§ 1 Определения

Определение 1. Пусть K — поле. Рассмотрим множество V с двумя операциями

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$

Тогда V — линейное пространство над K, если $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \alpha_i \in K$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\exists\, (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x}$
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
8. $(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1(\alpha_2\mathbf{x})$

Определение 2. Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда U — подпространство V.

Определение 3. Пусть V — линейное пространства над K, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Лемма 1. *Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда если U замкнуто относительно $+, \cdot$ из V, то U — подпространство V.*

▼
Формулировка леммы аналогична тому, что всякая линейная комбинация элементов U лежит в нем же. Нужная дистрибутивность, ассоциативность и т.д. унаследуется от соответствующих операций в надпространстве, так как их свойства заданы на всём множестве V, а значит и на подмножестве U. Однако в некоторых свойствах требовалось существование в множестве чего-нибудь. Покажем, что все эти требования равносильны существованию линейной комбинации.

3. $\exists\, \mathbf{0} \in U \Leftarrow \exists\, 0 \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

4. $\exists -\mathbf{x} \in U \Leftarrow \exists\,(-1)\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

▲

Определение 4. Пусть V — линейное пространства над K, $M \subset V$

$$\langle M \rangle = \left\{ \alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n \middle| \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in M \end{cases} \right\}$$

$\langle M \rangle$ — линейная оболочка M.

Лемма 2. *Верны утверждения:*

1. *$\langle M \rangle$ — подпространство V*
2. *$\langle M \rangle = \bigcap\limits_i W_i$, $W_i \supset M$, W_i — подпространство V*

▼
Доказательства очень похожи на соответствующие в теории групп.
▲

§ 2 Линейная независимость системы векторов

Определение 1. Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда если

$$\alpha_1\,\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\,\mathbf{x}_n = 0 \Leftrightarrow \forall\, i\ \alpha_i = 0$$

то система векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независима.