1. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r}(t)$, $(x,y,z)(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$.
   $\dot{\boldsymbol r}$: $\dot{\boldsymbol r}(t)$, $(\dot x,\dot y,\dot z)(t)$, $\boldsymbol\tau\dot s$.
   $\ddot{\boldsymbol r}$: $\ddot{\boldsymbol r}(t)$, $(\ddot x,\ddot y,\ddot z)(t)$, $\ddot s\boldsymbol\tau + \dot s^2 k_1 \boldsymbol n$
2. ⟨?⟩
3. В криволинейных координатах

▷ $\boldsymbol v = \sum_k \dot q^k \boldsymbol e_k$

▷ $\boldsymbol w = \sum_k \ddot q^k \boldsymbol e_k + \sum_{k,i} \dot q^k \dot q^i \frac{\partial \boldsymbol e_k}{\partial q^i}$

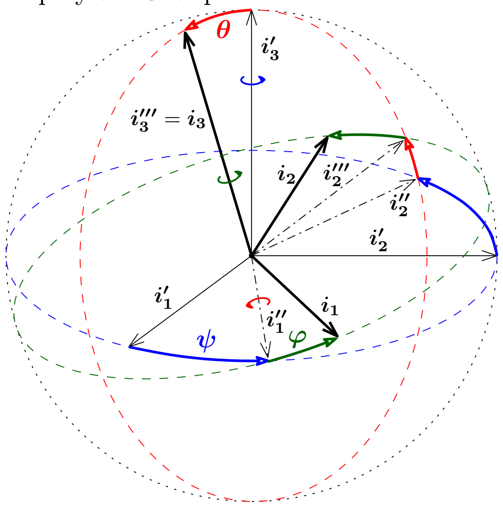
▷ $w^j = \ddot q^j + \sum_{k,i} \dot q^k \dot q^i \Gamma^j_{ki}$

▷ $\Gamma_{j,\,ki} = \frac{\partial \boldsymbol e_k}{\partial q^i}\cdot \boldsymbol e_j$ — I рода

▷ $\Gamma^j_{ki} = \frac{\partial \boldsymbol e_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol e^j$ — II рода

▷ $w_\ell = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q^\ell}\left(\frac{\dot{\boldsymbol r}^2}{2}\right)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^\ell}\left(\frac{\dot{\boldsymbol r}^2}{2}\right)$

4. Про углы Эйлера



▷ $\boldsymbol\omega = \dot\psi\, \boldsymbol i'_3 + \dot\theta\, \boldsymbol i''_1 + \dot\varphi\, \boldsymbol i_3$

▷ $\boldsymbol R(t) = \boldsymbol R_0(t) + \boldsymbol r(t)$

▷ $\boldsymbol v = \boldsymbol v_0 + \boldsymbol\omega\times\boldsymbol r + \boldsymbol v_r$

▷ $\boldsymbol w = \boldsymbol w_0 + \dot{\boldsymbol\omega}\times\boldsymbol r + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r) + 2\boldsymbol\omega\times\boldsymbol v_r + \boldsymbol w_r$

5. Динамика точки и систем точек

▷ $\boldsymbol r_k = \boldsymbol r_k(t, \{c_\ell\})$, $k \in 1\,..\,N$, $\ell\in 1\,..\,6N$

▷ $m_k \ddot{\boldsymbol r}_k = \boldsymbol F_k$, $m w_\ell = Q_\ell$

▷ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^\ell}\right) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q^\ell} = Q_\ell$

▷ $\boldsymbol r_c = \frac{\sum_k m_k \boldsymbol r_k}{\sum_k m_k}$, $\sum_k m_k = M$

6. Закон сохранения импульса

▷ $\boldsymbol p = \sum_k \boldsymbol p_k$, $\boldsymbol p_k = m_k\boldsymbol v_k$

▷ $\boldsymbol F = \sum_k \left(\boldsymbol F_k^{(e)} + \boldsymbol F_k^{(i)}\right)$

▷ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol p}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol F_k^{(e)}$. Все сиды взаимодействия вымерли.

7. Момент импульса

▷ $\boldsymbol\ell = \sum_k \boldsymbol\ell_k$, $\boldsymbol\ell_k = \boldsymbol r_k\times\boldsymbol p_k$

▷ $\boldsymbol L = \sum_k \boldsymbol r_k \times \boldsymbol F_k^{(e)} + \sum_k \boldsymbol r_k\times \boldsymbol F_k^{(i)}$

▷ $\boldsymbol F^{(i)}_{kj} = \lambda(\boldsymbol r_{kj})\boldsymbol r_{kj} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol\ell}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol L_k^{(e)}$.

8. Энергия

▷ $T = \sum_k T_k$, $T_k = \frac{m_k(\boldsymbol v_k\cdot\boldsymbol v_k)}{2}$

▷ $\delta A_k = \boldsymbol F_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol r_k$, $A = \int_\Gamma \delta A$, а вообще-т интеграл от формы.

▷ $\mathrm{d}T = \delta A_k^{(e)} + \delta A_k^{(i)}$

▷ $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\left(T + \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)}\right) = \delta A_{\text{не пот}}$

9. В поле центральной силы¬

▷ $u = 1/\rho$.

▷ Формулы Бине
$$\begin{cases} v^2 = c^2\left(\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right)\\ w_\rho = -c^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)\end{cases}$$

▷ Невыразимая жжесть

10. ⟨?⟩⟨`:set aflame`⟩Движение твёрдого тела ¬

▷ $\omega = 0$ — поступательное

▷ $\boldsymbol v_0, \boldsymbol w_0 = 0, \omega = \dot\varphi \boldsymbol i_3$ — вращение вокруг неподвижной оси

▷ $\boldsymbol v_0 \upuparrows \boldsymbol\omega$ — винт

▷ ⟨?⟩Как попало вокруг неподвижной точки [1] ¬
$$\boldsymbol\omega = \boldsymbol i_1(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi) + \boldsymbol i_2(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi) + \boldsymbol i_3(\dot\psi\cos\varphi+\dot\varphi)$$

11. Скорость и ускорение точек твердого тела

▷ $\boldsymbol v = \boldsymbol v_0 + \boldsymbol\omega\times\boldsymbol r$

▷ $\boldsymbol w = \boldsymbol w_0 + \dot{\boldsymbol\omega}\times\boldsymbol r + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r)$

12. Сложение движений ТТ

▷ $\boldsymbol v_{r_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol v_k + \boldsymbol\omega_k\times\overrightarrow{O_kO}\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol\omega_k\times\boldsymbol r_0$, $O_0 = O$.

▷ $\boldsymbol V = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol v_k + \boldsymbol\omega_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)$

▷ $\boldsymbol\Omega = \sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol\omega_k \quad\Rightarrow \boldsymbol v_{r_n} = \boldsymbol V + \boldsymbol\Omega\times\boldsymbol r_0$

13. Кинематический винт

▷ $\boldsymbol\omega\times\boldsymbol v_0 + \boldsymbol\omega\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r) = 0$

14. Плоское движение

▷ $0 = \boldsymbol v_0 + \boldsymbol\omega\times\boldsymbol r_c$

▷ $\boldsymbol r_* = \left(-\frac{v_{0y}}{\omega}, +\frac{v_{0x}}{\omega}\right)$ —подвижная центроида

▷ $\boldsymbol r'_* = \boldsymbol r_* + \boldsymbol r_0$ — неподвижная центроида

▷ $\omega = \frac{|\boldsymbol v_B - \boldsymbol v_A|}{|\boldsymbol r_B - \boldsymbol r_A|}$

▷ $\omega = \frac{|\boldsymbol v_a \times \boldsymbol r_{A*}|}{r^2_{A*}}$ и то же с B.

▷ центр ускорений: ⟨?⟩

15. Динамика вращения ТТ [2]

▷ $M = \int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)$, $\boldsymbol r_c = \frac{\int_\tau \boldsymbol r\,\mathrm{d}\mu(r)}{\int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)}$

▷ $\boldsymbol\ell = \int_\tau(\boldsymbol r\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r))\,\mathrm{d}\mu$, $\boldsymbol\ell' = \int_\tau(\boldsymbol R\times\boldsymbol v)\,\mathrm{d}\mu$

▷ $\boldsymbol\ell' = \boldsymbol R_0\times\boldsymbol v_0\, M + \boldsymbol r_c\times\boldsymbol v_0\, M + \boldsymbol R_0\times(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r_c)M + \boldsymbol\ell$

▷ $T = \frac12\int_\tau(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r)^2\, \mathrm{d}\mu$, $T' = \frac12\int_\tau \boldsymbol v^2\, \mathrm{d}\mu$

▷ $T' = T + \frac12 M\boldsymbol v_0^2 + M\boldsymbol v_0\cdot(\boldsymbol\omega\times\boldsymbol r_c)$

▷ $\ell_\omega = \omega J_\omega$

▷ $\boldsymbol\ell = \widehat J\boldsymbol\omega = \sum_{j,k} J_{jk}\omega_k\, \boldsymbol i_j$,

$J_{ik} = \int_\tau (r^2\delta_{jk} - x_jx_k)\,\mathrm{d}\mu$

▷ $T = \frac{J_\omega\omega^2}{2} = \frac{\widehat J\,\boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\omega}{2}$

▷ $L = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$

▷ Динамические уравнения Эйлера ¬

$L_a = J_a\dot\omega_a + (J_c - J_b)\,\omega_c\omega_b$

$L_b = J_b\dot\omega_b + (J_a - J_c)\,\omega_a\omega_c$

$L_c = J_c\dot\omega_c + (J_b - J_a)\,\omega_b\omega_a$

▷ Кинематические уравнения Эйлера ¬

$\omega_a = (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)$

$\omega_b = (\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)$

$\omega_c = (\dot\psi\cos\varphi + \dot\varphi)$

16. Вращение вокруг неподвижной оси¬

▷ Ну, та скучная системка

17. $L = 0$
18. Сила всего одна и приложена к центру масс
19. ⟨⚒⟩
20. ⟨⚒⟩
21. ⟨⚒⟩
22. Принцип Даламбера-Лагранжа: Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю: $(M\ddot{\boldsymbol y} - \boldsymbol Y)\cdot\delta\boldsymbol y = 0$
23. При варьировании с фиксированными концами $\left(\delta t_1 = \delta t_0 = 0,\ \begin{matrix}\delta q^\ell|_{t_1} = 0\\ \delta q^\ell|_{t_2}=0\end{matrix}\right)$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

- $\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T$, $T = \frac{M}{2} \sum_{j,k} g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k$
- $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0}$, $\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot{q}^\ell \delta t$ (полная вариация)
- Лишь при этом условии работает принцип выше

25. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0$

26. $\begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0, \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q^l \, \partial a^p}\right) \neq 0 \\ p_\ell = \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, \; b_k = \dfrac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k \text{ — const} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

- Фазовый объём
- Жесть

29. ⟨⚒⟩

Заметки

[1] У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь ⟨ᵔᵕᵔ⟩

[2] Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить