

<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин  
Записал :**ta<sub>x</sub>us**

1 июня 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория меры и интегралы по мере</b>	<b>2</b>
§ 1	Системы множеств . . . . .	2
§ 2	Борелевская сигма-алгебра . . . . .	2
§ 3	Мера . . . . .	3
§ 4	Свойства меры . . . . .	4
§ 5	Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега . . . . .	5
§ 6	Измеримые функции . . . . .	6
§ 7	Интеграл по мере . . . . .	7
§ 8	Теорема Бешпо Лёви . . . . .	7
§ 9	Свойства интеграла от суммируемых функций . . . . .	8
§ 10	Счётная аддитивность интеграла . . . . .	8
§ 11	Абсолютная непрерывность интеграла . . . . .	8
§ 12	Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега . . . . .	9
§ 13	Сравнение подходов Римана и Лебега . . . . .	9
§ 14	Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега . . . . .	9
§ 15	Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью . . . . .	10
§ 16	Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению . . . . .	10
§ 17	Интеграл Эйлера-Пуассона . . . . .	11
§ 18	Вероятностный смысл меры . . . . .	11
§ 19	Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери . . . . .	11
§ 20	Сведение кратного интеграла к повторному . . . . .	12
§ 21	Мера Лебега и аффинные преобразования . . . . .	13
§ 22	Мера образа при гладком отображении . . . . .	13
§ 23	Правильная замена переменной в интеграле . . . . .	13
§ 24	Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	13
§ 25	Теорема Лебега об ограниченной сходимости . . . . .	14
<b>A</b>	<b>Обозначения</b>	<b>15</b>

# Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

## § 1 Системы множеств

**Определение 1.** Пусть здесь (и дальше)  $X$  — произвольное множество. Тогда  $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$  — множество всех подмножеств  $X$ .

**Е.г.**  $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$  (это количество элементов, если что)

**Определение 2** (Алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  — алгебра множеств, если

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $X \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

*Замечание.* Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь  $\infty \notin \mathbb{N}$ .

**Определение 3** ( $\sigma$ -алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, если

1.  $\mathcal{A}$  — алгебра
2.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

**Определение 4.** Пусть  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

## § 2 Борелевская сигма-алгебра

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{O}$  — все открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2** (Ячейка в  $\mathbb{R}^n$ ). Обозначать её будем  $\Delta^n$ , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру  $\mathcal{A} = \text{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

**Теорема 2.**  $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$ .

**Пример 1.** Все множества ниже — борелевские.

⟨1⟩  $\mathcal{O}$ .

⟨2⟩  $\mathcal{F} = \{A \mid \bar{A} \in \mathcal{O}\}$ .

⟨3⟩  $\left( A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$ .

⟨4⟩  $\left( B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$ .

⟨5⟩  $\left( C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$ .

У всех этих множеств со сложными индексами  $\delta$  — пересечение,  $\sigma$  — объединение,  $G$  — операция над открытыми в самом начале,  $F$  — над замкнутыми.

### § 3 Мера

**Определение 1.** Пусть задано  $X$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$  — мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2.  $\mu \left( \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ \text{алгебра}}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ . Здесь никто не обещает, что будет именно  $\sigma$ -

Множества  $A \in \mathcal{A}$  в таком случае называются  $\mu$ -измеримыми.

**Пример 1.**  $a \in X$ ,  $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$  —  $\delta$ -мера Дирака.

**Пример 2.**  $a_k \in x$ ,  $m_k \geq 0$ ,  $\mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$  — «молекулярная» мера.

**Пример 3.**  $\mu(A) = \#A$  — считающая мера. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>она считает, не считывает ☺

## § 4 Свойства меры

Здесь всюду будем рассматривать тройку  $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

**Утверждение 1** (Монотонность меры). Пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ .

Тогда  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset B$ ,  $\mu(B) < +\infty$ .

Тогда  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

**Утверждение 3** (Усиленная монотонность). Пусть  $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$ ,  $A_{1..n} \subset B$  и дизъюнкты.

Тогда  $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu B$

**Утверждение 4** (Полуаддитивность меры). Пусть  $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$ ,  $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

Тогда  $\mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$ .

▼

Сделать  $B_k$  дизъюнктными:  $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$ . Затем представить  $A$  как дизъюнктное объединение  $D_k$ :  $D_k = C_k \cap A$ . Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$

▲

**Утверждение 5** (Непрерывность меры снизу). Пусть  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ ,

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .<sup>1</sup>

Тогда  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$

**Утверждение 6** (Непрерывность меры сверху). Пусть  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ ,

$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ ,  $\mu A_1 < +\infty$ .

Тогда  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$

<Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса>

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ . Тогда  $\mu$  — полная, если

$$\forall A \in \mathcal{A}: \mu A = 0 \iff \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} :: \mu B = 0$$

**Определение 2.** Мера  $\mu$  на  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty :: \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

<sup>1</sup>Опять-таки никто не сказал, что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра.

**Определение 3.** Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  — сигма-алгебры подмножеств  $X$ ,  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ ,  $\mu_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0; +\infty]$ ,  $\mu_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0; +\infty]$ . Тогда  $\mu_2$  называется продолжением  $\mu_1$ .

**Теорема 7** (Лебега-Каратеодора). Пусть  $\mu$  — сигма-конечная мера на  $\mathcal{A}$ . Тогда

1. Существуют её полные сигма-конечные продолжения
2. Среди них есть наименьшее:  $\bar{\mu}$ . Её ещё называют стандартным продолжением.

<идея доказательства> Пока надо запомнить, что стандартное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

## § 5 Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега

**Определение 1.** Пусть  $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ ,  $\Delta_k = [a_k, b_k]$ . Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v \Delta \stackrel{(\in \mathbb{R}^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что  $\in \mathcal{Cell}_n$ , представим его в виде дизъюнктного объединения  $\Delta_j$ . Тогда  $vA := \sum_{j=1}^q v\Delta_j$ .

*Замечание.* Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

**Теорема 1.**  $v$  — конечно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^p A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^p vA_k$$

**Теорема 2.**  $v$  — счётно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

**Определение 2** (Мера Лебега).  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$ . Тогда  $\lambda_n = \bar{v}_n$ ,  $\mathcal{M} = \bar{\mathcal{A}}$  — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

### Свойства меры Лебега

- (1)  $\triangleright \lambda\{x\} = 0$
- (2)  $\triangleright \lambda(\{x_k\}_k) = 0$
- (3)  $\triangleright \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$
- (4)  $\triangleright L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теорема.

**Теорема 3** (Регулярность меры Лебега). Пусть  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} :: F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

<Пример неизмеримого множества на окружности>

## § 6 Измеримые функции

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Пусть ещё  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  называется измеримой относительно  $\mathcal{A}$ , если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f$  измеримо относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества

**1 типа**  $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

**2 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \equiv X[f \leq a]$

**3 типа**  $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

**4 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \equiv X[f \geq a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то  $f$  измерима.

**Теорема 2.** Пусть  $f_1, \dots, f_n$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$  и  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда измерима и  $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

*Замечание.* В частности,  $f_1 + f_2$  измерима.

**Теорема 3.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы  $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$ . Последний, правда, может не существовать.

□ Следует из непрерывности меры. ■

**Определение 2.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

**Определение 3** (Индикатор множества).

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

**Утверждение 4.**  $f$  — простая  $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}$

**Теорема 5.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $f \geq 0$ . Тогда

$$\exists (\varphi_n): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots :: \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

## § 7 Интеграл по мере

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ ,  $f$  — измерима.

[1]  $f$  — простая.

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu E_k$$

[2]  $f \geq 0$ .

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

[3]  $f$  общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

*Замечание 1.*  $\int_A f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A)$

*Замечание 2.* Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость  $f$  будет периодически называться «обычными» условиями.

**Утверждение 1.**  $\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$ .

**Свойства интеграла от неотрицательных функций** Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$$\boxed{A_1} \quad 0 \leq f \leq g. \text{ Тогда } \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

$$\boxed{A_2} \quad A \subset B \subset X, A, B \in \mathcal{A}, f \geq 0, \text{ измерима. Тогда } \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$$

$$\boxed{A_3} \quad \text{см теорему 1.8.1.}$$

$$\boxed{A_4} \quad \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

$$\boxed{A_5} \quad \int_X (\lambda g) \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$$

## § 8 Теорема Беппо Лёви

**Теорема 1.** Пусть  $(f_n)$  — измеримы на  $X$ ,  $0 \leq f_1 \leq \dots$ ,  $f = \lim_n f_n$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$



## § 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

**Определение 1.**  $f$  — суммируемая (на  $X, \mu$ ), если  $\int_X f d\mu < \infty$ . Весь класс суммируемых (на  $X, \mu$ ) функций обозначается через  $\mathcal{L}(X, \mu)$ .

Здесь всюду функции  $\in \mathcal{L}$

$$\boxed{B_1} \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_2} \quad \int_X (f \pm g) d\mu = \int_X f d\mu \pm \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_3} \quad \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

$$\boxed{B_4} \quad |f| \leq g \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_5} \quad \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

$$\boxed{B_6} \quad f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

$$\boxed{B_7} \quad |f| \leq M \leq +\infty \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq M\mu X$$

## § 10 Счётная аддитивность интеграла

**Теорема 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f$  — измерима и  $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}$ . Пусть  $\kappa$  тому же

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

## § 11 Абсолютная непрерывность интеграла

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :: \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X: \mu A < \delta :: \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon$$

## § 12 Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C([a; b])$ ,  $\lambda$  — мера Лебега на  $X = [a; b]$ . Тогда

$$f \in \mathcal{L}, \quad \int_{[a; b]} f \, d\mu = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

где  $F$  — первообразная  $f$ .

## § 13 Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

**Определение 1** (Интеграл Римана). Пусть  $f \in C([a; b])$   $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ . Тогда

- $\tau = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  — разбиение отрезка  $[a; b]$
- $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  — оснащение разбиения  $\tau$
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  — длина  $i$ -го отрезка
- $r = r(\tau) = \max_i \{\Delta x_i\}$  — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{r(\tau) \rightarrow 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

**Определение 2** (Интеграл Лебега). см. 1.7.1. В качестве множества  $X$  понятное дело, отрезок  $[a; b]$ .

**Пример 1.** Пусть  $X = [0; 1]$ . Тогда  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

<картинка с обоими интегралами>

## § 14 Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

**Теорема 1.** Пусть  $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}([a; b], \lambda)$ . Тогда  $\int_{[a; b]} f \, d\lambda = \int_a^{\rightarrow b} f$ .

□ ✂ Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

## § 15 Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

**Теорема 1.** Пусть  $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$ ,  $\{a_k\} \in X$  и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  или  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ ✂ Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

**Пример 1.** Пусть  $\mu A = \#A$ . Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}^2} f(m, n) d\mu$$

Причем условия суммируемости <sup>1</sup> ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[ \begin{array}{l} \forall m, n \in \mathbb{N} :: a_{m,n} \geq 0 \\ \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{array} \right]$$

**Определение 1.** Пусть задана пара <sup>2</sup>  $(X, \mu)$ ,  $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\rho \geq 0$ . Тогда

- $\nu(E) := \int_E \rho d\mu$  — мера, задаваемая плотностью  $\rho$
- $\rho$  — плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

*Замечание.* Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

**Теорема 2.** Пусть выполнены «обычные» условия на  $f$ . Тогда  $\int_X f d\nu = \int_X f \rho d\mu$ .

## § 16 Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

**Определение 1.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \nearrow$ ,  $F(x) = F(x-0)$  (непрерывна слева).<sup>3</sup> Рассмотрим порождённую полуинтервалами  $[a; b) \subset I$   $\sigma$ -алгебру. Введём «объём»  $\nu_F: \nu([a; b)) = F(b) - F(a)$ .

Тогда мера Лебега-Стилтьеса  $\mu_F$  — стандартное продолжение  $\nu_F$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{M}_F$ .

*Замечание 1.* Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать  $\nu$ , если она — не мера?

### Свойства меры Лебега-Стилтьеса

**Утверждение 1.** Пусть  $\Delta = [a; b]$ . Тогда  $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $\Delta = \{a\}$ . Тогда  $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $\Delta = (a; b)$ . Тогда  $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$ .

<sup>1</sup> здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

<sup>2</sup>тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

<sup>3</sup>А можно и без. Тогда  $\nu([a; b)) = F(b-0) - F(a-0)$ , см. ??

**Лемма 4.** Пусть  $F \in C(I)$ ,  $\Delta \subset I$ . Тогда  $\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F'(t) d\lambda$ .

**Теорема 5.** Пусть  $F \nearrow$ , кусочно-гладка на  $I \subset \mathbb{R}$ , а для  $f$  выполнены обычные условия ( $X = \mathcal{B}$ ,  $\mu = \mu_F$ ). Промежутки гладкости  $F$  обозначим за  $(c_k, c_{k+1})$ . Тогда

$$\int_X f d\mu_F = \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} f F' d\lambda + \sum_k f(c_k) \underbrace{\Delta_{c_k} F}_{\text{скачок в } c_k}$$

**Определение 2** (Образ мемы). Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с мемой,  $f: X \rightarrow Y$ . Превратим и  $Y$  в пространство с мемой.

1.  $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ .
2.  $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$ .

**Теорема 6.** Пусть для  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  выполнены обычные условия ( $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ,  $\mu = \nu$ ). Тогда  $\int_Y g d\nu = \int_X (g \circ f) d\mu$ .

**Определение 3** (Функция распределения). Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $\mu X < +\infty$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $F(t) := \mu X[f < t]$ . Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

**Теорема 7.** Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $\mu X < +\infty$ , выполнены обычные условия для  $f$ . Тогда  $\int_X f d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t d\mu_F$ .

## § 17 Интеграл Эйлера-Пуассона

**Утверждение 1.**  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 = \pi$

## § 18 Вероятностный смысл мемы

<Табличка с соответствием>

## § 19 Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

**Определение 1.** Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $P(x)$  — предикат. Говорят, что  $P(x) = 1$  почти везде (п.в.), если  $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$ .

**Определение 2.**  $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  п.в. .

**Лемма 1** (Бешпо-Леви для рядов). Пусть заданы  $(X, \mu)$ ,  $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  измеримы,  $u_n \geq 0$ . Тогда

$$a) \int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu.$$

b) Если эти числа конечны, то ряд  $\sum_n u_n$  с.в. п.в.

**Лемма 2** (Беппо-Леви «вверх ногами»). Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $(f_n)$ , измеримы,  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ . Пусть ещё  $f_1 \in \mathcal{L}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

<+здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>

**Определение 3.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$ .

▷  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$  — «срез»

▷  $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \emptyset\}$  — «проекция»

<+картинка для  $\mathbb{R}^2$ +>

**Теорема 3.** Пусть  $E \in \mathcal{M}_{m+n}$ ,  $E_x \in \mathcal{M}_n$  п.в.  $x$ ,  $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$  измерима относительно  $\mathcal{M}_m$ .

Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m$$

<+много букв+>

**Определение 4** (График).  $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$ .

**Определение 5** (Подграфик).  $\Gamma_-^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}$ .

**Определение 6** (Надграфик).  $\Gamma_+^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(x)\}$ .

**Теорема 4** (Геометрический смысл интеграла). Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\geq 0$ . Тогда

1.  $\Gamma_-^f$  измеримо.

2.  $\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$  измеримо.

## § 20 Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере Лебега через  $dx$  (ну или  $dy$ ), размерность определяется из размерности  $x$ . Ещё обозначим  $d(x, y)$  через  $dx dy$ .

**Теорема 1** (Тонелли). Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

**Теорема 2** (Фубини). Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

## § 21 Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

○ Сдвиг:  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Tx = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ .

○ Поворот с растяжением:  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L$  — линейный император.

**Утверждение 1.**  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$ .

**Утверждение 2.**  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , линейно. Тогда

$$\exists C \geq 0 \forall E \in \mathcal{M} :: \lambda L(E) = C \lambda E$$

**Теорема 4.**  $C$  из прошлой теоремы равно  $|\det[L]|$ .

<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>

## § 22 Мера образа при гладком отображении

**Обозначение.**  $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

**Теорема 1.** Пусть  $E \in \mathcal{M}$ ,  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , гладкая биекция. Тогда  $F(E) \in \mathcal{M}$  и  $\lambda F(E) = \int_E |\det F'(x)| dx$ .

□ ✂ ■

## § 23 Гладкая замена переменной в интеграле

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , гладкая биекция. Пусть к тому же  $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  с обычными условиями.

Тогда

$$\int_E f(y) dy = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)| dx$$

**Пример 1** (Полярные координаты). ✂  $|J| = r$

**Пример 2** (Сферические координаты). ✂  $|J| = r^2 \cos \psi$

## § 24 Предельный переход под знаком интеграла

**Определение 1** (Всякие сходимости). Пусть  $(f_n): X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера на  $X$ .

$$f_n \rightarrow f \quad := \quad \forall x \in X :: f_n(x) \rightarrow f(x)$$

$$f_n \xrightarrow{X} f \quad := \quad \sup_X |f_n - f| \rightarrow 0$$

$$f_n \rightarrow f \text{ п.в.} \quad := \quad \exists N \subset X: \mu(N) = 0 :: \forall x \in X \setminus N :: f_n(x) \rightarrow f(x).$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad := \quad \forall \sigma > 0 :: \mu X[|f_n - f| \geq \sigma] \rightarrow 0$$

**Замечание 1.**  $f \xrightarrow{X} f \Rightarrow f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ п.в.}$  .

**Замечание 2.** Пусть  $\mu X < \infty$ , тогда  $f_n \rightarrow f \text{ п.в.} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

*Замечание 3* (Теорема Рисса).  $f_n \xrightarrow{\mu} f$  п.в.  $\Rightarrow \exists (n_k) :: f_{n_k} \rightarrow f$  п.в. .

**Теорема 1.**  $f_n \xrightarrow{X} f, \mu X < \infty \Rightarrow \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f$

**Теорема 2.** см теорему Бепко-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.

**Теорема 3** (Фату). Пусть заданы  $(X, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$ , измеримы. Тогда

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$

## § 25 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

**Теорема 1.** Пусть снова заданы  $(X, \mu)$ ,  $(f_n)$  измерима,  $f_n \rightarrow f$  п.в. . К тому же

$$\exists \varphi \in \mathcal{L} :: \forall n |f_n| \leq \varphi$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

**Обозначение.**  $(\mathcal{L})$  — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

**Следствие 1.** Её ещё можно формулировать локально и для семейства функций зависящих от вещественного параметра. ✕

**Обозначение.**  $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$  — условия локальной теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

**Следствие 2.** Непрерывность по параметру при выполнении  $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$  ✕

# Глава А: Обозначения

## Обозначения с лекции

$a := b$  — определение  $a$ .

$\bigsqcup_k A_k$  — объединение дизъюнктивных множеств.

$\mathcal{A}$  Алгебра множеств

## Нестандартные обозначения

✂ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \dots \blacksquare$  — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \dots \blacktriangle$  — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\smile$  — кривоватая формулировка

`:set aflame` — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a .. b$  —  $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$  — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$  В кванторах, «верно, что»

$\mathcal{A}_\sigma$  Сигма-алгебра множеств