Глава 1: Кинематика точки

§ 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть V — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли, $g_{ik} = \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_k}$,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь a^k — коэффициенты разложения по $\boldsymbol{e_k}$ — называются контравариантными координатами.

Пусть V^* — сопряжённое к V, его базисом являются координатные функции $\mathrm{f_k}$ :: $\mathrm{f_k}(\boldsymbol{x}) = x^k$. Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм $V \to V^*$. Нам, правда, потребуется $V^* \to V$.

Введём ещё одну систему *векторов* в V : $\boldsymbol{e^k} = \mathrm{f}_\mathrm{k}^*$, то есть $\mathrm{f_k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^k} \cdot \boldsymbol{x}$. Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в V^*. Линейную независимость легко получить из ЛНЗ $\mathrm{f_k}$, а раз их $\dim V$, то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.
- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

Ещё можно определить $g^{ij} = \boldsymbol{e^i} \cdot \boldsymbol{e^j}$, и перенести это на соответствующие линейные формы. Обобщая дальше, можно вообще сказать, что $g_i^k = \delta_{ij}$. Тогда g будет задавать действие формы на вектор. Вроде физикам это зачем-то надо.

А после тирады выше уже развлекаться с индексами.

Утверждение 1. $\boldsymbol{e^k} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{kj}$

▼
Следует из определения координатной функции, ведь $\boldsymbol{e^k} \cdot \boldsymbol{x} = \mathrm{f_k}(\boldsymbol{x})$
▲

Утверждение 2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a^i b_i$

Утверждение 3. *Пусть* $\boldsymbol{r} = \sum_k \xi^k \boldsymbol{e_k}$ *и* $= \sum_k \xi_k \boldsymbol{e^k}$. *Тогда* $\xi_k = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e_k} = \sum_j \xi^j g_{jk}$

▼
Ну, $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e_k} = \sum\limits_j \xi_j \, \boldsymbol{e^j} \cdot \boldsymbol{e_k} = \sum\limits_j \xi_j \, \delta_{jk} = \xi_k$. Вроде всё.
▲

Аналогичная ситуация с ξ^k.

Утверждение 4. $\xi^k = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e^k} = \sum_j \xi_j g^{jk}$.

Утверждение 5.

$$\boldsymbol{e^k} = \sum_j g^{jk} \boldsymbol{e_j}, \quad \boldsymbol{e_k} = \sum_j g_{jk} \boldsymbol{e^j}$$

▼
Первое домножить на $\boldsymbol{e^i}$, второе на $\boldsymbol{e_i}$.
▲

Утверждение 6. $\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \delta_{\ell k}$

▼

$$\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \sum_i g^{i\ell} \boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_k} = \boldsymbol{e^\ell} \cdot \boldsymbol{e_k} = \delta_{\ell k}$$

▲

Как видно, когда определения безкоординатные, жызнъ прекрасна!.

тут не опечатка, а отсылка к известной картинке ;)

Глава A: Обозначения

f — линейная форма. $\langle$`\mathrm f`$\rangle$

$\mathbf{x}$ — вектор. $\langle$`\mathbf x`$\rangle$