Г Л А В А VI
Автономные системы

§ 1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ И ТРАЕКТОРИЙ

1^0. Объект изучения.

Df. *Нормальная система (3.1) $y' = f(x, y)$ называется автономной, если ее правая часть не зависит от независимой переменной x, т. е. система имеет вид $y' = f(y)$. В противном случае система (3.1) — неавтономная.*

Автономную систему обычно сразу записывают так, как это принято в механике (см. систему (3.1_m)) :

$$\dot{x} = X(x), \tag{6.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, и предполагают, что вектор функция $X(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица локально по x в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

2^0. Механическая интерпретация автономных систем.

Таким образом автономная система индуцирует непрерывное векторное поле $X(x)$ в области D фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

И обратно: любая вектор функция $V(x) \in C(D)$ задает автономную систему $\dot{x} = V(x)$, для которой V является полем скоростей.

Кривая $\gamma = \{(t, x) \,|\, x = \varphi(t),\ t \in I_{max}\}$, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется интегральной кривой движения $x = \varphi(t)$ и является графиком функции $x = \varphi(t)$.

Кривая $L = \{x \,|\, x = \varphi(t),\ t \in I_{max}\}$, лежащая в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется траекторией движения $x = \varphi(t)$ и является проекцией интегральной кривой γ вдоль оси времени на фазовое пространство.

3^0. Инвариантность решений относительно сдвигов по t.

Лемма (об инвариантности решений относительно сдвигов по t). *Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — решение системы (6.1) на интервале (a, b), тогда для $\forall \tau \in \mathbb{R}^1$ вектор функция $\psi(t) = \varphi(t + \tau, t_0, p)$ также является решением системы (6.1) для $\forall\, t \in (a - \tau, b - \tau)$.*

Следствие 1. *Пусть* $x = \varphi(t, t_0, p)$ — *решение системы (6.1) на интервале* (a, b), *тогда*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^1: \quad \varphi(t + \tau, t_0 + \tau, p) \overset{(a,b)}{\equiv} \varphi(t, t_0, p). \tag{6.2}$$

4^0. Групповое свойство решений.

$$\forall\, t_1 \in (\alpha, \beta): \quad \varphi(t - t_0, p) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi(t - t_1, \varphi(t_1 - t_0, p)). \tag{6.3}$$

Полученное тождество называется групповым свойством решений автономной системы.

5^0. Особые точки и циклы.

Df. *Если для* $\forall t \in \mathbb{R}^1$ *движение* $\varphi(t, p) = p$, *то точка* p, *являющаяся траекторией этого движения, называется точкой покоя, а также особой точкой или положением равновесия системы (6.1).*

Выделим очевидное, но очень важное утверждение.

Утверждение. *Точка* $p \in D$ *является точкой покоя тогда и только тогда, когда в системе (6.1)* $X(p) = 0$.

Df. *Точка* $p \in D$ *называется обыкновенной или неособой, если* $X(p) \neq 0$.

Df. *Если* $\exists\, \omega > 0$, что для $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$ движение $\varphi(t, p) = \varphi(t + \omega, p)$, то замкнутая кривая l, являющаяся траекторией этого движения, называется циклом.

6^0. Система для траекторий в окрестности обыкновенной точки.

Df. *Система (6.4) называется системой для траекторий автономной системы (6.1).*

7^0. Свойства и типы траекторий.

Теорема (о поведении и типах траекторий автономных систем). *Траектории автономных систем не пересекаются и бывают трех типов: 1) точка покоя* p, *2) цикл* l, *3) незамкнутая траектория* L *без самопересечений (гомеоморфный образ прямой).*

§ 2. A- И Ω-ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

1^0. Определение и свойства предельных множеств.

Df. *Пусть траектория движения* $x = \varphi(t - t_0, p)$ *системы (6.1) определена при всех* $t \le t_0$, *тогда точка* q *называется ее* α*- предельной точкой, если существует последовательность моментов времени* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $t_k \to -\infty$ *при* $k \to \infty$ *и* $\varphi(t_k - t_0, p) \to q$.

Df. *Пусть траектория движения* $x = \varphi(t - t_0, p)$ *системы (6.1) определена при всех* $t \ge t_0$, *тогда точка* q *называется ее* ω*- предельной точкой, если существует последовательность моментов времени* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $t_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty$ *и* $\varphi(t_k - t_0, p) \to q$.

Df. *Множество* α*-предельных точек траектории движения* $x = \varphi(t - t_0, p)$ *системы (6.1) называется* A*-предельным множеством, а множество* ω*-предельных точек —* Ω*-предельным множеством.*

Лемма (о характеристическом свойстве предельных точек). *Для того чтобы точка* q *была* ω*-предельной точкой траектории движения* $x = \varphi(t - t_0, p)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \forall T > 0 \quad \exists t^* > T: \ \ \|\varphi(t^* - t_0, p) - q\| < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Теорема (о свойствах Ω-предельных множеств). Ω*-предельное множество любой траектории системы (6.1) замкнуто и инвариантно, т. е. содержит все свои предельные точки и состоит из целых траекторий.*

2^0. Свойства предельных множеств траекторий, устойчивых по Лагранжу.

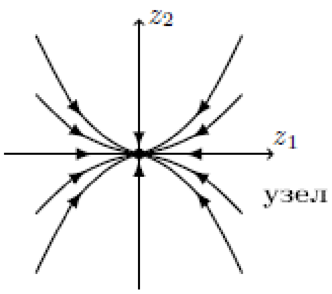
Df. *Траектория движения* $x = \varphi(t - t_0, p)$ *системы (6.1), определенного на* $I_{\max} = (\alpha, \beta)$, *называется положительно устойчивой по Лагранжу, если в фазовом пространстве можно указать такой компакт* $\overline{H}_+$, *что* $\varphi(t - t_0, p) \in \overline{H}_+$ *для* $\forall\, t \in [t_0, \beta)$, *и называется отрицательно устойчивой по Лагранжу, если существует компакт* $\overline{H}_- \subset D$ *такой, что* $\varphi(t - t_0, p) \in \overline{H}_-$ *для* $\forall\, t \in (\alpha, t_0]$.

Теорема (о свойствах Ω-предельных множеств траекторий, положительно устойчивых по Лагранжу). *Ω-предельное множество любой положительно устойчивой по Лагранжу траектории системы (6.1) не пусто и связно.*

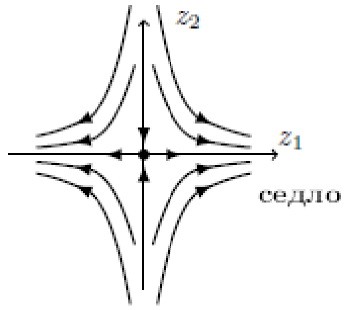
§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1^0. Классификация Пуанкаре.

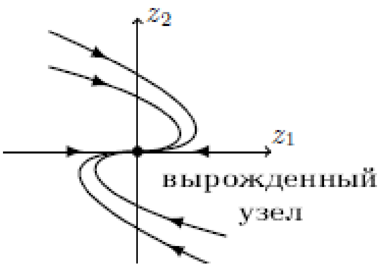
а) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



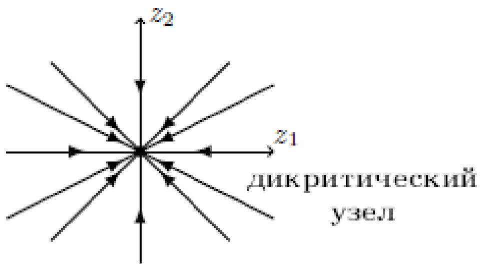
б) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



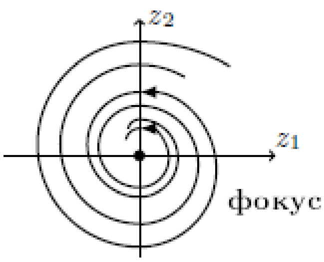
а) $\sigma = 1$



б) $\sigma = 0$



а) $\alpha \neq 0$



б) $\alpha = 0$