

§ 1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 1 (σ -алгебра). Алгеброй \mathcal{A} подмножеств множества Ω называется такой набор его подмножеств с заданными операциями объединения, пересечения и дополнения множеств, что

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{X} \in \mathcal{A}$
3. $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X_1 \cup X_2$

Сигма-алгеброй подмножеств называется всё тоже самое, только можно объединять счётное число подмножеств.

Определение 2 (Вероятностное пространство). Рассмотрим упорядоченную тройку (Ω, \mathcal{F}, P) , где

Ω — Множество (элементарных исходов). Чисел, например.

\mathcal{F} — σ — алгебра подмножеств Ω

P — Собственно, вероятность

Определение 3 (Вероятность). $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

1. $\forall A \ F(A) \geq 0$
2. $\forall \{A_i\}: A_i \cap A_j = \emptyset \ P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

Как видно, сильно похоже на площадь. Что впрочем неслучано, вероятность — нормированная мера. Последнее условие как раз и означает нормированность.

Определение 4 (Тривиальные события). \emptyset, Ω .

Утверждение 1. *Свойства вероятности:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

А это очень важное и будет в отдельном утверждении.

Утверждение 2 (Непрерывность меры). Пусть $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, $\bigcup_i A_i = A$. Тогда $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

▼

Пусть

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

.....

Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i; \quad A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

Следовательно,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Всё работает, потому что в σ -алгебре можно объединять счётное число множеств.

▲

§ 2 Формула полной вероятности

ну мы же делим, надо убедиться что не ноль

Определение 1 (Условная вероятность). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. Тогда

$$P(B | A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Утверждение 1. Пусть $\{A_i, H\} \subset \mathcal{F}$ и

1. $P(A_i) > 0$

2. $A_i \cap A_j = \emptyset$

3. $\bigcup_i A_i = \Omega$

(полная группа/система событий). Тогда

$$P(H) = \sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)$$

§ 3 Теорема Байеса

Теорема 1. Пусть A_i — полная система событий, $H \in \mathcal{F}$: $P(H) > 0$. Тогда

$$P(A_k | H) = \frac{P(A_k) \cdot P(H | A_k)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)}$$

§ 4 Независимые события

Определение 1. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Они называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Утверждение 1. События A, B независимы $\Leftrightarrow P(A | B) = P(A) \vee P(B | A) = P(B)$ (в зависимости от того, что определено, вдруг там ноль где-нибудь).

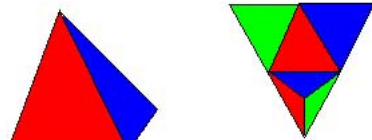
Утверждение 2. Если A, B несовместны, то нетривиальные A, B — зависимы.

Определение 2. Случайные величины $\{X_i\}$ попарно независимы, если $\forall i, j \quad P(X_i \cap X_j) = P(X_i) \cdot P(X_j)$.

Определение 3. Случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^n$ независимы по совокупности, если

$$\forall \{i_k \mid i_k, k \in (\mathbb{Z} \cap [1; n])\} \quad P\left(\bigcap_{i_k} X_{i_k}\right) = \prod_{i_k} P(X_{i_k})$$

Замечание 1. Определения 0.4.3 и 0.4.3 правда разные. Конечно попарная независимость следует из независимости по совокупности, но обратное неверно.



Пример 1. Тетраэдр Бернштейна:
попарные — $1/8$

. Здесь вероятность выпадения всех 3 цветов — $1/4$, а через

§ 5 Случайные величины и их распределения

Определение 1 (Случайная величина). Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Тут нужно бы сказать про измеримость, это потребуется, чтобы говорить о вероятности попадания в интервал на прямой. Так что

$$X: (X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}) \in \mathcal{F},$$

где B — борелевское множество

тут вроде концы могут входить, так что точка — тоже борелевское множество.

Определение 2. Пусть $B \subset \mathbb{R}$, B — промежуток, или дополнение в нему (борелевское множество).

$$P(X \in B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Определение 3. Случайная величина называется дискретной, если

$$\exists (\{a_i\} \sim \mathbb{N}): \left(\sum_i P(X = a_i) = 1 \right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i, \quad p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists (f_X: B \rightarrow \mathbb{R}): \left(P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx \right)$$

Определение 5 (Распределение случайной величины). $F(B) = P(X \in B)$

Пример 1 (К непрерывному распределению). Пусть $X(\omega) = \omega$, $B = (0, 1)$, $\Omega = (-1; 1)$. Выберем $f_X \equiv \frac{1}{2}$.

$$F(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \mid \omega \in (0, 1)\}) = P((0, 1)) = \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$F(B) = \int_{(0,1)} \frac{1}{2} dx = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Это всё верно, потому что на множестве интервалов вероятность — нормированная длина интервала.

Определение 6 (Функция распределения).

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]: F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$$

Утверждение 1. Про $F(x)$ верно следующее:

$$1. F \uparrow \mathbb{R}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

Утверждение 2. Верно и обратное: если существует функция с указанными свойствами, под неё найдётся случайная величина.

Замечание. Если рассматривать обобщённые функции, то любое распределение запишется как

$$\int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

§ 6 Моменты случайных величин

Определение 1. Пусть X — случайная величина,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

Тогда

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} \equiv M X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Утверждение 1. Свойства матожидания:

1. $M < \infty$
2. $M(aX + bY) = a M X + b M Y$
3. $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow M X \geq 0$
4. $\begin{cases} P(X \geq 0) = 1 \\ M X = 0 \end{cases} \Rightarrow P(X = 0) = 1$
5. если X, Y — независимы, то $M(XY) = M X \cdot M Y$

Определение 2. Момент k -ого порядка относительно начала a :

$$\lambda_{k,a} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x) dx$$

(если есть абсолютная сходимость)

Определение 3. Начальный момент: $\nu_k = \lambda_{k,0}$

Определение 4. Центральный момент: $\mu_k = \lambda_{k,\bar{x}}$

Утверждение 2. $\nu_k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i \lambda_{k-i,a}$

Определение 5 (Дисперсия). $D X = M(X - M X)^2$, $\sigma = \sqrt{D X}$ — среднеквадратичное отклонение.

Утверждение 3.

$$D(aX + bY) = a^2 D X + b^2 D Y$$

если X, Y — независимы, то $D(XY) = D X \cdot D Y$

$$D(X + C) = D X$$

§ 7 Характеристическая функция

Определение 1 (Характеристическая функция). $\Phi(t) = M e^{itx}$

Утверждение 1. Свойства характеристической функции:

1. Всегда существует и $|\Phi(t)| \leq 1$.

$$2. f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Phi(t) dt$$

$$3. \Phi_{a+Xb}(t) = e^{ita} \Phi_X(tb)$$

4. Если X, Y — независимы, то $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$

5. Если $M |X|^n < \infty$, то $\Phi^{(k)}(0) = i^k M X^k$

Определение 2 (Сходимость по распределению). $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x)$

Теорема 2 (О непрерывном соответствии). $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{t} \Phi_X(t)$. Здесь на самом деле всё сложно. В разных книжках пишут равномерную сходимость на разных интервалах. У нас вроде было на всей вещественной прямой, но тогда это слишком сильное утверждение. К слову так же в [?] и [?]. А вот в [?] требуют только сходимости в каждом конечном интервале. Можно взять экспоненту, и понять, что эти условия разные.

§ 8 Теорема Муавра-Лапласа