Г Л А В А VII
Теория устойчивости движения

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

1^0. Устойчивость — как попытка обобщения теоремы об интегральной непрерывности на бесконечный промежуток времени.

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{7.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, f определена, непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области $G = (c, +\infty) \times D$, а D — область фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение или, как говорят, движение системы (7.1), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, где $t_0 > c$.

2^0. Основные определения.

Df. *Выбранное движение $x = \varphi(t)$ системы (7.1), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется невозмущенным, а остальные движения $x = x(t, x^0)$ — возмущенными. При этом $\|x^0 - \varphi(t_0)\|$ называется возмущением.*

Df. *Невозмущенное движение $x = \varphi(t)$, определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется устойчивым по Ляпунову, если*

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0 : \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta \;\Rightarrow \\ \forall\, t \in [t_0, +\infty) \text{ верно неравенство } \|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \varepsilon.\end{gathered}$$

Замечание 1. Устойчивость движения не зависит от выбора начального данного по времени t_0. Попробуйте доказать этот факт самостоятельно, используя теорему об интегральной непрерывности.

Df. *Невозмущенное движение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и*

$$\begin{gathered}\exists\, \delta_0 > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0 : \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta_0 \;\Rightarrow \\ \|x(t, x^0) - \varphi(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty.\end{gathered}$$

Df. *Областью притяжения асимптотически устойчивого движения* $x = \varphi(t)$ *называется множество точек* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ *фазового пространства таких, что если* x^0 *— точка из этого множества,* $x(t, x^0) \to \varphi(t)$ *при* $t \to +\infty$.

Df. *Если область притяжения асимптотически устойчивого движения совпадает со всем фазовым пространством* $\mathbb{R}^n$, *то это движение называется устойчивым в целом.*

Df. *Невозмущенное движение* $x = \varphi(t)$ *называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову.*

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1^0. Инвариантность свойства устойчивости для линейных систем.

Пусть в линейной однородной системе

$$\dot{y} = P(t)y \tag{7.4}$$

матрица $P(t)$ определена и непрерывна на интервале $(c, +\infty)$, тогда по теореме о продолжимости решений почти линейных систем все решения системы (7.4) продолжимы на весь интервал $(c, +\infty)$.

2^0. Связь устойчивости с ограниченностью фундаментальной матрицы.

Теорема (об устойчивости линейных систем). *Система (7.4) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда у нее существует фундаментальная матрица, ограниченная на промежутке* $[t_0, +\infty) \quad (t_0 > c)$.

3^0. Устойчивость линейных систем с постоянными и периодическими коэффициентами.

Множество собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ этих матриц удобно разбить на три непересекающихся множества:

M1) $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для $\forall\, k = \overline{1,n}$; M2) $\exists\, k_* :\ \operatorname{Re}\lambda_{k_*} > 0$;

M3) $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ для $\forall\, k = \overline{1,n}$ и $\exists\, k_0 :\ \operatorname{Re}\lambda_{k_0} = 0$.

M1) $y \equiv 0$ является асимптотически устойчивым,

M2) линейная система неустойчива.

M3)

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Теорема (Ляпунова, об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему*

$$\dot{y} = Ay + Y(t, y), \tag{7.5}$$

в которой $Y \in C(G_0)$, $Y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G_0)$, *где* $G_0 = (c, +\infty) \times D_0$ *и* $D_0 = \{y \,|\, \|y\| < c_0\}$, $\|Y(t,y)\|/\|y\| \overset{[t_0,\infty)}{\rightrightarrows} 0$ *при* $\|y\| \to 0$. *Тогда тривиальное решение* $y \equiv 0$ *системы (7.5) асимптотически устойчиво, если* $\operatorname{Re}\lambda_1, \dots, \operatorname{Re}\lambda_n < 0$, *и неустойчиво, если* $\exists\, k_*$ *такое, что* $\operatorname{Re}\lambda_{k_*} > 0$; *здесь* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *— собственные числа* A.

§ 4. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

1^0. Функция Ляпунова.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C(G), \quad f \in Lip_x^{loc}(G), \tag{7.11}$$

где $G = G_\tau^a = \{(t, x) \,|\, t \in (\tau, +\infty),\ \|x\| < a\}$, при этом $f(t, 0) \overset{t>\tau}{\equiv} 0$.

Df. *Функцией Ляпунова V называется любая непрерывная функция* $V(t, x) :\ G \to \mathbb{R}$, *если* $V(t, 0) \overset{t>\tau}{\equiv} 0$.

Df. *Функция Ляпунова* $V(t, x)$ *называется знакопостоянной, если* $\exists\ \tau, a$ *такие, что* V *не меняет знак в области* G_τ^a; *она положительна, если* $V(t, x) \ge 0$, *и отрицательна, если* $V(t, x) \le 0$.

Df. *Функция Ляпунова* $V(t, x)$ *называется стационарной, если она не зависит от* t, *т. е.* $V(t, x) \equiv W(x)$ *и* $W(0) = 0$.

Df. *Стационарная функция Ляпунова $W(x)$ называется положительно определенной, если $\exists\, a > 0$ такое, что для $\forall\, x\colon\ 0 < \|x\| < a$ функция $W(x) > 0$.*

Df. *Функция Ляпунова $V(t,x)$ называется положительно определенной, если существует положительно определенная стационарная функция Ляпунова $W_1(x)$ такая, что $V(t,x) \geq W_1(x) > 0$ в некоторой области G_τ^a, и отрицательно определенной — если функция $-V(t,x)$ есть положительно определенная функция Ляпунова.*

Df. *Функция Ляпунова $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая стационарная функция Ляпунова $W_2(x)$, что $|V(t,x)| \leq W_2(x)$ в некоторой области G.*

2^0. Производная функции Ляпунова в силу системы.

$$DV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f \quad \text{или} \quad DV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x).$$

— это производная функции Ляпунова V по t в силу системы (7.11).

3^0. Теорема Ляпунова об устойчивости.

Лемма (о поведении положительно определенной функции Ляпунова вблизи нуля). *Пусть функция Ляпунова $V(t,x)$ положительно определена в области G_τ^a, функция $x(t)$ — непрерывна и $\|x(t)\| \leq a_1 < a$ при $t \in [t_0, +\infty)$, тогда: 1) если $V(t,x(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, то $\|x(t)\| \to 0$; 2) если $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то $V(t,x(t)) \to 0$.*

Теорема Ляпунова (об устойчивости). *Пусть в области G_τ^a существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t,x)$, у которой $DV(t,x)$ отрицательна, тогда в системе (7.11) невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.*

Следствие 1. *Если система (7.11) имеет в области G положительно определенный интеграл $U(t,x)$ и $U(t,0) \equiv 0$, то невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.*

4^0. **Асимптотическая устойчивость.**

Теорема Ляпунова (об асимптотической устойчивости). *Пусть в области G_τ^a существует положительно определенная функция Ляпунова $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый высший предел, а ее производная в силу системы $DV(t,x)$ определенно отрицательна, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ системы (7.13) асимптотически устойчиво.*

Теорема Ляпунова (Об асимптотической устойчивости для автономных систем). *Пусть у автономной системы (7.17) в области D^a существует положительно определенная стационарная функция Ляпунова $W(x)$, у которой производная в силу системы $DW(x) \leq 0$, а множество $M = \{x \,|\, x \neq 0,\ DW(x) = 0\} \neq \emptyset$ для $\forall\, a > 0$ и не содержит целых траекторий, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ этой системы асимптотически устойчиво.*

5^0. **Устойчивость в целом.**

Df. *Невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ называется устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ движение $x(t,x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Df. *Стационарная функция Ляпунова $W(x)$ называется бесконечно большой, если $W(x) \to \infty$ при $\|x\| \to +\infty$.*

Теорема (Об устойчивости в целом для автономных систем). *Пусть у автономной система (7.17) в области $D^\infty = \{\|x\| < \infty\}$ существует положительно определенная стационарная бесконечно большая функция Ляпунова $W(x)$, у которой производная в силу системы $DW(x) \leq 0$, а множество $M = \{x \,|\, DW(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, тогда невозмущенное движение $x(t) \equiv 0$ этой системы устойчиво в целом.*