Путевые заметки о билетах к экзамену по анализу

13.01.2015

Матан осилит ботающий

Пределы

19. Сходимость в себе

Определение 1. (x_n) называется сходящейся в себе (фундаментальной), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Лемма 1. *(x_n) сходится $\Rightarrow$ (x_n)— фундаментальная.*

Лемма 2. *Если последовательность сходится в себе, то ограничена она*
▼
Рассмотрим $\varepsilon = 1$, тогда $\forall n, m > N \ |x_n - x_m| < 1$. Зафиксируем m, ведь для любых же верно. Тогда $x_m - 1 < x_n < x_m + 1$. Тогда число элементов снаружи ограничено. Выберем из них максимальный и минимальный— победа.
▲

Теорема 1 (Больцано–Коши)**.** *(x_n)— фундаментальная $\Leftrightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$*

□

$\boxed{\Leftarrow}$ **:** см. лемму 1

$\boxed{\Rightarrow}$ **:** по лемме 2 $\exists A, B : A \leq x_n \leq B$. Тогда из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to L$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \ |x_m - x_n| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k > K \ |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

Пусть $M = \max K, N$, $m = n_k$. Тогда $k > M \Rightarrow n_k \geq k > M \geq N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

$k > M \Rightarrow k \geq K \Rightarrow |x_{n_k} - L| = |x_m - L| < \varepsilon |x_n - L| = |x_n - x_m + x_m - L| \leq |x_n - x_m| + |x_m - L| < 2\varepsilon$

■

Непрерывности

20. Непрерывность, разрывы

Определение 2. $f : A \to \mathbb{R}$ непрерывная в $x_0 \in A$

Определение 3. Непрерывность на промежутке

Определение 4. Изолированная точка, точка сгущения

Определение 5. Разрыв

(a) 1 рода:

$$\begin{cases} f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ оба существуют} \\ f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0) \end{cases}$$

(b) 2 рода:
Хотя бы один предел не существует или бесконечен

Свойства непрерывности:

(a) $f, g \in C(x_o) \Rightarrow f \pm g, f\,g, \frac{f}{g}, |f| \in C(x_0)$

(b) $f \in C(x_0), g \in C(f(x_0), f : X \to Y, g : Y \to \mathbb{R} \Rightarrow g \circ f \in C(x_0)$

21. Теорема Больцано-Коши

Теорема 2. *Пусть* $f : [a; b] \to [A; B],\ f \in C([a, b])$. *Тогда* $\forall C \in [A; B]\ \exists c \in [a; b] : f(c) = C$

22–23. Теоремы о монотонной функции на промежутке и её разрывах

Теорема 1. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ I$ *—промежуток и* f *монотонна на* I*. Тогда все её разрывы — скачки*

Теорема 2. *Пусть* $I \in \mathbb{R}$ *—промежуток,* $f \in C(I)$*. Тогда и* $f(I)$ *— промежуток*

Теорема 3. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ I$ *—промежуток,* f *монотонна. Тогда и* $f(I)$ *— промежуток* $\Leftrightarrow f \in C(I)$

Теорема 4. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I)$ *—-строго монотонная функция. Тогда* $\exists\, f^{-1}$*, тоже строго монотонная, непрерывная на* I*, с такой же монотонностью, что и* f

24. Корень

25. Экспонента

Определение 1. Пусть $x = n \in \mathbb{N}$. Тогда $a^n := \underbrace{a \cdot \ldots a}_{n \text{ раз}}$.

Определение 2. Пусть $x = m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Тогда:

$x = 0$**:** $a^x := 1$

$x < 0$**:** $a^x := \frac{1}{a^{-x}}$

Определение 3. Пусть $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Тогда $a^x := \sqrt[n]{a^m}$.

Определение 4. Пусть $x =\in \mathbb{R}$. Тогда

$a > 1$**:** $a^x := \sup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \{a^r \mid r \leq x\}$

$a = 0$**:** $a^x := 1$

$0 < a < 1$**:** $a^x := \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

Лемма 3. *Пусть $a > 1,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда $a^{1/n} - 1 \le \frac{a-1}{n}$*

Теорема 1. *Пусть $f(x) = a^x =: \exp_a(x),\ x \in \mathbb{R},\ a > 0$. Тогда:*

(a) $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$

(b) $f \uparrow$ *при* $a > 1$ *и* $f \downarrow$ *при* $0 < a < 1$

(c) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

(d) $f \in C$

$\square$

(a) $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$
Пусть $y_0 \in \mathbb{R}_+$

$$\lessdot\ A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a^x < y_0\} \text{ и } B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, y_0 < a^x\}$$

Эти множества не пусты, в них есть хотя бы рациональные числа. Из пункта 25b одно правее другого. Тогда из аксиомы полноты $\forall x_1 \in A,\ x_2 \in B\ \exists\, x_0 : x_1 \le x_0 \le x_2$. Осталось доказать только, что $a^{x_0} = y_0$, а это почти как теорема о $\sqrt{2}$. Разве что добавку можно взять равной $1/n$.

(b) $a > 1,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
По теореме о плотности $\mathbb{Q}:\ \exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q} : x_1 < r_1 < r_2 < x_2$, $\exists\, r_3 \in \mathbb{Q} : r_2 < r_3 < x_2$. Тогда

$$a^{x_1} = \sup\{a^r \,|\, r \le x_1\} < a^{r_1}$$
$$r_2 < r_3 < x_2 \Rightarrow a^{r_2} < a^{r_3} \Rightarrow a^{x_2} = \sup\{a^r \,|\, r \le x_2\} > a^{r_2}$$

Таким образом $a^{x_1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{x_2}$.

(c) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ Следует из аналогичного свойства для рациональных чисел по 25d

(d) $f \in C$ Из принципа Архимеда $\exists\, n : |x - x_0| < \frac{1}{n}$. Также $\exists\, r_1, r_2 \in \mathbb{Q} : r_1 < x < x_0 < r_2$, $|r_1 - r_2| < 1/n$. Тогда по 25b

$$a^{r_1} < a^{x_1} < a^{x_0} < a^{r_2} \Rightarrow 0 < a^{x_0} - a^x < a^{r_2} - a^{r_1} < a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) < a^{r_1}\left(\frac{a-1}{n}\right) < \varepsilon$$

$\blacksquare$

26. Логарифм и степенная функция

27. О-символика

Определение 1. $f(x) = o(g(x))$ при $x \to c \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Определение 2. $f(x) = O(g(x))$ при $x \to c \Leftrightarrow\ \exists M : \lim\limits_{x \to c} \frac{|f(x)}{g(x)|} \le M$

Определение 3. $f(x) \sim g(x)$ при $x \to c \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$x \sim \sin x$	$\sin x - x = o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\frac{x^2}{2} \sim \cos x$	$\cos x - 1 - \frac{x^2}{2} = o(x^2)$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	$x \sim \ln(x+1)$	$\ln(x+1) - x = o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	$e^x \sim 1 + x$	$e^x = 1 + x + o(x)$

Таблица 1: Полезные пределы

28. Теорема Вейерштрасса

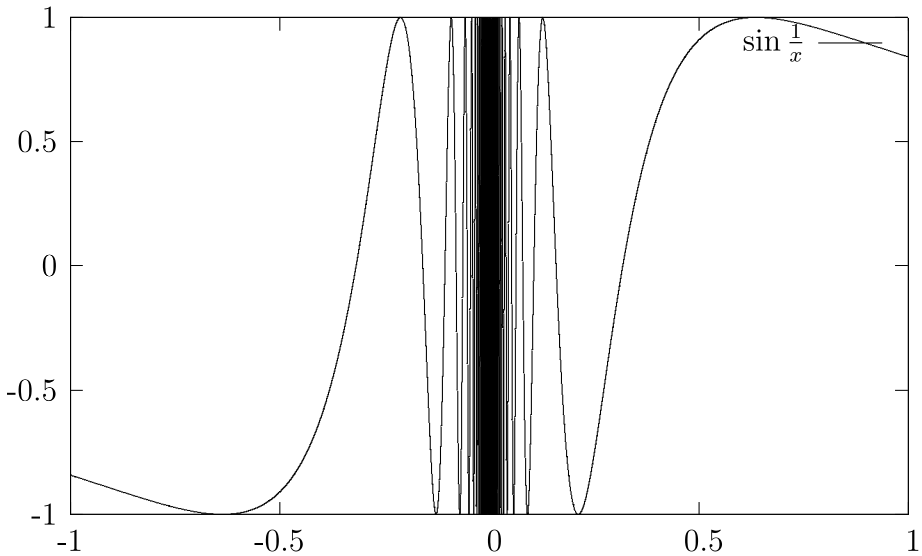
Теорема 1. *Пусть $f \in C([a;b])$. Тогда f ограничена и достигает своих наибольшего и наименьшего значений.*

$\square$ Нетрудно понять, что $\exists\, y_n \in f([a;b]) : y_n \to \sup[a;b] f(x) = s$. Из теоремы Больцано–Коши $\exists\, x_n \in [a;b] : y_n = f(x_n)$. А из x_n можно вытащить $x_{n_i} \to c \Rightarrow y_{n_i} = f(x_{n_i}) \to f(c)$ по непрерывности f. А по теореме о пределе подпоследовательности $f(c) = s$. Ограниченность очевидна. Для инфимума тоже самое. $\blacksquare$

29. Равномерная непрерывность и теорема Кантора

Определение 1. $f : X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in X \forall x_2 \in X |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Пример 1. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ помимо всех прочих её неприятных особенностей непрерывна на $(0;1)$, но не равномерно непрерывна там же ($E.\ g.\ \varepsilon = 1$)



Теорема 1 (Кантора - Гейне). $f \in C([a;b]) \Leftrightarrow f$ *равномерно непрерывна на* $[a;b]$

$\square$ Пойдём от противного. Пусть $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists\, x, x' \in [a;b]\, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$
Пусть $\delta_n = 1/n$. Тогда (тут пользуемся пределом по Гейне) $\exists\, x_n, x'_n \in [a;b]\ |x_n - x'_n| < \frac{1}{n} |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$
Извлечём из (x_n) сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) : x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c, c \in [a;b]$. По непрерывности

$$\left.\begin{array}{l} f(x'_{n_k}) \to f(c) \\ f(x_{n_k}) \to f(c) \end{array}\right| \Rightarrow f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Но по предположению $|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ $\blacksquare$

Производные

31. Дифференцируемость и прочие нужные определения

Определение 1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда *производной* функции f называется $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Определение 2. $f : X \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в $x_0 \in X$, если $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \underset{\in\mathbb{R}}{A}\, h + o(h)$

Дифференцируемость равносильна наличию конечной производной (это довольно простая теорема). Вот теперь $A = f'(x)$.

Определение 3. Дифференциал функции f в точке x_0 — новая функция $\mathrm{d}f(x;h) := A\,h = f'(x)\,h$ (*линейная часть приращения*).

Важный частный случай: $f = \mathrm{id}_X$. Тогда $f'(x) = 1$ и $\mathrm{d}f = h$. Вводится обозначение: $\mathrm{d}x := \Delta x = h$. Ещё пара довольно общих свойств:

- $f \in C^1(x_0) \Rightarrow f \in C(x_0)$
- $f \in C^1(x_0) \Rightarrow \exists\, \varphi \in C(0) : f(x+h) = \varphi(h)\,h + f(x) \wedge \varphi(0) = f'(h)$

32. Дифференцируемость частного (остальное неинтересно)

Утверждение 1. $f, g \in C^1(x) \wedge g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in C^1(x)$ *и* $\frac{f}{g}' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$
▼
Рассмотрим приращение частного f и g.

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(f(x)+\varphi(h)\,h)\,g(x) - (g(x)+\psi(h)\,h)\,f(x)}{g(x)\,g(x+h)} =$$
$$= \frac{(\varphi(h)g(x) - \psi(h)f(x))\cdot h}{g(x)g(x+h)} = \eta(x)\cdot h$$

Легко показать, что $\eta \in C(0)$ (числитель и знаменатель непрерывны, знаменатель не ноль). А тогда

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \eta(0) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

▲

33. Дифференцируемость композиции и обратной.

Утверждение 1. $f \in C^1(x), g \in C^1(y), y = f(x)$. *Тогда* $g \circ f \in C^1(x)$ *и* $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$. Доказывается через свойство 2 из 31 билета

Утверждение 2. *Пусть* $f \uparrow I,\ J = f(I),\ g = f^{-1} : J \to I,\ x \in I,\ y = f(x)$. *Также пусть* $f \in C^1(x),\ f'(x) \neq 0$. *Тогда*

$$(g^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Тут доказывать через производную композиции нельзя, зато можно через предел композиции. Нам ведь ещё неизвестна дифференцируемость f^{-1} в y_0.

34. Табличка производных — это слишком просто и скучно

35. Теоремы Ферма и Ролля.

Теорема 1 (Ферма)**.** *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}, c \in I$ *(без концов) . Также пусть* f *достигает экстремума в точке* c *и* $f \in C^1(c)$. *Тогда* $f'(c) = 0$.

Доказывается через предельный переход в неравенствах.

Теорема 2 (Ролля)**.** *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R},\ f \in C^1(\,(a;b)\,)$. *Также пусть* $f(a) = f(b)$. *Тогда* $\exists c \in (a;b) : f'(c) = 0$.

Доказывается через теоремы Вейерштрасса и Ферма.

36. Теоремы Коши и Лагранжа

Теорема 3 (Коши). *Пусть* $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}, f, g \in C^1(\,(a;b)\,)$. *Тогда* $\exists c \in (a;b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Доказывается через теорему Ролля вводом новой понятно какой функции.

Теорема 4 (Лагранжа). *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R}, f \in C^1(\,(a;b)\,)$. *Тогда* $\exists c \in (a;b) : (f(b) - f(a)) = (b-a)f'(c)$.

37–39. Производные и монотонность

Теорема 1. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}, f \in C^1(I)$. *Тогда*

- $f \uparrow I \Leftrightarrow f' \geq 0$
- $f \downarrow I \Leftrightarrow f' \leq 0$
- $f \equiv const$ *на* $I \Leftrightarrow f' \equiv 0$

Туда ($\Rightarrow$) — очевидно, обратно через теорему Лагранжа

Теорема 2 (Признак строгой монотонности). *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}, f \in C^1(I)$. *Тогда*

- $f \uparrow I \Leftrightarrow f' \geq 0 \wedge \forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \, \exists \, c \in (x_1, x_2) : f'(c) > 0$
- $f \downarrow I \Leftrightarrow f' \leq 0 \wedge \forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \exists \, c \in (x_1, x_2) : f'(c) < 0$

Теорема 3 (Доказательство неравенств). *Пусть* $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}, \;\; f, g \in C^1(\,(a;b)\,), \;\; f(a) = f(b), \;\; f'(x) \leq g'(x)$ *на* $(a;b)$. *Тогда* $f(x) \leq g(x)$ *на* $(a;b)$

40. Правило Лопиталя.

41. Многочлен Тейлора.

Определение 1. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, причём $f^{(0)} := f$

Определение 2. $\mathrm{d}^n f(x) := f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n$, при этом x – независимая переменная (иначе там всё плохо)

Теорема 1. *Пусть* $p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = b_n\, x^n + \dots + b_0, \;\; a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $p(x)$ *также представим в виде* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$, *где* $c_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$. Дифференцируем много раз – получаем то что нужно.

42. Асимптотическая формула Тейлора

Теорема 2. $f : I \to \mathbb{R}, \; a \in I, \; \exists \, f^{(n)}(a)$. *Тогда:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{где } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k \text{ – многочлен Тейлора},$$

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \text{ – остаточный член в форме Пеано },$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

(формула Тейлора)

$\square$ Из предыдущей теоремы $c_k = \frac{T_n^{(k)}(a)}{k!}$. Таким образом, все n производных f и T_n равны. Вообще надо доказать, что

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Применим $n-1$ раз правило Лопиталя. Тут очень важно, что для применения этого чудного правила нам нужна дифференцируемость хотя бы в некоторой *окрестности* a. Но нам известно только, что в некоторой окрестности a существует $f^{(n-1)}$ (иначе как мы продифференцируем последний раз?). Мы знаем лишь, что $f \in C^n(a)$. Итак,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftarrow \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)} = 0$$

А

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{n!\,(x-a)} - \lim_{x\to a} \frac{T_n^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(a)}{n!\,(x-a)} =$$
$$= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a)-T_n^{(n)}(a)) = 0$$

просто по определению производной. ■

43. Разложение элементарных функций

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k} + o(x^{2n+1})$
- $\ln(x+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}\,x^k + o(x^n)$
- $(1+x)^\mu = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{\mu}{k} x^k + o(x^n)$

44–45. Условия экстремума

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума)**.** *См. теорему Ферма*

Теорема 2 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть $\mathring{U}(a) \subset I,\ f \in C^1(\mathring{U}(a))$ и f' меняет знак при переходе через a. Тогда в a — экстремум.*

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума с производными высшего порядка)**.** *Пусть $\mathring{U}(a) \subset I,\ f \in C^n(\mathring{U}(a)),\ f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a)$, а $f^{(n)} \neq 0$. Тогда:*

(a) n чётно — в a экстремум.

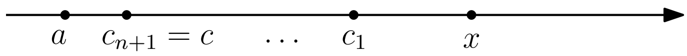
(b) n нечётно — в a нет экстремума.

Через формулу Тейлора докажется.

46. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема 1. $f: I \to \mathbb{R},\ a \in I,\ \exists\, f^{(n+1)}(I)$. *Тогда:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$
$$\text{где } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k,$$
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ c \in (a;x),$$
$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

В качестве наводящих соображений: 

47. Выпуклость.

Определение 1. $X \subset \mathbb{R}^n$. X — выпуклое, если $\forall\, a, b \in X\ [a; b] \subset X$

Лемма 4. *Пусть* $x, a, b \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $\forall\, x \in [a; b]\ \exists\, \theta \in [0; 1] : x = a + \theta\,(b - a)$

Лемма 5. *Пусть* $x, a, b \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $\forall\, x \in [a; b]\ \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1] : \lambda_1 + \lambda_2 \wedge x = \lambda_1 a + \lambda_2 b$

Определение 2. f называется выпуклой (выпуклой вниз) на I, если $\{(x; y) | x \in I, y \geq f(x)\}$— выпуклое множество. Почему-то почти не встречается обозначение $f \underline{\cup} I$, однако мне оно приглянулось ☺

Определение 3. f называется вогнутой (выпуклой вверх) на I, если $\{(x; y) | x \in I, y \leq f(x)\}$— выпуклое множество. Аналогичные соображения про обозначение $f \overline{\cap} I$.

Теорема 1 (Условие выпуклости функции). *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \underline{\cup} I \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I$
$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \ \in\ [0; 1] : \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

Лемма 6 (О 3 хордах). *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ f \underline{\cup} I,\ x_1, x, x_2 \in I : x_1 < x < x_2$. *Тогда и только тогда:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Давайте объявим её очевидной из геометрии. (На самом деле она спокойно докажется из определения, но это длинно и не шибко интересно)

48. Неравенство Енсена (Йенсена, Иенсена — как только его не называют…)

Определение 1. $x_1, \dots, x_n \in I,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0; 1],\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ — выпуклая комбинация.

Замечание 1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$

Теорема 1 (Неравенство Енсена). *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ f \underline{\cup} I$. *Тогда :*

$$\forall\, x_1, \dots, x_n \in I,\ \forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0 : 1] : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Индукцией побеждается

49. Дифференциальные условия выпуклости.
Поскольку теоремы кажутся очевидными, давайте их докажем.

Теорема 1. *Пусть* $f \underline{\cup} I = \langle a; b \rangle$. *Тогда:*

(a) $x \in (a; b) \Rightarrow \exists f'(x - 0), f'(x + 0)$ *и* $f'(x - 0) \leq f'(x + 0)$.

(b) $x_1, x_2, x \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1 + 0) \leq f'(x_2 - 0)$

(c) $f \in C(a; b)$

□

(a) Пусть $\varphi(h) := \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, 0 \notin \mathscr{D}(\varphi)$
$\sphericalangle\, h_1, h_2 \in (a;b) : h_1 < h_2$. Пусть $h_1 > 0$. Переобозначим: $y_1 := x, y := x + h_1, y_2 := x + h_2$.
По лемме о 3 хордах:

$$\frac{f(y) - f(y_1)}{y - y_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{f(x+h_1) - f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} \Leftrightarrow \varphi(h_1) \leq \varphi(h_2)$$

Аналогичное верно и для $h_1 < 0 < h_2$ и $h_1 < h_2 < 0$, таким образом φ монотонна в $\overset{\circ}{U}(0)$ и непрерывна в ней. Все разрывы монотонной функции — скачки. Тогда каждая из половинок монотонна и ограничена. А значит $\exists\, \varphi(+0), \varphi(-0)$ и равны $f'(x+0), f'(x-0)$ соответственно. При этом никто не гарантирует, что $\exists\, f'(x) = f'(x-0) = f'(x+0)$.

(b) По лемме о 3 хордах

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} & \leq & \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \\ {\scriptstyle (x \to x_1 + 0)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (x \to x_2 - 0)} \\ f'(x_1 + 0) & \leq & f'(x_2 - 0) \end{array}$$

(c) Так как существуют конечные $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$, то $f(x-0) = f(x+0) = 0$. То есть $f \in C(x)$. Однако нам ничего не известно про границы I. Заметим также, что число точек «перелома» не более чем счётно. Как было доказано ранее, в точках, где не существует производная $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. По теореме о полноте $\mathbb{Q}$ между ними есть $r \in \mathbb{Q}$. Также отметим, что $r_1 < f(x_1 + 0) < f(x_2 - 0) < r_2 \Rightarrow r_1 < r_2$. Мы построили сюръекцию из $\mathbb{Q}$ в множество разрывов — победа.

■

Теорема 2. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ f \in C^1(I)$. *Тогда* $f \underline{\cup} I \Leftrightarrow f' \uparrow I$.

□

$\boxed{\Rightarrow}$ следует из теоремы 1

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $x_1 < x < x_2 \in I$. Из теоремы Лагранжа

$$\exists\, c_1 \in (x_1, x), c_2 \in (x; x_2) : f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},\ f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и по утверждению обратному к лемме о 3 хордах $f \underline{\cup} I$

■

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^2(I)$. *Тогда* $f \underline{\cup} I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ *на* I

50. Неравенство Гёльдера

Теорема 1. $\forall\, a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n > 0,\ \forall\, p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Докажется через неравенство Енсена (при $p > 1$ $x^p \underline{\cup} \mathbb{R}_+$) не без помощи магии.

Интегралы

51–52. Первообразная и неопределённый интеграл.

Определение 1. Пусть $f, F : I \to \mathbb{R}$. Тогда $F' = f \Leftrightarrow F$ — первообразная для f.

Теорема 1. $f \in C(I) \Rightarrow \exists\, F : F' = f$

Теорема 2. $F, G, f : I \to \mathbb{R} : F' = G' = f$. *Тогда* $F - G \equiv c (c \in \mathbb{R})$.

Определение 2. Неопределённый интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x := \{F(x) + c | c \in \mathbb{R}\, F$ — первообразная $f\}$

Свойства первообразной:

(a) $\mathrm{d}\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$

(d) Формула интегрирования по частям.
$u, v \in C^1(I) \Rightarrow \displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

(e) Замена переменной в неопределённом интеграле.
Пусть $\varphi : I_t \to I,\ \varphi \in C^1(I_t),\ x = \varphi(t)$. Тогда $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (f \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t)\mathrm{d}t$

53. Алгоритмические вопросы интегрирования

Теорема 1. $\int R(x)\mathrm{d}\,x$, *где* $R(x) \in \mathbb{R}(x)$ *— выражается через элементарные функции.*

□ Основные пункты доказательства:

I. Представимость в виде суммы многочлена и простейших дробей

II. Интегрируемость $\dfrac{A}{x-a}$

III. Интегрируемость $\dfrac{A}{(x-a)^n}$

IV. Интегрируемость $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$

  i. $\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$

  ii. $\dfrac{1}{x^2+px+q}$

V. Интегрируемость $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

  i. $\dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$

  ii. $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$

  - $\dfrac{1}{(u^2+1)^n}$ — берётся по частям, понижая на каждом шаге степень знаменателя.

■

Теорема 2. $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, *где* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$ *— выражается через элементарные функции.*

$\square$ $\lessdot\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \text{ а } \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

. Таким образом

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \to \tilde{R}(t) \in \mathbb{R}(t)$$

. $\blacksquare$

Теорема 3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$, *где* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$ *— выражается через элементарные функции.*

$\square$ $\lessdot\ t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x$(*подстановка Эйлера*). Тогда

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,\mathrm{d}t$$

. Рационализация достигнута. $\blacksquare$

Теорема 4. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$, *где* $R(u,v) \in \mathbb{R}(u,v)$ *— выражается через элементарные функции.*

$\square$ $\lessdot\ t^n = \frac{ax+b}{cx+d}\,x$. Тогда

$$x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t,\ \mathrm{d}x = \frac{(a\,d-b\,c)\,n\,t^{n-1}}{(c\,t^n-a)^2}\mathrm{d}\,t$$

. Рационализация достигнута. $\blacksquare$

54. Определённый интеграл

Определение 1. Пусть $f : I \to \mathbb{R},\ f \in C(I)\ a, b \in I$ и F —первообразная. Тогда

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$$

(*формула Ньютона-Лейбница*)
Интересные свойства:

(a) Совсем простые (написаны просто чтобы не забыть)

- линейность
- $a < c < b \in I\ \displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$
- $\forall a \in I\ \displaystyle\int_a^a f = 0$
- (Теорема Барроу) $f \in C(I),\ a, x \in I \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f = f$

(b) Чуть сложнее (нужна невероятная теорема про неравенства и производные)

- $f \geqq 0,\ a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geq 0$ (такой значок: $\leqq$ — будет использоваться для функций для красоты)
- $f \geqq 0,\ a < b,\ \displaystyle\int_a^b f > 0 \Rightarrow \exists\, c : f(c) > 0$
- $f \leqq g,\ a < b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$ (интегрирование неравенств)
- $|f| \leqq g,\ a \leq b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \int_a^b g$
- $a \leq b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
- $f \leqq M,\ a \leq b \Rightarrow \left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$ (ограниченность)

(c) Почти такие же, как у неопределённого интеграла

- $\displaystyle\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$
- Замена переменной

$$f : I \to \mathbb{R}, f \in C(I),\ \varphi : J \to I, \varphi \in C^1(J),\ a, b \in I,\ \alpha, \beta \in J : \varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b,$$
$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

55. Теорема о среднем

Теорема 1. *Пусть* $f, g \in C([a;b]),\ g \geq 0,\ g \not\equiv 0$. *Тогда*

$$\exists\, c \in (a;b) : f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

Доказывается через теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши о непрерывной функции.

Определение 1. Пусть $f \in C([a;b]),\ a < b$. Тогда

$$\langle f \rangle \equiv f_{\text{ср}} := \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C([a;b])$. *Тогда* $\exists\, c \in (a;b) : f(c) = \langle f \rangle$. См. теорему 1.

56. Интеграл как предел Римановых сумм

Определение 2. Пусть $f \in C([a;b])$ $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,\ \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a;b]$
- $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го отрезка
- $r = r(\tau) = \max\limits_i\{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Теорема 3. *Пусть* $f : [a;b] \to \mathbb{R},\ f \in C([a;b])$. *Тогда* $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{r(\tau)\to 0} \sigma(\tau, \xi, f)$ Единственная теорема, для которой нужна равномерная непрерывность, так как δ выбирается для всего разбиения сразу. Приближенные формулы:

(a) Формула левых прямоугольников $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},\ \Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n-1},\ \xi_i = x_i$

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

(b) Формула правых прямоугольников $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},\ \Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n-1},\ \xi_i = x_{i+1}$

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+1)\,\frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

(c) Формула трапеций $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},\ \Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n-1}$,

$\xi_i = c \in [x_i; x_{i+1}] : f(c) \ = \ \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot \frac{b-a}{n}$$

(d) Формула Симпсона $x_i = a + i\,\frac{b-a}{n},\ \Delta x_i = \frac{b-a}{n},\ \tau = \{x_i\}_{i=1}^{n-1}$,

$\xi_i = c \in [x_i; x_{i+1}] : f(c) = \dfrac{f(x_i) + 4f\left(\frac{x + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})}{6}$

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})}{6} \cdot \frac{b-a}{n}$$

57. Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора

Теорема 4. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ f \in C^{n+1}(I),\ a \in I$. *Тогда:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$\textit{где } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Докажется индукцией по n с интегрированием по частям на каждом шаге

Ещё, конечно, есть примечания, но там вроде всё уже знакомое.

KEEP
CALM
AND
MAY THE FORCE
BE WITH YOU