ГЛАВА II

Дифференциальные уравнения I порядка в симметричной форме

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ, ЕГО СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

1^0. Объект изучения.

Уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.1}$$

где вещественные функции M и N определены и непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, т. е. $M, N \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

2^0. Решение уравнения в симметричной форме.

Df. *Точка* $(x_0, y_0) \in D$ *называется особой для уравнения (2.1), если* $M(x_0,y_0)$, $N(x_0,y_0) = 0$. *Точка, которая не является особой, называется неособой или обыкновенной.*

Df. *Решением дифференциального уравнения (2.1) на промежутке* $\langle a, b\rangle$ *называется функция* $y = \varphi(x)$ *или* $x = \psi(y)$, *определенная и непрерывная на* $\langle a, b\rangle$ *и удовлетворяющая трем условиям:*

1) функция $\varphi(x)$ *или* $\psi(y)$ *дифференцируема на* $\langle a, b\rangle$,

2) точка $(x, \varphi(x)) \in D$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$ *или*
точка $(\psi(y), y) \in D$ *для* $\forall\, y \in \langle a, b\rangle$,

3_x) $M(x,\varphi(x)) + N(x,\varphi(x))\varphi'(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$ *или*

3_y) $M(\psi(y),y)\psi'(y) + N(\psi(y),y) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0.$

Df. *Особым граничным решением уравнения (2.1) на промежутке* $\langle a, b\rangle$ *называется любое решение* $y = \varphi(x)$ *или* $x = \psi(y)$, *определенное на* $\langle a, b\rangle$, *у которого* $(x, \varphi(x)) \in H$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$ *или* $(\psi(y), y) \in H$ *для* $\forall\, y \in \langle a, b\rangle$.

3^0. Существование и единственность решения.

Теорема (о существовании решения). *Пусть в уравнении (2.1) функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны в области $G \subset D \backslash H$, тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y_0)$, построенного для первого или второго уравнения (2.2) в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$, существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_0, y_0, определенное на $P_h(x_0, y_0)$.*

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении (2.1) $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны в области $G \subset D \backslash H$, а в области $\widetilde{G} \subset G$ выполняется хотя бы одно из условий:*

a) $N(x,y) \neq 0$, существуют и непрерывны частные производные $\partial M(x,y)/\partial y$, $\partial N(x,y)/\partial y$;

b) $M(x,y) \neq 0$, существуют и непрерывны частные производные $\partial M(x,y)/\partial x$, $\partial N(x,y)/\partial x$.

Тогда $\widetilde{G}$ — это область единственности для уравнения (2.1).

§ 2. ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЕ

1^0. Определение интеграла.

Df. Непрерывная в области G пространства $\mathbb{R}^2$ функция $U(x,y)$ называется допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ существует такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ (или $x = \eta(y)$), определенная на интервале (α, β), содержащем точку x_0 (или y_0), что:

1) $y_0 = \xi(x_0)$ (или $x_0 = \eta(y_0)$);

2) $(x, \xi(x)) \in G$ для $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$ (или $(\eta(y), y) \in G$ для $\forall\, y \in (\alpha, \beta)$);

3) $y = \xi(x)$ (или $x = \eta(y)$) является единственным решением уравнения

$$U(x,y) = U(x_0, y_0), \tag{2.3}$$

т. е. $U(x, \xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$ или $U(\eta(y), y) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

Df. Допустимая функция $U(x,y)$ называется интегралом дифференциального уравнения (2.1) в области единственности G, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_0, y_0, т. е. удовлетворяет тождеству $3_x)$ или $3_y)$ из определения решения.

2^0. Характеристическое свойства интеграла.

Теорема (о характеристическом свойстве интеграла). *Для того чтобы допустимая функция $U(x,y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (2.1) в области единственности G, необходимо и достаточно, чтобы $U(x,y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (2.1), т. е. чтобы $U(x,\varphi(x)) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y=\varphi(x)$, определенного на $\langle a,b\,\rangle$, и $U(\psi(y),y) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x=\psi(y)$, определенного там же.*

3^0. Характеристическое свойство гладкого интеграла.

Df. *Непрерывную в области G функцию $U(x,y)$ будем называть гладкой и использовать запись: $U(x,y)\in C^1(G)$, если в G существуют и непрерывны частные производные U по x и по y.*

Будем для краткости обозначать $\partial U/\partial x = U'_x$ и $\partial U/\partial y = U'_y$.

Df. *Функция $U(x,y)$ называется гладкой допустимой в области G пространства $\mathbb{R}^2$, если $(U'_x)^2+(U'_y)^2>0$ для $\forall\,(x,y)\in G$.*

Df. *Интеграл $U(x,y)$ уравнения (2.1) называется гладким, если U гладкая допустимая функция.*

Теорема (о характеристическом свойстве гладкого интеграла). *Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x,y)$ была гладким интегралом уравнения (2.1) в области единственности G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$N(x,y)\,U'_x(x,y) - M(x,y)\,U'_y(x,y) \overset{G}{\equiv} 0. \tag{2.5}$$

Следствие. *Гладкая допустимая функция $U(x,y)$ является гладким интегралом классического уравнения (1.1) $y'=f(x,y)$ в области единственности G тогда и только тогда, когда выполняется тождество $U'_x(x,y)+f(x,y)U'_y(x,y)\overset{G}{\equiv}0$.*

4^0. Существование интеграла, связь между интегралами.

Теорема (о существовании непрерывного интеграла). *Для любой точки (x_0,y_0) из области единственности G существует окрестность $A\subset G$, в которой дифференциальное уравнение (2.1) имеет интеграл $U(x,y)$.*

Df. *Пусть* $U(x, y)$ *интеграл уравнения (2.1) в области единственности* G. *Тогда равенство* $U(x, y) = C$ *называется общим интегралом дифференциального уравнения (2.1).*

Теорема (о существовании гладкого интеграла). *Пусть в уравнении (2.1) функции* $M(x, y), N(x, y)$ *являются гладкими в некоторой области* $G \subset D/H$, *т. е. в* G *определены и непрерывны частные производные* $M'_x(x, y), M'_y(x, y), N'_x(x, y), N'_y(x, y)$. *Тогда для любой точки* (x_0, y_0) *из* G *существует окрестность* $A \subset G$, *в которой уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл* $U(x, y)$.

Теорема (о связи между интегралами). *Пусть* $U(x, y)$ *является интегралом уравнения (2.1) в некоторой области* A, *тогда:*

1) Если $U_1(x, y)$ *— еще один интеграл уравнения (2.1) в области* A, *то существует функция* $\Phi(z)$ *такая, что*

$$U_1(x, y) \overset{A}{\equiv} \Phi(U(x, y)); \tag{2.7}$$

2. Если функция $\Phi(U(x, y))$ *— допустимая, то функция* $U_1(x, y)$, *определяемая формулой (2.7), есть интеграл уравнения (2.1) в* A.

§ 3. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1^0. Уравнение в полных дифференциалах.

Df. *Уравнение (2.1) называется уравнением в полных дифференциалах в области единственности* G, *если существует такая гладкая функция* $U(x, y)$, *что для* $\forall\,(x, y) \in G$

$$U'_x(x, y) = M(x, y), \quad U'_y(x, y) = N(x, y). \tag{2.8}$$

Теорема (об интеграле уравнения в полных дифференциалах). *Пусть уравнение (2.1) является уравнением в полных дифференциалах в области единственности* G *и* $U(x, y)$ *— его дифференциал. Тогда* U *— это гладкий интеграл в* G.

Теорема (о существовании дифференциала и его нахождении). *Пусть в односвязной области G существуют и непрерывны M'_y и N'_x. Для того чтобы уравнение (2.1) было уравнением в полных дифференциалах в G, необходимо и достаточно, чтобы*

$$M'_y(x,y) - N'_x(x,y) \overset{G}{\equiv} 0. \tag{2.9}$$

В этом случае дифференциал

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \tag{2.10}$$

где (x_0,y_0) — любая фиксированная точка из G, а $\int$ — это криволинейный интеграл II рода по любому пути, соединяющему в G точку (x_0,y_0) с точкой (x,y).

2^0. Интегрирующий множитель.

Df. *Функция $\mu(x,y)$, определенная, непрерывная и не обращающаяся в нуль в области G, называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (2.1), если уравнение*

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.11}$$

является в G уравнением в полных дифференциалах.

Теорема (о существовании интегрирующего множителя). *Если в области единственности $\widetilde{G} \subset G$ уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл, тогда в $\widetilde{G}$ существует интегрирующий множитель.*

Теорема (о нахождении интегрирующего множителя). *Пусть нашлась такая функция $\omega(x,y) \in C^1(G)$, что непрерывна функция*

$$\psi(\omega) = \frac{M'_y - N'_x}{\omega'_x N - \omega'_y M}, \tag{2.13}$$

тогда дифференциальное уравнение (2.1) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \exp\{\int \psi(\omega)\,d\omega\}$.

3^0. Уравнения с разделяющимися переменными.

Df. *Уравнение (2.1) вида*

$$g_1(x)h_2(y)dx + g_2(x)h_1(y)dy = 0, \tag{2.14}$$

где $g_i(x) \in C((a,b))$, $h_i(y) \in C((c,d))$ $(i = 1, 2)$, *называется уравнением с разделяющимися переменными в симметричной форме.*

4^0. Линейные уравнения.

Df. *Классическое уравнение (1.1) вида*

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (p(x), q(x) \in C((a,b))), \tag{2.16}$$

называется линейным дифференциальным уравнением I порядка.