

§1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X .

Е.г. $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — алгебра множеств, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ -алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — σ -алгебра, если

1. \mathcal{A} — алгебра
2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

Определение 5. Пусть \mathcal{O} — все открытые множества в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ -алгебра в \mathbb{R}^n .

Определение 6 (Ячейка в \mathbb{R}^n). Обозначать её будем Δ^n , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$.