ГЛАВА I

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

$$y' = f(x, y) \qquad (1.1) \qquad f \in C(G), \;\; G \subset \mathbb{R}^2.$$

Df. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$, называется решением дифференциального уравнения (1.1), если для любого $x \in \langle a, b \rangle$ выполняются следующие три условия:*
1) функция $\varphi(x)$ – дифференцируемая,
2) точка $(x, \varphi(x)) \in G$,
3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

3^0. Задача Коши

Оно заключается в том, чтобы для некоторой точки $(x_0, y_0) \in G$ найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на каком-либо промежутке $\langle a, b \rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Df. *Числа x_0, y_0 — начальные данные (н. д.) задачи Коши.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 существует, если существуют такие интервал $(a, b) \ni x_0$ и решение $y = \varphi(x)$, определенное на нем, что $y_0 = \varphi(x_0)$.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 единственно, если для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ поставленной задачи Коши можно указать такой интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $\varphi_1(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi_2(x)$.*

Df. *Любая точка (x_0, y_0) из G, в которой решение задачи Коши единственно, называется точкой единственности.*

Df. *Область $\widetilde{G} \subset G$ называется областью единственности, если каждая точка $\widetilde{G}$ является точкой единственности.*

4^0. **Интегральное уравнение.**

Df. *Уравнение*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\, ds, \tag{1.3}$$

где функция $f(x,y)$ *определена и непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *точка* $(x_0, y_0) \in G$, *а* $x_0, x \in \langle a, b \rangle$, *называется интегральным уравнением на промежутке* $\langle a, b \rangle$.

Теорема (о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями). *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* G. *Для того чтобы определенная на* $\langle a, b \rangle$ *функция* $y = \varphi(x)$ *была решением задачи Коши дифференциального уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения* (1.3) *на* $\langle a, b \rangle$.

5^0. **Отрезок Пеано.**

Итак, для любой точки (x_0, y_0) из области G найдутся константы $a, b > 0$ такие, что замкнутый прямоугольник

$$\overline{R} = \{(x, y) : \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\} \subset G$$

$M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)| > 0$, и введем константу $h = \min\{a, b/M\} > 0$.

Df. *Отрезок* $P_h(x_0, y_0) = \{x : \ |x - x_0| \le h\} = [x_0 - h, x_0 + h]$ *называется отрезком Пеано, построенным для точки* (x_0, y_0).

6^0. **Теоремы о существовании и единственности решения.**

Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Теорема (единственности, слабая). *Пусть в уравнении (1.1) функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *а в области* $\widetilde{G} \subset G$ *существует и непрерывна частная производная* $\partial f(x,y)/\partial y$, *тогда* $\widetilde{G}$ *– это область единственности для уравнения (1.1).*

7^0. Частное, особое и общее решение.

Df. *Решение уравнения (1.1)* $y = \varphi(x)$, *определенное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *называется частным, если каждая его точка является точкой единственности, и называется особым, если каждая его точка является точкой неединственности.*

Df. *Пусть* $\widetilde{G}$ *– это область единственности. Непрерывная функция* $y = \varphi(x, C)$ *называется общим решением дифференциального уравнения (1.1) в области* $A \subset \widetilde{G}$, *если выполняются два условия: 1) для любой точки* $(x_0, y_0) \in A$ *уравнение* $y_0 = \varphi(x_0, C)$ *имеет единственное решение* $C_0 = U(x_0, y_0)$; *2) функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *является решением задачи Коши (1.1) с начальными данными* x_0, y_0.

Теорема (о существовании общего решения). *Для любой точки* (x_0, y_0) *из области единственности* $\widetilde{G}$ *уравнения (1.1) найдется область* $A \subset \widetilde{G}$, *в которой существует общее решение* (см. § 4).

8^0. Продолжимость решений.

Df. *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения (1.1), определенное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *продолжимо вправо за точку* b, *если существуют число* $\widetilde{b} > b$ *и решение* $y = \widetilde{\varphi}(x)$ *уравнения (1.1) на* $\langle a, \widetilde{b}\,\rangle$ *такие, что сужение функции* $\widetilde{\varphi}(x)$ *на* $\langle a, b\,\rangle$ *совпадает с функцией* $\varphi(x)$. *При этом* $y = \widetilde{\varphi}(x)$ *называется продолжением решения* $y = \varphi(x)$ *вправо (за точку* b*).*

Аналогично определяется продолжимость влево за точку a.

Лемма (о продолжении решения за границу отрезка). *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения (1.1), определенное на промежутке* $\langle a, b]$, *продолжимо вправо за точку* b.

Df. *Решение уравнения (1.1) называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо.*

Df. *Область определения полного решения называется максимальным интервалом существования этого решения.*

Утверждение. *Максимальный интервал существования решения – это интервал.*

9^0. Интегральные кривые и поле направлений.

Df. Кривая, являющаяся графиком полного решения, называется интегральной кривой.

Df. *Отрезок, вообще говоря, единичной длины с центром в точке* $(x_0, y_0) \in G$ *и тангенсом угла наклона, равным* $f(x_0, y_0)$, *называется направлением поля или отрезком поля направлений в точке* (x_0, y_0), *индуцированным уравнением (1.1).*

Df. *Область* G, *заполненная отрезками поля направлений, называется полем направлений, индуцированным уравнением (1.1).*

10^0. **Метод изоклин.**

Df. *Изоклиной уравнения (1.1) называется любая кривая, расположенная в области* G, *в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона.*

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

1^0. **Ломаные Эйлера.**

2^0. **Лемма об** ε**-решении.**

Df. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *непрерывная и кусочно гладкая на отрезке* $[a, b]$ *функция* $y = \psi(x)$ *называется* ε*-решением уравнения (1.1) на* $[a, b]$, *если для* $\forall\, x \in [a, b]$ *точка* $(x, \psi(x)) \in G$ *и*

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon. \tag{1.8}$$

Лемма. *Для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$: *1) всякая ломаная Эйлера продолжима на весь отрезок* $P_h(x_0, y_0)$ *и для* $\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ *точка* $(x, \psi(x)) \in \overline{R}$, *2) для* $\forall\, \varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что всякая ломаная Эйлера* $y = \psi(x)$ *с рангом дробления не превосходящим* δ *является* ε*-решением уравнения (1.1) на отрезке Пеано* $P_h(x_0, y_0)$.

3^0. **Лемма Асколи - Арцело.**

Рассмотрим последовательность $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, заданную на $[a, b]$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a, b]$, если $\forall n \geq 1\ \ \exists K_n > 0 : \ \ \forall\, x \in [a, b] \ \Rightarrow\ |h_n(x)| \leq K_n$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена на* $[a, b]$, *если* $\exists K > 0 : \ \ \forall n \geq 1, \ \ \forall\, x \in [a, b] \ \Rightarrow\ |h_n(x)| \leq K$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на $[a,b]$, а значит, согласно теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$, если $\forall\,\varepsilon>0,\ \ \forall\,n\ge 1\ \ \exists\,\delta_n>0:\ \ \forall\,x',x''\in[a,b]:$ $|x'-x''|\le\delta\ \Rightarrow\ |h_n(x')-h_n(x'')|\le\varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равностепенно непрерывна на* $[a,b]$, *если* $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0:\ \ \forall\,n\ge 1,\ \ \forall\,x',x''\in[a,b]:$ $|x'-x''|\le\delta\ \Rightarrow\ |h_n(x')-h_n(x'')|\le\varepsilon$.

Последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\,x\in[a,b]$ $\exists\,N_x>0:\ \ \forall\,i,j\ge N\ \Rightarrow\ |h_i(x)-h_j(x)|\le\varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к некоторой функции* $h(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *если* $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N>0:$ $\forall\,i,j\ge N,\ \ \forall\,x\in[a,b]\ \Rightarrow\ |h_i(x)-h_j(x)|\le\varepsilon$.

Лемма Асколи - Арцело (о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на* $[a,b]$ *последовательности функций* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно извлечь равномерно сходящуюся на* $[a,b]$ *подпоследовательность.*

4^0. **Доказательство теоремы о существовании решения.**

Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0,y_0)\in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0,y_0)$ *существует не менее одного решения задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными* x_0,y_0, *определенного на* $P_h(x_0,y_0)$.

§ 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. **Лемма Гронуолла.**

Лемма. *Пусть функция* $h(x)$ *непрерывна на промежутке* $\langle a,b\rangle$,

$$\exists\,\lambda,\mu>0:\ \forall\,x_0,x\in\langle a,b\rangle\ \Rightarrow\ 0\le h(x)\le\lambda+\mu\left|\int_{x_0}^{x}h(s)\,ds\right|,\quad(1.10)$$

тогда справедливо неравенство

$$h(x)\le\lambda e^{\mu|x-x_0|}.\qquad(1.11)$$

Следствие. *Если в лемме Гронуолла* $\lambda = 0$, *т. е. в неравенстве*
(1.10) $\quad 0 \le h(x) \le \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\,ds \right|$, *то* $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$.

2^0. Условия Липшица.

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *глобально на множестве* $D \subset \mathbb{R}^2$, т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, *если*

$$\exists\, L > 0 : \ \forall\, (x,\widehat{y}),(x,\widetilde{y}) \in D \ \Rightarrow \ |f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y})| \le L|\widetilde{y} - \widehat{y}|. \quad (1.12)$$

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *если для любой точки* $(x_0,y_0) \in G$ *найдется окрестность этой точки* $V(x_0,y_0) \subset G$ *такая, что функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет в ней условию Липшица по* y *глобально,* т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V(x_0,y_0))$.

3^0. Теоремы о единственности решения.

Теорема (единственности). *Пусть в уравнении (1.1) функция* $f(x,y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* G, *тогда* G *– это область единственности*

Теорема (единственности, слабая). *Пусть в уравнении (1.1) функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *а в области* $\widetilde{G} \subset G$ *существует и непрерывна частная производная* $\partial f(x,y)/\partial y$, *тогда* $\widetilde{G}$ *– это область единственности для уравнения (1.1).*

Теорема Осгуда (единственности, сильная). *Пусть в уравнении (1.1) функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$ *и*

$$\forall\, (x,\widehat{y}),(x,\widetilde{y}) \in G : \quad |f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y})| \le h(|\widetilde{y} - \widehat{y}|), \quad (1.13)$$

где функция $h(s)$ *определена, непрерывна и положительна для всякого* $s \in (0,a]$ *и* $\int_{\varepsilon}^{a} h^{-1}(s)\,ds \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$ $\ (a,\varepsilon > 0)$. *Тогда* G *– область единственности для уравнения (1.1)* (без доказательства).

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

1^0. Область существования общего решения.

пусть G область единственности для уравнения (1.1).

$A = \{(x,y) \mid a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$.

Лемма (о поведении решений в области A). *1) Существует число $h > 0$ такое, что для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ можно построить $P_h(x_0, y_0)$ – отрезок Пеано универсальной длины $2h$; 2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1.1) $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 продолжимо на весь отрезок $[a, b]$.*

2^0. **Формула общего решения.**

Для произвольной точки $\zeta \in (a, b)$ положим

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C) \qquad ((\zeta, C) \in \overline{A}). \tag{1.13}$$

Теорема (о существовании общего решения). *Определенная в (1.13) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1.1) в области A, построенной в окрестности произвольной точки из области единственности G.*

Df. *Общее решение $y = \varphi(x, C)$, определенное формулой (1.13), называется общим решением в форме Коши или классическим общим решением.*