< матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :`taxus`

26 марта 2017 г.

Оглавление

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 .. n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

Определение 5. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 6 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{C}ell_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$*

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{C}ell_n)$.

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 2 Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\underbrace{\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)}_{\in \mathcal{A}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

она считает, не считывает :)

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера.

Свойства меmы: Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры)**.** *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

Утверждение 2. *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Утверждение 3 (Усиленная монотонность)**.** *Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ и дизъюнктны. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$*

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры)**.** *Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.*

Тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

▼

Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k: $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу)**.** *Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху). *Пусть* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$

<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>

§ 3 Объём в $\mathbb{R}^n$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — дизъюнктное объединение множеств.

Нестандартные обозначения

⚒ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\ddot{\sim}$ — кривоватая формулировка

`:set aflame` — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a \mathinner{..} b$ — для $a, b \in \mathbb{Z}$ это просто $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.