§ 1 Определения

Определение 1. Пусть K — поле. Рассмотрим множество V с двумя операциями

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$

Тогда V — линейное пространство над K, если $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \alpha_i \in K$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\exists\, (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x}$
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
8. $(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1(\alpha_2\mathbf{x})$

Определение 2. Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда U — подпространство V.

Определение 3. Пусть V — линейное пространства над K, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Лемма 1. *Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда если U замкнуто относительно $+, \cdot$ из V, то U — подпространство V.*

▼

Формулировка леммы аналогична тому, что всякая линейная комбинация элементов U лежит в нём же. Нужная дистрибутивность, ассоциативность и т.д. унаследуется от соответствующих операций в надпространстве, так как их свойства заданы на всём множестве V, а значит и на подмножестве U. Однако в некоторых свойствах требовалось существование в множестве чего-нибудь. Покажем, что все эти требования равносильны существованию линейной комбинации.

3. $\exists\, \mathbf{0} \in U \Leftarrow \exists\, 0 \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

4. $\exists -\mathbf{x} \in U \Leftarrow \exists\,(-1)\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{x}\in U$

▲

Определение 4. Пусть V — линейное пространства над K, $M \subset V$

$$\langle M\rangle = \left\{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n \,\middle|\, \begin{cases} \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K \\ \mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n \in M \end{cases}\right\}$$

$\langle M\rangle$ — линейная оболочка M.

Лемма 2. *Верны утверждения:*

1. *$\langle M\rangle$ — подпространство V*
2. *$\langle M\rangle = \bigcap\limits_i W_i$, $W_i \supset M$, W_i — подпространство V*

▼
Доказательства очень похожи на соответствующие в теории групп.
▲

Определение 5. Пусть V — линейное пространство. Тогда $M \subset V$ — порождающая система, если $\langle M\rangle = V$

§ 2 Линейная независимость системы векторов

Определение 1. Пусть $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$. Тогда если

$$\alpha_1\,\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\,\mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow \forall\, i\ \alpha_i = 0$$

то система векторов $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n$ линейно независима. В противном случае система линейно зависима.

Свойства

1. Подсистема линейно независимой системы линейно независима.
2. В ЛНЗ системе ни один вектор не выражается через другие

§ 3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис

Лемма 1 (Линейная зависимость линейных комбинаций)**.** *Пусть* $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *— ЛНЗ, а* $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ *— линейные комбинации векторов из* M*. Тогда если* $m > n$*, то* U *— линейно зависимы.*

▼

Там получается ОСЛУ, в которой уравнений больше, чем неизвестных. Решение найдётся.

▲

Определение 1. Базис — линейно независимая (0.2.1), порождающая (0.1.5) система векторов.

Определение 2. Размерность (dim) линейного пространства — число векторов в базисе.

Лемма 2 (Корректность определения размерности)**.** *Пусть* $\{u_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}, \{v_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *— базисы* V*. Тогда* $m = n$*.*

▼

Иначе одна система выражается через другую и по 0.3.1 она ЛЗ, что странно.

▲

§ 4 Базис в конечномерных пространствах

Во всех следующих теоремах действие происходит в конечномерных пространствах.

Теорема 1. *Из всякой порождающей системы можно выделить базис*

Следствие 1. *Базис — минимальная порождающая система векторов*

Теорема 2. *Из всякой линейно независимой системы можно выделить базис.*

Следствие 1. *Базис — максимальная линейно независимая система*

§ 5 Сумма и пересечение ЛП

Определение 1. Пусть $\forall\, i \in I \;\; U_i \subset V$. Тогда

$$\sum_{i \in I} U_i := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i\}$$

То есть совокупность всевозможных сумм

Определение 2.

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \{u \mid \forall\, i \;\; u \in U_i\}$$

Замечание. Пересечение — подпространство.

Теорема 1. *Пусть U_1, U_2 — подпространства V. Тогда*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim(U_1 \cap U_2)$$

□ Пусть $\dim(U_1 \cap U_2) = k$, $\dim U_1 = k + l$, $\dim U_2 = k + n$. Тут мы просто дополняем базис пересечения до базиса пространства, умеем же по 0.4.2.

1. Сначала доказываем, что $k+l+n$ нужных векторов вообще хватит, чтобы породить всё $U_1 + U_2$
2. Потом доказываем, что построенный таким образом базис линейно независим

■

§ 6 Внутренняя прямая сумма

Определение 1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I} \subset 2^V$, $U = \sum_I U_i$. Тогда

$$\left(\sum_{\substack{i \in I \\ u_i \in U_i}} u_i = 0 \Rightarrow \forall\, i \;\; u_i = 0 \right) \Leftrightarrow U = \bigoplus_{i \in I} U_i$$

Лемма 1. *Элемент из прямой суммы единственным образом представляется суммой $u_i \in I_i$.*

Теорема 2 (Критерий $\oplus$)**.** *Пусть*

$$U = \sum_{i \in I} U_i$$

$$W_i = \sum_{j \in I, j \neq i} U_j$$

Тогда U — прямая сумма $\Leftrightarrow$

$$\forall\, i \;\; U_i \cap W_i = \{0\}$$

☐ Более-менее ясно из определения прямой суммы. И вообще, похоже на свойства ЛНЗ системы векторов. ■

§ 7 Размерность прямой суммы конечного числа ЛП

Теорема 1.

$$\dim \underbrace{\bigoplus_{i \in I} U_i}_{V} = \sum_{i \in I} \dim U_i$$

☐ (По мотивам [**?**, стр. 195]).

Сначала заметим, что объединение базисов — точно порождающая система в V. Теперь докажем, что она линейно независима. Пусть для начала e_{ij} — базис U_i. Тогда

$$V \ni v = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}$$

Сгруппируем

$$u_i = \sum_j \alpha_{ij} e_{ij}$$

$$v = 0 \Leftrightarrow \sum_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; u_i = 0$$

Ну а ноль в подпространствах представляется единственным образом

$$u_i = 0 \Rightarrow \forall\, j \;\; \alpha_{ij} = 0$$

■

Утверждение 2 (Непонятно зачем нужное утверждение)**.** *Пусть*

$$V_{k+1} = \bigoplus_{i=1}^{k+1} U_i, \; V_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$$

Тогда

$$V_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$$

§ 8 Аффинные подпространства

Определение 1. Пусть U— подпространство V, $a \in V$. Тогда $W = U + a = \{x + a \mid x \in U\}$ — аффинное подпространство.

Лемма 1. *Пусть U — подпространство V. Тогда*

$$U + a = U + b \Leftrightarrow a - b \in U$$

Лемма 2. *Пусть V — линейное пространство над K, $W \subset V$, $a \in V$. Тогда если:*

1. $\forall\, \alpha \in K, x \in W \;\; \alpha(x - a) + a \in W$
2. $\forall\, x_1, x_2 \in W \;\; x_1 + x_2 - a \in W$

то W — аффинное подпространство

§ 9 Факторпространство

Определение 1. Пусть U — подпространство линейного пространства V над полем K. Тогда такая структура называется факторпространством:

$$\begin{aligned} V/U &:= \{U + a \mid a \in V\} \\ \overline{a} &:= U + a \\ \overline{a} + \overline{b} &:= \overline{a + b} \\ \alpha \cdot \overline{a} &:= \overline{\alpha \cdot a} \end{aligned}$$

Утверждение 1. *Определение 0.9.1 корректно*

Утверждение 2. *Структура которую описали в 0.9.1— векторное пространство.*

Теорема 3.

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

Определение 2. Дополнение базиса U до базиса V называется базисом V относительно U (относительным базисом).