

## §1 ✕ Интеграл от комплексной дифференциальной формы

здесь надо сильно больше определений

**Определение 1.** Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как  $\{z \mid |z - a| < \varepsilon\}$ , проколотую окрестность как  $\{z \mid 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ . Далее можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в  $\mathbb{R}^2$ . Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

**Определение 2.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , непрерывна,  $f = f_1 + if_2$ ,  $\omega(z, dz) = f(z)dz$  — комплексная дифференциальная форма. Пусть  $\Gamma \subset G$  — кривая,  $\gamma$  — её параметризация,  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int_{\gamma} := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2(t)) dt + \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1(t)) dt$$

Свойства:

**Утверждение 1.** см ??

**Утверждение 2.** Пусть  $\{t_i\}$  — разбиение отрезка  $[a; b]$ ,  $z_i = \gamma(t_i)$ ,  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ ,  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $\xi_i = \gamma(\tau_i)$ . Пусть ещё

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta z_i$$

$$r = \max |\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

**Следствие 1.** Пусть  $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leq M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

.....  
{censored by galactic vimperor}  
.....

### § 30 Свойства дробно-линейного отображения

**Определение 1** (Дробно-линейное отображение).  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ ,  $ad \neq bc$

.....  
{censored by galactic vimperor}  
.....

### § 42 Классификация изолированных особых точек

**Определение 1.** Особой точкой функции  $f$  называется точка, где  $f$  не голоморфна или не определена.

**Определение 2.** Изолированной особой точкой функции  $f$  называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

### § 46 Вычисление вычетов в полюсах

**Определение 1.** Пусть  $f$  имеет в  $a$  полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении  $f$  в ряд Лорана в кольце с центром в  $a$ .

**Теорема 1.** Пусть  $a$  — полюс первого порядка функции  $f$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

**Теорема 2.** Пусть  $a$  — ноль первого порядка для  $\psi$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\varphi, \psi$  голоморфны в  $U(a)$ ,  $f = \frac{\varphi}{\psi}$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

**Теорема 3.** Пусть  $a$  — полюс  $p$ -го порядка функции  $f$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \left( (z-a)^p f(z) \right)_{z=a}^{(p-1)}$$

## § 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I) Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где  $a_k$  — вычеты функции  $g(z)$ , внутри единичной окружности. В функции  $g$   $\sin / \cos$  заменены на  $\frac{1}{2}(z \pm z^{-1})$

II) Интеграл от рациональной функции на  $\mathbb{R}$

Пусть  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg P \leq \deg Q - 2$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

$$\text{III)} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\lambda z} dz = I$$

Пусть  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , голоморфна всюду кроме  $\{a_k\}$ , нету особых точек на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

**Лемма 1** (Жордана). Пусть  $f$  голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек,  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ . Тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

## § 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

**Определение 1.** Комплексным изоморфизмом областей  $G$  и  $H$  называется однолистное конформное отображение  $f: G \rightarrow H$ . Область  $G$  и  $H$  тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

*Замечание.*  $f: G \rightarrow G$  при условиях выше — автоморфизм.

**Утверждение 1.** Все автоморфизмы области  $G$  с операцией композиции образуют группу  $\operatorname{Aut} G$ .

▼

Пусть  $f, g, h \in \operatorname{Aut} G$ . Тогда  $f \circ g: G \rightarrow G$ , композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

- $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- $\forall f \exists f^{-1}$ , обратное — голоморфно и биекция,  $\Rightarrow$  конформно и однолистно.
- $\text{id}: G \rightarrow G$  — конформно и однолистно.



### Классические области

1.  $\overline{\mathbb{C}}$
2.  $\mathbb{C}$
3.  $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

**Теорема 2** (Римана). Пусть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда  $G \cong$  одной из классических областей

1.  $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2.  $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3.  $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}, |U| > 1$

### § 56 Лемма Шварца

### § 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

**Определение 1.** Пусть  $\Gamma < \text{Aut } G$ . Тогда говорят, что  $\Gamma$  — транзитивна, если

$$\forall z_1, z_2 \in G \exists f \in \Gamma: f(z_1) = z_2$$

*Замечание.* Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на  $G$  транзитивно.

**Лемма 1.** Пусть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ,  $\Gamma$  — транзитивна. Пусть к тому же  $\exists z_0: \text{Stab}(z_0) < \Gamma$ . Тогда  $\Gamma = \text{Aut } G$ .



Выберем произвольный  $f \in \text{Aut } G$ , пусть  $z_1 = f(z_0)$ . Из транзитивности  $G \exists \gamma \in \Gamma: \gamma(z_1) = z_0$ . Тогда  $h = \gamma \circ f \in \text{Stab}(z_0)$ . Но из второго условия  $\text{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$ . Но тогда

$$\forall f \in \text{Aut } G \quad f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in \Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in \Gamma} \in \Gamma$$



## § 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь все константы по умолчанию  $\in \mathbb{C}$ .

**Теорема 1.**  $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0\}$

□ Пусть

$$\Gamma = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}\}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для  $\mathbb{C}$  хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен  $\text{Stab } \infty$ . Нам нужно чтобы  $\infty \mapsto \infty$ . А значит  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ . Но из теоремы 0.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что  $\text{Stab } \infty < \Gamma$ . А тогда по лемме 0.57.1  $\Gamma = \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$  ■

**Теорема 2.**  $\text{Aut } \mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

□ Пусть  $A = U(\infty)$ . Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть  $\infty$  — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого  $f(A)$  всюду плотно в  $\mathbb{C}$ . А значит в  $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$  есть точка из  $f(A)$  — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть  $\infty$  — устранимая особая точка. Но тогда в кольце  $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots + c_0$$

Но  $f \in \text{Aut } G \Rightarrow f$  голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в  $\infty$  — полюс. Но тогда  $f(z)$  — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени  $n$  имеет в  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. ■

**Теорема 3.**  $\text{Aut } \mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

□ Опять рассмотрим  $\Gamma$  как в условии и покажем, что  $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$ . Надо сначала показать хотя бы, что  $\Gamma < \text{Aut } \mathbb{D}$ .

$$\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) > 0$$

Так что при  $|z| < 1 \wedge |a| < 1$  это верно.

Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев  $f(1/z)$  в  $U(0)$

Дальше легко найти обратное к  $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1} \frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta} a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$f_1(z) = \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}$$

$$f_2(z) = \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$

$$a = \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}}$$

$$|a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1$$

$$f_2(f_1(z)) = e^{i\theta_2} \frac{e^{i\theta} z - e^{i\theta} a_2 - a_1 + a_1 \bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}$$

Осталось показать оба условия из леммы [0.57.1](#)

1. Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Будем строить так:  $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

$$f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}$$

$$f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на  $f \in \text{Stab } 0$ . По лемме Шварца  $\forall z \in D \quad |f(z)| \leq |z|$ . Поскольку  $\text{Stab } 0$  — группа,  $\exists f^{-1}$  и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

А тогда по второму пункту леммы Шварца  $f(z) = cz$ ,  $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$ . Следовательно,  $\text{Stab } 0 < \Gamma$ . Тогда по уже упомянутой лемме  $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$

■