

<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :**taʁus**

31 мая 2017 г.

Оглавление

1	Теория меры и интегралы по мере	2
§ 1	Системы множеств	2
§ 2	Борелевская сигма-алгебра	2
§ 3	Мера	3
§ 4	Свойства меры	4
§ 5	Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега	5
§ 6	Измеримые функции	6
§ 7	Интеграл по мере	7
§ 8	Теорема Бешпо Лёви	7
§ 9	Свойства интеграла от суммируемых функций	8
§ 10	Счётная аддитивность интеграла	8
§ 11	Абсолютная непрерывность интеграла	8
A	Обозначения	9

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X .

Е.г. $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — алгебра множеств, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ -алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — σ -алгебра, если

1. \mathcal{A} — алгебра
2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

§ 2 Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть \mathcal{O} — все открытые множества в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ -алгебра в \mathbb{R}^n .

Определение 2 (Ячейка в \mathbb{R}^n). Обозначать её будем Δ^n , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \text{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$.

Пример 1. Все множества ниже — борелевские.

⟨1⟩ \mathcal{O} .

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \bar{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 3 Мера

Определение 1. Пусть задано X , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu \left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ \text{алгебра}}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ -

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ -измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ -мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geq 0$, $\mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера. ¹

¹она считает, не считывает ☺

§ 4 Свойства меры

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Утверждение 2. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность). Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ и дизъюнкты.

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu B$$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры). Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$.

$$\text{Тогда } \mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k).$$

▼

Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k : $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$

▲

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу). Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.^1$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$,

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \mu A_1 < +\infty.$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

<Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса>

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если

$$\forall A \in \mathcal{A}: \mu A = 0 \iff \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} :: \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на \mathcal{A} называется σ -конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty :: \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

¹Опять-таки никто не сказал, что \mathcal{A} — σ -алгебра.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X , $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0; +\infty]$, $\mu_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1 .

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора). Пусть μ — сигма-конечная мера на \mathcal{A} . Тогда

1. Существуют её полные сигма-конечные продолжения
2. Среди них есть наименьшее: $\bar{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.

<идея доказательства> Пока надо запомнить, что стандартное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

§5 Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v \Delta \stackrel{(\in \mathbb{R}^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \cdot \dots \cdot |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{Cell}_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j . Тогда $vA := \sum_{j=1}^q v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. v — конечно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^p A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^p vA_k$$

Теорема 2. v — счётно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

Определение 2 (Мера Лебега). $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

- (1) $\triangleright \lambda\{x\} = 0$
- (2) $\triangleright \lambda(\{x_k\}_k) = 0$
- (3) $\triangleright \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$
- (4) $\triangleright L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теорема.

Теорема 3 (Регулярность меры Лебега). Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} :: F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

§ 6 Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) . Пусть ещё $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно \mathcal{A} , если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. Пусть f измеримо относительно \mathcal{A} . Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \equiv X[f \leq a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \equiv X[f \geq a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то f измерима.

Теорема 2. Пусть f_1, \dots, f_n измеримы относительно \mathcal{A} и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. Пусть f_1, f_2, \dots измеримы относительно \mathcal{A} . Тогда измеримы $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$. Последний, правда, может не существовать.

□ Следует из непрерывности меры. ■

Определение 2. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества).

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. f — простая $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}$

Теорема 5. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, измерима, $f \geq 0$. Тогда

$$\exists (\varphi_n): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots :: \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

§ 7 Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu E_k$$

[2] $f \geq 0$.

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание. $\int_A f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A)$

Утверждение 1. $\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$.

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$\boxed{A_1}$ $0 \leq f \leq g$. Тогда $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

$\boxed{A_2}$ $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geq 0$, измерима. Тогда $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

$\boxed{A_3}$ см теорему 1.8.1.

$\boxed{A_4}$ $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$

$\boxed{A_5}$ $\int_X (\lambda g) \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

§ 8 Теорема Беппо Лёви

Теорема 1. Пусть (f_n) — измеримы на X , $0 \leq f_1 \leq \dots$, $f = \lim_n f_n$. Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int_X f d\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

$$\boxed{B_1} \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_2} \quad \int_X (f \pm g) d\mu = \int_X f d\mu \pm \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_3} \quad \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

$$\boxed{B_4} \quad |f| \leq g \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_5} \quad \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

$$\boxed{B_6} \quad f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

$$\boxed{B_7} \quad |f| \leq M \leq +\infty \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq M\mu X$$

§ 10 Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. Пусть задана тройка (X, \mathcal{A}, μ) , f — измерима и $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}$. Пусть κ тому же

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu$$

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :: \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X: \mu A < \delta :: \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon$$

Глава А: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a .

$\bigsqcup_k A_k$ — объединение дизъюнктивных множеств.

\mathcal{A} Алгебра множеств

Нестандартные обозначения

✂ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \dots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \dots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

\smile — кривоватая формулировка

`:set aflame` — набирающему зело не нравится билет

`<что-то>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a .. b$ — $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

\equiv — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ В кванторах, «верно, что»

\mathcal{A}_σ Сигма-алгебра множеств