ГЛАВА V
Линейные системы

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Объект изучения.

В этом параграфе будут изучаться вещественная ЛОС

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{5.1}$$

или $y' = P(x)y$, где матрица $P = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ непрерывна на (a,b).

Любое решение ЛОС (5.1) — это непрерывно дифференцируемая на интервале (a,b) n-мерная вектор функция $y = \varphi(x)$, для которой выполняется тождество $\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} P(x)\varphi(x)$.

2^0. Линейная зависимость и независимость решений.

Рассмотрим k произвольных вектор функций $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$, заданных на интервале (a,b). Они линейно зависимы на (a,b), если существует такой постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$, что

$$\alpha_1\psi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k\psi^{(k)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

А если это тождество справедливо только при $\alpha = 0$, то вектор функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$ линейно независимы на (a,b).

Теорема (о линейной зависимости решений ЛОС). *Предположим, что $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ — решения системы (5.1) и имеется такая точка $x_0 \in (a,b)$, в которой векторы $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(k)}(x_0)$ линейно зависимы. Тогда вектор функции $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ линейно зависимы на (a,b).*

3^0. Определитель Вронского (ОВ).

Пусть $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ — произвольные решения системы (5.1), определенные на (a,b). Составим из них квадратную матрицу

$$\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n,$$

т. е. столбцами матрицы $\Phi(x)$ являются решения системы (5.1).

Df. *Функция* $W(x) = \det \Phi(x)$ *называется определителем Вронского (ОВ), построенном на решениях* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *ЛОС (5.1).*

Теорема (о связи между линейной зависимостью решений и ОВ). *Для того чтобы решения* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *ЛОС (5.1) были линейно зависимы на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы построенный на них определитель Вронского* $W(x)$ *обращался в нуль хотя бы в одной точке* $x_0 \in (a, b)$.

Следствие 1. *Для того чтобы* n *решений системы (5.1) были линейно независимы на* (a, b), *необходимо и достаточно чтобы ОВ* $W(x)$ *не обращался в нуль хотя бы в одной точке* $x_0 \in (a, b)$.

4^0. Фундаментальная система решений (ФСР), формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений (ФСР) называют любые* n *линейно независимых на* (a, b) *решений* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *системы (5.1). Составленную из ФСР матрицу* $\Phi(x) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n$ *называют фундаментальной матрицей (ФМ).*

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОС (5.1) существует.*

Df. *ФМ* $\Phi(x)$ *называется нормированной в точке* $x_0 \in (a, b)$, *если* $\Phi(x_0) = E$.

Теорема (об общем решении ЛОС). *Пусть* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *— фундаментальная система решений, тогда непрерывная вектор функция* $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n) = c_1\varphi^{(1)}(x) + \ldots + c_n\varphi^{(n)}(x)$ *является общим решением ЛОС (5.1) в области* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Очевидно, что в векторной записи общее решение ЛОС имеет вид:

$$y = \Phi(x)c.$$

5^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОС). *Пусть набор* $\Theta_1 = \{\varphi^{(1)}(x), \overline{\varphi}^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(l)}(x), \overline{\varphi}^{(l)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, *где* $\varphi^{(j)} = u^{(j)} + \mathrm{i}v^{(j)}$ $(j = \overline{1, l})$, $\varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(1)}$ *вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОС (5.1). Тогда набор* $\Theta_2 = \{u^{(1)}(x), v^{(1)}(x), \ldots, u^{(l)}(x), v^{(1)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ *является вещественной фундаментальной системой решений.*

6^0. Формула Лиувилля.

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(\int_{x_0}^{x} Tr\,P(s)\,ds\Big),$$

где $Tr\,P$ — это след матрицы P.

7^0. Матричные уравнения.

Df. *Матрица $\Phi(x)$, удовлетворяющая матричному уравнению $\Theta' = P(x)\Theta$, называется матричным решением системы (5.1).*

Теорема (о связи между фундаментальными матрицами ЛОС). *Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1), тогда*

1) для любой постоянной квадратной матрицы C матрица $\Psi(x) = \Phi(x)C$ является решением уравнения (5.1^m), причем если $\det C \neq 0$, то $\Psi(x)$ – фундаментальная матрица;

2) для любого матричного решения $\Psi(x)$ системы (5.1) найдется такая постоянная квадратная матрица C, что $\Psi(x) = \Phi(x)C$, причем если $\Psi(x)$ — ФМ, то матрица C — неособая.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. Объект изучения и постановка задачи.

Рассмотрим ЛОС порядка n с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay \qquad (5.1^c),$$

где вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица.

2^0 Подобные матрицы.

Df. *Матрицы A и B, связанные соотношением $B = S^{-1}AS$, называются подобными матрицами, что обозначается так: $A \sim B$.*

Приведем четыре свойства подобных матриц.

1) Эквивалентность.

Утверждение 1. *Отношение подобия является отношением эквивалентности.*

2) Полиномы от матриц.

Df. Функция $P_m(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m = \sum_{k=0}^{m} a_kA^k$ называется полином степени m от матрицы A.

Утверждение 2. *Пусть* $B = S^{-1}AS$, *тогда* $P(B) = S^{-1}P(A)S$.

Доказательство. $P(B) = \sum_{k=0}^{m} a_kB^k = \sum_{k=0}^{m} a_k(S^{-1}AS)^k$. Но $(S^{-1}AS)^k = \underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\ldots(S^{-1}AS)}_{k} = S^{-1}A^kS$, так как

3) Характеристический полином матрицы.

Df. *Функция* $f_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ *называется характеристическим полином матрицы* A.

Утверждение 3. *Если* $A \sim B$, *то* $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$.

4) Жорданова форма матрицы. $J = \mathrm{diag}\,\{J_0, \ldots, J_q\}$,

у которой $J_0 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}\}$ — чисто-диагональная матрица,

$$J_\nu = \begin{pmatrix} \lambda_\nu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\nu & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_\nu & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_\nu \end{pmatrix}_{r_\nu \times r_\nu \quad (r_\nu \geq 2)} \quad \text{для } \forall \nu = \overline{1, q}$$

или $J_\nu = \lambda_\nu E + Z_\nu$,

$$Z_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r_\nu \times r_\nu}$$

это нильпотентная матрица,

Df. *Матрица* J *указанной структуры называется жордановой или жордановой формой.*

Утверждение 4 (теорема Жордана). *Любая матрица* A *подобна некоторой жордановой форме* J, *т. е.* $\exists S: \ J = S^{-1}AS$.

3^0. Матричные степенные ряды.

Df. *Матричная последовательность* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет предел* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, *если для* $\forall i, j = \overline{1, n}$ *элементы* $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ *при* $k \to \infty$.

Теорема (об аналитических функциях от матриц). *Предположим, что* $\mathfrak{F}_x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *— абсолютно сходящийся при* $|x| < \rho$ *степенной ряд, и пусть* A *— произвольная постоянная* $n \times n$ *матрица, все собственные числа которой по модулю меньше чем* ρ. *Тогда матричный степенной ряд* $\mathfrak{F}_A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ *сходится и его сумма* $F(A) = SF(J)S^{-1}$, *где* J *— жорданова форма матрицы* A, *а постоянная матрица* S *такова, что* $J = S^{-1}AS$. *Матрица* $F(J) = \mathrm{diag}\,\{F(J_0), F(J_1), \ldots, F(J_q)\}$ *является верхнетреугольной с главной диагональю, образованной значениями функции* F *от собственных чисел* $\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}, \lambda_1$ *кратности* $r_1, \ldots, \lambda_q$ *кратности* r_q *матриц* J *или* A $(p + r_1 + \ldots + r_q = n,\ \ r_\nu \geq 2,\ \ p, q \geq 0)$.

4^0. Экспонента и логарифм матрицы.

а) Определим экспоненту матрицы следующим образом.

Df. $$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \ldots .$$

Df. *Матрица* $\mathrm{Ln}\, A$ *называется логарифмом матрицы* A, *если* $\det A \neq 0$ *и* $e^{\mathrm{Ln}\, A} = A$.

5^0. ФМ ЛОС с постоянными коэффициентами.

Теорема (о фундаментальной матрице ЛОС с постоянными коэффициентами). *Матрица* e^{Ax} *является ФМ для системы* (5.1^c).

Следствие 2. *Общее решение ЛОС* (5_1^c) *имеет вид* $\varphi(x, c) = e^{Ax}c$, *где* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *— произвольный постоянный вектор.*

6^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.

$$e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = Se^{Jx}S^{-1}$$

$$e^{Jx} = \mathrm{diag}\,\{e^{J_0 x}, \ldots, e^{J_q x}\}.$$

$$e^{J_0 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0^{(1)} x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0^{(2)} x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_0^{(p)} x} \end{pmatrix} \qquad e^{J_1 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & xe^{\lambda_1 x} & \ldots & \dfrac{x^{r_1 - 1}}{(r_1 - 1)!} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & xe^{\lambda_1 x} \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}_{r_1 \times r_1\ (r_1 \geq 2)}$$

и $e^{J_2 x}, \ldots, e^{J_q x}$ аналогичны $e^{J_1 x}$.

7^0. Оценка фундаментальной матрицы на бесконечности.

Df. *Пусть* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, *тогда* $\|A\| = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \{|a_{ij}|\}$ *называется нормой матрицы* A.

Теорема (об оценке нормы фундаментальной матрицы на положительной полуоси). *Пусть* $\lambda_* = \max\{\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n\}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *собственные числа матрицы* A *системы* (5.1^c), *тогда для* $\forall\,\lambda_0 > \lambda_*$ *и для любой ФМ* $\Phi(x)$ *этой системы*

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^1 \;\; \exists\, K > 0 : \;\forall\, x \in [x_0, +\infty) \;\Rightarrow\; \|\Phi(x)\| \le K e^{\lambda_0 x}.$$

Следствие 3. *Если все собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части, то* $\lim\limits_{x\to+\infty} \|\Phi(x)\| = 0$, *где* $\Phi(x)$ — *произвольная ФМ системы* (5.1^c).

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (ТЕОРИЯ ФЛОКЕ)

1^0. Объект изучения.

$$y' = A(x)y, \tag{5.1^p}$$

в которой $A(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}^1$ ω-периодическая матрица, т. е. $\exists\,\omega > 0 : \;\forall x \in \mathbb{R}^1 \;\Rightarrow\; A(x+\omega) = A(x)$.

2^0. Матрица монодромии.

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1^p).

$\Psi(x) = \Phi(x+\omega)$ наряду с $\Phi(x)$ является ФМ.

Df. *Постоянная матрица* M *с* $\det M \ne 0$, *удовлетворяющая уравнению* $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, *называется матрицей монодромии фундаментальной матрицы* $\Phi(x)$.

3^0. Вид фундаментальной матрицы системы (5.1^p).

Теорема (о структуре фундаментальной матрицы ЛОС с периодическими коэффициентами). *Любая ФМ* $\Phi(x)$ *системы* (5.1^p) *может быть записана в виде*

$$\Phi(x) = P(x)e^{Rx},$$

где $P(x)$ — ω*-периодическая, а* R — *постоянная матрица.*

4^0. Мультипликаторы.

Утверждение 4. *Если* $\Phi(x), \Phi_1(x)$ *— произвольные ФМ системы* (5.1^p) *и* $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$, *то их матрицы монодромии* M, M_1 *подобны, т. е.*

$$M_1 = S^{-1}MS.$$

Df. *Собственные числа* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *любой матрицы монодромии ЛОС* (5.1^p) *называются мультипликаторами.*

Теорема (о характеристическом свойстве мультипликаторов). *Число* μ *является мультипликатором системы* (5.1^p) *тогда и только тогда, когда существует решение* $y = \varphi(x)$ *системы* (5.1^p) *такое, что* $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\mu$.

Следствие 4. *Система* (5.1^p) *имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее мультипликаторов равен единице.*

$$\mu_1 \ldots \mu_n = \exp\left\{ \int_0^\omega \operatorname{Tr} A(s)\, ds \right\}.$$

5^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.

Df. *Собственные числа матрицы* R *называются характеристическими показателями ЛОС* (5^p).

6^0. Приводимость периодических ЛОС.

Таким образом из периодичной системы (5^p) заменой $y = P(x)z$
лось получить ЛОС с постоянными коэффициентами

$$z' = Rz. \tag{5.3}$$

Df. *Линейная система, коэффициенты которой не постоянны, называется приводимой, если существует линейная неособая замена, преобразующая ее в систему с постоянными коэффициентами.*

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Формула общего решения ЛНС.

$$y' = P(x)y + q(x), \tag{5.4}$$

в которой матрица $P(x)$ неоднородность $q(x)$ непрерывны на (a, b).

Пусть $y = \psi(x)$ — какое-либо частное решение системы (5.4).

$\Phi(x)c$ — общее решение ЛОС,поэтому общее решение ЛНС (5.4) имеет вид:

$$y = \Phi(x)c + \psi(x).$$

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНС). *Пусть* $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ *— это фундаментальная матрица ЛОС (5.5), тогда частное решение ЛНС (5.4) может быть найдено в квадратурах от функций* $\varphi_i^{(j)}(x)$, $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

В результате общее решение системы (5.4) имеет вид:

$$y\,(x) = \Phi(x)c + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$$

где Φ — ФМ линейной однородной системы (5.5).

для системы (5.1^c) $y' = Ay$, а $\Phi^{-1}(x) = e^{-Ax}$. Поэтому

$$y = e^{A(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)}q(s)\,ds \qquad (c = e^{-Ax_0}y^0)$$

задает решение задачи Коши с выбранными начальными данными на интервале (a, b) и называется формулой Коши.