

## § 1 Аксиоматическое определение вероятности

**Определение 1** ( $\sigma$ -алгебра). Алгеброй  $\mathcal{A}$  подмножеств множества  $\Omega$  называется такой набор его подмножеств с заданными операциями объединения, пересечения и дополнения множеств, что

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{X} \in \mathcal{A}$
3.  $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X_1 \cup X_2$

Сигма-алгеброй подмножеств называется всё тоже самое, только можно объединять счётное число подмножеств.

**Определение 2** (Вероятностное пространство). Рассмотрим упорядоченную тройку  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , где

$\Omega$  — Множество (элементарных исходов). Чисел, например.

$\mathcal{F}$  —  $\sigma$  — алгебра подмножеств  $\Omega$

$P$  — Собственно, вероятность

**Определение 3** (Вероятность).  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

1.  $\forall A \ F(A) \geq 0$
2.  $\forall \{A_i\}: A_i \cap A_j = \emptyset \ P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
3.  $P(\Omega) = 1$

Как видно, сильно похоже на площадь. Что впрочем неслучано, вероятность — нормированная мера. Последнее условие как раз и означает нормированность.

**Определение 4** (Тривиальные события).  $\emptyset, \Omega$ .

**Утверждение 1.** *Свойства вероятности:*

1.  $P(\emptyset) = 0$
2.  $0 \leq P(A) \leq 1$
3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

А это очень важное и будет в отдельном утверждении.

**Утверждение 2** (Непрерывность меры). Пусть  $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ ,  $\bigcup_i A_i = A$ . Тогда  $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ .



Пусть

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i; \quad A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$$



## § 2 Формула полной вероятности

ну мы же делим, нахо  
убедиться что ненуль

**Определение 1** (Условная вероятность). Пусть  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) > 0$ . Тогда

$$P(B | A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

**Утверждение 1.** Пусть  $\{A_i, H\} \subset \mathcal{F}$  и

1.  $P(A_i) > 0$
2.  $A_i \cap A_j = \emptyset$
3.  $\bigcup_i A_i = \Omega$

(полная группа/система событий). Тогда

$$P(H) = \sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)$$

## § 3 Теорема Байеса

**Теорема 1.** Пусть  $A_i$  — полная система событий,  $H \in \mathcal{F}$ :  $P(H) > 0$ . Тогда

$$P(A_k | H) = \frac{P(A_k) \cdot P(H | A_k)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)}$$

## § 4 Независимые события

**Определение 1.** Пусть  $A, B \in \mathcal{F}$ . Они называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Утверждение 1.** События  $A, B$  независимы  $\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A) \vee P(B \mid A) = P(B)$  (в зависимости от того, что определено, вдруг там ноль где-нибудь).

**Утверждение 2.** Если  $A, B$  несовместны, то нетривиальные  $A, B$  — зависимы.

## § 5 Случайные величины и их распределения

**Определение 1** (Случайная величина). Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Тут нужно бы сказать про измеримость, это потребуется, чтобы говорить о вероятности попадания в интервал на прямой. Так что

$$X: (X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}) \in \mathcal{F},$$

где  $B$  — борелевское множество

**Определение 2.** Пусть  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $B$  — промежуток, или дополнение в нему (борелевское множество).

$$P(X \in B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$$

**Определение 3.** Случайная величина называется дискретной, если

$$\exists (\{a_i\} \sim \mathbb{N}): \left( \sum_i P(X = a_i) = 1 \right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i, \quad p_i = P(X = a_i)$$

**Определение 4.** Случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists (f_X: B \rightarrow \mathbb{R}): \left( P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx \right)$$

**Определение 5** (Распределение случайной величины).  $F(B) = P(X \in B)$

**Пример 1** (К непрерывному распределению). Пусть  $X(\omega) = \omega$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $\Omega = (-1; 1)$ . Выберем  $f_X \equiv \frac{1}{2}$ .

$$F(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \mid \omega \in (0, 1)\}) = P((0, 1)) = \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$F(B) = \int_{(0,1)} \frac{1}{2} dx = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Это всё верно, потому что на множестве интервалов вероятность — нормированная длина интервала.

тут вроде концы могут входить, так что точка — тоже борелевское множество.

**Определение 6** (Функция распределения).

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]: F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$$

**Утверждение 1.** Про  $F(x)$  верно следующее:

1.  $F \uparrow \mathbb{R}$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$

**Утверждение 2.** Верно и обратное: если существует функция с указанными свойствами, под неё найдётся случайная величина.

*Замечание.* Если рассматривать обобщённые функции, то любое распределение запишется как

$$\int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

## § 6 Моменты случайных величин

**Определение 1.** Пусть  $X$  — случайная величина,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

Тогда

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} \equiv M X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

**Утверждение 1.** Свойства математического ожидания:

1.  $M < \infty$
2.  $M(aX + bY) = a M X + b M Y$
3.  $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow M X \geq 0$
4.  $\begin{cases} P(X \geq 0) = 1 \\ M X = 0 \end{cases} \Rightarrow P(X = 0) = 1$

5. если  $X, Y$  — независимы, то  $M(XY) = M X \cdot M Y$

**Определение 2.** Момент  $k$ -ого порядка относительно начала  $a$ :

$$\lambda_{k,a} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x) dx$$

(если есть абсолютная сходимость)

**Определение 3.** Начальный момент:  $\nu_k = \lambda_{k,0}$

**Определение 4.** Центральный момент:  $\mu_k = \lambda_{k,\bar{x}}$

**Утверждение 2.**  $\nu_k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i \lambda_{k-i,a}$

**Определение 5** (Дисперсия).  $D X = M(X - M X)^2$ ,  $\sigma = \sqrt{D X}$  — среднеквадратичное отклонение.

**Утверждение 3.**

$$D(aX + bY) = a^2 D X + b^2 D Y$$

если  $X, Y$  — независимы, то  $D(XY) = D X \cdot D Y$

$$D(X + C) = D X$$

## § 7 Характеристическая функция

**Определение 1** (Характеристическая функция).  $\Phi(t) = M e^{itx}$

**Утверждение 1.** Свойства характеристической функции:

1. Всегда существует и  $|\Phi(t)| \leq 1$ .

$$2. f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Phi(t) dt$$

$$3. \Phi_{a+Xb}(t) = e^{ita} \Phi_X(tb)$$

4. Если  $X, Y$  — независимы, то  $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$

5. Если  $M |X|^n < \infty$ , то  $\Phi^{(k)}(0) = i^k M X^k$

**Определение 2** (Сходимость по распределению).  $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x)$

**Теорема 2** (О непрерывном соответствии).  $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{t} \Phi_X(t)$ . Здесь на самом деле всё сложно. В разных книжках пишут равномерную сходимость на разных интервалах. У нас вроде было на всей вещественной прямой, но тогда это слишком сильное утверждение. К слову так же в [?] и [?]. А вот в [?] требуют только сходимости в каждом конечном интервале. Можно взять экспоненту, и понять, что эти условия разные.