Г Л А В А I

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

1^0. Объект изучения.

В этой главе будут изучаться обыкновенные дифференциальные уравнения I порядка, разрешенные относительно производной

$$y' = f(x,y) \tag{1.1}$$

или, более подробно, $\dfrac{dy(x)}{dx} = f(x,y(x))$, где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция, $f(x,y)$ — вещественная функция, которая, собственно, и задает уравнение (1.1). При этом разъяснения по поводу того, что производная $y'(x)$, определяемая как цельный символ, здесь трактуется и как отношение дифференциалов, приведены в дополнении 1.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что функция f определена и непрерывна на связном множестве

$$\widehat{G} = G \cup \hat{\partial} G,$$

где G — это область в топологии евклидового пространства $\mathbb{R}^2$, а множество $\hat{\partial} G$, возможно пустое, состоит из граничных точек G.

Непрерывность $f(x,y)$ будем обозначать стандартно: $f \in C(\widehat{G})$.

Следует помнить следующие определения:

1) областью называется непустое связное открытое множество;

2) множество $U \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если любая его точка является внутренней, т. е. если для $\forall\,(x_0,y_0) \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(x_0,y_0) \subset U$, где $V_\varepsilon(x_0,y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x-x_0| < \varepsilon,\ |y-y_0| < \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки (x_0,y_0);

3) точка (x_*,y_*) называется граничной точкой области $G \subset \mathbb{R}^2$, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие G, так и точки, не принадлежащие G.

В качестве простого примера можно рассмотреть $f = \sqrt{y}/\sin x$. Эта функция определена и непрерывна на каждом из множеств $\widehat{G}_k = G_k \cup \hat{\partial} G_k \quad (k \in \mathbb{Z})$, где $G_k = \{\pi k < x < \pi(k+1),\ y > 0\}$, $\hat{\partial} G_k = \{\pi k < x < \pi(k+1),\ y \equiv 0\}$ — часть границы области G_k.

2^0. Определение решения и граничного решения.

На вещественной оси возьмем непустое связное множество.

Хорошо известно, что это может быть только промежуток $\langle a, b\,\rangle$, где символ $\langle$, например, подразумевает одну из скобок: (или [.

Промежуток (a, b), как обычно, будем называть интервалом и допускать в этом случае значения $a = -\infty$ и $b = +\infty$, а промежуток $[a, b]$ — отрезком, и тогда $|a|, |b| < +\infty$.

Df. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$, называется решением дифференциального уравнения* (1.1), *если для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$ выполняются следующие три условия:*

1) функция $\varphi(x)$ — дифференцируемая,

2) точка $(x, \varphi(x)) \in G$,

3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Замечания:

1. *Фактически, решение уравнения (1.1)* — *это пара: промежуток $\langle a, b\,\rangle$ и определенная на нем функция $\varphi(x)$. Поэтому сужение $\varphi(x)$ на меньший промежуток будет уже иным решением.*

2. *Первые два условия в определении решения носят вспомогательный характер. Они позволяют выписать условие 3), т.е. выполнить подстановку функции $\varphi(x)$ в левую и правую части (1.1).*

3. *Согласно условию 2) график любого решения принадлежит области G, а не множеству $\widehat{G}$, т.е. не содержит граничных точек.*

4. *Любое решение $y = \varphi(x)$ является функцией не просто дифференцируемой по условию 1), а непрерывно дифференцируемой или гладкой на $\langle a, b\,\rangle$, что обычно записывается так: $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\,\rangle)$.*

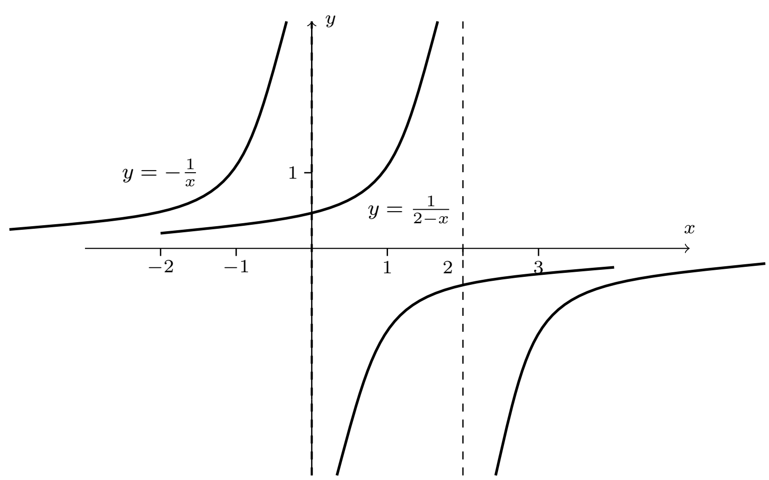
Действительно, правая часть тождества 3) непрерывна как композиция непрерывных функций, а значит, таковой является и левая часть. При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах непрерывны односторонние производные.

5. *Поскольку решение $y = \varphi(x)$ — гладкая функция, через любую ее точку $(x, \varphi(x))$ можно провести касательную под углом $\alpha(x)$ с осью абсцисс таким, что $\operatorname{tg} \alpha(x) = f(x, \varphi(x))$. Именно поэтому* *графики решений, проходящих через одну и ту же точку (x_0, y_0) не могут в ней пересекаться, а могут только касаться.*

6. *В определении решения существенно, что оно задано на связном множестве, о чем свидетельствует следующий пример.*

Пример 1. *Рассмотрим уравнение $y' = y^2$. Его правая часть определена и непрерывна в $\mathbb{R}^2$. Подстановкой легко проверить, что для любой вещественной константы C и для любого $x \neq C$ функция $\varphi(x) = (C - x)^{-1}$ удовлетворяет уравнению, но решением при таких x не является, так как $\mathbb{R}^1 \backslash \{C\}$ — несвязное множество.*

Очевидно, что для $\forall\, C$ предложенная функция $\varphi(x)$ задает два решения, одно на интервале $(-\infty, C)$, другое — на $(C, +\infty)$.



Случай, когда множество $\widehat{G}$, на котором правая часть уравнения (1.1) определена и непрерывна, не совпадает с областью G, позволяет ввести в рассмотрение так называемые "граничные решения".

Df. *Функцию $y = \varphi_\partial(x)$, определенную на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$, будем называть граничным решением дифференциального уравнения* (1.1), *если выполняются условия* 1) *и* 3) *из определения решения, а условие* 2) *заменено следующим условием:*

$2_\partial)$ $(x, \varphi_\partial(x)) \in \hat{\partial} G$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b\,\rangle$.

Аналогично замечанию 4, из определения немедленно вытекает, что граничное решение является гладкой функцией на $\langle a, b\,\rangle$.

Пример 2. *Рассмотрим уравнение $y' = 2\sqrt{y+1}$. Его правая часть непрерывна на множестве $\widehat{G} = \{(x, y) \colon\, x \in \mathbb{R}^1,\ y \geq -1\}$.*

Функция $y(x) \equiv -1$ на $\mathbb{R}^1$, параметризующая границу $\widehat{G}$, является граничным решением, так как при подстановке она обращает *уравнение в тождество. Остальные решения, как легко проверить, задаются формулой* $\varphi(x) = (x - C)^2 - 1 \ \ (x > C)$ *и графики их лежат в области* $G = \{(x, y)\colon\ x \in \mathbb{R}^1,\ y > -1\}$.

Подводя итоги, можно еще раз сказать, что решением уравнения (1.1) (граничным решением) будет любая гладкая на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$ функция $y = \varphi(x)$, график которой лежит в G, а результатом подстановки в уравнение (1.1) является тождество

$$\varphi'(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x, \varphi(x)). \tag{1.2}$$

3^0. **Задача Коши для дифференциального уравнения.**

Рассмотрим одно из простейших дифференциальных уравнений $y' = f(x)$. Домножая обе его части на dx и интегрируя, убеждаемся, что оно имеет несчетное число решений: $y(x) = \int f(x)\,dx + C$.

Эта ситуация стандартна, так как решая любое уравнение первого порядка, так или иначе придется один раз интегрировать, что приведет к появлению свободной вещественной константы C.

При этом часто в множестве всех решений требуется найти какое-то одно конкретное решение при помощи дополнительного условия, выделяющего его из остальных решений.

Упомянутое дополнительное условие называется начальным условием или задачей Коши для дифференциального уравнения (1.1). Оно заключается в том, чтобы для некоторой точки $(x_0, y_0) \in G$ найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на каком-либо промежутке $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$.

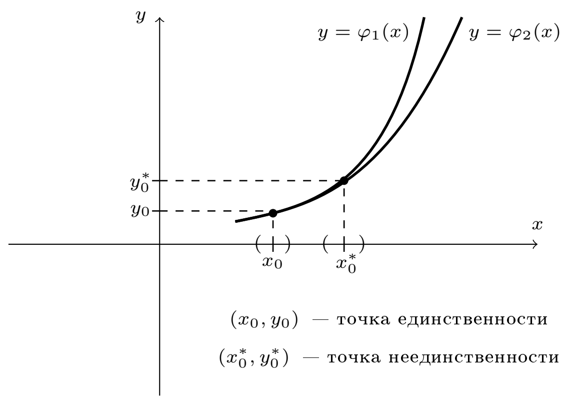
Df. *Любые два числа* x_0, y_0 *такие, что точка* (x_0, y_0) *лежит в* G, *называются начальными данными (н. д.) задачи Коши.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с н. д.* x_0, y_0 *существует, если существуют такие интервал* $(a, b) \ni x_0$ *и решение* $y = \varphi(x)$, *определенное на нем, что* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Аналогичным образом вводится понятие граничного решения задачи Коши для уравнения (1.1) при условии, что множество граничных точек $\hat{\partial} G$ не пусто. В этом случае точка, задаваемая н. д. x_0, y_0, должна принадлежать $\hat{\partial} G$ и график граничного решения $y = \varphi_\partial(x)$, заданного на некотором интервале (a, b), должен проходить через эту точку.

Df. *Решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с н. д.* x_0, y_0 *единственно, если для любых двух решений* $y = \varphi_1(x)$ *и* $y = \varphi_2(x)$ *поставленной задачи Коши можно указать интервал* $(\alpha, \beta) \ni x_0$ *такой, что* $\varphi_1(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi_2(x)$.

Таким образом решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 не единственно, если найдутся два решения уравнения (1.1), графики которых проходят через точку (x_0, y_0), имеют в ней, естественно, одинаковую касательную, но отсутствует окрестность точки x_0, в которой эти графики совпадают.



В заключение приведем еще два естественных определения.

Df. *Любая точка* (x_0, y_0) *из области* G, *в которой решение задачи Коши единственно, называется точкой единственности.*

Df. *Область* $\widetilde{G} \subset G$ *называется областью единственности, если каждая точка* $\widetilde{G}$ *является точкой единственности.*

4^0. Интегральное уравнение.

Df. *Уравнение*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\, ds, \tag{1.3}$$

где функция $f(x, y)$ *определена и непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, $x_0, x \in \langle a, b\,\rangle$ *и точка* $(x_0, y_0) \in G$, *называется интегральным уравнением на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$.

Df. *Функция* $y = \varphi(x)$, *определенная на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *называется решением интегрального уравнения* (1.3), *если для любого* $x \in \langle a, b\,\rangle$ *выполняются следующие три условия:*

1) функция $\varphi(x)$ *непрерывна,*

2) точка $(x, \varphi(x)) \in G$,

3) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds.$

Замечание 7. *Согласно условию 3) решение интегрального уравнения* $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\,\rangle)$, *поскольку интеграл с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций из правой части 3) является непрерывно дифференцируемой функцией, каковой будет и левая часть. При этом* $\varphi(x_0) = y_0$.

Теорема (о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями). *Пусть функция* $f(x, y)$ *непрерывна в области* G. *Для того чтобы определенная на* $\langle a, b\,\rangle$ *функция* $y = \varphi(x)$ *была решением задачи Коши дифференциального уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения* (1.3) *на* $\langle a, b\,\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b\,\rangle$ — это решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0, т. е. $x_0 \in \langle a, b\,\rangle$, $(x_0, y_0) \in G$, $\varphi(x_0) = y_0$ и справедливо тождество (1.2) $\varphi'(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x, \varphi(x))$.

Интегрируя его по s от x_0 до x и перенося $\varphi(x_0)$ в правую часть, получаем тождество

$$\varphi(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \tag{1.4}$$

означающее, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.3) на промежутке $\langle a, b\,\rangle$.

Достаточность. Подставляя решение $y = \varphi(x)$ в уравнение (1.3), по определению получаем тождество (1.4), которое согласно замечанию 6 можно продифференцировать по x. В результате получаем тождество (1.2), означающее, что $\varphi(x)$ — это решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0. $\square$

Замечание 8. *Если отказаться от предположения о непрерывности функции* f *в области* G *и потребовать ее суммируемости в* G *в определенном смысле, то достаточность в теореме доказать не удастся, так как в правой части тождества (1.4) будет стоять только непрерывная функция, а значит, функция* $y = \varphi(x)$ *тоже только непрерывна. Поэтому, являясь решением интегрального уравнения (1.3), она не будет решением дифференциального уравнения (1.1).*

В этом случае понятие решения уравнения (1.1) можно обобщить, называя любое решение интегрального уравнения (1.3) обобщенным решением соответствующей задачи Коши дифференциального уравнения (1.1).

5^0. Отрезок Пеано.

Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ отрезком Пеано называют отрезок оси абсцисс, содержащий x_0 внутри себя, на котором, как будет доказано ниже, заведомо существует решение задачи Коши дифференциального уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0.

Построим какой-либо отрезок Пеано, тем самым определяя его.

Итак, для любой точки (x_0, y_0) из области G найдутся константы $a, b > 0$ такие, что замкнутый прямоугольник

$$\overline{R} = \{(x, y): \ |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\} \subset G$$

в силу того, что G — открытое множество.

Прямоугольник $\overline{R}$ является компактом, т. е. замкнутым ограниченным множеством.

Замкнутость любого множества здесь и всегда в дальнейшем будет подчеркивать стоящая над ним черта.

Поскольку на компакте любая непрерывная функция достигает максимума, обозначим через M максимум $|f|$ на $\overline{R}$, т. е. положим $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)| > 0$, и введем константу $h = \min\{a, b/M\} > 0$.

Df. *Отрезок* $P_h(x_0, y_0) = \{x : \ |x - x_0| \le h\} = [x_0 - h, x_0 + h]$ *называется отрезком Пеано, построенным для точки* (x_0, y_0).

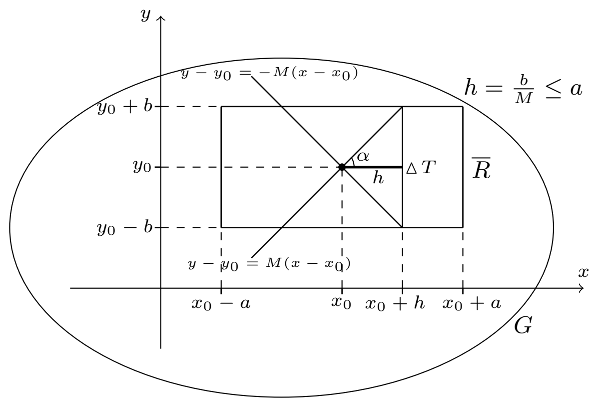
Константа $h > 0$ для точки (x_0, y_0) находится не однозначно. За счет изменения a и b она всегда может быть уменьшена, что не представляет интереса, а также увеличена, как будет показано в п. 8^0, но возможно весьма незначительно.

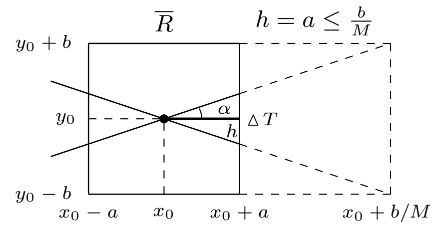
Геометрически отрезок Пеано выглядит следующим образом.

В области G строим произвольный прямоугольник $\overline{R}$ с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$, после чего однозначно вычисляем значения констант M и h.

Далее, через точку (x_0, y_0) проводим две прямые с тангенсами углов наклона равными $\pm M$ вплоть до пересечения их с какой-либо из сторон прямоугольника.

Справа от прямой $x = x_0$ возникает равнобедренный треугольник T с вершинами в точке (x_0, y_0) и точках пересечения прямых со сторонами $\overline{R}$. Если основание T лежит на вертикальной стороне $\overline{R}$, то его высота равняется a и $a \le b/M$, а если $b/M \le a$, то основание T лежит на прямой $x = b/M$ внутри прямоугольника.





Таким образом константа h — это высота треугольника T, и важно то, что $T \subset \overline{R} \subset G$. Слева от прямой $x = x_0$ все аналогично.

6^0. **Теоремы о существовании и единственности решения.**

Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

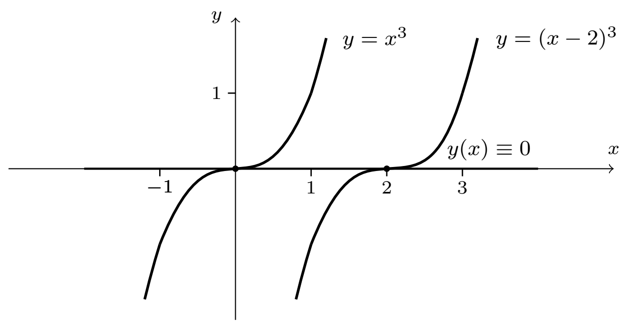
Эта важнейшая теорема будет доказана в следующем параграфе.

Отметим, что условие $f \in C(G)$, гарантирующее существование решений, чрезвычайно компактно, удобно и легко проверяется.

Однако, непрерывности $f(x, y)$ в области G не достаточно для того, чтобы G была областью единственности, т. е. чтобы в каждой ее точке решение задачи Коши уравнения (1.1) было единственно.

Пример 3. *Рассмотрим уравнение* $y' = 3y^{2/3}$. *Его правая часть определена и непрерывна в* $\mathbb{R}^2$. *Подстановкой в уравнение легко проверить, что для любой константы* $C \in \mathbb{R}^1$ *функция* $y = (x - C)^3$ *— кубическая парабола — будет решением при* $x \in \mathbb{R}^1$. *Столь же очевидно, что решением является функция* $y(x) \equiv 0$.

В результате через любую точку оси абсцисс $(x_0, 0)$ *проходят графики двух решений:* $y = (x - x_0)^3$ *и* $y(x) \equiv 0$, *и эти графики больше* *ни в одной точке плоскости не совпадают. Поэтому в каждой точке оси абсцисс нарушается единственность решения задачи Коши.*



Следует также иметь в виду, что ничто не мешает называть решениями такие функции: $y = \{0$ *при* $x \le x_0,\ (x-x_0)^3$ *при* $x \ge x_0\}$, *так как в точке* x_0 *гладкость не нарушается.*

Итак, для того чтобы гарантировать единственность решения задачи Коши в любой точке некоторой области $\widetilde{G} \subset G$, правая часть уравнения (1.1) в ней должна удовлетворять дополнительным условиям. Чем более слабыми, но достаточными, они будут, тем более сильной получится теорема единственности.

Сформулируем одну из самых простых теорем единственности, которая весьма удобна для практического применения.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *а в области* $\widetilde{G} \subset G$ *существует и непрерывна частная производная* $\partial f(x,y)/\partial y$, *тогда* $\widetilde{G}$ *— это область единственности для (1.1).*

Эта теорема будет доказана в § 3, где будут приведены также две более сильные теоремы о единственности.

Вернемся к примеру 3. Очевидно, что в нем $\partial f(x,y)/\partial y = 2y^{-1/3}$, а значит, при $y \equiv 0$ частная производная по y отсутствует.

Но именно в любой точке оси абсцисс, как было установлено, единственность и нарушается. Поэтому уравнение $y' = 3y^{2/3}$ имеет две области единственности — это верхняя и нижняя полуплоскости.

7^0. Частное, особое и общее решение.

Df. *Решение уравнения* (1.1) $y = \varphi(x)$, *определенное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *называется частным, если каждая его точка является точкой единственности, и называется особым, если каждая его точка является точкой неединственности.*

В примере 3 для любой константы C функция $y = (x - C)^3$ задает два частных решения, одно на интервале $(-\infty, C)$ и другое на интервале $(C, +\infty)$. А решение $y(x) \equiv 0$, очевидно, — особое.

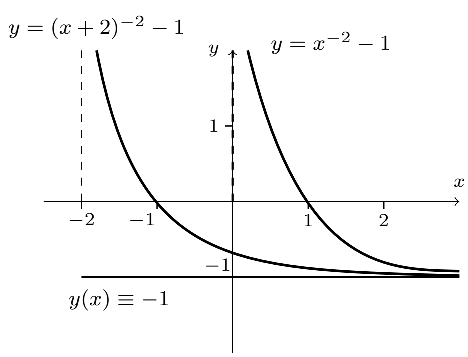
В то же время любое решение уравнения из примера 1, включая $y(x) \equiv 0$, является частным, так как y^2 — правая часть уравнения — удовлетворяет слабой теореме о единственности.

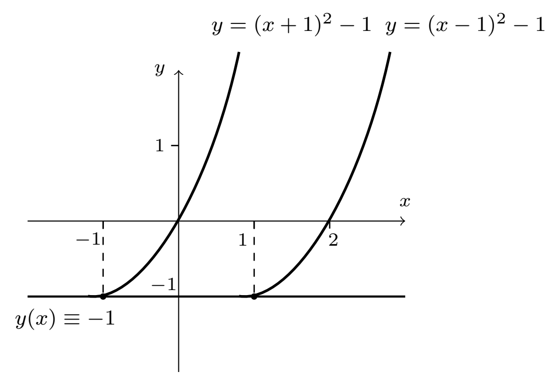
Понятия частного и особого решения естественным образом распространяются на граничные решения.

Пример 4. *Рассмотрим уравнение* $y' = -(y+1)^{3/2}/2$. *Его правая часть непрерывна на множестве* $\widehat{G} = \{(x, y)\colon\ x \in \mathbb{R}^1,\ y \geq -1\}$.

Имеется граничное решение $y(x) \equiv -1$ *на* $\mathbb{R}^1$, *а остальные решения задаются формулой* $\varphi(x) = (x - C)^{-2} - 1\ \ (x > C)$ *и графики их лежат в области* $G = \{(x, y) :\ x \in \mathbb{R}^1, y > -1\}$. *Очевидно, что* $\varphi(x) \to -1$ *только при* $x \to +\infty$, *и каждая точка граничного решения является точкой единственности, т. е. оно — частное.*

В тоже время в примере 2 из п. 2^0 *также имеется граничное решение* $y(x) \equiv -1$, *но к любой точке* $(x_0, -1)$ *его графика примыкает решение* $y(x) = (x - x_0)^2 - 1\ \ (x > x_0)$, *которое, вообще говоря, можно было бы доопределить по непрерывности, положив* $y(x_0) = -1$, *если бы не требование для графика решения не выходить на границу области. Поэтому в данном случае граничное решение — особое.*





Обратим внимание на то, что частная производная по y *функции* $f(x, y) = -(y+1)^{3/2}/2$ *существует и непрерывна на множестве* $\widehat{G}$, *а для функции* $f(x, y) = 2(y+1)^{1/2}$ *при* $y = -1$ *она отсутствует, так что полученные результаты полностью согласуются со слабой теоремой о единственности решения.*

Зададимся теперь вопросом о том, как в какой-либо области записать сразу все решения уравнения (1.1)?

Обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$.

Получается, что решение задачи Коши является, вообще говоря, функцией трех аргументов, но один из них — лишний, поскольку переменные x_0 и y_0 связаны между собой движением по графику выбранного решения.

Df. *Общим решением уравнения* (1.1) *в некоторой области* A, *принадлежащей области единственности* $\widetilde{G}$, *называется функция* $y = \varphi(x, C)$, *определенная и непрерывная в области* $H = H(A) = \{(x, C) :\ C_1 < C < C_2, a(C) < x < b(C)\}$, *если выполняются следующие два условия:* 1) *для любой точки* $(x_0, y_0) \in A$ *уравнение* $y_0 = \varphi(x_0, C)$ *имеет единственное решение* $C = C_0 = U(x_0, y_0)$; 2) *функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *— это решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с н. д.* x_0, y_0, *определенное на интервале* $(a(C_0), b(C_0))$.

Таким образом, непрерывная в H по совокупности аргументов функция $\varphi(x, C)$ является однопараметрическим семейством решений. Она задает в некой области $A \subset \widetilde{G}$ любое решение дифференциального уравнения (1.1).

Теорема (о существовании общего решения). *Для любой точки* (x_0, y_0) *из области единственности* $\widetilde{G}$ *уравнения* (1.1) *найдется область* $A \subset \widetilde{G}$, *в которой существует общее решение.*

Доказательство этой теоремы приведено ниже в § 4.

Можно сказать, что первая задача, стоящая перед теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается в выделении тех уравнений первого порядка, для которых общее решение может быть выписано в явном виде при помощи элементарных функций, допуская в формуле решения наличие неберущихся интегралов, как говорят, в квадратурах.

8^0. Продолжимость решений.

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (1.1) на промежутке $\langle a, b\,\rangle$. Как уже отмечалось, если сузить этот промежуток, то на нем $\varphi(x)$ тоже будет решением. А можно ли расширить $\langle a, b\,\rangle$ и, если можно, то на сколько?

Пример 1 показывает, что расширение возможно не всегда. Так, интервал $(-\infty, 1)$ для решения $\varphi(x) = (1-x)^{-1}$ уравнения $y' = y^2$ увеличить невозможно.

Df. *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1), *определенное на* $\langle a, b\,\rangle$, *продолжимо вправо за точку* b, *если существуют число* $\widetilde{b} > b$ *и решение* $y = \widetilde{\varphi}(x)$ *уравнения* (1.1) *на* $\langle a, \widetilde{b}\,\rangle$ *такие, что сужение функции* $\widetilde{\varphi}(x)$ *на* $\langle a, b\,\rangle$ *совпадает с* $\varphi(x)$. *При этом* $y = \widetilde{\varphi}(x)$ *называется продолжением решения* $y = \varphi(x)$ *вправо (за точку* b).

Аналогично определяется продолжимость влево за точку a.

Лемма (о продолжении решения за границу отрезка). *Решение* $y = \varphi(x)$ *дифференциального уравнения* (1.1), *определенное на промежутке* $\langle a, b\,]$, *продолжимо вправо за точку* b.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению решения точка $(b, \varphi(b)) \in G$. Следовательно по теореме Пеано уравнение (1.1) имеет на отрезке Пеано $P_h(b, \varphi(b))$ с неким $h > 0$ решение $y = \psi(x)$. В частности, это решение определено на отрезке $[b, b + h]$.

Положим $\widetilde{\varphi}(x) = \{\, \varphi(x)$ при $x \in \langle a, b\,]$, $\psi(x)$ при $x \in [b, b+h]\,\}$.

Введенная таким образом функция, очевидно, удовлетворяет всем трем условиям из определения решения уравнения (1.1), являясь, тем самым, продолжением решения $y = \varphi(x)$ вправо за точку b. $\square$

Аналогичным образом доказывается, что решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на $[a, b\,\rangle$, продолжимо влево за точку a.

Df. *Решение уравнения* (1.1) *называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо. Область определения полного решения называется максимальным интервалом существования.*

Утверждение. *Максимальный интервал существования решения — это интервал.*

Доказательство этого утверждения от противного — очевидно.

Для полноценного практического решения задачи Коши уравнений (1.1) теперь появилась возможность уточнить ее постановку.

Дело в том, что с одной стороны задача Коши является локальной, т. е. требуемое решение ищется в какой-либо, возможно малой, окрестности точки, задаваемой начальными данными, а наибольший интерес представляет знание полного решения. С другой стороны даже на малом интервале может нарушаться единственность.

Df. *Функцию* $y = \varphi(x)$ *или* $x = \psi(y)$ *назовем полным решением задачи Коши уравнения* (1.1) *с н. д.* x_0, y_0, *если оно определено на максимальном интервале существования таком, что на нем это решение задачи Коши является или частным, или особым.*

Таким образом полное решение задачи Коши на практике найти удастся, если из общего решения уравнения (1.1) технически возможно не просто по начальным данным установить соответствующую константу C_0, но и представить полученное решение в виде функции x или y, максимально продолженной в обе стороны таким образом, что ее график состоит только из точек единственности или только из точек неединственности.

Так, в примере 3 полным решением задачи Коши с н. д. $-1, -1$ является функция $y = x^3$, определенная только на интервале $(-\infty, 0)$, поскольку $(0, 0)$ — точка неединственности. А полным решением задачи Коши с н. д. $-1, 0$ может являться только особое решение $y(x) \equiv 0$, определенное на всей вещественной оси.

9^0. Интегральные кривые и поле направлений.

Df. *Кривая, являющаяся графиком полного решения* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1), *называется интегральной кривой.*

Максимальный интервал существования полного решения будет обычно обозначаться (α, β).

Если решение рассматривается на промежутке $\langle a, b\, \rangle \subsetneqq (\alpha, \beta)$, то его график будем называть дугой интегральной кривой.

По определению единственности решения задачи Коши в области единственности $\widetilde{G}$ интегральные кривые не только не пересекаются, но и не касаются одна с другой.

Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области определения G уравнения (1.1). В этой точке известен тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой: $\operatorname{tg} \alpha(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Df. *Отрезок, вообще говоря, единичной длины с центром в точке* $(x_0, y_0) \in G$ *и тангенсом угла наклона, равным* $f(x_0, y_0)$, *называется направлением поля или отрезком поля направлений в точке* (x_0, y_0), *индуцированным уравнением* (1.1).

Df. *Область* G, *заполненная отрезками поля направлений, называется полем направлений, индуцированным уравнением* (1.1).

Из последнего определения следует, что задание уравнения (1.1) равносильно заданию непрерывного поля направлений.

С этой точки зрения, кривая, лежащая в области G, является интегральной кривой тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке.

Таким образом, геометрически, решить дифференциальное уравнение (1.1) означает построить в G все его интегральные кривые.

10^0. Метод изоклин.

Представляет интерес задача, не решая уравнения (1.1), которое может в явном виде и не решаться, построить приближенно все его интегральные кривые, а точнее, все наиболее характерные из них.

Наиболее удобно осуществлять приближенное построение интегральных кривых при помощи метода изоклин.

Df. *Изоклиной уравнения* (1.1) *называется любая кривая, расположенная в области* G, *в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона.*

Поэтому все изоклины задаются уравнением

$$f(x,y) = k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Метод изоклин заключается в том, чтобы, нарисовав достаточно много изоклин и отрезков поля на них, провести характерные интегральные кривые, которые, попадая на очередную изоклину, должны касаться отрезков поля направлений, построенных на ней.

Пример 5. *Рассмотрим уравнение* $y' = 2y/x$. *Его правая часть определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по* y *в областях* $G_1 = \{(x,y)\colon\ x < 0,\ y \in \mathbb{R}^1\}$ *и* $G_2 = \{(x,y)\colon\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}^1\}$, *т. е. в левой и правой полуплоскости.*

Уравнение для изоклин имеет вид: $2y/x = k$ *или* $y = (k/2)x$ *— это множество лучей, выходящих из начала координат.*

Построим несколько изоклин, например, в области G_2 :

при $k = -2$ *изоклина* $y = -x$ *пересекается интегральными кривыми с углом наклона* $\alpha = -\operatorname{arctg} 2$ *в точке пересечения;*

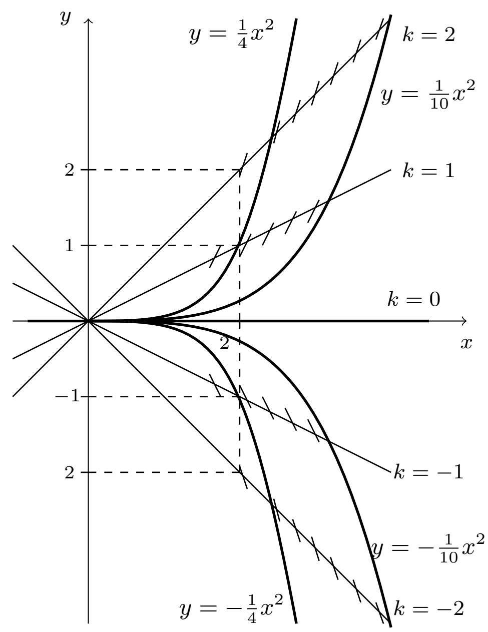
при $k = -1$ *изоклина* $y = -x/2$ *и* $\alpha = -\pi/4$;

при $k = 0$ *изоклина* $y \equiv 0$ *и* $\alpha = 0$, *т. е. отрезки поля направлений лежат на изоклине, которая в данном случае является решением, что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение;*

при $k = 1$ *изоклина* $y = x/2$ *и* $\alpha = \pi/4$;

при $k = 2$ *изоклина* $y = x$ *и* $\alpha = \operatorname{arctg} 2$;

при дальнейшем росте k изоклины выходят и начала координат под все большим углом и в точках пересечения с каждой из них интегральные кривые имеют все больший угол наклона, стремящийся к $\pi/2$ при $k \to +\infty$.



Построенные методом изоклин интегральные кривые очень напоминают параболы, которыми, конечно, и являются, так как общее решение уравнения имеет вид $y = Cx^2$. И эта формула справедлива как в области G_1, так и в области G_2.

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Ломаные Эйлера.

В этой параграфе будет доказана сформулированная в § 1, п. 6^0 теорема Пеано о существовании решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1) $y' = f(x, y)$, в котором $f \in C(G)$.

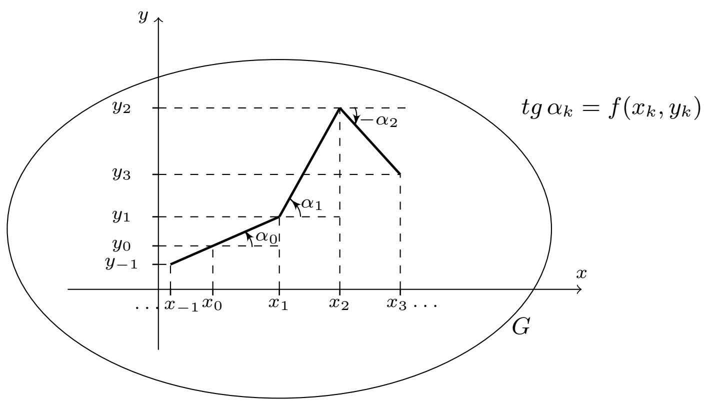
Решение будет строиться при помощи так называемого метода ломаных Эйлера, который и будет изложен в этом пункте.

Выберем в области G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G, начинаясь, скажем, в точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1). Проведем вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся соответственно в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}), и т. д.

Поскольку G — область, а значит, открытое множество, этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов N.

Полученная непрерывная кусочно линейная кривая $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера. Она определена в окрестности (x_0, y_0), лежит в G и абсциссы ее угловых точек равны x_j $(j = \overline{-N, N})$.

Рангом дробления ломаной Эйлера назовем $\max\limits_{j=\overline{1-N,N}} \{x_j - x_{j-1}\}$.



Формула, задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, имеет следующий вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее последовательно по $j = 0, 1, \dots, N-1$ для $\forall\, x \in (x_j, x_{j+1}]$ или по $j = 0, -1, \dots, 1-N$ для $\forall\, x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j) \tag{1.5}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определен для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$.

Из формулы (1.5) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$ производная $\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j))$, а в точке x_{j+1} она, вообще говоря, не определена, как и в точках x_{j-1} при $j \leq 0$.

Доопределим $\psi'(x)$ в возможных точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, т. е. положим

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) = \lim_{x \to x_j \mp 0} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \quad (j = \pm 1, \dots, \pm N).$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$, причем $\psi'(x_0) = \psi'_-(x_1) = \psi'_+(x_{-1})$.

Таким образом, для $\forall\, x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \dots, N-1)$ или для $\forall\, x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, \dots, 1-N)$, дифференцируя равенство

(1.5) по x, получаем

$$\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j)) \quad (j \in \{1-N, \ldots, N-1\}) \tag{1.6}$$

Кроме того, интегрируя разрывную кусочно постоянную функцию $\psi'(x)$ по s от x_0 до x, для всякого $x \in [x_{-N}, x_N]$ получаем

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds, \tag{1.7}$$

где $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\, ds + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\, ds$ при $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j \in \{0, \ldots, N-1\})$ и $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\, ds + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\, ds$ при $x \in [x_j, x_{j+1})$ $(j \in \{-N, \ldots, -1\})$.

2^0. Лемма об ε-решении.

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области G, такую, что при подстановке ее в уравнение (1.1) разность между левой и правой частями уравнения окажется по модулю меньше любого сколь угодно малого наперед заданного положительного числа.

Df. *Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется ε-решением уравнения* (1.1) *на $[a, b]$, если для $\forall\, x \in [a, b]$ точка $(x, \psi(x)) \in G$ и*

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \le \varepsilon. \tag{1.8}$$

Лемма (о ломаных Эйлера в роли ε-решения) *Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y_0)$ имеем:*

1) для $\forall\, \delta > 0$ на отрезке Пеано можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, введенном в § 1, п. 5^0;

2) для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, является ε-решением уравнения (1.1) *на $P_h(x_0, y_0)$.*

Доказательство. 1) Аналогично тому, как это было сделано в § 1, п. 5^0 для произвольной точки (x_0, y_0) из области G построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в этой точке и два симметричных равнобедренных треугольника $T \subset \overline{R}$ с общей вершиной в той же точке и основаниями, параллельными оси ординат. При этом будут зафиксированы константы a, b, M и h.

Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $h/\delta_* = N \in \mathbb{N}$, и положим $x_{j+1} = x_j + \delta_*$ $(j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_n = x_0 + h$.

Будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках x_j для $x > x_0$.

Для $\forall\, j = 0, \ldots, N-1$ это сделать возможно, так как модуль тангенса угла наклона каждого отрезка равен $|f(x_j, \psi(x_j))|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника T по построению равны $\pm M$, где $M = \max_{\overline{R}} |f(x, y)|$. Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку треугольника T, а значит, остается в нем. Тем самым, для $\forall\, x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $(x, \psi(x)) \in T \subset \overline{R} \subset G$, и требуемая ломаная Эйлера построена на полуотрезке Пеано $[x_0, x_0 + h]$.

Для левого полуотрезка Пеано все аналогично.

2) Зафиксируем теперь произвольное положительное число ε.

Функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора f равномерно непрерывна на нем. По определению это значит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x' - x''| \le \delta_1$ и $|y' - y''| \le \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \le \varepsilon$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1/M\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим чем δ справедливо неравенство (1.8) на отрезке Пеано $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Возьмем любую точку x из отрезка Пеано, например, справа от x_0. Найдется индекс $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. x_j — ближайшая к x левая угловая точка ломаной Эйлера.

Согласно (1.6) $\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))$.

Оценим близость аргументов функции f.

По выбору δ и j имеем: $|x - x_j| \le \delta \le \delta_1$, и теперь согласно (1.5) $|\psi(x) - \psi(x_j)| = |f(x_j, \psi(x_j))||x - x_j| \le M\delta \le \delta_1$.

Поэтому из определения равномерной непрерывности функции f вытекает, что $|f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))| \le \varepsilon$, а значит, неравенство (1.8) из определения ε-решения справедливо для $\forall\, x \in P_h(x_0, y_0)$. $\Box$

3^0. Лемма Асколи - Арцела.

Вспомним для начала несколько определений из математического анализа, касающихся функциональных последовательностей, поскольку нам предстоит иметь дело с последовательностью ломаных Эйлера, являющихся ε_n-решениями, и ε_n будет стремиться к нулю.

Пусть последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задана на $[a, b]$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a, b]$, если $\forall n \geq 1 \;\; \exists K_n > 0: \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \leq K_n$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена на* $[a, b]$, *если* $\exists K > 0: \;\; \forall n \geq 1, \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \leq K$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на $[a, b]$, а значит, согласно теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a, b]$, если $\forall\, \varepsilon > 0, \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; \exists\, \delta_n > 0: \;\; \forall\, x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| \leq \delta_n \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равностепенно непрерывна на* $[a, b]$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0: \;\; \forall\, n \geq 1, \;\; \forall\, x', x'' \in [a, b]: |x' - x''| \leq \delta \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon$.

Последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ $\exists\, N_x > 0: \;\; \forall\, i, j \geq N_x \;\Rightarrow\; |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к некоторой функции* $h(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N > 0: \forall\, i, j \geq N, \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$.

Поточечная сходимость обозначается $h_n(x) \to h(x)$ при $n \to \infty$ для $\forall\, x \in [a, b]$, а равномерная — $h_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} h(x)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, в первых двух определениях слова равномерно и равностепенно означают, что константы K и δ не зависят от выбора n, а в третьем определении равномерность означает, что номер N не зависит от выбора x.

Лемма Асколи - Арцела (о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на отрезке* $[a, b]$ *последовательности функций* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно извлечь равномерно сходящуюся на* $[a, b]$ *подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно, что рациональные числа образуют счетное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой. Поэтому всюду плотное множество рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a, b]$, можно перенумеровать, обозначая рациональные числа $r_1, r_2, \ldots$.

В точке r_1 числовая последовательность $\{h_n(r_1)\}_{n=1}^{\infty}$ по предположению ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует последовательность натуральных чисел $n^{(1)} = \{n_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)})$, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится при $x = r_1$.

В точке r_2 числовая последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(r_2)\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ существует подпоследовательность $n^{(2)} = \{n_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(2)} < n_{i+1}^{(2)})$ такая, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в точке $x = r_2$. При этом она сходится и при $x = r_1$ как подпоследовательность сходящейся последовательности.

Разряжая аналогичным способом числовую последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(r_3)\}_{i=1}^{\infty}$, получаем функциональную подпоследовательность $\{h_{n_i^{(3)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся в точках r_1, r_2, r_3. И т. д.

Введем последовательность индексов $\{n_i^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ — это, очевидно, i-й член подпоследовательности $n^{(i)}$.

Тогда функциональная подпоследовательность $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ исходной последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках отрезка $[a, b]$.

Действительно, в любой рациональной точке r_k последовательность $\{h_{n_i^{(k)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходится по построению, а $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=k}^{\infty}$ является ее подпоследовательностью.

Покажем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$, является искомой подпоследовательностью исходной последовательности.

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.

По определению последовательность $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному ε найдется $\delta > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x', x'' \in [a, b] :\ |x' - x''| \le \delta\ \Rightarrow\ |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \le \varepsilon/3.$

По построению последовательность функций $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках r_k из $[a, b]$.

Поэтому по выбранному ε для $\forall\, k \in \mathbb{N}$ найдется такое $N_{r_k} > 0$, что для $\forall\, i_*, j_* \geq N_{r_k} \ \Rightarrow\ |h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит δ. Пусть их окажется l штук.

Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, \ldots, r_l^*$.

Пусть $N = \max\{N_{r_1^*}, \ldots, N_{r_l^*}\}$, где константы N_r взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

Возьмем теперь произвольный $x \in [a, b]$. Предположим, что он попал в промежуток с номером p. Тогда для $\forall\, i_*, j_* \geq N$ по неравенству треугольника получаем $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$, поскольку $|x - r_p^*| \leq \delta$ и справедлива оценка из определения равномерной сходимости.

Итак, для $\forall\, \varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что для $\forall\, i_*, j_* \geq N$ и для $\forall\, x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$. $\square$

Пояснение. Пусть, например, для сходимости функциональной последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в очередной рациональной точке из имеющейся на данный момент подпоследовательности требуется выкидывать все члены через одного, начиная с первого. Имеем:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \ \ \underline{2},\ \ 4,\ \ 6,\ \ 8, 10, 12 \ldots;\\
n_2 &= \ \ 4,\ \ \underline{8}, 12, 16, 20, 24 \ldots;\\
n_3 &= \ \ 8, 16, \underline{24}, 32, 40, 48 \ldots;\\
n_4 &= 16, 32, 48, \underline{64}, 80, 96 \ldots \quad \text{и т. д.}
\end{aligned}
$$

Выбирая теперь в i-й строке индексов i-й индекс, получаем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\, h_2(x), h_8(x), h_{24}(x), h_{64}(x), h_{160}(x), \ldots\}$.

Замечание 9. *По теореме Стокса-Зайделя предельная функция* $h(x)$, *к которой равномерно относительно* $[a, b]$ *сходится последовательность функций* $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, *определена и непрерывна на* $[a, b]$.

4^0. Доказательство теоремы о существовании решения.

Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области G и построим какой-либо отрезок Пеано $P_h(x_0, y_0)$.

Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. По лемме об ε-решении для всякого n можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0), определенную на $P_h(x_0, y_0)$ и являющуюся ε_n-решением дифференциального уравнения (1.1) на отрезке $P_h(x_0, y_0)$.

Тем самым, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, x \in P_h(x_0, y_0)$ точка $(x, \psi_n(x)) \in \overline{R}$ и выполняется неравенство (1.8) $|\psi_n'(x) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon_n$.

Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $P_h(x_0, y_0)$ удовлетворяет лемме Асколи-Арцела.

Последовательность $\psi_n(x)$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y = \psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)| \le |y_0| + b$ для $\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \varepsilon / M$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)|$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ и для любых $x', x'' \in P_h(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем: $|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| \overset{(1.7)}{=} \Big| \displaystyle\int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\, ds - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\, ds \Big| = \Big| \int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\, ds \Big| \overset{(1.6)}{\le} \Big| \int_{x'}^{x''} \max_{j=\overline{1-N, N-1}} |f(x_j, \psi_n(x_j))|\, ds \Big|$ $\le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon$.

Таким образом, последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Асколи-Арцела и из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\psi_{i_*}(x)\}_{i_*=1}^{\infty}$.

Пусть $\psi_{i_*}(x) \overset{x\in P_h}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $i_* \to \infty$ $(i_* \to \infty$ при $i \to \infty)$.

По замечанию 8 функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано.

Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ является по построению ε-решением, то из (1.8) вытекает, что для $\forall\, x \in P_h(x_0, y_0)$

$$\psi_{i_*}'(x) = f(x, \psi_{i_*}(x)) + \Delta_{i_*}(x), \quad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}.$$

Интегрируя последнее равенство по s от x_0 до x, получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \psi_{i_*}(s))\, ds + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\, ds. \tag{1.9}$$

При этом $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$, $|\int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\, ds| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \to 0$ при $i_* \to \infty$, так как $|x - x_0| \le h$. Кроме того, поскольку любая точка $(s, \psi_{i_*}(s))$

принадлежит $\overline{R}$, а функция $f(x,y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на компакте $\overline{R}$, имеем: $f(s,\psi_{i_*}(s)) \overset{s\in P_h}{\rightrightarrows} f(s,\varphi(s))$.

Поэтому $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,\psi_{i_*}(s))\,ds \to \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds$ при $i_* \to \infty$.

Переходя в левой и правой частях (1.9) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество $\displaystyle\varphi(x) \overset{[x_0-h,x_0+h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds$.

Это тождество означает, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.3) на отрезке Пеано $P_h(x_0,y_0)$.

Следовательно, по теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением задачи Коши дифференциального уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0 на отрезке Пеано $[x_0-h, x_0+h]$. $\square$

Замечания.

10. *Теорема Пеано не дает информации о количестве решений уравнения (1.1), проходящих через заданную точку области G.*

11. *В связи с возможным нарушением единственности решений в некоторых точках области G в этих точках существуют решения, которые нельзя приблизить ломаными Эйлера. Так, в примере 3 решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$ — это функции $y = (x-C)^3$ и $y \equiv 0$. Но любой отрезок любой ломаной Эйлера, проходящей через точку $(x_0, 0)$, имеет нулевой угол наклона, поэтому ломаная может приближать только решение $y \equiv 0$. А если точка $(x_0,y_0) \in \widetilde{G} \subset G$ и $\widetilde{G}$ — область единственности, то любая равномерно сходящаяся на отрезке Пеано подпоследовательность произвольной последовательности ломаных Эйлера сходится к одному и тому же решению.*

§ 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Лемма Гронуолла.

В этом параграфе будут представлены три различные теоремы единственности, две из которых будут доказаны, включая теорему, сформулированную в § 1, п. 6^0.

Доказательство любой из теорем единственности, как и доказательство многих других результатов, основано на использовании леммы Гронуолла, позволяющей из интегральной оценки функции, когда функция оценивается сверху через интеграл от нее самой, и оценка в этом смысле является рекуррентной, получить прямую оценку сверху только через аргумент функции и входящие в интегральную оценку константы.

Лемма. *Пусть функция* $h(x)$ *непрерывна на* $\langle a, b\rangle$ *и*

$$\exists\, \lambda, \mu \geq 0: \ \forall\, x_0, x \in \langle a, b\rangle \ \Rightarrow \ 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\, ds \right|, \quad (1.10)$$

тогда справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x - x_0|}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x \geq x_0$.

Введем в рассмотрение функцию $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\, ds$.

Тогда $g(x_0) = 0$, $g(x) \geq 0$, $g(x) \in C^1([x_0, b\rangle)$ и $g'(x) = h(x) \geq 0$.

Подставляя функцию $g(x)$ в оценку (1.10), получаем неравенство $g'(x) \leq \lambda + \mu g(x)$.

Перенося последнее слагаемое в левую часть, домножая обе части на $e^{-\mu(x-x_0)}$ и выделяя слева производную, получаем неравенство $(g'(x) - \mu g(x))e^{-\mu(x-x_0)} = (g(x)e^{-\mu(x-x_0)})' \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$.

Интегрируя обе его части по s от x_0 до x, получаем неравенство $g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - g(x_0) \leq \lambda \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\, ds = -(\lambda/\mu)(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$.

Учитывая, что $g(x_0) = 0$, и домножая обе части неравенства на $e^{\mu(x-x_0)}$, получаем прямую оценку для $g:$ $g(x) \leq (\lambda/\mu)(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$.

Подставляя это неравенство в правую часть неравенства (1.10), получаем прямую оценку для $h:$ $h(x) \leq \lambda + \mu g(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$.

Таким образом, неравенство (1.11) доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$.

Если $x \leq x_0$, то в неравенстве (1.10) $h(x) \leq \lambda - \mu \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\, ds$ и введенная функция $g(x) \leq 0$.

Дальнейшее доказательство аналогично случаю, когда $x \geq x_0$, только домножать и делить соответствующие неравенства придется на $e^{\mu(x-x_0)}$, получая неравенство (1.11) в виде $h(x) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$. $\square$

Следствие. *Если в лемме Гронуолла* $\lambda = 0$, *т. е. в неравенстве* (1.10) $\quad 0 \leq h(x) \leq \mu \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\, ds \right|$, *то* $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$.

2^0. Условия Липшица.

Бывает, что требование дифференцируемости функции, особенно от нескольких переменных, по какой-либо переменной несмотря на удобство в применении и проверке, оказывается чрезмерным и его заменяют так называемым локальным условием Липшица, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в малой окрестности каждой точки из некоторой области.

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, если*

$$\exists\, L > 0 : \ \forall\, (x,\widehat{y}), (x,\widetilde{y}) \in D \ \Rightarrow \ |f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y})| \le L|\widetilde{y} - \widehat{y}|. \quad (1.12)$$

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y локально в области $G \subset \mathbb{R}^2$, т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, если для любой точки $(x_0,y_0) \in G$ найдется окрестность этой точки $V(x_0,y_0) \subset G$ такая, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет в ней условию Липшица по y глобально, т. е. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V(x_0,y_0))$.*

Более подробно условия Липшица будут рассмотрены в главе 3, посвященной нормальным системам дифференциальных уравнений, где будут установлена связь между ними.

3^0. Теоремы о единственности решения.

Теорема (о единственности решения). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области G, тогда G — это область единственности для уравнения* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из области G. Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, найдется окрестность $V = V(x_0,y_0) \subset G$ и глобальная константа Липшица $L = L(x_0,y_0) > 0$ такие, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V)$ с константой L.

Покажем, что (x_0,y_0) — точка единственности.

Рассмотрим любые два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ уравнения (1.1), проходящие через эту точку, т. е. $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0$.

Выберем интервал $(\alpha,\beta) \ni x_0$ такой, что оба решения на нем определены и для любого $x \in (\alpha,\beta)$ точки $(x,\varphi_1(x)), (x,\varphi_2(x)) \in V$.

По теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями функции $y = \varphi_j(x)$ $(j = 1,2)$ являются решениями интегрального уравнения (1.3) на (α, β), т. е. для всякого $x \in (\alpha, \beta)$ выполняется тождество (1.4): $\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_j(s))\, ds$.

В результате $\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s)))\, ds$ и точки $(s, \varphi_1(s)), (s, \varphi_2(s)) \in V$.

Следовательно в этих точках выполняется глобальное условие Липшица, т. е. неравенство (1.12), а значит, $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq$
$\Big| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))|\, ds \Big| \leq \Big| \int_{x_0}^{x} L|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|\, ds \Big|$.

К последнему неравенству можно применить лемму Гронуолла, а точнее, следствие к ней.

Положим $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$, $\lambda = 0$, $\mu = L$, тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 совпадают в каждой точке интервала (α, β), содержащего x_0. По определению это значит, что (x_0, y_0) — это точка единственности. $\square$

Слабая теорема единственности, сформулированная § 1, п. 6^0, имеет более жесткие ограничения на функцию $f(x, y)$, являясь, тем самым, следствием основной теоремы единственности. Докажем ее.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$, а в области $\widetilde{G} \subset G$ существует и непрерывна частная производная $\partial f(x, y)/\partial y$, тогда $\widetilde{G}$ — это область единственности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области $\widetilde{G}$. Существуют ограниченная окрестность этой точки $V = V(x_0, y_0)$ такая, что ее замыкание $\overline{V} \subset \widetilde{G}$ и V выпукла по y, т. е. отрезок прямой, соединяющий любые две точки из области V с одинаковыми абсциссами, целиком содержится в V. В качестве V, очевидно, можно взять любой открытый круг достаточно малого радиуса с центром в точке (x_0, y_0).

По предположению $\partial f(x, y)/\partial y$ непрерывна в области $\widetilde{G}$.

Следовательно на компакте $\overline{V}$ она достигает своего максимума.

Положим $L = \max\limits_{(x,y) \in \overline{V}} \left| \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$ и применим теорему Лагранжа, согласно которой для любых двух точек $(x, \widehat{y}), (x, \widetilde{y}) \in V$ с $\widehat{y} < \widetilde{y}$

существует $y^* \in (\widehat{y}, \widetilde{y}):\quad f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y}) = \dfrac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}(\widetilde{y} - \widehat{y})$.

Здесь точка $(x, y^*) \in V$, так как V выпукла по y. Поэтому в V верно неравенство $|f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y})| \le L|\widetilde{y} - \widehat{y}|$, и по определению $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V(x_0,y_0))$. Тогда по определению $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$, а значит, по теореме единственности $\widetilde{G}$ — область единственности. □

Следует иметь в виду, что локальное условие Липшица так же, как и гладкость функции f по y, не является необходимым и его можно ослабить, сохраняя единственность решения задачи Коши.

Теорема Осгуда (о единственности, сильная). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$ *и*

$$\forall\, (x,\widehat{y}), (x,\widetilde{y}) \in G:\quad |f(x,\widetilde{y}) - f(x,\widehat{y})| \le h(|\widetilde{y} - \widehat{y}|), \tag{1.13}$$

причем функция $h(s)$ *определена, непрерывна и положительна для* $\forall\, s \in (0,a]$ *и* $\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,ds \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$. *Тогда* G *— это область единственности для уравнения* (1.1).

Доказательство см. напр. в [3, § 12].

В качестве функции $h(s)$ можно выбрать, например, функцию $y = Ls$ $(L > 0)$. Тогда неравенство (1.13) превратится в неравенство (1.12), т. е. окажется глобальным условием Липшица в области G, а теорема Осгуда — следствием теоремы единственности.

Но $\int_0^a h^{-1}(s)\,ds$ будет также расходящимся для любой функции $h(s) = Ks\,|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|\,\ln\ln|\ln s|$ и т. д. А условие (1.13) на функцию $f(x,y)$ с такими функциями $h(s)$ уже значительно слабее, чем условие Липшица. Очевидно, оно допускает нелинейный рост функции f по y.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

1^0. Область существования общего решения.

В § 1, п. 7^0 было дано определение общего решения $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения (1.1) и сформулирована теорема о его существовании, которую предстоит доказать в этом параграфе.

Первое, что предстоит сделать, это описать область A, в которой, как будет установлено, можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности $\widetilde{G}$ нельзя, какой бы малой она ни была.

Область существования общего решения A (не надо ее путать с областью определения функции $y = \varphi(x, C)$) будет задаваться локально, т. е. в окрестности любой точки из $\widetilde{G}$, и будет иметь определенную форму, позволяющую получить необходимые результаты.

Итак, пусть $\widetilde{G}$ — область единственности для уравнения (1.1).

Возьмем произвольную точку $(x_0^*, y_0^*) \in \widetilde{G}$. Поскольку $\widetilde{G}$ является открытым множеством, существует такое $r > 0$, что окрестность $V = V(x_0^*, y_0^*) = \{(x, y) : |x - x_0^*| < r, |y - y_0^*| < r\} \subset \widetilde{G}$. Уменьшая при необходимости r, добьемся, чтобы компакт $\overline{V} \subset \widetilde{G}$.

Пусть числа y_1, y_2 таковы, что $y_0^* - y_1 < r$ и $y_2 - y_0^* < r$, т. е. точки $(x_0, y_i) \in V$. И рассмотрим решения задачи Коши $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ с начальными данными (x_0^*, y_1) и (x_0^*, y_2), графики которых лежат в $\overline{V}$ при $x \in [a, b] \ni x_0^*$. Тогда открытое множество

$$A = \{(x, y) \,|\, a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \tag{1.13}$$

вместе со своим замыканием $\overline{A}$ содержатся в $\overline{V}$.

Поскольку по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$ и $\widetilde{G}$ — это область единственности, то $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$. Поэтому открытое множество A — это область, так как дуги интегральных кривых решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$ не могут соприкоснуться, разбивая A на несвязные подмножества.

В чем же заключаются достоинства области A?

Лемма (о поведении решений в области A). *1) Существует число $h > 0$ такое, что для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ можно построить $P_h(x_0, y_0)$ — отрезок Пеано универсальной длины $2h$; 2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1.1) $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 продолжимо на весь отрезок $[a, b]$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0^*, y_0^*) из области $\widetilde{G}$ и построим ее окрестность A вида (1.13) так, чтобы $\overline{A} = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \subset \widetilde{G}$.

1) Обозначим через $\overline{A}^c$ $(c > 0)$ c-окрестность компакта $\overline{A}$, т. е. $\overline{A}^c = \{(x, y) \,|\, \exists\, (x_0, y_0) \in \overline{A} :\ |x - x_0| < c,\ |y - y_0| < c\}$. При этом, $\overline{A}^c = A^c$ — c-окрестность области A.

Очевидно, что существует такое $\varepsilon > 0$, что замыкание ε- окрестности компакта $\overline{A}$ или области A — это компакт $\overline{A^\varepsilon}$ — содержится в области $\widetilde{G}$. Тогда существует число $M = \max_{\overline{A^\varepsilon}} |f(x, y)|$.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из $\overline{A}$. Тогда замкнутый прямоугольник $\overline{R} = \{(x,y) \,|\, |x - x_0| \le \varepsilon,\ |y - y_0| \le \varepsilon\} \subset \overline{A^\varepsilon} \subset \widetilde{G}$.

Положим $h = \min\{\varepsilon, \varepsilon/M\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ — отрезок Пеано, построенным для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$.

2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ по теореме Пеано решение задачи Коши $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого согласно 1) неизменна для всех точек компакта $\overline{A}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, например, при $x > x_0$.

Если $x_0 + h \ge b$, то доказывать нечего. Если $x_0 + h < b$, то $\varphi_1(x_0 + h) < \varphi(x_0 + h) < \varphi_2(x_0 + h)$, а значит, $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \in \overline{A}$. Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y = \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0 + h, x_0 + 2h]$.

Если теперь $x_0 + 2h \ge b$, то доказательство закончено, если нет, то сделаем очередное продолжение решения вправо на длину h.

Таким образом за конечное число шагов решение будет продолжено вправо до точки b включительно.

Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки a. $\square$

2^0. Формула общего решения.

Для любой точки (x_0, y_0) из $\overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0. Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$ и по лемме из п. 1^0 решение $y = y(x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$.

Для произвольной точки $\zeta \in (a, b)$ положим

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C) \qquad ((\zeta, C) \in \overline{A}). \tag{1.14}$$

Именно таким образом из функции, задающей общее решение, убирается третий "лишний" аргумент.

Теорема (о существовании общего решения). *Введенная в* (1.14) *функция* $y = \varphi(x, C)$ *является общим решением уравнения* (1.1) *в области* A *из* (1.13), *построенной в окрестности произвольной точки из области единственности* $\widetilde{G}$.

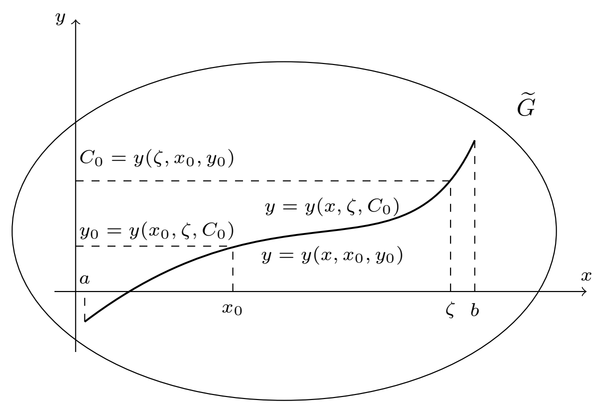
Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1.1), сформулированному в § 1, п. 7^0.

1) Возьмем любую точку $(x_0, y_0) \in A$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (1.14) уравнение

$$y_0 = y(x_0, \zeta, C). \tag{1.15}$$

Наличие у него решения $C = C_0$, фактически, означает, что выпущенное из точки $(\zeta, C_0) \in A$ решение уравнения (1.1) в момент x_0 попадает в точку $(x_0, y_0) \in A$. Покажем, что решение уравнения (1.15) существует и единственно.

Выпустим из точки (x_0, y_0) решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме из п. 1^0 определено на всем отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in (a, b)$ по определению (1.14).



Положим $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда точка (ζ, C_0) принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$ и по предположению является точкой единственности.

Поэтому решение задачи Коши уравнения (1.1) $y = y(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными ζ, C_0 $y = y(x, \zeta, C_0)$ по лемме продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$. В частности, $y_0 = y(x_0, \zeta, C_0)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ при $x = x_0$ попадает в точку (x_0, y_0).

Другими словами, дуга интегральной кривой уравнения (1.1), построенная на $[a, b]$ и проходящая через точки (x_0, y_0), (ζ, C_0) имеет две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = y(x, \zeta, C_0)$.

Итак, установлено, что уравнение (1.15) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0))$.

При этом функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, поскольку согласно (1.14) и (1.15) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$.

2) Покажем теперь, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна, т. е. непрерывна по совокупности переменных.

Опишем сначала область определения введенной в (1.14) функции $\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C)$, где фиксированное число $\zeta \in (a, b)$, а точка $(\zeta, C) \in \overline{A}$ и, тем самым, $\varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$.

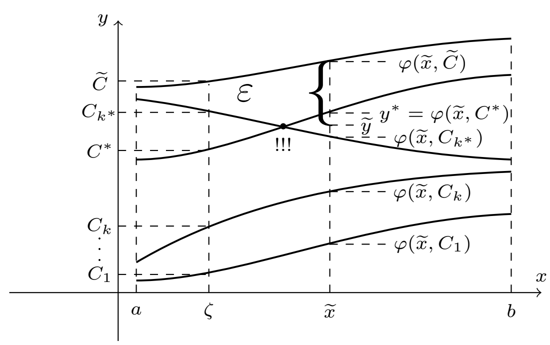
Учитывая, что по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для всякого $x \in [a, b]$ и что при $x = \zeta$ по определению решения задачи Коши $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$, заключаем, что $\varphi(x, C)$ определена в прямоугольнике $\overline{H} = \{(x, C) \,|\, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta)\}$.

Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1.1), она непрерывна по x при $x \in [a, b]$.

Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$.

Допуская противное, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a, b]$ и последовательность $C_k \to \widetilde{C}$ при $k \to +\infty$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})| \geq \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$. Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт и, в частности, $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ содержит все свои предельные точки.

В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \neq \zeta$, так как при $k \to \infty$ по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \to C = \varphi(\zeta, C)$.



Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ решения уравнения (1.1), получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$.

Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность, будем считать, не уменьшая общности, что последовательность C_k, например, монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \geq 1$.

В области единственности интегральные кривые не пересекаются, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Положим $\widetilde{y} = \lim_{k\to+\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$.

Выберем произвольную точку y^* из интервала $(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}))$.

Рассмотрим определенное на $[a, b]$ решение задачи Коши с н. д. $\widetilde{x}, y^*$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$, и положим $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$.

Тогда $C^* < \widetilde{C}$, поскольку $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{x}, \zeta, \widetilde{C})$.

Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на отрезке $[a, b]$, как было установлено выше, параметризует также решение с начальными данными ζ, C^*, имеющее согласно формуле (1.14) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причем $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$.

Однако, существует индекс k^* такой, что член C_{k^*} сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности C_k будет больше чем C^*.

В результате получилось, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k^*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются при некотором x^*, лежащем между ζ и $\widetilde{x}$, поскольку $\varphi(\zeta, C_{k^*}) = C_{k^*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k^*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$. Этот факт противоречит предположению о том, что G — область единственности.

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C, а значит, по каждой из переменных. Однако, само по себе, этого недостаточно для ее непрерывности по совокупности переменных.

Придется дополнительно воспользоваться еще одним свойством функции φ. Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при $\forall\, C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (1.1), то $\partial\varphi(x, C)/\partial x \equiv f(x, \varphi(x, C))$ на $[a, b]$.

Но $(x, \varphi(x, C)) \in \overline{A}$, когда точка $(x, C) \in \overline{H}$, а на компакте $\overline{A}$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq M$.

Следовательно функция $|\partial\varphi(x, C)/\partial x|$ равномерно ограничена.

Этого достаточно для непрерывности функции $y = \varphi(x, C)$ по x на $[a, b]$ равномерной относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$.

А это наряду с поточечной непрерывностью по C гарантирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в $\overline{H}$. $\square$

Df. *Общее решение* $y = \varphi(x, C)$, *определенное формулой* (1.14), *называется общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.*

Дополнение 1. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.

Пусть функция $y = y(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $\triangle y = \triangle y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)$ — приращение функции, $\triangle x = x - x_0$ — приращение аргумента.

Если $\exists \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}$, то $y'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}$ — производная y.

Df. *Если существует такое число* A, *что*

$$\triangle y = A \cdot \triangle x + o(\triangle x), \tag{I}$$

то функцию $y(x)$ *называют дифференцируемой в точке* x_0, *а выражение* $A \cdot \triangle x$ *— дифференциалом* y *и обозначают* $dy(x_0)$ *или* dy, *воспринимая это обозначение как единый функциональный символ.*

Теорема (о связи между дифференцируемостью и наличием производной). *Непрерывная функция* $y = y(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда существует конечная производная* $y'(x_0)$. *В этом случае в равенстве (I)* $A = y'(x_0)$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [3, п.104].

В результате установлено, что

$$dy = y'_x \cdot \triangle x, \tag{II}$$

причем $\triangle x$ — произвольное приращение независимой переменной, не обязательно бесконечно малое.

С геометрической точки зрения $\triangle y$ — это приращение ординаты кривой $y(x)$ в точке x_0, а dy — приращение ординаты касательной.

Отождествляя теперь дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y(x) = x$, получаем

$$dx = \triangle x,$$

поскольку согласно (II) $dx = x'_x \cdot \triangle x = 1 \cdot \triangle x$.

Следовательно формулу (II) можно записать в виде

$$dy = y'_x \, dx \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{dy}{dx},$$

что позволяет трактовать производную функции $y(x)$ как отношение дифференциалов и активно это использовать особенно при решении дифференциальных уравнений первого порядка.

Дополнение 2. Некоторые топологические определения.

Приведем определения встречающихся в данном пособии топологических объектов применительно к евклидовому пространству $\mathbb{R}^2$, поскольку именно в такой форме они используются в первых двух главах. При чтении последующих глав не составит труда обобщить эти определения на пространство $\mathbb{R}^n$.

1) областью называется непустое открытое связное множество;

2) множество $U \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если любая его точка является внутренней, т. е. если для $\forall\,(x_0, y_0) \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(x_0, y_0) \subset U$, где $V_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| < \varepsilon,$ $|y - y_0| < \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки (x_0, y_0);

3) множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется связным, если его нельзя покрыть двумя открытыми в $\mathbb{R}^2$ множествами, т. е. не существует открытых множеств $U, V \subset \mathbb{R}^2$, $U \cap V = \emptyset$ таких, что $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$; множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется линейно-связным (в $\mathbb{R}^2$ равносильно — связным), если любые две его точки можно соединить лежащим в A путем, а путь — это непрерывный образ отрезка;

4) точка (x_*, y_*) называется граничной точкой области $G \subset \mathbb{R}^2$, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие G, так и точки, не принадлежащие G.

5) множество называется замкнутым, если его дополнение открыто; множество $\overline{U} \subset \mathbb{R}^2$ называется замкнутым, если содержит все свои граничные точки или содержит все свои предельные точки;

6) множество $\overline{H}$ называется компактом, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие; замкнутое ограниченное множество $\overline{H} \subset \mathbb{R}^2$ является компактом.