

# Конспект по анализу за 3 семестр

Лектор: А. А. Лодкин

Записал :taxus

2 января 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Анализ в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>2</b>
§ 1	Оценка приращения дифференциального отображения . . . . .	2
§ 2	Частные производные высших порядков . . . . .	3
§ 3	«Многомерный» дифференциал высоких порядков . . . . .	3
§ 4	Формула Тейлора для функций многих переменных . . . . .	3
§ 5	Экстремумы . . . . .	3
§ 6	Понятие о неявной функции . . . . .	4
§ 7	Полнота пространства $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
§ 8	Теорема о сжимающем отображении . . . . .	5
§ 9	Метод Ньютона . . . . .	5
§ 10	Теорема об обратном отображении(формулировка) . . . . .	5
§ 11	Доказательство теоремы об обратимости . . . . .	6
§ 12	Теорема о дифференцируемости обратного отображения . . . . .	7
§ 13	Теорема о гладкости обратного отображения . . . . .	8
§ 14	Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов . . . . .	8
§ 15	Теорема о неявном отображении . . . . .	9
§ 16	Функциональная зависимость системы функций . . . . .	10
§ 17	Геометрический смысл ранга матрицы Якоби . . . . .	12
§ 18	Три способа локального задания поверхности . . . . .	12
§ 19	Условный экстремум(нестрого) . . . . .	13
§ 20	Доказательство теоремы об условном экстремуме . . . . .	13
	Использованная литература . . . . .	14

# Глава 1: Анализ в $\mathbb{R}^n$

## § 1 Оценка приращения дифференциального отображения

**Утверждение 1.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ . Тогда формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

не работает.

**Е.г.** Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), \quad b - a = 2\pi$$

**Теорема 2** (об оценке приращения отображения). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G$  — выпуклое,  $f$  — дифференцируема,

$$\forall x \in G \quad \|f'(x)\| \leq M$$

Тогда  $\forall a, b \in G \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где <sup>1</sup>

$$\begin{array}{lll} \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что  $F$  — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists c \in [0, 1]: F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим  $\varphi(c)$  за  $x$ ):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leq \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$dL(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1.  $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2.  $\psi(y) = \langle y, \ell \rangle, \|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leq M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

---

<sup>1</sup>Вот тут как раз нужна выпуклость, иначе отрезок  $[a; b]$  может и не лежать в  $G$

## § 2 Частные производные высших порядков

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , существуют производные  $k$ -го порядка. Тогда

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{k+1} f(x) := \partial_{i_{k+1}} (\partial_{i_1, \dots, i_k}^k f)(x)$$

*Замечание 1.*  $C^p(G)$  — класс функций, определённых в  $G$  с непрерывной производной до  $p$ -го порядка включительно. Функции из  $C^1$  ещё называются гладкими.

**Теорема 1** (Зависимость производных  $p$ -го порядка от перестановки переменных). Пусть  $f \in C^p(G)$ ,  $x \in G$ . При этом

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \partial_i^p f(x) = \partial_j^p f(x)$$

*Замечание 1.* Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

## § 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^p(G)$

$$d^p f(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

**Утверждение 1.** Если частные производные можно переставлять, то

$$d^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

## § 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^p(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in G$ . Пусть также  $h \in \mathbb{R}^n$ :  $a + h \in G$ . Тогда

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток  $R_p(h)$  можно представить несколькими способами:

1. В форме Пеано:  $R_p(h) = o(\|h\|^p)$
2. В форме Лагранжа:  $R_p(h) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta h, h)$ ,  $\theta \in (0, 1)$

## § 5 Экстремумы

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G$ . Тогда говорят, что  $f$  имеет в  $a$  максимум (нестрогий), если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leq f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколота, то максимум — строгий. Для минимума нужно  $\geq$ .

**Теорема 1** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $a$  внутренняя точка  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(a)$ . Тогда если  $f$  имеет в  $a$  экстремум, то

$$df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad \partial_i f(a) = 0$$

**Теорема 2** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $a \in G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a$  — внутренняя точка,  $f \in C^2(a)$ .

1.  $df(a) = 0, d^2f(a) > 0 \Rightarrow f$  имеет в  $a$   $\min$
2.  $df(a) = 0, d^2f(a) < 0 \Rightarrow f$  имеет в  $a$   $\max$
3.  $df(a) = 0, d^2f(a) \leq 0 \Rightarrow$  ничего нет
4.  $df(a) = 0, d^2f(a) \leq 0 \Rightarrow f$  не имеет в  $a$   $\min$
5.  $df(a) = 0, d^2f(a) \geq 0 \Rightarrow f$  не имеет в  $a$   $\max$

## § 6 Понятие о неявной функции

**Определение 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Пусть  $a = (x_0, y_0)$  удовлетворяет (1.1), а  $U$  — окрестность  $a$ :  $U = U_x \times U_y$ . Тогда будем говорить, что уравнение (1.1) определяет неявную функцию  $f$  в  $U$ , если

$$\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0 \quad (y = f(x))$$

**Теорема 1** (О неявной функции). Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in C^1(x_0, y_0)$ , а  $a = (x_0, y_0)$ :

1.  $F(x_0, y_0) = 0$
2.  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда  $\exists P(x_0), Q(y_0)$ : в  $U = P \times Q$  уравнение (1.1) задаёт неявную функцию  $f: P \rightarrow Q$ . При этом

$$f \in C^1 \wedge f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

□

1. (Доказательство существования)

Рассмотрим  $\varphi(y) = F(x_0, y)$ . Пусть НУО  $F'_y(x_0, y_0) > 0$ . Тогда

$$\exists U_\varepsilon(x_0, y_0): \forall x, y \in U \quad F'_y(x, y) > 0$$

Обозначим соответствующие проекции  $U$  (шар) на координатные оси за  $U_x, U_y$ . Получается, что  $\varphi \uparrow U_y = (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exists V_1(x_0): \forall x \in V_1 \quad F(x, y_0 + \varepsilon) &> 0 \\ \exists V_2(x_0): \forall x \in V_2 \quad F(x, y_0 - \varepsilon) &< 0 \\ P &= V_1 \cap V_2 \end{aligned}$$

Тогда из теоремы Больцано-Коши и монотонности  $\varphi$

$$\forall x \in P \exists! y \in Q = U_y: F(x, y) = 0$$

В итоге получилось определение неявной функции.

2. Непрерывность в  $(x_0, y_0)$  вроде очевидна, мы же каждому  $x$  из  $P$  сопоставили 1  $y$  из  $Q$ . Принадлежность классу  $C$  можно установить проведя аналогичные рассуждения для  $x \in P(x_0)$
3. С гладкостью что-то странное. Можно наверное сделать как в Зориче.
4.  $F(x, f(x)) \equiv 0 \Rightarrow F'_x \cdot 1 + F'_y f'(x) = 0$

■

## § 7 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

## § 8 Теорема о сжимающем отображении

**Определение 1.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда отображение  $T: X \rightarrow X$  называется сжимающим, если

$$\exists C \in (0, 1): \forall x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leq C \cdot \rho(x', x'')$$

**Теорема 1 (Банах).** Пусть  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство, а отображение  $T: X \rightarrow X$  — сжимающее. Тогда  $\exists! x_* \in X: Tx_* = x_*$  (неподвижная точка).

*Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:*

$$\forall x_0 \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x_*$$

## § 9 Метод Ньютона

ПОТОМ

## § 10 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть  $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать  $F^{-1}$ .

Рассмотрим, например, линейное отображение.

[illegible]

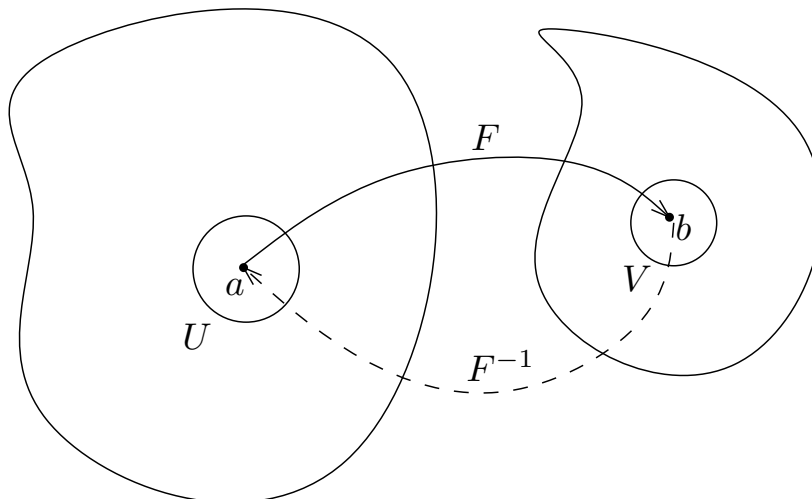
Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть  $a \in G$ ,  $b = F(a)$

$$(?)\exists U(a), V(b) : F : U \leftrightarrow V$$



$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \quad (1.1)$$

$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \quad (1.2)$$

$$dF(a) = dy(b) \quad (1.3)$$

Условие разрешимости (1.3) —  $\det(F'(a)) \neq 0$ . Утверждается, что (1.3)  $\Rightarrow$  (1.1)

Соответственно, формулировка

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a \in G$ ,  $b = F(a)$ . Пусть ещё  $F \in C^1$ ,  $\det(F'(a)) \neq 0$   
Тогда

$$\exists U(a), V(b) : F: U \leftrightarrow V$$

$$\exists F^{-1}V \rightarrow U, F^{-1} \in C^1$$

## § 11 Доказательство теоремы об обратимости

□ (Теорема об обратимости отображения) Введём обозначения:

$$F'(a) = \Gamma$$

$$\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y)$$

Нетрудно заметить, что  $x$  — неподвижная точка  $\Phi$  (что  $\Leftrightarrow F(x) = y$ ). Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (1.8.1). Тогда отображение в окрестности  $a$  будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим  $\|\Phi'\|$ .

$$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

Можно норму оценить

$$\|\Phi'(x)\| = \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|F'(a) - F'(x)\|$$

Последний множитель явно  $\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  (так как  $F \in C^1$ ) Тогда и  $\|\Phi'(x)\| \rightarrow 0$ . А значит найдётся  $U_\varepsilon(a)$ :  $\|\Phi'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ .

Тогда по теореме 1.1.2

$$x, x' \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри  $U_\varepsilon$  компакт  $\overline{U_{\varepsilon_1}}$  (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\exists \overline{U}: \Phi(U) \subset U$$

Попутно примем  $\|y - b\| < \delta$ , это потом поможет доказать непрерывность.

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - a\| &= \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\| \\ &\leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot (\underbrace{\|F(x) - F'(a)(x - a) - F(a)\|}_{\alpha} + \|y - b\|) \end{aligned}$$

Выберем произвольный  $\varepsilon$ :  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ .

Однако мы ещё можем подкрутить  $\varepsilon_1$ .

$$\exists U_{\varepsilon_1}: \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (1.4.1), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем  $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$ . Там правда  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon_1$ .

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\dots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x - a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим  $\|x - a\| \leq \varepsilon$  (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists! x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a) : \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность  $a$  с прообразом  $V(b) : U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность:

$$\forall U \exists V_\delta(b) : F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

■

## § 12 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

**Теорема 1** (о дифференцируемости  $F^{-1}$ ). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : U \leftrightarrow V$ . Пусть также  $F$  — дифференцируемо в  $a \in U$ ,  $F(a) = b$ ,  $\det F'(a) \neq 0$ . Тогда  $F^{-1}$  дифференцируемо в  $b$ .

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть  $y = F(x)$ . Обозначим:  $h = x - a$ ,  $k = y - b$ . Отображение биективно, значит  $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ . Из дифференцируемости  $F$

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha\alpha = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$ , следовательно  $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что  $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k) \quad (k \rightarrow 0)$

$$\beta \leq \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leq \frac{\|h\|}{\| \|Ah\| - \|\alpha\| \| \|} = \frac{1}{\left| \frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|} \right|}$$

А последнее выражение ограничено при  $\|h\| < \delta$

■

**Следствие.**  $(F^{-1})'(b) = (F'(a))^{-1}$



### § 13 Теорема о гладкости обратного отображения

**Теорема 1.** Пусть  $F: U \leftrightarrow V$ , биективна,  $\in C^p$ . Пусть к тому же  $\det F'(x) \neq 0$ . Тогда  $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$

$$(F^{-1})'(y) = \left( \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что  $B = A^{-1}$ . Из алгебры  $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$  (здесь  $\mathcal{A}$  — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что  $b_{ij}$  — рациональная функция от  $\{a_{lk}\}$ . Следовательно,  $\widehat{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \dots, a_{kl}, \dots, a_{nn}) \in C^\infty$ . С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(F(x)) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что  $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$ .

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \dots, a_{kl}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая  $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$ . Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = (\overline{b_{ij}} \circ F^{-1})(y)$$

Раньше доказали, что  $F^{-1} \in C^0$ . Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные  $F^{-1}$  принадлежат  $C^i$ . Тогда сама  $F^{-1} \in C^{i+1}$ . Таким бобром мы доберёмся до  $C^p$ . Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости  $\overline{b_{ij}}$ . ■

### § 14 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

**Теорема 1.** Пусть  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  имеет  $n$  корней  $(x_j^0)$ ,  $x_j^0 \in \mathbb{R}$ , таких что  $\forall i, j \ x_i^0 \neq x_j^0$ . Тогда

$$x_i = x_i(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть  $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ . Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n x_1 \cdots x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= (-1) \sum_i x_i \end{aligned}$$

Рассмотрим  $P$  как отображение  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \dots\dots\dots & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем  $\det(F')$ . Этот определитель можно рассмотреть как многочлен  $\in R[x_1, \dots, x_n]$ . Его степень не превосходит  $0+1+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ . Заметим, что если хоть какая-то пара столбиков равны, то определитель равен нулю. Так что  $\det(F')$  делится на всевозможные многочлены вида  $x_i - x_j$ . А их как раз  $\frac{n(n-1)}{2}$  и они неприводимые. Следовательно,

$$\det(F')(x_1, \dots, x_n) = C \prod_{i \leq j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой. <sup>1</sup>

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

## § 15 Теорема о неявном отображении

20:07 2016-10-15

**Определение 1.** Пусть  $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Пусть  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y^0 \in \mathbb{R}^k$  такие, что  $F(x^0, y^0) = 0$ .

Тогда если  $\exists P(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q(y^0) \subset \mathbb{R}^m$ , такие что

$$\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0$$

то говорят, что уравнение (1.1) задаёт неявную функцию  $f: P \rightarrow Q$ .

Сначала всякие комментарии.

[illegible]

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases} \mathrm{d}F_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \mathrm{d}F_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial u_i} \mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \mathrm{d}x_j. \end{cases} \quad (1.2)$$

При этом  $dy_j$  мы хотим выразить через  $dx_j$ . Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1.  $k = m$
2.  $\det \left( \frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right) \neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (1.2)  $\Rightarrow$  (1.1).

**Теорема 1** (Теорема о неявном отображении). Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in C^p$ ,  $p \geq 1$ .

$$F(x, y) = 0, \quad (x_0, y_0) \in G$$

1.  $F(x_0, y_0) = 0$
2.  $\det F'_u(x_0, y_0) \neq 0$

<sup>1</sup>Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

Тогда  $\exists P(x_0), Q(x_0)$ , такие, что (1.1) задаёт неявное отображение  $f: P \rightarrow Q$ . При этом  $f \in C^p$  и

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

□ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [1, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1.  $\Phi: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Работает как-то так:

$$(x, y) \mapsto (u, v), \quad \begin{cases} u = x, & u \in \mathbb{R}^n \\ v = F(x, y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

2.  $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  такого сорта  $x \mapsto (x, 0)$

3.  $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  такого сорта  $(x, y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель  $\Phi'(x, y)$ . Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x, y) = \left( \begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right) \Rightarrow \det(\Phi'(x_0, y_0)) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (1.10.1)  $\exists \Phi^{-1}(x_0, y_0)$  и ещё окрестности  $U(x_0, y_0), V(x_0, 0)$ . Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \cap Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях  $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$ . Вполне очевидно, что  $f \in C^p$ . Ну  $i, \pi \in C^\infty$ ,  $\Phi^{-1} \in C^p$ .

К тому же

$$\forall x \in P \quad x \xrightarrow{i} (x, 0) \xrightarrow{\Phi^{-1}} (x, y) \xrightarrow{\pi} y \in Q$$

При этом такой  $y$  — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение  $f$ .

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию  $F'_y$  — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

■

## § 16 Функциональная зависимость системы функций

**Определение 1.** Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции,  $x_0 \in G$ . Тогда эти функции называются функционально зависимыми в  $V(x_0)$ , если

$$\exists \varphi: U(f(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^1 : g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

**Определение 2.** Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально независимыми, если определение выше не выполняется ни для какой  $V \subset G$

*Замечание.* Тут лажа какая-то с определениями, не отрицание же нифига.

**Теорема 1.** (о функциональной зависимости) Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции. К тому же  $a \in G$ ,  $f = (f_i)_i$ ,  $y = f(x)$ ,  $\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix} = m$  в точке  $x \in U(a)$ . Тогда, если

$\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \\ g' \end{pmatrix} = m$  в точке  $x \in U(a)$ , то  $\exists V(a)$  в которой  $g$  функционально зависит от  $f_1, \dots, f_m$ .

□ Пусть сразу  $n \geq m$ , иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там  $m$  векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в  $f'(x)$ ,  $x \in U(a)$  существует ненулевой минор порядка  $m$ . Можно НУО считать, что он соответствует  $\bar{x}$ . Тогда это равносильно тому, что  $\det \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a) \right) \neq 0$ .

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей  $P, Q$  и

$$\exists \varphi: P \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^m, \quad \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях  $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$ . Заметим, что здесь  $y, \bar{\bar{x}}$  — независимые переменные. Так что если  $j > m$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^m \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x), \quad x \in U(a)$$

Нам для того чтобы показать, что  $g$  функционально зависит от  $f$ , необходимо приравнять в окрестности точки  $a$   $g$  к функции от  $y$ . Пусть снова  $j > m$ , тогда

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) \\ \frac{\partial g}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^m \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g \end{aligned}$$

А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности  $a$  — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \right) = 0$$

Из того, что  $g, \varphi$  — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 1.16.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

## § 17 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

**Определение 1** (Коразмерность). Пусть  $V$  — подпространство  $U$ . Тогда  $\text{codim } V = \dim U - \dim V$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in G$ ,  $b = F(a)$ ,  $\exists V(a): \forall x \in V \text{ rk } F'(x) = r$ . Тогда

1.  $\exists U(a): F(U)$  имеет вид графика  $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$
2.  $\exists U(a) \subset F^{-1}(b)$  имеет вид графика  $\bar{x} = \psi(\bar{x})$

□ Аккуратное следствие 1.16.1 и 1.15.1. ■

*Замечание.* Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

Есть кстати шансы, что в этой теореме попутно определили размерность образа при отображении, но неточно. Собственно, график  $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$  можно считать заданным на  $y \in \mathbb{R}^m$ , которое уже «прямое», а дальше размерностью объявить  $\dim\{\bar{y}\}$ .

## § 18 Три способа локального задания поверхности

1. Параметрическое

$$f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n : \text{rk } f' = k \forall x \in D (\geq k)$$

Тогда  $M = f(D)$  — поверхность размерности  $k$ .

Условие на ранг означает, что нигде нету изломов, параметр же по сути — скорость.

2. Задание графиком

$$D \subset \mathbb{R}^k, f: D \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ — гладкое}$$

Тогда  $M = \{(t, f(t)) \mid t \in D\} = \Gamma_f$ .

**Определение 1** (Поверхность(нестрого)). Множество  $S \subset \mathbb{R}^m$  можно называть  $k$ -мерной гладкой поверхностью, если в окрестности любой своей точки оно задаётся графиком гладкого отображения  $f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .

3. Неявное

Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Тогда

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

По сути уравнения связи.

**Теорема 1.** Если в некой окрестности  $a \in \mathbb{R}^n$   $k$ -мерная поверхность может быть задана один из 3 способов, то она может быть задана и всеми остальными.

□

1  $\rightarrow$  2 см 1.17.1

2  $\rightarrow$  3  $F(t, y) = f(t) - y$ ,  $F' = (f'_t \mid -E) \Rightarrow \text{rk } F' = n - k$

3  $\rightarrow$  2 см 1.17.1

2  $\rightarrow$  1  $(x, y) \mapsto (x(t), f(x(t)))$ , где  $t = x$ . С рангами очевидно проблем нет.

■

## § 19 Условный экстремум(нестрого)

**Определение 1** (Безусловный экстремум). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G$  — внутренняя точка. Тогда в точке  $a$   $\max / \min$  если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

**Определение 2** (Экстремум на подмножестве). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерная поверхность,  $a \in G \cap M$  — внутренняя точка. Тогда в точке  $a$   $\max / \min$  относительно  $M$ , если

$$\exists U(a): \forall x \in U \cap M \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

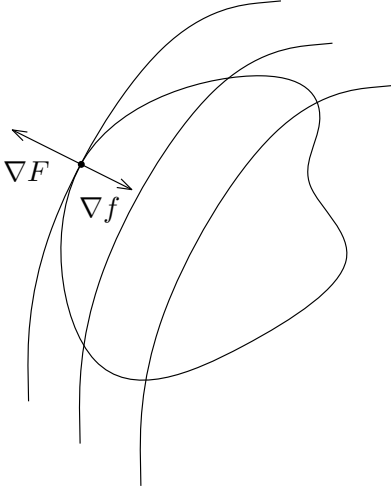
Чаще всего  $M$  задают неявно — «накладывают условия» на значения  $f$ .

**Определение 3** (Условный экстремум). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1, \dots, F_m: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G \cap M$  — внутренняя точка,  $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$ . Тогда в точке  $a$  *условный*  $\max / \min$  если

$$\exists U(a): \forall x \in U, F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0 \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

**Теорема 1.** Пусть  $f, F_1, \dots, F_m \in C^1(G)$ ,  $a \in G$ . Тогда если  $f$  имеет в  $a$  экстремум при условии  $F(a) = 0$ , то  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — линейно зависимы.

**Е.g.** Можно двумерный случай рассмотреть.



$$\nabla f = \lambda \nabla F$$

**Следствие 1** (Правило Лагранжа).  $f$  имеет в  $a$  экстремум при условии  $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$ , то

1. либо  $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  ЛЗ
2. либо  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i(a)$

## § 20 Доказательство теоремы об условном экстремуме

□

1. Пусть  $m = n - 1$ . Будем доказывать от противного. Пусть в  $a$  условный  $\max$ , но  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — ЛНЗ.

Рассмотрим  $\Phi(x) = (f(x), F_1(x), \dots, F_m(x))$ . Тогда такое  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Из линейной независимости градиентов

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix}, \quad \det \Phi'(a) \neq 0$$

Пусть  $b = \Phi(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$ . Тогда по теореме об обратном отображении (1.13.1)

$$\exists U(a), V(b) : \Phi : U \rightarrow V \text{ — диффеоморфизм}$$

Пусть  $V \supset B_\varepsilon(b)$ ,  $y = (f(a) + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in V$ , тогда  $\exists! x \in U : \Phi(x) = y$ . Получается, что  $f(x) > f(a)$ ,  $\forall i F_i(x) = 0$ , что немного противоречит тому, что в  $a$  условный тах.

2. Теперь рассмотрим случай  $m < n - 1$  (всё остальное неинтересно, точно будет ЛЗ).

Будем доказывать от противного. Пусть в  $a$  условный тах, но  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — ЛНЗ. Тогда  $\text{rk } \Phi'(a) = m + 1 < n$ . Добавим ещё функций  $F_{m+1}, \dots, F_{n-1}$  таких, что  $F_i(x) = x_{i+1} - ai + 1$ .

Введём ещё стандартное обозначение

$$x = (\underbrace{x, \dots, x_{m+1}}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+2}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}})$$

И не совсем стандартное

$$A = \frac{\partial(f_1, F_1, \dots, F_m)}{\partial x_1, \dots, x_{m+1}}(a)$$

Обычно такой «дробью» обозначают якобиан, но, пожалуй, сохраню обозначения с лекции.

Итак

$$\Phi'(a) = \left( \begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & E_{n-m-1} \end{array} \right) \Rightarrow \text{rk } \Phi'(a) = n$$

А теперь можно подвести всё к первому пункту. Рассмотрим  $\widetilde{M} = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$  (а  $M = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$ ). Поскольку  $\widetilde{M} \subset M$ ,  $f$  будет иметь в  $a$  максимум и относительно  $\widetilde{M}$ .

Аналогично 1 пункту получаем бред какой-то.

■

*Замечание 1.* Такая теорема может найти лишь точки, «подозрительные» на экстремум. Надо ещё отдельно думать. Например, вдруг там на компакте всё определено.

*Замечание 2.* Можно рассматривать функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x)$$

Тогда если в  $a$  условный экстремум, то в  $a$  стационарная точка ( $\mathcal{L}'(a) = 0$ ) функции Лагранжа.

## Литература

- [1] Зорич В. А., Математический анализ. Часть I — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [2] Зорич В. А., Математический анализ. Часть II — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трёх томах. Том II. — СПб.: Издательство «Лань», 1997. — 800 с.