§ 1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 1 (σ-алгебра)**.** Алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется такой набор его подмножеств с заданными операциями объединения, пересечения и дополнения множеств, что

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{X} \in \mathcal{A}$
3. $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X_1 \cup X_2$

Сигма-алгеброй подмножеств называется всё тоже самое, только можно объединять счётное число подмножеств.

Определение 2 (Вероятностное пространство)**.** Рассмотрим упорядоченную тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

Ω — Множество (элементарных исходов). Чисел, например.

$\mathcal{F}$ — σ — алгебра подмножеств Ω

P — Собственно, вероятность

Определение 3 (Вероятность)**.** $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $\forall\, A \;\; F(A) \geqslant 0$
2. $\forall \{A_i\}\colon A_i \cap A_j = \varnothing \;\; P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

Как видно, сильно похоже на площадь. Что впрочем неслучано, вероятность — нормированная мера. Последнее условие как раз и означает нормированность.

Определение 4 (Тривиальные события)**.** $\varnothing, \Omega$.

Утверждение 1. *Свйоства вероятности:*

1. $P(\varnothing) = 0$

2. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

А это очень важное и будет в отдельном утверждении.

Утверждение 2 (Непрерывность меры)**.** *Пусть* $A_1 \subset \cdots A_n \subset \cdot$, $\bigcup\limits_i A_i = A$. *Тогда* $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$.

▼
Пусть

$$\begin{aligned} &B_1 = A_1 \\ &B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i;\ A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_n$$

Следовательно,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Всё работает, потому что в σ-алгебре можно объединять счётное число множеств.
▲

§ 2 Формула полной вероятности

Определение 1 (Условная вероятность)**.** Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$[1]. Тогда

$$P(B \mid A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Утверждение 1. *Пусть* $\{A_i, H\} \subset \mathcal{F}$ *и*

1. $P(A_i) > 0$
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$
3. $\bigcup_i A_i = \Omega$

(полная группа/система событий). Тогда

$$P(H) = \sum_i P(A_i) \cdot P(H \mid A_i)$$

§ 3 Теорема Байеса

Теорема 1. *Пусть* A_i *— полная система событий,* $H \in \mathcal{F}\colon P(H) > 0$*. Тогда*

$$P(A_k \mid H) = \frac{P(A_k) \cdot P(H \mid A_k)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(H \mid A_i)}$$

§ 4 Независимые события

Определение 1. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Они називыются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Утверждение 1. *События* A, B *независимы* $\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A) \vee P(B \mid A) = P(B)$ *(в зависимости от того, что определено, вдруг там ноль где-нибудь).*

Утверждение 2. *Если* A, B *несовместны, то нетривиальные* A, B *— зависимы.*

Определение 2. Случайные величины $\{X_i\}$ попарно независимы, если

$$\forall\, i, j\ \ P(X_i \cap X_j) = P(X_i) \cdot P(X_j)$$

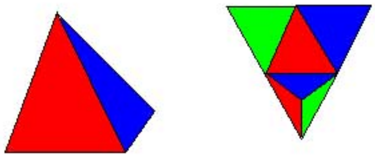
.

[1] ну мы же делим, нажо убедиться что неноль

Определение 3. Случайные величины $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ независимы по совокупности , если

$$\forall \{i_k \mid i_k, k \in (\mathbb{Z} \cap [1;n])\} \ \ P\left(\bigcap_{i_k} X_{i_k}\right) = \prod_{i_k} P(X_{i_k})$$

Замечание 1. Определения 0.4.3 и 0.4.3 правда разные. Конечно попарная независимость следует из независимости по совокупности, но обратное неверно.

Пример 1. Тетраэдр Бернштейна:  . Здесь вероятность выпадения всех 3 цветов — $^1\!/_4$, а через попарные — $^1\!/_8$

§ 5 Случайные величины и их распределения

Определение 1 (Случаная величина)**.** Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

> Тут нужно бы сказать про измеримость, это потребуется, чтобы говорить о вероятности попадания в интервал на прямой. Так что
>
> $$X\colon \big(X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}\big) \in \mathcal{F},$$
>
> где B — борелевское множество

Определение 2. Пусть $B \subset \mathbb{R}$, B — промежуток, или дополнение в нему (борелевское множество).[1]

$$P(X \in B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Определение 3. Случайная величина называется дискретной, если

$$\exists\,(\{a_i\} \sim \mathbb{N})\colon \left(\sum_i P(X = a_i) = 1\right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i,\ p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists\,(f_X\colon B \to \mathbb{R})\colon \left(P(X \in B) = \int\limits_B f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Определение 5 (Распределение случайной величины)**.** $F(B) = P(X \in B)$

Пример 1 (К непрерывному распределению)**.** Пусть $X(\omega) = \omega$, $B = (0,1)$, $\Omega = (-1;1)$. Выберем $f_X \equiv \frac{1}{2}$.

$$F(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \mid \omega \in (0,1)\}) = P\big((0,1)\big) = \tfrac{1-0}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

$$F(B) = \int\limits_{(0,1)} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1-0}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Это всё верно, потому что на множестве интервалов вероятность — нормированная длина интервала.

---

[1]тут вроде концы могут входить, так что точка — тоже борелевское множество.

Определение 6 (Функция распределения)**.**

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0;1]\colon\ F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$$

Утверждение 1. *Про $F(x)$ верно следущее:*

1. $F \uparrow \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$

Утверждение 2. *Верно и обратное: если существует функция с указанными свойствами, под неё найдётся случайная величина.*

Замечание. Если рассматривать обобщённые функции, то любое распределение запишется как

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$$

§ 6 Моменты случайных величин

Определение 1. Пусть X — случайная величина,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Тогда

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} \equiv \mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Утверждение 1. *Свойства матожидания:*

1. $\mathrm{M} < \infty$
2. $\mathrm{M}(aX + bY) = a\,\mathrm{M}\,X + b\,\mathrm{M}\,Y$
3. $P(X \geqslant 0) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}\,X \geqslant 0$
4. $\begin{cases} P(X \geqslant 0) = 1 \\ \mathrm{M}\,X = 0 \end{cases} \Rightarrow P(X = 0) = 1$
5. *если* X, Y *— независимы, то* $\mathrm{M}(XY) = \mathrm{M}\,X \cdot \mathrm{M}\,Y$

Определение 2. Момент k-ого порядка относительно начала a:

$$\lambda_{k,a} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

(если есть абсолютная сходимость)

Определение 3. Начальный момент: $\nu_k = \lambda_{k,0}$

Определение 4. Центральный момент: $\mu_k = \lambda_{k,\bar{x}}$

Утверждение 2. $\nu_k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i \, \lambda_{k-i,a}$

Определение 5 (Дисперсия)**.** $\mathrm{D}\, X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\, X)^2$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\, X}$ — среднеквадратичное отклонение.

Утверждение 3.

$\mathrm{D}(aX + bY) = a^2 \, \mathrm{D}\, X + b^2 \, \mathrm{D}\, Y$

если X, Y *— независимы, то* $\mathrm{D}(XY) = \mathrm{D}\, X \cdot \mathrm{D}\, Y$

$\mathrm{D}(X + C) = \mathrm{D}\, X$

§ 7 Характеристическая функция

Определение 1 (Характеристическая функция)**.** $\Phi(t) = \mathrm{M}\, e^{itx}$

Утверждение 1. *Свойства характеристической функции:*

1. *Всегда существует и* $|\Phi(t)| \leqslant 1$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Phi(t) \, \mathrm{d}t$
3. $\Phi_{a+Xb}(t) = e^{ita} \Phi_X(tb)$
4. *Если* X, Y *— независимы, то* $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$
5. *Если* $\mathrm{M}\, |X|^n < \infty$, *то* $\Phi^{(k)}(0) = i^k \, \mathrm{M}\, X^k$

Определение 2 (Сходимость по распределению)**.** $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \to F(x)$

Теорема 2 (О непрерывном соответствии)**.** $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \Phi_{X_n}(t) \underset{t}{\rightrightarrows} \Phi_X(t)$. *Здесь на самом деле всё сложно. В разных книжках пишут равномерную сходимость на разных интервалах. У нас вроде было на всей вещественной прямой, но тогда это слишком сильное утверждение. К слову так же в [?] и [?]. А вот в [?] требуют только сходимости в каждом конечном интервале. Можно взять экспоненту, и понять, что эти условия разные.*

§ 8 Теорема Муавра-Лапласа