

< матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин

Записал :taхus

2 июня 2017 г.

Оглавление

1	Теория меры и интегралы по мере	3
§ 1	Системы множеств	3
§ 2	Борелевская сигма-алгебра	4
§ 3	Мера	5
§ 4	Свойства меры	5
§ 5	Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега	7
§ 6	Измеримые функции	8
§ 7	Интеграл по мере	9
§ 8	Теорема Беппо Лёви	10
§ 9	Свойства интеграла от суммируемых функций	10
§ 10	Счётная аддитивность интеграла	11
§ 11	Абсолютная непрерывность интеграла	11
§ 12	Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега	11
§ 13	Сравнение подходов Римана и Лебега	11
§ 14	Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега	12
§ 15	Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью	12
§ 16	Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению	13
§ 17	Интеграл Эйлера-Пуассона	14
§ 18	Вероятностный смысл меры	14
§ 19	Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери	14
§ 20	Сведение кратного интеграла к повторному	16
§ 21	Мера Лебега и аффинные преобразования	16
§ 22	Мера образа при гладком отображении	16
§ 23	Гладкая замена переменной в интеграле	17
§ 24	Предельный переход под знаком интеграла	17
§ 25	Теорема Лебега об ограниченной сходимости	18
§ 26	Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки	19
§ 27	Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle \otimes \rangle$	20
§ 28	Γ -функция Эйлера	20

§ 29	В-функция	21
§ 30	Объём n -мерного шара	21
A	Обозначения	22

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X .

Е.г. $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — алгебра множеств, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ -алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — σ -алгебра, если

1. \mathcal{A} — алгебра
2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

§ 2 Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть \mathcal{O} — все открытые множества в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ -алгебра в \mathbb{R}^n .

Определение 2 (Ячейка в \mathbb{R}^n). Обозначать её будем Δ^n , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$.

Пример 1. Все множества ниже — борелевские.

⟨1⟩ \mathcal{O} .

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \bar{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 3 Мера

Определение 1. Пусть задано $X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in \mathcal{A}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ -алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ -измеримыми.

Пример 1. $a \in X, \mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ -мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in X, m_k \geq 0, \mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

она считает, не считывает 😊

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера.

§ 4 Свойства меры

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). Пусть $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$.
Тогда $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Утверждение 2. Пусть $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(B) < +\infty$.
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность). Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}, A_{1..n} \subset B$ и дизъюнкты.

Тогда $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu(B)$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры). Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$.

Тогда $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$.



Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k : $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$



Опять-таки никто не сказал, что \mathcal{A} — σ -алгебра.

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу). Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>

Определение 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) . Тогда μ — полная, если

$$\forall \in \mathcal{A}: \mu A = 0 \quad \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} :: \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на \mathcal{A} называется σ -конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty :: \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X , $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0; +\infty]$, $\mu_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1 .

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора). Пусть μ — сигма-конечная мера на \mathcal{A} . Тогда

1. Существуют её полные сигма-конечные продолжения
2. Среди них есть наименьшее: $\bar{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.

<+идея доказательства+> Пока надо запомнить, что стандартное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

§ 5 Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v \Delta \stackrel{(\in \mathbb{R}^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{Cell}_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j . Тогда $vA := \sum_{j=1}^q v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. v — конечно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^p A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^p vA_k$$

Теорема 2. v — счётно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

Определение 2 (Мера Лебега). $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

$$(1) \triangleright \lambda\{x\} = 0$$

$$(2) \triangleright \lambda(\{x_k\}_k) = 0$$

$$(3) \triangleright \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$$

$$(4) \triangleright L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$$

А это уже целая теорема.

Теорема 3 (Регулярность меры Лебега). Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} :: F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

<+Пример неизмеримого множества на окружности+>

§ 6 Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) . Пусть ещё $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно \mathcal{A} , если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. Пусть f измеримо относительно \mathcal{A} . Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \equiv X[f \leq a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \equiv X[f \geq a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то f измерима.

Теорема 2. Пусть f_1, \dots, f_n измеримы относительно \mathcal{A} и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. Пусть f_1, f_2, \dots измеримы относительно \mathcal{A} . Тогда измеримы $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$. Последний, правда, может не существовать.

□ Следует из непрерывности меры. ■

Определение 2. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества).

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. f — простая $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}$

Теорема 5. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, $f \geq 0$. Тогда

$$\exists (\varphi_n): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots :: \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

§ 7 Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) , f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu E_k$$

[2] $f \geq 0$.

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание 1. $\int_A f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A)$

Замечание 2. Далее измеримость и неотрицательность или суммируемость f будет периодически называться «обычными» условиями.

Утверждение 1. $\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$.

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$\boxed{A_1}$ $0 \leq f \leq g$. Тогда $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

$\boxed{A_2}$ $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geq 0$, измерима. Тогда $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

$\boxed{A_3}$ см теорему 1.8.1.

$$\boxed{A_4} \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$$\boxed{A_5} \quad \int_X (\lambda g) d\mu = \lambda \int_X g d\mu$$

§ 8 Теорема Беппо Лёви

Теорема 1. Пусть (f_n) — измеримы на X , $0 \leq f_1 \leq \dots$, $f = \lim_n f_n$. Тогда

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int_X f d\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

$$\boxed{B_1} \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_2} \quad \int_X (f \pm g) d\mu = \int_X f d\mu \pm \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_3} \quad \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

$$\boxed{B_4} \quad |f| \leq g \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_5} \quad \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

$$\boxed{B_6} \quad f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

$$\boxed{B_7} \quad |f| \leq M \leq +\infty \Rightarrow \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq M\mu X$$

§ 10 Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) , f — измерима и $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}$. Пусть к тому же

$$A, A_1, \dots \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :: \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X: \mu A < \delta :: \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon$$

§ 12 Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

Теорема 1. Пусть $f \in C([a; b])$, λ — мера Лебега на $X = [a; b]$. Тогда

$$f \in \mathcal{L}, \quad \int_{[a; b]} f \, d\mu = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

где F — первообразная f .

§ 13 Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

Определение 1 (Интеграл Римана). Пусть $f \in C([a; b])$ $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$

- $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i -го отрезка
- $r = r(\tau) = \max_i \{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{r(\tau) \rightarrow 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

Определение 2 (Интеграл Лебега). см. 1.7.1. В качестве множества X понятное дело, отрезок $[a; b]$.

Пример 1. Пусть $X = [0; 1]$. Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

<+картинка с обоими интегралами+>

§ 14 Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

Теорема 1. Пусть $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}([a; b], \lambda)$. Тогда $\int_{[a; b)} f \, d\lambda = \int_a^{\rightarrow b} f$.

□ (✂) Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

§ 15 Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

Теорема 1. Пусть $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$, $\{a_k\} \in X$ и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ или $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ (✂) Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

Пример 1. Пусть $\mu A = \#A$. Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}^2} f(m, n) d\mu$$

здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

Причем условия суммируемости ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[\begin{array}{l} \forall m, n \in \mathbb{N} :: a_{m,n} \geq 0 \\ \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{array} \right.$$

тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имела в виду

Определение 1. Пусть задана пара (X, μ) , $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, $\rho \geq 0$. Тогда

- $\nu(E) := \int_E \rho d\mu$ — мера, задаваемая плотностью ρ
- ρ — плотность меры ν относительно меры μ .

Замечание. Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

Теорема 2. Пусть выполнены «обычные» условия на f . Тогда $\int_X f d\nu = \int_X f \rho d\mu$.

§ 16 Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

А можно и без. Тогда $\nu([a; b)) = F(b - 0) - F(a - 0)$, см. ??

Определение 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, $F \nearrow$, $F(x) = F(x - 0)$ (непрерывна слева).. Рассмотрим порождённую полуинтервалами $[a; b) \subset I$ σ -алгебру. Введём «объём» $\nu_F: \nu([a; b)) = F(b) - F(a)$.

Тогда мера Лебега-Стилтьеса μ_F — стандартное продолжение ν_F на некоторую σ -алгебру \mathcal{M}_F .

Замечание 1. Здесь надо доказывать счётную аддитивность, а то как продолжать ν , если она — не мера?

Свойства меры Лебега-Стилтьеса

Утверждение 1. Пусть $\Delta = [a; b]$. Тогда $\mu_F \Delta = F(b + 0) - F(a)$.

Утверждение 2. Пусть $\Delta = \{a\}$. Тогда $\mu_F \Delta = F(a + 0) - F(a)$.

Утверждение 3. Пусть $\Delta = (a; b)$. Тогда $\mu_F \Delta = F(b) - F(a + 0)$.

Лемма 4. Пусть $F \in C(I)$, $\Delta \subset I$. Тогда $\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F'(t) d\lambda$.

Теорема 5. Пусть $F \nearrow$, кусочно-гладка на $I \subset \mathbb{R}$, а для f выполнены обычные условия ($X = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_F$). Промежутки гладкости F обозначим за (c_k, c_{k+1}) . Тогда

$$\int_X f d\mu_F = \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} f F' d\lambda + \sum_k f(c_k) \underbrace{\Delta_{c_k} F}_{\text{скачок в } c_k}$$

Определение 2 (Образ меры). Пусть (X, \mathcal{A}, μ) — пространство с мерой, $f: X \rightarrow Y$. Превратим и Y в пространство с мерой.

$$1. \mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}.$$

$$2. \mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}.$$

Теорема 6. Пусть для $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены обычные условия ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\mu = \nu$). Тогда $\int_Y g d\nu = \int_X (g \circ f) d\mu$.

Определение 3 (Функция распределения). Пусть задано (X, μ) , $\mu X < +\infty$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $F(t) := \mu X[f < t]$. Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

Теорема 7. Пусть задано (X, μ) , $\mu X < +\infty$, выполнены обычные условия для f . Тогда $\int_X f d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t d\mu_F$.

§ 17 Интеграл Эйлера-Пуассона

Утверждение 1. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 = \pi$

§ 18 Вероятностный смысл меры

<+Табличка с соответствием+>

§ 19 Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

Определение 1. Пусть задано (X, μ) , $P(x)$ — предикат. Говорят, что $P(x) = 1$ почти везде (п.в.), если $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$.

Определение 2. $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ п.в. .

Лемма 1 (Беппо-Леви для рядов). Пусть заданы (X, μ) , $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, u_n измеримы, $u_n \geq 0$. Тогда

$$a) \int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu.$$

b) Если эти числа конечны, то ряд $\sum_n u_n$ с.х. п.в.

Лемма 2 (Беппо-Леви «вверх ногами»). Пусть задано (X, μ) , (f_n) , измеримы, $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$. Пусть ещё $f_1 \in \mathcal{L}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

<+Здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$.

▷ $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$ — «срез»

▷ $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \emptyset\}$ — «проекция»

<+картинка для \mathbb{R}^2 +>

Теорема 3. Пусть $E \in \mathcal{M}_{m+n}$, $E_x \in \mathcal{M}_n$ п.в. x , $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$ измерима относительно \mathcal{M}_m . Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m$$

<+много букв+>

Определение 4 (График). $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$.

Определение 5 (Подграфик). $\Gamma_-^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}$.

Определение 6 (Надграфик). $\Gamma_+^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(x)\}$.

Теорема 4 (Геометрический смысл интеграла). Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, ≥ 0 . Тогда

1. Γ_-^f измеримо.

2. $\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$ измеримо.

§ 20 Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через dx (ну или dy), размерность определяется из размерности x . Еще обозначим $d(x, y)$ через $dx dy$.

Теорема 1 (Тонелли). Пусть $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, ≥ 0 , $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

Теорема 2 (Фубини). Пусть $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

§ 21 Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

○ Сдвиг: $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Tx = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.

○ Поворот с растяжением: $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, L — линейный император.

Утверждение 1. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 3. Пусть $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, линейно. Тогда

$$\exists C \geq 0 \forall E \in \mathcal{M} :: \lambda L(E) = C \lambda E$$

Теорема 4. C из прошлой теоремы равно $|\det[L]|$.

<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>

§ 22 Мера образа при гладком отображении

Обозначение. $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

Теорема 1. Пусть $E \in \mathcal{M}$, $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, гладкая биекция. Тогда $F(E) \in \mathcal{M}$ и $\lambda F(E) = \int_E |\det F'(x)| dx$.

§ 23 Гладкая замена переменной в интеграле

Теорема 1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, гладкая биекция. Пусть к тому же $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ с обычными условиями. Тогда

$$\int_E f(y) dy = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)| dx$$

Пример 1 (Полярные координаты). $\langle \otimes \rangle |J| = r$

Пример 2 (Сферические координаты). $\langle \otimes \rangle |J| = r^2 \cos \psi$

§ 24 Предельный переход под знаком интеграла

Определение 1 (Всякие сходимости). Пусть $(f_n): X \rightarrow \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, μ — мера на X .

$$\begin{aligned} f_n \rightarrow f &:= \forall x \in X :: f_n(x) \rightarrow f(x) \\ f_n \xrightarrow{X} f &:= \sup_X |f_n - f| \rightarrow 0 \\ f_n \rightarrow f \text{ п.в.} &:= \exists N \subset X: \mu(N) = 0 :: \forall x \in X \setminus N :: f_n(x) \rightarrow f(x). \\ f_n \xrightarrow{\mu} f &:= \forall \sigma > 0 :: \mu X[|f_n - f| \geq \sigma] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Замечание 1. $f \xrightarrow{X} f \Rightarrow f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ п.в.}$.

Замечание 2. Пусть $\mu X < \infty$, тогда $f_n \rightarrow f \text{ п.в.} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Замечание 3 (Теорема Рисса). $f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ п.в.} \Rightarrow \exists (n_k) :: f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$.

Теорема 1. $f_n \xrightarrow{X} f, \mu X < \infty \Rightarrow \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f$

Теорема 2. см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.

Теорема 3 (Фату). Пусть заданы (X, μ) , $f_n \geq 0$, измеримы. Тогда

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$

§ 25 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 1. Пусть снова заданы (X, μ) , (f_n) измерима, $f_n \rightarrow f$ п.в. . К тому же

$$\exists \varphi \in \mathcal{L} :: \forall n :: |f_n| \leq |\varphi|$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Обозначение. (\mathcal{L}) — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 1. Пусть $f: T \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} f$ п.в. , и

$$\exists V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} :: \forall t \in \overset{\circ}{V} \cap T :: |f_t| \leq |\varphi|$$

Тогда

$$\int_X f_t d\mu \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \int_X f d\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$ — условия локальной теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 2. Непрерывность интеграла по параметру при выполнении $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$ и непрерывности f_t .

§* Интеграл по мере с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию В таких случаях параметр будет записан, как индекс

Определение 1 (Собственный интеграл с параметром). Пусть $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $f_t(x) \in \mathcal{L}([a, b], \mu) \forall t \in T$. Тогда,

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от t , как видно $\mathcal{D}_I = T$.

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. `<:set aflame>`У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$. Так что по сути они — просто интегралы по мере.

Здесь тоже есть непрерывность, дифференцируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально следует из [1.25.1](#) и [1.20.2](#).

§ 26 Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

Определение 1 (Несобственный интеграл с параметром). Пусть $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}([a, B], \mu) \forall B < b$. Тогда,

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx := \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f(x, t) dx = \lim_{B \rightarrow b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что $\forall t \in T$ интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

Никто же не любит ε - δ -определения?

Определение 2. Говорят, что $I^B(t) \xrightarrow{T} I(t)$ (сходится равномерно относительно $t, t \in T$), если

$$\sup_{t \in T} \left| \int_B^{\rightarrow b} f(x, t) dx \right| \xrightarrow{B \rightarrow b} 0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла $\forall t \in T$.

Теорема 1 (Признак Больцано-Коши).

$$I^B(t) \xrightarrow{T} I(t) \Leftrightarrow \sup_T \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, t) dx \right| \xrightarrow{B_1, B_2 \rightarrow b} 0$$

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса). Пусть $\exists \varphi \in \mathcal{L}([a; b)) :: |f(x, t)| \leq \varphi(x) \forall t$. Тогда $I^B(t) \xrightarrow{T} I(T)$.

Теорема 3 (Признак Дирихле). Пусть $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) \cdot g(x, t) dx$ и

$$a) f(x, t) \xrightarrow{T} 0, f(x, t) \searrow^x (x \rightarrow b-0)$$

$$b) G(x, t) = \int_a^x g(\xi, t) d\xi$$

$$\exists M: \forall x \in [a; b), t \in T :: |G(x, t)| \leq M$$

Тогда $I^B(t) \xrightarrow{T} I(T)$.

Теорема 4 (Признак Абеля). Пусть $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) \cdot g(x, t) dx$ и

$$a) \exists M: \forall t \in T :: f(x, t) \leq M, f(x, t) \searrow^x.$$

$$b) \int_a^B g(x, t) dx \xrightarrow[B \rightarrow b]{T} \int_a^{\rightarrow b} g(x, t) dx$$

$$\text{Тогда } I^B(t) \xrightarrow{T} I(T).$$

§ 27 Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle \otimes \rangle$

Это не очень докажет-ся без конечности меры $V(t_0)$, а то интеграл может сходиться, а функция не быть суммируемой

Теорема 1. Пусть $f(x, t) \rightarrow f(x, t_0)$ для п.в. $x \in [a; b]$ и $I^B(t) \xrightarrow{V(t_0)} I(t)$. Тогда $I \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} I(t_0)$.

Теорема 2. Пусть для п.в. $x \exists f'_t(x, t)$, непрерывна на $[a; b] \times \underbrace{[c; d]}_T$. Допустим,

$$a) I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx \text{ сходится } \forall t \in T$$

$$b) \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t) dx \text{ равномерно сходится относительно } t \in T$$

$$\text{Тогда } \exists I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t_0) dx$$

Замечание. Здесь нужна сходимости I , чтобы хоть где-то были конечные значения $I(t)$, нам их разность считать.

Теорема 3. Пусть для п.в. $x \exists f(x, t)$, непрерывна на $[a; b] \times \underbrace{[c; d]}_T$. Допустим, $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx$ равномерно сходится

относительно $t \in T$

Тогда

$$\int_c^d I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_c^d f(x, t) dt$$

§ 28 Г-функция Эйлера

$$\text{Определение 1. } \Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

Свойства

1° Определена для всех $t > 0$.

$$2^\circ \Gamma(1) = 1$$

$$3^\circ \forall t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

$$4^\circ n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

5° Γ -выпукла

$$6^\circ \Gamma \sim \frac{1}{t} \text{ при } t \rightarrow 0$$

$$7^\circ \Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi} \sqrt{t} t^t e^{-t} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

$$8^\circ \Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}. \text{ (формула отражения)}$$

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при $\operatorname{Im} z > 0$.

§ 29 В-функция

Определение 1. $B(y, z) = \int_0^1 x^{y-1} (1-x)^{z-1} dx.$

Свойства

$$1^\circ B(y, z) = B(z, y).$$

$$2^\circ B(y, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}.$$

§ 30 Объём n -мерного шара

Теорема 1. Пусть $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ – n -мерный шар. Тогда

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$$

Глава А: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a .

$\bigsqcup_k A_k$ — объединение дизъюнктивных множеств.

\mathcal{A} Алгебра множеств

Нестандартные обозначения

$\langle \text{✂} \rangle$ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\langle \smile \rangle$ — кривоватая формулировка

$\langle \text{:set aflame} \rangle$ — набирающему зело не нравится билет

$\langle \text{+что-то+} \rangle$ — тут будет что-то, но попозже

$a .. b$ — $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

\equiv — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ В кванторах, «верно, что»

\mathcal{A}_σ Сигма-алгебра множеств