. Пусть задано (X, μ), $P(x)$ — предикат. Говорят, что $P(x) = 1$ почти везде (п.в.), если $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$.

Определение 2. $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ п.в. .

Лемма 2. *Пусть задано* (X, μ), $f = 0$ *п.в. . Тогда* $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Лемма 3. *Пусть задано* (X, μ), $f = g$ *п.в. . Тогда* $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

Лемма 4 (Беппо-Леви для рядов)**.** *Пусть задано* (X, μ), $u_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, u_n *измеримы,* $u_n \geqslant 0$. *Тогда*

a) $\displaystyle\int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n \, \mathrm{d}\mu.$

b) Если эти числа конечны, то ряд $\sum_n u_n$ *сх п.в.*

▼
Частичные суммы ряда отлично подходят на роль f_n из теоремы Леви.

Со второй частью хитрее. Рассмотрим множество $E = \{x \mid S(x) = +\infty\}$. Раз уж сумма ряда бесконечна, $g_n(x) \equiv n \nearrow S(x)$, $(x \in E)$.

Тогда по теореме Леви (1.8.1)

$$\int_E g_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_E S \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X S \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

С другой стороны,

$$\int_E g_n \, \mathrm{d}\mu = n \cdot \mu E \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Так что во избежаний противоречий, $\mu E = 0$.
▲

Лемма 5 (Беппо-Леви «вверх ногами»)**.** *Пусть задано* (X, μ), (f_n), *измеримы,* $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$. *Пусть ещё* $f_1 \in \mathcal{L}$. *Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} f_n \, \mathrm{d}\mu$$

▼
$g_k = f_1 - f_k$ — кандитаты на роль функций в теореме (1.8.1)
▲

Билет № 9: Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu < \infty$. [1] Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Замечание. Часто для суммируемости пользуются условием $\displaystyle\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Впрочем, ниже это даже написано.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

[B$_1$] $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$

[1] ну, если он не определён, то и подавно не $\in \mathcal{L}$

[B$_2$] $\displaystyle\int_X (f \pm g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu \pm \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$

[B$_3$] $\displaystyle\int_X \lambda f\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$

[B$_4$] $\displaystyle |f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$

[B$_5$] $\displaystyle \left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$

[B$_6$] $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

[B$_7$] $\displaystyle |f| \leqslant M \leqslant +\infty \Rightarrow \left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu X$

Проще это все доказывать через интегралы от $f_+ + g_+$ и $g_- + f_-$ Проблема разве что с $\lambda = -1$ в [B$_3$], но тут поможет то, что $(-f)_+ = f_-$

Билет № 10: Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. *Пусть задана тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, f *— измерима и* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}$. *Пусть к тому же*

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\,\mathrm{d}\mu$$

□ Для неотрицательных следует из 1.6.5, 1.7.1 и теоремы Беппо-Леви (1.8.1). Ну ещё нужна конечная аддитивность, которую доказали в № 7.

Для суммируемых уже очевидно.

■

Билет № 11: Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Тогда*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ ::\ \forall\,A \in \mathcal{A}, A \subset X : \mu A < \delta\ ::\ \left|\int_A f\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$$

□ Для ограниченных — очевидно, а потом приближать $|f|$ снизу простыми , которые ограничены ■

Билет № 12: Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \in C([a;b])$, λ *— мера Лебега на* $X = [a;b]$. *Тогда*

$$f \in \mathcal{L}, \int_{[a;b]} f\,\mathrm{d}\mu = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

где F *— первообразная* f.

□

1) (!) f измерима. Но она непрерывна, значит, прообраз $(-\infty, a) \in \mathcal{O} \subset \mathcal{M}$.

2) (!) f суммируема. Но $|f|$ ограничена, тогда и интеграл по множеству конечной мере конечен.

3) $\exists\, F \;::\; F'(x) = f(x)$.
Пусть
$$\forall\, x \in [a; b] \;::\; F(x) = \int_{[a;x]}$$
Она определена и конечна из суммируемости f. Непрерывность следует из непрерывности интеграла по меме. Осталось последнее
$$\Delta F = \int_{[a;x+\Delta x]} f \,\mathrm{d}\lambda - \int_{[a;x]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{(x;x+\Delta x]} f \,\mathrm{d}\lambda$$
Последнее можно оценить из непрерывности f.
$$(f(x) - \varepsilon)\Delta x \leqslant \int_{(x;x+\Delta x]} f \,\mathrm{d}\lambda \leqslant (f(x) + \varepsilon)\Delta x$$
А дальше можно поделить на Δx и воспользоваться теоремой о 2 полицейских.

■

Билет № 13: Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

Определение 1 (Интеграл Римана)**.** Пусть $f \in C([a; b])$ $a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,\ \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$
- $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го отрезка
- $r = r(\tau) = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так
$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \lim_{r(\tau)\to 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

Определение 2 (Интеграл Лебега)**.** см. 1.7.1. В качестве множества X понятное дело, отрезок $[a; b]$.

Пример 1. Пусть $X = [0; 1]$. Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

Интеграл Римана из вертикальных полосок, а Лебега из горизонтальных. См 1.2

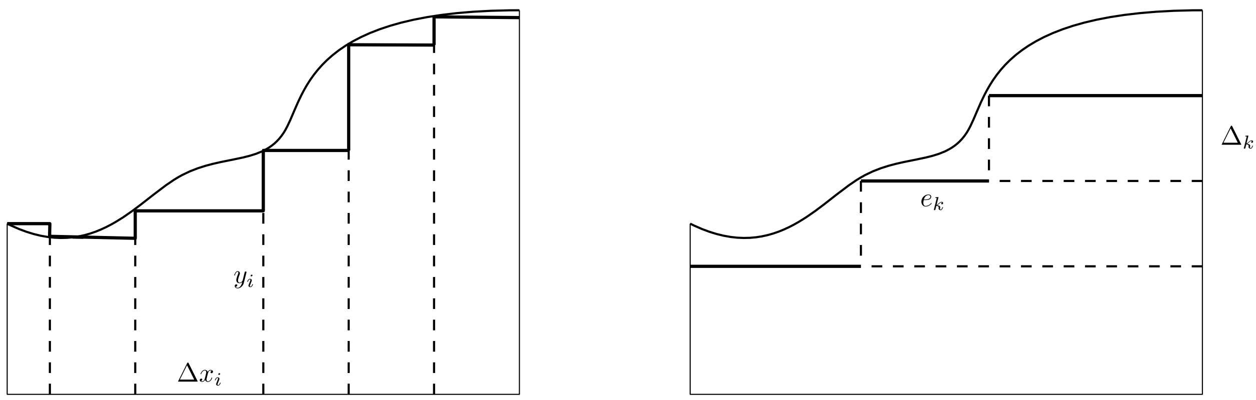


Рис. 1.2: Интегралы Римана и Лебега

Билет № 14: Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \geqslant 0 \lor f \in \mathcal{L}\big([a;b), \lambda\big)$. *Тогда* $\displaystyle\int_{[a;b)} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{\to b} f$.

☐ Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. Реально, все уже доказано в 1.12.1 и 1.4.5 ■

Поведение становится разным на не суммируемых функциях. Например, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ сходится, но не абсолютно. Значит, аналогичный лебеговский интеграл не суммируется.

Билет № 15: Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$, $\{a_k\} \in X$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ *или* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. *Тогда*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

☐ Счётная аддитивность интеграла поможет(1.10.1) А на одноточечном множестве любая функция простая. ■

Пример 1. Пусть $\mu A = \#A$. Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}^2} f(m,n)\,\mathrm{d}\mu$$

Причем условия сходимости ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[\begin{array}{l} \forall m,n \in \mathbb{N} :: \ a_{m,n} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{array}\right.$$

Определение 1. Пусть задана пара [1] (X, μ), $\rho\colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $\rho \geqslant 0$. Тогда

[1] тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

- $\nu(E) := \int_E \rho \,\mathrm{d}\mu$ — мера, задаваемая плотностью ρ
- ρ — плотность меры ν относительно меры μ.

Замечание. Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

Теорема 2. *Пусть выполнены «обычные» условия на f. Тогда $\int_X f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f\rho \,\mathrm{d}\mu$.*

$\square$ Сначала разберёмся с простыми функциями.

$$\int_X g \,\mathrm{d}\nu = \sum_k c_k \nu(E_k) = \sum_k \int_X c_k\rho \cdot \mathbb{1}_{E_k} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_k c_k \cdot \mathbb{1}_{E_k}\right) \rho \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\rho \,\mathrm{d}\mu$$

Для неотрицательных поможет теорема Леви (1.8.1), а с суммируемыми уже всё просто. $\blacksquare$

Билет № 16: Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

Определение 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F \nearrow$, $F(x) = F(x-0)$ (непрерывна слева).[1].

Рассмотрим порождённую полуинтервалами $[a;b) \subset I$ алгебру. По сути, $\mathcal{C}ell_1$. Введём «объём» ν_F: $\nu([a;b)) = F(b) - F(a)$.

Тогда мера Лебега-Стилтьеса μ_F — стандартное продолжение ν_F на некоторую σ-алгебру $\mathcal{M}_F$.

Замечание 1. Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать ν, если она — не мера?

Делается это аналогично аддитивности обычного объёма, тоже надо покрывать открытыми множествами ячейки из объединения. См 1.5.2

Замечание 2. σ-конечность — очевидна.

Замечание 3. При таком задании объёма непрерывность g слева жизненно необходима. Иначе нету непрерывности меры.

Свойства мемы Лебега-Стилтьеса

Утверждение 1. *Пусть $\Delta = [a;b]$. Тогда $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$.*

Утверждение 2. *Пусть $\Delta = \{a\}$. Тогда $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$.*

Утверждение 3. *Пусть $\Delta = (a;b)$. Тогда $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$.*

Доказывается всё это из непрерывности μ_F.

Лемма 4. *Пусть $F \in C(I)$, $\Delta \subset I$. Тогда $\mu_F(\Delta) = \int_\Delta F'(t) \,\mathrm{d}\lambda$.*

▼

Мы в 1.12.1 уже доказывали, что для непрерывных функций интеграл по мере совпадает с интегралом Ньютона-Лейбница.

▲

Замечание 1. Еще можно сказать, что F задана плотностью $\rho = F'$.

[1] А можно и без. Тогда $\nu([a;b)) = F(b-0) - F(a-0)$, см. ??

Теорема 5. *Пусть $F \nearrow$, кусочно-гладка на $I \subset \mathbb{R}$, а для f выполнены обычные условия ($X = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_F$). Промежутки гладкости F обозначим за (c_k, c_{k+1}). Тогда*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu_F = \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} f F' \,\mathrm{d}\lambda + \sum_k f(c_k) \underbrace{\Delta_{c_k} F}_{\textit{скачок в } c_k}$$

$\square$ По счётной аддитивности разобъем на непрерывные куски и точки.

Для точек:1.16.2

Для непрерывных кусков поможет интеграл по мере, заданной плотностью. См 1.15.2 $\blacksquare$

Определение 2 (Образ мемы)**.** Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мемой, $f\colon X \to Y$. Превратим и Y в пространство с мемой.

1. $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$.

Корректность докажется из свойств прообраза.

Теорема 6. *Пусть для $g\colon Y \to \mathbb{R}$ выполнены обычные условия ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\mu = \nu$). Тогда $\displaystyle\int_Y g \,\mathrm{d}\nu = \int_X (g \circ f) \,\mathrm{d}\mu$.*

$\square$ Пусть g — простая.

$$\int_Y g \,\mathrm{d}\nu = \sum_k c_k \nu(E_k) = \sum_k c_k \mu\big(f^{-1}(E_k)\big)$$

С другой стороны

$$g(f(x)) = c_k \Leftrightarrow f(x) \in E_k \Leftrightarrow x \in f^{-1}(E_k) \implies g \circ f = \sum_k c_k \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(E_k)}$$

А дальше — как обычно, через теорему Леви (1.8.1). $\blacksquare$

Определение 3 (Функция распределения)**.** Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда $F(t) := \mu X[f < t]$. Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

Теорема 7. *Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, выполнены обычные условия для f. Тогда $\displaystyle\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t \,\mathrm{d}\mu_F$.*

$\square$ Следствие 1.16.6 при $g(t) = t$, $\nu = \mu_F$ — мера Лебега-Стилтъеса порожденная функцией распределения $F(t)$. $\blacksquare$

Билет № 17: Интеграл Эйлера-Пуассона

Утверждение 1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}\lambda_2 = \pi$

▼

Проще рассматривать $g(x, y) = -e^{-(x^2+y^2)}$. Тогда

$$F(t) = \mu\mathbb{R}^2[g(x, y) < t] =^* \mu\{x, y \mid -(x^2 + y^2) > \ln(-t)\} =$$
$$= \mu\{x, y \mid x^2 + y^2 < -\ln(-t)\} =^* \begin{cases} -\pi\ln(-t), & -1 \leqslant t < 0 \\ 0, & t < -1 \\ \infty, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

(* посередине не стали тащить все варианты)

Здесь происходит некоторая магия. Можно как-то помахать руками и выкинуть всё, кроме $[-1; 0)$.

С частью больше нуля вообще ничего не понятно. Единственный вариант — понимать здесь интеграл как предел конечного, по расширяющимся окружностям. В таком случае, после какого-то t $F = \mathrm{const}$. Тогда и производная там ноль. Так что будем считать, что $F = \infty \Leftrightarrow F = \mathrm{const}$.

Применять теорему 1.16.7 здесь тоже некорректно, но для ограниченных областей можно было бы.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}\mu_F(t) = \int_{-1}^{0} tF'(t) = \pi\int_{-1}^{0} t\cdot\left(-\frac{1}{-t}\cdot(-1)\right)\mathrm{d}t = -\pi$$

▲

Билет № 18: Вероятностный смысл мемы

<+Табличка с соответствием+>

Билет № 19: Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$.

- ▷ $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$ — «срез»
- ▷ $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \varnothing\}$ — «проекция»

Пример 1. См картинку 1.3

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathcal{M}_{m+n}$, $E_x \in \mathcal{M}_n$ п.в. x, $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$ измерима относительно $\mathcal{M}_m$.*

Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x)\,\mathrm{d}\lambda_m$$

□

1. $E = \prod_{k=1}^{\infty} \Delta^k$

   Здесь просто $E = E_1 \times E_2$, так что

   $$E_x = \begin{cases} E_2, & x \in E_1 \\ 0, & x \notin E_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n E_x = \begin{cases} \lambda_n E_2, & x \in E_1 \\ 0, & x \notin E_1 \end{cases}$$

   Отсюда

   $$\int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n E_x\,\mathrm{d}\lambda_m = \int_{E_1} \lambda_n E_x\,\mathrm{d}\lambda_m = \lambda_m(E_1)\cdot\lambda_n(E_2) = \lambda_{m+n}(E)$$

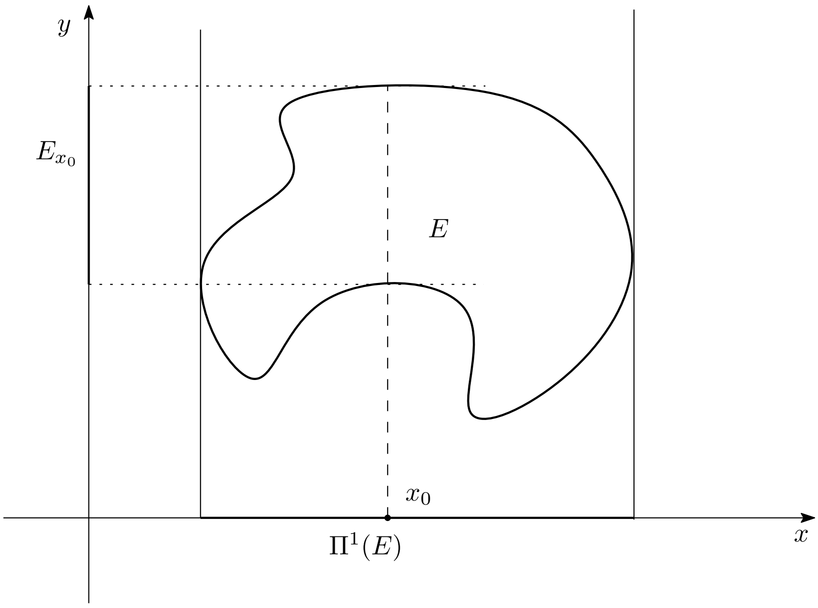


Рис. 1.3: Проекции и срезы для двумерья

2. $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k — ячейка
   Здесь $\lambda_n E_x = \sum_k \lambda_n (E_k)_x$, а дальше теорема Леви для рядов 1.8.4
3. $E \in G_\delta \Leftrightarrow G = \bigcap\limits_k G_k$, $G_k \in \mathcal{O}$, причём $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$.
   Здесь уже нужна теорема Леви «вверх ногами» 1.8.5
4. E измеримо и ограничено.
   Из регулярности меры Лебега (точнее, из следствия 1 к ней) $\exists A \in G_\delta$ :: $A = E \cup N$, а $\lambda(N) = 0$.
5. Для неограниченных — представить через объединение ограниченных. Мера Лебега ведь сигма-конечна.

■

Определение 2 (График)**.** $\Gamma^f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$.

Определение 3 (Подграфик)**.** $\Gamma^f_- = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$.

Определение 4 (Надграфик)**.** $\Gamma^f_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geqslant f(x)\}$.

Для знакопеременных можно модуль навесить, но редко встречалось.

Лемма 2. $\lambda_{n+1}\Gamma^f = 0$.

Теорема 3 (Геометрический смысл интеграла)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *измерима,* $\geqslant 0$. *Тогда*

1. Γ^f_- *измеримо по* λ_{n+1}
2. $\lambda_{n+1}\Gamma^f_- = \int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\lambda_n$.

□

1. Для индикатора второе утверждение теоремы очевидно. А вот с первым всё хуже.

   В принципе, это следует вроде следует из того, что алгебра $\mathcal{Cell}_k \times [0;1]$ порождает $\mathcal{Cell}_{k+1}$, но $\langle ? \rangle$.

2. Для простых тоже всё очевидно, объединение измеримых — измеримо.

3. Для неотрицательных — через теорему Леви для рядов (1.8.4). Предел измеримых — измерим.

■

Билет № 20: Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через $\mathrm{d}x$ (ну или $\mathrm{d}y$), размерность определяется из размерности x. Еще обозначим $\mathrm{d}(x, y)$ через $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Теорема 1 (Тонелли)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$*, измерима,* $\geqslant 0$*,* $x \in \mathbb{R}^m$*,* $y \in \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

□ Следствие 1.19.3. Правда снова сложности с измеримостью. ■

Теорема 2 (Фубини)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$*, измерима,* $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$*,* $x \in \mathbb{R}^m$*,* $y \in \mathbb{R}^n$*. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Билет № 21: Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

- Сдвиг: $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.
- Поворот с растяжением: $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, L — линейный император.

Утверждение 1. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$.

▼

Для открытых всё очевидно: $f(G) \in \mathcal{O}$, раз это гомеоморфизм. Пересечение образов — образ пересечения. Так что и для G_δ всё работает.

Дальше можно вспомнить, что измеримое $E = G_\delta \cap N$, $\lambda N = 0$. Если множество нулевой меры, то можно покрыть его ячейками так, что $\sum_k \lambda\Delta_k < \varepsilon$. Это просто из определения внешней меры.

Поскольку размеры ячеек просто сохраняются, образ тоже будет нулевой меры. $N \subset \bigcup\limits_k \Delta_k \Rightarrow f(N) \bigcup\limits_k f(\Delta_k)$, так как объединение образов = образу объединения.

▲

Утверждение 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$.

▼
В случае $\det L = 0$ размерность образа меньше $n \Rightarrow$ мера равна нулю.

Иначе, все очти аналогично рассуждению выше, только оценка меры образа сложнее. Пусть $\lambda\Delta = \delta^n$, тогда

$$\forall\, x, y \in \Delta \;::\; \|Lx - Ly\| \leqslant \|L\|\,\|x - y\| \leqslant \sqrt{n}\delta\|L\|$$

А значит можно уменьшая δ получить сколь угодно малые покрытия образа нуль-множества.
▲

Утверждение 3. *Пусть* $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *линейно. Тогда*

$$\exists\, C \geqslant 0 \;::\; \forall\, E \in \mathcal{M} \;::\; \lambda L(E) = C\lambda E$$

▼
Здесь можно разобраться с ячейкой $[0;1)^n$, а дальше обычными способами построить весь мир из ячеек.
▲

Теорема 4. *C из прошлой теоремы равно* $\left|\det[L]\right|$.

□ тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы:

$$L = U_1\, D\, U_2$$

Определитель матрицы всего оператора равен определителю диагонального. Для ячеек очевидно, что $C = |\det D|$, ортогональный сохраняет объёмы ячеек. А дальше как обычно. ■

Билет № 22: Мера образа при гладком отображении

Обозначение. $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

Теорема 1. *Пусть* $E \in \mathcal{M}$, $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *гладкая биекция. Тогда* $F(E) \in \mathcal{M}$ *и* $\lambda F(E) = \displaystyle\int_E |\det F'(x)| \mathrm{d}x$.

□ ⟨ ⩪ ⟩ ⟨⚒⟩ ■
□ Что делать здесь с измеримостью не очень понятно. Если с компактами ещё как-то разобраться можно, то вот что делать с неограниченными совсем непонятно.

Можно поразмахивать линеаризацией и сказать, что

$$F(x) \approx F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)$$

а последнее уже аффинное, для которых якобы что-то доказали. ⟨?⟩■

Билет № 23: Глакая замена переменной в интеграле

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, *гладкая биекция. Пусть к тому же* $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ *с обычными условиями.*

Тогда

$$\int_E f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\square$ Хотелось бы свести это к чему-то старому, но не получится: мера не поменялась, а поменялось множество и функция.

Так что надо снова доказывать для простых. Пусть

$$f(y) = \sum_i c_i \cdot \mathbb{1}_{B_i}(y)$$

Тогда $f(y) = c_i \Leftrightarrow y = F(x) \in B_i \Leftrightarrow x \in F^{-1}(B_i) = A_i$ Так что

$$f(y) = \sum_i c_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

Отсюда

$$\int_E f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_i c_i \int_{A_i} |J_F(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_i c_i \int_{F^{-1}(E)} |J_F(x)| \cdot \mathbb{1}_{A_i} \mathrm{d}x = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\blacksquare$

Пример 1 (Полярные координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r$

Пример 2 (Сферические координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r^2 \cos\psi$

Билет № 24: Предельный переход под знаком интеграла

Определение 1 (Всякие сходимости)**.** Пусть $(f_n)\colon X \to \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, μ — мера на X.

$$\begin{aligned}
f_n \to f \quad &:= \quad \forall\, x \in X \;::\; f_n(x) \to f(x) \\
f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \quad &:= \quad \rho(f_n, f) = \sup_X |f_n - f| \to 0 \\
f_n \to f \text{ п.в.} \quad &:= \quad \exists\, N \subset X \colon \mu(N) = 0 \;::\; \forall\, x \in X \setminus N \;::\; f_n(x) \to f(x). \\
f_n \overset{\mu}{\to} f \quad &:= \quad \forall\, \sigma > 0 \;::\; \mu X[|f_n - f| \geqslant \sigma] \to 0
\end{aligned}$$

Замечание 1. $f \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f \Rightarrow f_n \to f$ п.в. .

Замечание 2. Пусть $\mu X < \infty$, тогда $f_n \to f$ п.в. $\Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$.

Замечание 3 (Теорема Рисса). $f_n \overset{\mu}{\to} f$ п.в. $\Rightarrow \exists\, (n_k) \;::\; f_{n_k} \to f$ п.в. .

Теорема 1. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f, \mu X < \infty \Rightarrow \displaystyle\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_X f$

$\square$

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X f_n - f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \rho(f_n, f)\,\mathrm{d}\mu \\
= \rho(f_n, f)\,\mu X \xrightarrow[n \to \infty]{} 0
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Теорема 2. *см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.8.5.*

Теорема 3 (Фату)**.** *Пусть заданы (X, μ), $f_n \geqslant 0$, измеримы. Тогда*

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Пример 1. Ползущая на бесконечность гауссиана.

□
$$\underline{\lim} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geqslant n} f_m(x); \quad g_n(x) = \inf_{m\geqslant n} f_m(x)$$
Эта последовательность возрастает, мы каждый раз берем все меньше функций. Так что по теореме Леви (1.8.1)
$$\int g_n \to \int \underline{\lim} f_n$$
Из определения инфимума $f_n \geqslant g_n$. Значит
$$\underline{\lim} \int f_n \geqslant \underline{\lim} \int g_n = \lim \int g_n = \int \underline{\lim} f_n$$
■

Билет № 25: Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 1. *Пусть снова заданы* (X, μ), (f_n) *измерима,* $f_n \to f$ *п.в. . К тому же*
$$\exists \varphi \in \mathcal{L} :: \forall n :: |f_n| \leqslant |\varphi|$$
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$
□ f суммируема из теоремы Фату 1.24.3

Коль скоро $\varphi - f_n \geqslant 0$,
$$\int (\varphi - f) = \int \underline{\lim}(\varphi - f_n) \leqslant \int \varphi + \underline{\lim}\left(-\int f_n\right) = \int \varphi - \overline{\lim} \int f_n$$
Используя свойства верхних и нижних пределов и теорему Фату (1.24.3) получим
$$\int f \leqslant \underline{\lim} \int f_n \leqslant \overline{\lim} \int f_n \leqslant \int f$$
■

Обозначение. $(\mathcal{L})$ — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 1. *Пусть* $f \colon T \times X \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f_t \xrightarrow[t\to t_0]{} f$ *п.в. , и*
$$\exists V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} :: \forall t \in \overset{\circ}{V} \cap T :: |f_t| \leqslant |\varphi|$$
Тогда
$$\int_X f_t \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[t\to t_0]{} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$
▼

Предел по Гейне.

▲

Обозначение. $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ — условия локальной теормемы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 2. *Непрерывность интеграла по параметру при выполнении* $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ *и непрерывности* f_t.

§* Интеграл по меме с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию В таких случаях параметр будет записан, как индекс

Определение 1 (Собственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X\times T\to\mathbb{R}$, $f_t(x)\in\mathcal{L}([a,b],\mu)\ \forall\, t\in T$. Тогда,

$$I(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от t, как видно $\mathcal{D}_I=T$.

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. $\langle$`:set aflame`$\rangle$У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается ($\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}$). Так что по сути они — просто интегралы по меме.

Здесь тоже есть непрерывность, дифференциируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально[1] следует из 1.25.1 и 1.20.2.

Билет № 26: Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

Определение 1 (Несобственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X\times T\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{L}([a,B],\mu)\ \forall\, B<b$. Тогда,

$$I(t)=\int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x:=\lim_{B\to b-0}\int_a^B f(x,t)\,\mathrm{d}x=\lim_{B\to b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что $\forall\, t\in T$ интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

Определение 2. Говорят, что $I^B(t)\overset{T}{\rightrightarrows}I(t)$ (сходится равномерно относительно $t, t\in T$), если [2]

$$\sup_{t\in T}\left|\int_B^{\to b} f(x,t)\right|\xrightarrow[B\to b]{}0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла $\forall\, t\in T$.

Теорема 1 (Признак Больцано-Коши)**.**

$$I^B(t)\overset{T}{\rightrightarrows}I(t)\Leftrightarrow\sup_T\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right|\xrightarrow[B_1,B_2\to b]{}0$$

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\exists\,\varphi\in\mathcal{L}([a;b))\ ::\ |f(x,t)|\leqslant\varphi(x)\ \forall\, t$*. Тогда* $I^B(t)\overset{T}{\rightrightarrows}I(T)$*.*

Теорема 3 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $I(t)=\displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t)\cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $f(x,t)\overset{T}{\rightrightarrows}0,\ f(x,t)\searrow^x\ (x\to b-0)$

[1] ну..

[2] Никто же не любит ε-δ-определения?

b) $G(x,t) = \displaystyle\int_a^x g(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi$

$$\exists\, M\colon \forall\, x \in [a;b), t \in T \ :: \ |G(x,t)| \leqslant M$$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Теорема 4 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t) \cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $\exists\, M\colon \forall\, t \in T \ :: \ f(x,t) \leqslant M,\ f(x,t) \searrow^x$.

b) $\displaystyle\int_a^B g(x,t)\,\mathrm{d}x \underset{B\to b}{\overset{T}{\rightrightarrows}} \int_a^{\to b} g(x,t)\,\mathrm{d}x$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Билет № 27: Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle$⚒$\rangle$

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \to f(x,t_0)$ *для п.в.*$x \in [a;b)$ *и* $I^B(t) \overset{V(t^0)}{\rightrightarrows} I(t)$. [1] *Тогда* $I \xrightarrow[t\to t_0]{} I(t_0)$.

Теорема 2. *Пусть для п.в.* $x \ \exists\, f_t'(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,*

a) $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *сходится* $\forall\, t \in T$

b) $\displaystyle\int_a^{\to b} f_t'(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда $\exists\, I'(t_0) = \displaystyle\int_a^{\to b} f_t'(x,t_0)\,\mathrm{d}x$

Замечание. Здесь нужна сходимость I, чтобы хоть где-то были конечные значения $I(t)$, нам их разность считать.

Теорема 3. *Пусть для п.в.* $x \ \exists\, f(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,*

$I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда

$$\int_c^d I(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\to b} \mathrm{d}x \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Билет № 28: Γ-функция Эйлера

Определение 1. $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

[1]Это не очень докажется без конечности меры $V(t_0)$,а то интеграл может сходится, а функция не быть суммируемой

Свойства

1° Определена для всех $t > 0$.

2° $\Gamma(1) = 1$

3° $\forall\, t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4° $n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n!$

5° Γ-выпукла

6° $\Gamma \sim \frac{1}{t}$ при $t \to 0$

7° $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{t} \cdot t^t e^{-t}$ при $t \to \infty$.

8° $\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$. (формула отражения)

▼
Доказать интересно лишь 5° Здесь нужно мажорировать интеграл от n-ой производной. Выберем окрестность t^0 равную $(t_1; t_2)$, $t_1 > 0$.

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} x^{t-1} e^{-x} = x^{t-1}\, e^{-x}\, \ln^n(x)$$

Надо разобраться с x^{t-1}. В $(0;1)$ можно оценить его как x^{t_1-1}, t_1 — фиксировано. Логарифм убывает медленнее x^{-p}, пусть $p = 1/2 \cdot t_1$. С экспонентой проблем нет, её единицей оценим

При $x > 1$ оценим x^{t-1} как x^{t_2-1}, экспонента забьёт все остальное. Так что φ — суммируемая мажоранта

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{1/2 t_1 - 1}, & 0 < x < 1 \\ x^{t_2-1} \ln^n(x)\, e^{-x}, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Отсюда по следствию из 1.25.1 производные от Γ существуют. Как видно, выпуклость здесь уже совсем очевидна, подынтегральное выражение положительно.
▲

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при $\operatorname{Im} z > 0$.

Билет № 29: B-функция

Определение 1. $B(y,z) = \displaystyle\int_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}\,\mathrm{d}x$.

Свойства

1° $B(y,z) = B(z,y)$.

2° $B(y,z) = \dfrac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$.

▼

Начнём с $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Пусть $x = ut$, $t > 0$. Тогда

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1}u^{y-1}\,e^{-ut}\,t\,\mathrm{d}u \Rightarrow \frac{\Gamma(y)}{t^y} = \int_0^\infty u^{y-1}e^{-ut}\,\mathrm{d}u$$

Заменим: $y \leftarrow y+z, t \leftarrow t+1$.

$$\frac{\Gamma(y+z)}{t^{y+z}} = \int_0^\infty u^{y+z-1}e^{-ut}\,e^{-u}\,\mathrm{d}u \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\Gamma(y+z)}{(1+t)^{y+z}}\,t^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{d}t\,t^{y-1}\int_0^\infty u^{y+z-1}e^{-ut}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Докажем, что

$$\int_0^\infty \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{y+z}}\,\mathrm{d}t = B(y,z)$$

Это очевидно после замены $t = \frac{1-s}{s}$.

Разберёмся с оставшейся частью

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,t^{y-1}\int_0^\infty u^{y+z-1}e^{-ut}e^{-u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^\infty \mathrm{d}u\,e^{-u}\,u^{y+z-1}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\left(e^{-ut}t^{y-1}\right)\\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}u\,u^{y+z-1}e^{-u}\,\frac{\Gamma(y)}{u^y} = \Gamma(y)\Gamma(z)\end{aligned}$$

▲

Билет № 30: Объём n-мерного шара

Теорема 1. *Пусть $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant R\}$ – n-мерный шар. Тогда*

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2}R^n}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}$$

□ Докажем всё для шара единичного радиуса, из свойств меры Лебега можно доказать для остальных.

$$\begin{aligned}V_n &= \int_{B(1)} 1\,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x_1\,B_{n-1}\left(\sqrt[n-1]{1-x_1^2}\right) = V_{n-1}\int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{n-1/2}\,\mathrm{d}x_1\\ &= /t = x_1^2/ = 2V_{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1/2}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = V_{n+1}B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2})\end{aligned}$$

Одна из двоек вылезла из-за чётности. Упрощая, используя кучу доказанного про гамма- и бета-функции, получим желаемое. ■

Глава 2: Дифференциальная геометрия

Билет № 31: Регулярная кривая и её естественная параметризация

Определение 1 (Кривая, как отображение)**.** Пусть задано гладкое отображение $t \in [a;b] \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^3$, регулярное, то есть $\operatorname{rk} r'(t) \equiv 1$. t — параметр, само отображение ещё можно называть параметризацией.

Определение 2 (Кривая, как класс отображений)**.** Введём отношение эквивалентности отображений:

$$r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \exists\, \delta\colon [a;b] \leftrightarrow [\alpha, \beta] \ :: \ \rho(\delta(t)) = r(t)$$

А теперь будем их путать. ⟨`:set aflame`⟩Ещё веселье с многообразиями.

Определение 3 (Естественная параметризация)**.** Пусть $[a;b] = [t_0, t_1]$. Рассмотрим $\widetilde{s}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |r'(t)|\,\mathrm{d}\tau$. Она, как видно, является пройденным путём и неубывает $\Rightarrow$ годится на роль δ.

Так что можно рассматривать s как параметр, это собственно и есть естественная (натуральная) параметризация.

Утверждение 1. *Пусть есть две разных параметризации: $r(t)$ и $r(s)$ одной кривой. Тогда*

$$\dot{r} \equiv \frac{\partial r(s)}{\partial s} = \Big(r'(t) \cdot (s'(t))^{-1}\Big)(t) = \frac{r'}{|r'|}$$

Как видно, натуральная почему-то обозначается точкой.

Билет № 32: Кривизна кривой

Определение 1 (Касательный вектор)**.** $\tau := \dot{r}(s)$.

Определение 2 (Кривизна)**.** $k_1 = |\dot{\tau}|$

Определение 3 (Радиус кривизны)**.** $R = k_1^{-1}$

Лемма 1. *Пусть $v(s) \in \mathbb{R}^n$, $|v| \equiv R \in \mathbb{R}$. Тогда $\dot{v} \perp v$.*

▼
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle v, v\rangle) = 2\langle v, \dot{v}\rangle$. Так что $\langle v\dot{v}\rangle = 0 \Rightarrow v \perp \dot{v}$.
▲

Утверждение 2. $\tau \perp \dot{\tau}$

Теорема 3. *Пусть $r(t)$ — неестественная параметризация кривой. Тогда $k_1 = \dfrac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$*

□

$$k_1 = |\dot\tau| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{r'}{|r'|}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r'}{|r'|}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r'}{|r'|}\right)\frac{1}{|r'|}\right|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r'}{|r'|}\right) = \frac{r''|r'| - r'|r'|'}{|r'|^2}, \quad |r'|' = \left(\sqrt{r'^2}\right)' = \frac{\langle r', r''\rangle}{|r'|}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r'}{|r'|}\right) = \frac{r''|r'|^2 - r'\langle r', r''\rangle}{|r'|^3} = \frac{r''\langle r', r'\rangle - r'\langle r', r''\rangle}{|r'|^3} = \frac{r' \times (r'' \times r')}{|r'|^3}\ (A = C)$$

$r' \perp r' \times r''$, так что

$$k_1 = \left|\frac{r' \times (r'' \times r')}{|r'|^3}\right| \frac{1}{|r'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

■

Билет № 33: Кручение и нормаль

Определение 1 (Нормаль)**.** Пусть $k_1 \neq 0$. Тогда $\nu := \frac{\dot\tau}{k_1}$.

из геометрии, она лежит в плоскости кривой и направлена в сторону «поворота».

Определение 2 (Бинормаль)**.** $\beta = \tau \times \nu$.

Замечание. (τ, ν, β) — хороший кандидат для репера в какой-нибудь точке P.

Определение 3 (Соприкасающаяся плоскость)**.** Пусть $k_1 > 0$, $P = r(s_0)$, T — плоскость, $T \ni P$, $N \perp T$ — нормаль к ней. Допустим, $\langle \Delta r, N\rangle = h$, $h = o(\Delta s^2)$. Тогда T — соприкасающаяся плоскость.

Утверждение 1. *$\tau, \nu \perp N$; $(r - r_0, \dot r_0, \ddot r_0) = 0$ — её уравнение*

▼

$$\Delta r = \dot r\,\mathrm{d}s + \frac{\ddot r}{2}\mathrm{d}s^2 + o(\Delta s^2) = \tau\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}k_1\nu\,\mathrm{d}s^2 + o(s^2)$$
$$\langle \Delta r, N\rangle = o(\Delta s^2)$$

Так что скалярные произведения $\langle \tau, N\rangle$, $\langle \nu, N\rangle$ равны нулю.

Вторая часть — из свойств смешанного произведения.

▲

Определение 4 (Абсолютное кручение)**.** $|k_2| := |\dot\beta|$

Теорема 2. $|k_2| = \left|\dfrac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{k_1^2}\right|$

□ Взять определение β и посчитать производную.

$$\dot\beta = \dot\tau \times \nu + \tau \times \dot\nu = k_1\nu \times \nu + \tau \times \dot\nu = \tau \times \dot\nu$$

Производная τ ничем не отличается от 2.32.3, только τ заместо r.
Так что

$$\dot\beta = \tau \times (\dot\tau \times (\ddot\tau \times \dot\tau))\frac{1}{k_1^3} = \frac{\dot\tau(\tau, \ddot\tau, \dot\tau) - (\ddot\tau \times \dot\tau)\cdot 0}{k_1^3} = -\frac{\nu \cdot (\tau, \dot\tau, \ddot\tau)}{k_1^2}$$

■

Определение 5 (Кручение)**.** $k_2 := \dfrac{-(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{k_1^2}$

Билет № 34: Формулы Френе

Теорема 1.
$$\begin{pmatrix}\dot\tau\\ \dot\nu\\ \dot\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k_1 & 0\\ -k_1 & 0 & -k_2\\ 0 & k_2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\\ \beta\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

□ Осталось доказать лишь второе, но оно очевидно следует из 1 и 3 и соотношения $\nu = \beta\times\tau$. ■

Теорема 2. *Пусть $r(s)$ — гладкая кривая с заданными k_1 и k_2, $k_1 > 0$. Тогда система (2.1) определит её с точностью до движения.*

□ Система (2.1) вообще линейна. Так что решение задачи Коши у неё — единственно. А положение кривой как раз задается начальными значениями τ, ν, β.

Правда ниоткуда не следует, что кривизна и кручение будет какими надо, но это скучно. Из формул для них докажется. ■

В бумажном конспекте здесь ещё рассуждения, что полученные векторы единичны и ортональны, но это тоже скучно.

Билет № 35: Регулярная поверхность. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма

Определение 1 (Поверзность (двумерная))**.** Пусть задано гладкое отображение
$$\varphi\colon (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2 \mapsto r = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$
Добавим условие регулярности $\operatorname{rk}\varphi' \equiv 2$ и условимся путать отображение и класс оных.

Определение 2.
$$\begin{aligned} r_u &:= (x'_u, y'_u, z'_u)\\ r_v &:= (x'_v, y'_v, z'_v)\\ n &:= \frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|} = \frac{N}{|N|}\end{aligned}$$
Отметим, что условие регулярности не дает векторному произведению обращаться в 0.

Касательную плоскость можно было бы здесь определить через нормаль, но лучше пока ещё подумать. Может, абстракций добавить.

Просто утащил определеньки из № 41

Определение 3. Пусть $M\subset\mathbb{R}^n$. Выберем на нем произвольную точку x и рассмотрим $V(x) = V_{\mathbb{R}^n}(x)\cap M$. Допустим,
$$\exists\, f\in C^1 \;::\; V(x)\leftrightarrow^f \mathbb{R}^k \text{ (или } \mathbb{H}^k).$$

Тогда M — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, а f — локальная карта многообразия. Набор всех карт называется атласом. $t\in\mathbb{R}^k$ — локальные координаты в V.

Атлас : $A(M) = \{(\varphi_k, V_k)_k\}$ — все окрестности и карты на них.

Если
$$\exists\, x\in M \;::\; V\leftrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{H} = \{x\in\mathbb{R}^k \mid x^1\leqslant 1\},$$

тогда это многообразие с краем. Край обычно обозначается как ∂M.

По идее, в атлас ещё надо включать информацию, карта на $\mathbb{R}^k$ или на $\mathbb{H}^k$. Так что

$$A(M) = \{(\mathbb{H}^k, \varphi_i, V_i)_i\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, V_j)_j\}$$

Определение 4 (Касательное пространство в точке x)**.** Пусть M — гладкое многообразие. Допустим, φ_i — карта в $V(x)$. Тогда

$$T_x M = \Big(\mathrm{d}\varphi_i(x)\Big)(\mathbb{R}^k)$$

Определение 5 (Первая квадратичная форма)**.**

$$\begin{aligned} I := |\mathrm{d}r|^2 &= r_u^2\,\mathrm{d}u^2 + 2r_u r_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + r_v^2\,\mathrm{d}v^2 \\ &= E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \end{aligned}$$

Плохое определение, надо сказать. Сделаем получше.

Определение 6. Первая квадратичная форма поверхности M — единичная квадратичная форма на его касательном пространстве.

Скаляряное произведение на $T_x M$ можно перенести из $\mathbb{R}^m \supset M$.

Утверждение 1. *Пусть $\varphi\colon D \subset M$ — карта на M. Тогда первая квадратичная форма в координатах пространства параметров имеет вид*

$$L^T L, \quad L = \varphi'(x)$$

Мы вроде можем спокойно рассматривать φ' как линейное отображение. Так что по идее первое определение — следствие отсюда, но $\langle ? \rangle$.

Определение 7. $g_{ij} = L^T L$. Хотелось бы сказать, что это метрический тензор, но не стоит.

Билет № 36: Вычисление длин и площадей на поверхности

Теорема 1. *Пусть M — поверхность, $\gamma\colon t \to r \in M$. Тогда*

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I}.\ (\mathrm{d}s = I)$$

□ Пусть $r \in M$, $u \in D$. Тогда $\mathrm{d}s^2 = \langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}r \rangle = \mathrm{d}r^T \mathrm{d}r = \mathrm{d}u^T L^T L \mathrm{d}u = I$. А дальше можно параметризовать кривую, так что u, v — функции от t. ■

Некое пояснение к определению.

Здесь можно сказать, что мера на касательном многообразии задаётся как образ лебеговой меры в $\mathbb{R}^k$. Они вроде как имеют одну размерность. Правда его надо как-то повернуть для этого, иначе якобиан не посчитать.

Зафиксируем какие-то базисы в D и $T_x M$. Соорудим вот такое ортогональное преобразование: $O = \left(\sqrt{I}\right)^{-1} L^T$, $O\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, скалярное произведение в них одинаковое.

Здесь неявно сконструировали отображение $I\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ взяв матрицу I.

Тогда пусть $F = O \circ L = \left(\sqrt{I}\right)^{-1} L^T L = \sqrt{I}$. Пользуясь теоремой из теории меры, $\lambda_T = \det F = \det \sqrt{I} = \sqrt{\det I}$.

А теперь можно приближать параллелепипеды на самом многообразии похожими из касательного пространства.

Определение 1. Пусть M — подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lambda_k := \int_D \sqrt{\det g(t)}\,\mathrm{d}t, \quad g(t)_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j}\right)(t)$$

Теорема 2. *Определение выше не зависит от параметризации.*

Теорема 3. *Пусть M — поверхность, $u, v \in D$, $I = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$. Тогда*

$$S(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Определение 2. Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, $\exists\, F\colon M_1 \to M_2$, сохраняющее длины кривых. Тогда они называются изометричными.

Теорема 4. *Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, что существуют их параметризации, при которых $I_1 = I_2$. Тогда они изометричны.*

Билет № 37: Вторая квадратичная форма

Определение 1. Снова рассмотрим поверхность с какой-то параметризацией. Тогда $\mathrm{II} := -\mathrm{d}r\,\mathrm{d}n = L\,\mathrm{d}u^2 + 2N\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + M\,\mathrm{d}v^2$.

Утверждение 1. $\mathrm{II} = n \cdot \mathrm{d}^2 r$

Утверждение 2 (Типы точек на поверхности)**.** *Здесь названия связаны с типом соприкасающегося параболоида. Его можно добыть, рассматривая $\Delta r \cdot n$.*

$\mathrm{II} > 0$**:** *Эллиптический*

$\mathrm{II} < 0$**:** *Он же*

$\mathrm{II} \lesseqgtr 0$**:** *Гиперболический*

$\mathrm{II} \geqslant 0 \vee \mathrm{II} \leqslant 0$**:** *Параболический (вроде цилиндра)*

$\mathrm{II} = 0$**:** *Точка уплощения*

Билет № 38: Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны

Определение 1. Нормальное сечение поверхности — сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности (в точке).

Лемма 1. *Нормальное сечение — кривая.*

Сначала рассмотрим несколько более общий случай

Теорема 2 (Менье)**.** *Пусть γ — кривая $\subset M$, $\gamma \ni P$. Тогда $k_0 = k_1 \cos(\underbrace{\nu \,\hat{;}\, n}_{\theta}) = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$.*

Замечание 1. Ещё можно сформулировать так: для всякой кривой на повехности, проходящей через точку в заданном направлении $k_0 = \mathrm{const}$

а теперь сузим обратно.

Определение 2. Нормальная кривизна — кривизна нормального сечения.

Для нормального сечения $\cos\theta = \pm 1$.

Если немного переписать и ввести параметр $t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$

$$k_1(t) = |k_0(t)| = \left|\frac{L + 2Nt + Mt^2}{E + 2Ft + Gt^2}\right|$$

Этот параметр t и задаёт «направление» нормального сечения. Так что $k_0(t)$ и есть та самая «кривизна в данном направлении».

Теперь найдем экстремумы $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(t)$.

Теорема 3. $\exists\, k_{\min}, k_{\max},\ k_{\min}\cdot k_{\max} = \frac{LM-N^2}{EG-F^2}$.

Определение 3. $k_{\min}, k_{\max}$ — главные кривызны.

Билет № 39: Гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса

Определение 1 (Гауссова кривизна)**.** $K = k_{\min}\cdot k_{\max}$.

Определение 2 (Гауссово отображение)**.** Пусть M — поверхность, n — нормаль к ней в точке P, S — единичная сфера. Тогда $G : n \mapsto C \in S$ (C — точка на сфере).

Теорема 1. *Пусть U — окрестность $P \subset M$, M — поверхность, $\mathcal{N}$ — поле нормалей на U. Допустим, что $V = G(\mathcal{N})$, она вроде как окрестность $G(n_P)$.*

Тогда

$$|K| = \lim_{U\to P}\frac{\iint_V |n_u \times n_v|}{\iint_U |r_u \times r_v|}$$

Билет № 40: Геодезическая кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.

Определение 1 (Геодезическая кривизна)**.** Пусть M — поверхность, T — касательная к ней в точке P. Допустим, $\gamma \subset M$ проходит через P. Рассмотрим проекцию γ на T. Тогда $\varkappa := k_\gamma$ — и есть геодезическая кривизна.

Определение 2. Если для кривой $\varkappa(s) \equiv 0$, то она называется геодезической.

Теорема 1 (Гаусса-Бонне)**.** *Пусть M — гладкая поверхность, $P_1, \ldots, P_n$ — вершины криволинейного многоугольника, $P_i, P_{i+1} = \gamma$, α_i — углы при вершинах. Тогда*

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \int_{\gamma_i} \varkappa\,\mathrm{d}s = 2\pi - \iint_P K\,\mathrm{d}s$$

Билет № 41: Ориентация кривой и поверхности

Здесь сначала введём всякие конкретные определения, потом абстрактное, потом конкретные примеры.

Определение 1 (Векторное поле)**.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, V — векторное пространство. Тогда $f\colon G \to V$ и есть векторное поле.

Пример 1. $V = \mathbb{R}^k$.

Замечание 1. Если захотеть гладкого векторного поля, то нужно уметь вводить на V норму[1]. Но как правило имеют дело с $V = \mathbb{R}^n$ где это всё уже есть.

[1] $o(\|h\|)$

Определение 2. Ориентация на кривой — непрерывное поле $\tau(x(t))$. Они все единичные, так что варианта выбрать $\tau(x)$ всего 2. Соответсвенно, и ориентаций две.

Замечание 1. Регулярность избавит от изломов, а все пересечения разделяются по t.

Замечание 2 (⟨`:set aflame`⟩). В нашем понимании кривая — не многообразие. У многообразия были бы проблемы с окрестностью пересечения. Это можно показать рассмотрев 4 точки в окрестности пересечения и устремив ту, что с самым далёким прообразом к пересечению. [1]

Определение 3. Ориентация на кривой — класс эквивалентности параметризаций по отношению $r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \delta' > 0$(всегда).

Утверждение 1. *Определения 2.41.2 и 2.41.3 эквиваленты.*

▼
банан.
▲

Определение 4. Если на кривой вводится ориентация, то она ориентируемая.

Тут нужно отметить, что подход выше совсем ломается, когда дело заходит о поверхностях. Обобщив рассуждения выше на поверхности, мы придём к тому, что лента Мёбиуса окажется ориентируемой. Ну, в самом деле, если привязать нормали к параметрам, а не к координатам пространства содержащего поверхность, то окажется, что нормаль всегда «вращается» непрерывно.

Так что надо сейчас заняться ориентацией многообразий.

Определение 5. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Выберем на нем произвольную точку x и рассмотрим $V(x) = V_{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$. Допустим,

$$\exists\, f \in C^1 \;::\; V(x) \leftrightarrow^f \mathbb{R}^k \text{ (или } \mathbb{H}^k).$$

Тогда M — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, а f — локальная карта многообразия. Набор всех карт называется атласом. $t \in \mathbb{R}^k$ — локальные координаты в V.

Атлас : $A(M) = \{(\varphi_k, V_k)_k\}$ — все окрестности и карты на них.

Если

$$\exists\, x \in M \;::\; V \leftrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 1\},$$

тогда это многообразие с краем. Край обычно обозначается как ∂M.

По идее, в атлас ещё надо включать информацию, карта на $\mathbb{R}^k$ или на $\mathbb{H}^k$. Так что

$$A(M) = \{(\mathbb{H}^k, \varphi_i, V_i)_i\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, V_j)_j\}$$

Теперь про ориентацию.

Определение 6. Две карты называются согласованными, если отображение $t_1 \mapsto x \in V_1 \cap V_2 \mapsto t_2$ имеет положительный якобиан.

Определение 7. Если все карты попарно согласованы, то атлас называется ориентирующим. Многообразие тогда называется ориентированным.

[1] я же тот ещё велосипедостроитель?

Представить все это проще всего на примере города, покрытого точками сотовой связи. Пересечение границы области покрытия одной вышки не приводит к потере связи.

Нетрудно понять, что ориентирующих атласов много. Город может покрывать хорошее количество сотовых операторов.

Определение 8. Атласы эквивалентны, если составленный из них атлас — тоже ориентирующий.

Утверждение 2. *Если многообразие связно, то они линейно связно.*

Утверждение 3. *Классов эквивалентности атласов для связного многообразия — два.*

▼ (⟨?⟩)
Пусть какая-нибудь точка M содержится в пересечении двух карт из разных атласов.

Пусть в её окрестности репараметризация между атласами происходит с положительным якобианом. До любой другой точки можно добраться по цепочке карт из одного атласа (из линейной связности).

Так что в её окрестности переход между атласами происходит с тем же знаком, что и в окрестности исходной точки. От выбора карт по дороге ничего не зависит, так как они из одного атласа.
▲

Определение 9. Пусть на M задан ориентирующий атлас. Тогда сужение этого атласа на край задаёт ориентацию края.

А теперь минутка конкретики.

Определение 10. Поверхность (регулярная) — связное ⟨?⟩подмногообразие $\mathbb{R}^3$ с рангом карт 2.

Утверждение 4. *Ориентация на поверхности задаётся непрерывным векторным полем нормалей. «Сторона» поверхности задаётся им же.*

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

▼
Связка бананов. Бананы тут ни при чём, но они кончились.
▲

Замечание 1. С кривыми наверное тоже стоит иметь дело, как с многообразиями, но вот тут ⟨?⟩. Дальше я так буду делать, но не очень законно.

Билет № 42: Интеграл второго рода

Здесь всюды $\mathrm{d}s$ — мера на многообразии.

Определение 1. Интеграл второго рода по кривой Γ от векторного поля F определяется, как

$$\int_\Gamma \langle F, \tau \rangle \, \mathrm{d}s$$

Определение 2. Интеграл второго рода по поверхности M от векторного поля F определяется, как

$$\int_\Gamma \langle F, n\rangle \,\mathrm{d}s$$

Определение 3 (Касательное пространство в точке x)**.** Пусть M — гладкое многообразие. Допустим, φ_i — карта в $V(x)$. Тогда

$$T_x M = \Big(\mathrm{d}\varphi_i(x)\Big)(\mathbb{R}^k)$$

Кокасательное пространство — сопряжённое к нему. Собственно, пространство линейных форм, действующих из $T_x M$.

Определение 4. Дифференциальная форма p-го порядка на многообразии M в точке x — кососимметрическая линейная функция

$$\omega^p \colon \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{p} \to \mathbb{R} \in (T_x^* M)^p$$

Умножение векторных пространств тут на самом деле тензорное, как я понял, так что очевидно следущее

Утверждение 1. *ω^p разложится по базису $\bigwedge_{i_k} \mathrm{d}x^{i_k} \in (T_x^* M)^p$*

А ещё $(T_x M)^p$ надо бы обозначать как-то так, подчёркивая, что это внешняя степень: $\Lambda^p(T_x M)$

Пример 1. Поскольку эта ерунда кососкоммутативна, надо думать что засунуть в базис. Вот давайте все для $\mathbb{R}^3$ напишем.

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= a_x\,\mathrm{d}x + a_y\,\mathrm{d}y + a_z\,\mathrm{d}z \\
\omega^2 &= a_{yz}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_{zx}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x a_{xy}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
\omega^3 &= a_{xyz}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge z
\end{aligned}$$

Ещё одно маленькое

Определение 5 (Внешний дифференциал)**.** Введём линейный император : $(T_x^* M)^p \to (T_x^* M)^{p+1}$

1. Для функции $f \colon \mathbb{R}^k \to M$ совпадает с обычнм дифференциалом.
2. $\mathrm{d}(\omega^p \wedge \omega^q) = \mathrm{d}\omega^p \wedge \omega^q + (-1)^p \omega^p \wedge \mathrm{d}\omega^q$ Это вместо правила Лейбница.
3. $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

Вообще, можно было бы определить 1, 3 правило и как дифференцировать 1-формы. Тогда 2 правило ясно следует оттуда. Соберём обе формы в одну, здоровую. После того как продифференцировали коэффициент, вылезет ещё какой-то $\mathrm{d}x^{i_l}$. Если он из второй формы, его надо переставить через все первые p дифференциалов. Как раз и вылезет $(-1)^p$.

⟨⚒⟩ `<+понять меры Хаара. Когда-нибудь...+>`

Положим, все формы имеют гладкие коэффициенты. Тогда пока интеграл от гладкой дифференциальной формы на многообразии определим так:

Определение 6. Пусть M — простое n-мерное многообразие (покрывается одной картой $f\colon D \to M$), $u \in D$, а ω^n — дифференциальная форма с коэффициентами $a_{i_1,\dots,i_n}(x)$. Давайте её поподробней напишем

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_n} a_{i_1,\dots,i_n}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

Тогда можно написать такое определение:

$$\int_M \omega^n := \int_D a_{i_1,\dots,i_n}(x) \bigwedge_{j=1}^{n} \mathrm{d}x^{i_j} := \int_D a_{i_1,\dots,i_n}\big(f(u)\big) \frac{\partial x^{i_1..i_k}}{\partial u^{i_1..i_k}}\,\mathrm{d}\lambda_n(u)$$

Здесь на самом деле обычный интеграл Римана, все функции под интегралом непрерывны.

Замечание 1. Здесь нужно и можно вспомнить, что в интеграле 1 рода был $\sqrt{g(u)} = \left|(\frac{\partial x}{\partial u})^T \frac{\partial x}{\partial u}\right|$. Те есть, корень из суммы квадратов тех миноров, что здесь.

Общее определение требует понимания разбиения единицы, а я пока так не умею.

Теперь минутка конкретики

Утверждение 2. *Пусть* $F = (P, Q, R)$, $\omega_F^1 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}y$. *Положим,* G *— кривая (одномерное многообразие). Тогда*

$$\int_\Gamma \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma \omega_F^1$$

▼

Заметим, что $\mathrm{d}s = |r'|\,\mathrm{d}t$, тогда $\tau\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Кажется, всё.

▲

Утверждение 3. *Пусть* ω_F^1 *точна, то есть* $\omega = \mathrm{d}\Phi$. *Тогда*

$$\int_\Gamma \omega_F^1 = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Физический смысл этого дела — работа.

Определение 7. Форма ω точна, если $\Gamma \int_\Gamma \omega = 0$

Определение 8. Форма ω замкнута, если $\mathrm{d}\omega = 0$.

Утверждение 4. *Пусть* M *— 2-мерная гадкая ориентируемая поверхность,* $F = (P, Q, R)$, $\omega_F^2 = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. *Тогда*

$$\int_M \omega_F^2 = \int_M \langle F, n\rangle\,\mathrm{d}s$$

▼

Пусть $N = (A, B, C)$. $\mathrm{d}S$ можно расписать получше.

$$L = \frac{\partial r}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

При умножении на транспонированную воспольземся известной формулой с суммой миноров:

$$g = L^T L = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = A^2 + B^2 + C^2 \Rightarrow \mathrm{d}S = \sqrt{g} = |N|$$

Тогда $Fn\,\mathrm{d}S = (PA + QB + RC)\,\mathrm{d}u$. А теперь смотрим на определение 2.42.6 и понимаем что там ровно то же самое.

▲

Билет № 43: Дифференцирование векторных полей

по методичке Лодкина Здесь — основные утверждения

Определение 1. Пусть f — скалярное поле, $F = (P, Q, R)$ — векторное. Тогда

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\nabla \times F = \operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$\langle \nabla, F \rangle = \operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Утверждение 1. *При обратимом гладком преобразовании координат $\Psi\colon x \mapsto \widetilde{x}$ ротор и дивергенция изменяются следующим образом.*

$$\operatorname{div} \widetilde{F}(\widetilde{r}) = \operatorname{div} F(r)$$
$$\operatorname{rot} \widetilde{F}(\widetilde{r}) = \Psi(\operatorname{rot} F(r))$$

Теорема 2. *Пусть F — гладкое поле. Тогда*

$$\operatorname{rot} F(r) = \operatorname{rot}\Big(\mathrm{d}F_r(h)\Big)$$
$$\operatorname{div} F(r) = \operatorname{div}\Big(\mathrm{d}F_r(h)\Big)$$

□ Ну, если отображение линейно, то его матрица Якоби равна его матрице. А дальше очевидно ■

Теорема 3. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\begin{array}{llll} F(r) = r & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = 0 & \operatorname{div} F = 3 \\ F(r) = a \times r & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = 2a & \operatorname{div} F = 0 \\ F(r) = \langle a, r \rangle b & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = a \times b & \operatorname{div} F = \langle a, b \rangle \end{array}$$

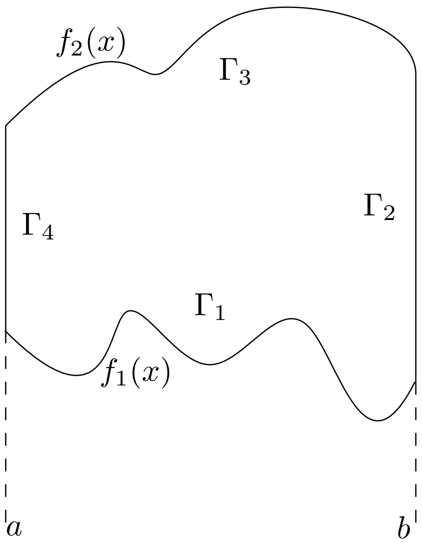
Билет № 44: Формула Грина

Теорема 1. *Пусть D — связное двумерное ориентируемое гладкое компактное подмногообразие $\mathbb{R}^2$ с краем, $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ — гладкая дифференциальная форма. Тогда*

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

□ Здесь почти нигде не пользуются явным определением формы на многообразии. Ну, а зачем, пространство двумерное. Так что можно сразу сказать, что нормаль лишь повлияет на знак $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ и не думать особо про то что x, y не очень совпадает с пространством параметров.

Много пунктов. Сначала разбить на области типа y (с вертикальными краями). И ещё занулить Q, например.



Тогда $\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = \int_a^b P(t, f_1(t)) - P(t, f_2(t))\,\mathrm{d}t$

Тем временем, от $\iint_D \cdots$ осталось лишь $(-1) \cdot \int_a^b \mathrm{d}x \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.

Как видно, получилось.

Произвольная область легко [1] режется на области типа y. Склеивать их можно, так как интеграл по вертикальным сторонам 0.

А потом сложить это с областями типа x. ■

Билет № 45: Классическая формула Стокса

Теорема 1. *Пусть M — компактная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем, F — гладкое векторное поле. Тогда*

$$\iint_M \langle \operatorname{rot} F, n\rangle\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial M} \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}s$$

□ Поскольку всё еще непонятно, что есть интеграл от формы по непростому многообразию, придётся ограничиться простыми.

Пусть $F = (P, Q, R)$, $N = (A, B, C)$. Здесь можно снова занулить Q, R. Тогда

$$\operatorname{rot} Fn = \frac{1}{|N|}\Big\langle (0, P_z, -P_y), N\Big\rangle = \frac{1}{|N|}(P_zB - P_yC)$$

Тперь про вторую половину.

$$\oint_\Gamma \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}s = \oint_{\widetilde{\Gamma}} Px_u\,\mathrm{d}u + Px_v\,\mathrm{d}v = \oint_{\widetilde{\Gamma}} \widetilde{\omega}$$

Здесь мы довольно коварно перешли от границы многообразия к границе пространства параметров. И ещё одна проблема как будто возникает из-за того, что в определении многообразия с границей граница вроде не замкнута. Да и вообще прямая. Впрочем, это лечится инверсией. А вот что делать бесконечностью — непонятно. Разве что сказать, что одна точка имеет меру ноль.

Ладно, тут пользуемся теоремой 2.44.1, и получим первую половину. ■

Билет № 46: Формула Гаусса-Остроградского

Теорема 1. *Пусть V — компактное тело в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей (гладким подмногообразием $\mathbb{R}^3$). Нормаль выберем «наружу». Тогда*

$$\oiint_M \langle F, n\rangle\,\mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V$$

[1] нет

□ Идейно мало чем отличается от теоремы Грина. Тоже разбиваем всё на области с вертикальными гранями, а потом складываем. ■

Все равно все эти теоремы никому не нужны, а лучше пользоваться абстрактной формулой Стокса

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega$$

Билет № 47: Физический смысл дивергенции и ротора

Дивергенция — удельный (по объему) поток через через бесконечно малую поверхность. С ротором — сложно. Можно представить себе как-то так. Выделим контур (в жидкости) и заморизим всё, кроме него. Тогда средняя скорость (усреднённая по площади!) будет чем-то вроде ротора.

См Фейнмановские лекции по физике, том 5 или 6. Который про магнетизм.

Билет № 48: Разные векторные поля

Попробуем в красивые таблички: 2.1

Таблица 2.1: Разные поля

Название	F	ω_F	$\int \omega_F$
Потенциальное	$F = \operatorname{grad} \Phi$	точна, $p = 1$	ноль для любой петли. Следует хоть из Ньютона-Лейбница.
Безвихревое	$\operatorname{rot} F = 0$	замкнута, $p = 1$	ноль для петель, что граница какой-нибудь поверхности. Можно проверить через формулу Стокса (2.45.1)
Соленоидальное	$F = \operatorname{rot} B$	точна, $p = 2$	$\iint_M \omega = 0$, M — замкнута. Проверяется тоже через Стокса, но в другую сторону.
Безвихревое	$\operatorname{div} F = 0$	замкнута, $p = 2$	ноль, для поверхностей, являющихся краем трехмерных многообразий. Проверяется через Гаусса-Остроградского. (2.46.1)

Из нечетных условий следуют чётные. Наоборот работает лишь там, где любая петля стягивается в точку.

Билет № 49: Примеры полей с разными свойствами

вот тут уже точно по методичке Лодкина.

Глава 3: Анализ Фурье

Билет № 50: Гильбертово пространство. $\mathcal{L}_2$

Определение 1. Пусть H — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Введём на нём (эрмитово) скалярное произведение, связанную с ним норму и метрику. Допустим, оно полно по введённой метрике. Тогда H — гильбертово пространство.

Замечание 1. Если полноты нет, то пространство называется предгильбертовым.

Утверждение 1. *Скалярное произведение — непрерывно.*

Пример 1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}$

$$\widetilde{L} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon X \to \mathbb{C},\ \text{измерима}, \int_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

Скалярное произведение зададим так:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

Введем теперь отношение эквивалентности $f \sim g := f = g$ п.в. . Тогда $\mathcal{L}_2 = \widetilde{L}/_{\sim}$.

Теорема 2. *$\mathcal{L}_2$ полно по мере, введённой выше.*

Билет № 51: Ортогональные системы. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.

Определение 1. $\delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Определение 2. Пусть H — гильбертово. Рассмотрим $f_1, \ldots, f_n \in H$. Допустим, $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда (f_i) — ортогональная система.

Теорема 1 (Пифагора ⟨⍨⟩)**.** *Пусть (f_i) — ортогональная система. Допустим, $f = \sum_k f_k$. Тогда*

$$\|f\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2$$

Определение 3. Пусть (e_i) — ортогональная система, $f \in H$. Тогда

$$c_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle \text{ — коэффициенты Фурье } f$$

$$f = \sum_k c_k e_k \text{ — ряд Фурье } f$$

Теорема 2 (Неравенсто Бесселя)**.** *Пусть $f \in H$, (e_i) — ортогональная система. Тогда*

$$\sum_n |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Определение 4. Пусть (e_i) — ортогональная система. Допустим

$$\forall\, f \in \mathcal{L}_2 \ :: \ f \sim \sum_n c_n e_n$$

Тогда (e_i) — полная система.

Утверждение 3. *Разложение в ряд Фурье по полной ортогональной системе — единственно.*

Билет № 52: Тригонометрические системы

Определение 1. $\mathcal{L}_2^{2\pi} = \mathcal{L}_2\big((0;2\pi),\mu\big) \cap \{2\pi\text{-периодичные функции}\}$.

Утверждение 1. $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots$ *— ортогональная система*

Утверждение 2. $1, e^{x}, e^{2x}, \ldots$ *— ортогональная система*

Теорема 3. *Тригонометрические системы выше — полны.*

□ ⟨?⟩Вообще, тут большой кусок теории. ■

Определение 2. Будем понимать

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n := \mathrm{V.\,p.} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{-N}^{N} a_n$$

Утверждение 4. *Коэффициенты разложения по синусам и косинусам:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x \ (n \geqslant 1)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\widetilde{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n\,\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} b_n\,\sin nx$$

Утверждение 5. *Коэффициенты разложения по экспонентам:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$
$$f(x) \sim \sum_{k=-\times}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Билет № 53: Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега

Определение 1 (Ядро Дирихле)**.** $\mathcal{D}_n(x) := \sum\limits_{-n}^{n} e^{ikx}$

Лемма 1 (Свойства ядра Дирихле)**.**

1. $\mathcal{D}_n(-x) = \mathcal{D}(x)$
2. $\mathcal{D}_n(x) = \dfrac{\sin(n + {}^1\!/_2)x}{\sin \frac{x}{2}}$
3. *всякие следствия отсюда*

Определение 2 (Ядро Фейера)**.** $\mathcal{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_k(x)$

Лемма 2 (Свойства ядра Фейера)**.**

1. $\mathcal{F}_n(-x) = \mathcal{F}(x)$
2. $\mathcal{F}_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}$
3. *всякие следствия отсюда*

Лемма 3 (Римана-Лебега)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$*. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx}\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Билет № 54: Теорема Дини о поточечной сходимости

Теорема 1 (Дини)**.** *Пусть* $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$*,* $x \in \mathbb{R}$*. Допустим,* f *удовлетворяет условию Дини:*

$$\exists\, L \in \mathbb{C}, \delta > 0 \; :: \; u \in \mathcal{L}\big((0;\delta)\big), u(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2L}{t}$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Утверждение 2. *Частные случаи условия Дини:*

1. $\exists$ *конечные* $f(x \pm 0)$*,* $f'(x \pm 0)$*. При этом* $L = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$*.*
2. f *непрерывна в* x*,* $\exists$ *конечные* $f'(x \pm 0)$*. При этом* $L = f(x)$*.*
3. f *дифференцируема в* x*. При этом* $L = f(x)$*.*

Билет № 55: Свойства коэффициентов Фурье

Обозначение. $\widehat{f}(n) := c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x$

Утверждение 1. $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \widehat{f}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Утверждение 2. *Пусть* $\exists\, f' \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f}'(n) = in\widehat{f}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to \infty$

Утверждение 3. *Пусть* $\exists\, f^{(p)} \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \cdot \widehat{f}'(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $n \to \infty$

Утверждение 4. *Пусть* $c_n = O\left(\dfrac{1}{n^{p+2}}\right)$. *Тогда* $\exists\, \varphi \in C_{2\pi}^p \ :: \ \varphi \sim f$.

Билет № 56: Сходимость рядов Фурье..

1° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow \forall\, \Delta \subset [-\pi, \pi] \ :: \ \displaystyle\int_\Delta f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_\Delta e^{inx}\,\mathrm{d}x.$

2° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow c_n$ определены.

3° $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \|S_n - f\| \to 0.$

4° $f \in C^{(p)} \Rightarrow c_n$ быстро убывают.

5° c_n быстро убывают $\Rightarrow f \in C^{(p)}$.

6° теорема Дини 3.54.1

7° теорема Фейера 3.56.1

Теорема 1 (Фейера)**.** *Пусть* $f \in C^{2\pi}$. *Тогда* $\sigma_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$, *где* $\sigma_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k$. *(сходимость по Чезаро).*

Билет № 57: Преобразование Фурье

Определение 1. Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(s) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx}\,\mathrm{d}x$$

1. $|\widehat{f}(s)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$.
2. $\widehat{f}(s) \in C^0$.
3. $\Big(g(x) = x^n f(x) \in \mathcal{L}_1\Big) \Rightarrow \widehat{f}(s) \in C^{(n)}$.

4. $\widehat{f}(s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.

5. $\left(f \in C^{(p)}, f^{(p)} \in \mathcal{L}_1\right) \Rightarrow \widehat{f}(s) = o\left(\frac{1}{|s|^p}\right)$.

6. $f \in \mathcal{L}_1, a \in \mathbb{R}, g(x) = f(x-a) \Rightarrow \widehat{g}(s) = e^{-isa}\,\widehat{f}(s)$

7. $f, g \in \mathcal{L}_1$. Тогда
$$\widehat{f * g}(s) = 2\pi\left(\widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s)\right)$$

8. Интегральная формула Фурье 3.57.1

Теорема 1 (формула восстановления Дини)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{C}$* [1]*. Допустим f удовлетворяет условию Дини в точке x с константой L. Тогда*

$$\check{\widehat{f}}(x) = L$$

Для непрерывных функций

$$f(x) = \mathrm{V.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s)\, e^{isx}\,\mathrm{d}x$$

Билет № 58: Решение уравнения теплопроводности

Само уравнение теплопроводности выглядит так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Но к нему ещё есть пара начальных условий:

$$u(x,0) = f(x)$$
$$f \in \mathcal{L} \qquad f \in C^2_x$$

⟨⚒⟩ : <+решить что-ли..+>
В итоге получится что-то вроде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \cdot f(y)\,\mathrm{d}y$$

[1] Тут по идее все можно в $\mathbb{C}$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — объединение дизъюнктных множеств.

$\mathscr{A}$ — Алгебра множеств

$\overline{A}$ — Замыкание A.

A^c — $X \setminus A$.

Нестандартные обозначения

⟨⚒⟩ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\langle \ddot{\frown} \rangle$ — кривоватая формулировка

⟨`:set aflame`⟩ — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a\,..\,b$ — $[a;b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ — В кванторах, «верно, что»

$\mathscr{A}_\sigma$ — Сигма-алгебра множеств

$f\colon A \leftrightarrow B$ —биекция