1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi Q$.
2. Закон Фарадея: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$,
   $\Phi = \int \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$
4. $\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$
5. Закон Ампера: $\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
6. Уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho\\
\operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

2 В среде

1. Поляризация и намагниченность
   $\boldsymbol{P} \;::\; \boldsymbol{j}_{\mathrm{pol}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},\ \rho_{\mathrm{pol}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$,
   $\boldsymbol{M} \;::\; \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
   $\{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{int}} = \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{pol}} + \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{m}}$
2. В сильнопеременных
   $\rho_{\mathrm{int}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$
   $\boldsymbol{j}_{\mathrm{int}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
3. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$
4. Уравнения Максвелла в среде:
   $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ex}$
   $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{j}_{ex} + \boldsymbol{j}_c\right)$
5. Материальные уравнения (простейшие)
   $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}_c = \sigma\boldsymbol{E}$
6. Дисперсия, варианты

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$$

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi}\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\sigma E^2 - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_{ex}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

1. Вид потенциала: $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$
2. Калибровочная инвариантность: $\begin{cases}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\chi\\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\end{cases}$
3. Калибровка Лоренца: $\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$[1]
4. Уравнения Максвелла примут вид:
   $\Box\,\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\,\rho$,
   $\Box\,\boldsymbol{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\,\boldsymbol{j}$, где $\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla, v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

5 Волновые уравнения

$$\Box\,\boldsymbol{E} = 0,\ \Box\,\boldsymbol{B} = 0$$

$\Box\,\boldsymbol{A} = 0,\ \Box\,\varphi = 0 \qquad (\Box\,\chi = 0)$

Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ[2]

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:
   $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
   $u = f(x - vt) + g(x + vt)$
2. Плоская волна: $A = A(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$[3]
3. Условие поперечности: $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{c}{v}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$
4. $\boldsymbol{S} = v\,w\,\boldsymbol{n}$.
5. Уравнение сферической волны: $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$
6. Его решение: $u(r,t) = \frac{1}{r}\big(f(r - vt) + g(r + vt)\big)$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2}u = 0,\ \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\,\boldsymbol{n} \ \Rightarrow\ u = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{E}_0\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\right)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. $\alpha, \boldsymbol{b}$
   $\alpha \;::\; \boldsymbol{E}_0^2 = |E_0^2|\,e^{-2i\alpha}$
   $\boldsymbol{b} \;::\; \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}\,e^{i\alpha},\ \boldsymbol{b}^2 = |E_0^2|,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\,\boldsymbol{b}_2$
2. $b^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{b}_2$
3. $\frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_2)^2}{b_2^2} = 1,\ (\boldsymbol{E}\in\mathbb{R}^3)$.

9 Почти монохроматические волны

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t)\,e^{-i\omega t},\ \langle ? \rangle$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$$\rho = \begin{pmatrix}\overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*}\\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}I + Q & U - iV\\ U + iV & I - Q\end{pmatrix}$$

11 Частные случаи поляризации

1. $Q = U = V = 0$ — белый свет
2. $Q = U = 0$ — круговая поляризация
3. $V = 0$ — линейная поляризация

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi}$$

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\psi)^2 = 0$$

$\psi = -\omega t + \psi_1,\ (\nabla\psi_1)^2 = n^2(\boldsymbol{r})$

13 Гадость в неоднородной среде

14 E, H-волны

$E''(z) + f(z)\,E(z) = 0,\ f(z) = k^2 - \varkappa^2$

Заметки

1 при этом подходят все $\chi\ ::\ \Box\chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.