§ 8 Кольцо линейных операторов

Определение 1. Пусть V — линейное пространство над полем K. Пусть также $\varphi\colon V \to V$, и φ — линейное отображение. Тогда φ — линейный оператор.

Определение 2 (Сложение и умножение операторов)**.** Введём 2 операции:

$$+\colon V \times V \to V \wedge (\psi + \varphi)(x) = \psi(x) + \varphi(x)$$
$$\circ\colon V \times V \to V \wedge \ (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

Теорема 1. *Множество эндоморфизмов* End(V) *с операциями, определёнными в 0.8.2 — кольцо.*

Теорема 2. *Пусть* $\dim V = n$*. Тогда*

$$(\mathrm{End}(V), \circ, +) \cong (M_n(K), \cdot, +)$$

☐ Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$, $A, B \in M_n(K)$. Выберем базис в V и рассмотрим отображение $f\colon \varphi \mapsto A_\varphi$, композиция переходит в умножение матриц, сложение — в сложение матриц.

Такое отображение обратимо, действительно,

$$\forall\, A \in M_n(K) \ \big(\omega(x) := Ax\big) \in \mathrm{End}(V)$$

А значит f — биекция.

Пусть в выбранном базисе $\varphi(x) = Ax$, $\psi(x) = Bx$. Уже доказывали, что матрица, соответствующая композиции $\psi\varphi$, равна BA. Теперь разберёмся с матрицей суммы

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = Ax + Bx = (A + B)x$$

То есть, в фиксированном базисе $(\varphi + \psi)$ соответствует $A + B$.

Таким образом, раз базис выбирали произвольно, то в любом базисе V.

1. f — биекция.
2. $f(\varphi + \psi) = A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = f(\varphi) + f(\psi)$
3. $f(\varphi\psi) = A_{\varphi\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = f(\varphi) \cdot f(\psi)$

Следовательно, f — изоморфизм. ■

Определение 3. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, A — матрица φ в фиксированном базисе, $p \in K[t]$. Тогда

$$p(\varphi)(x) = a_k\varphi^l(x) + \dots + a_1\varphi(x) + a_0 p(A) \quad = a_k A^l + \dots + a_1 A + a_0$$

Лемма 3. *Если в некотором базисе φ имеет матрицу A, то в том же базисе $f(\varphi)$ имеет матрицу $f(A)$.*

Лемма 4. *Многочлены от одного и того же оператора и его матрицы в фиксированном базисе коммутируют.*

▼
По сложению оно все коммутативно. В слагаемых переставлять нужно степени одного и того же. Циклические группы обычно абелевы.
▲

§ 12 Инвариантные подпространства

Определение 1. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, W — подпространство V. Тогда если $\varphi(W) \subset V$, то W — φ-инвариантное подпространство V.

Лемма 1. *Пусть:*

- $V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$
- W_i — *φ-инвариантное подпространство*
- *базис V разбивается на базисы W_i.*
- $\varphi \big|_{W_i} \in \mathrm{End}(V)$
- *В фиксированном базисе A_i, A — матрицы φ_i, φ соответственно.*

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

▼
Можно рассмотреть один такой «блок». Если сверху/снизу него не ноли, то с инвариантностью проблемы.
▲

§ 13 Характеристический многочлен оператора

Определение 1. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, A — его матрица в выбранном базисе. Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$$

Утверждение 1. *Какой бы базис не выбрали в V, характеристический многочлен не изменится.*

▼

Матрицы оператора во всевозможных базисах подобны. Единичная матрица не поменяется при смене базиса. А определители подобных матриц равны.

▲

Свойства

1. $\deg \chi_\varphi = n$
2. Пусть $\chi_\varphi(t) = a_n t^n + \dots + a_0$. Тогда

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_{n-1} = (-1)^n(a_{11} + \dots + a_{nn})$$

Определение 2. $\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + \dots + a_{nn}$

3. $A \sim A' \Rightarrow \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A'$

§ 20 Корневые подпространства

Определение 1. Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in K$[1] Корневой вектор — такой вектор x, что

$$\exists\, k \in \mathbb{N}\colon (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^k(x) = 0$$

Определение 2. Корневое подпространство — множество всех корневых векторов для данного числа λ. Обозначается $V(\lambda)$.

Утверждение 1.

$$\lambda \in \mathrm{Spec}\,\varphi \Rightarrow V_\lambda \subset V(\lambda)$$

Лемма 2. *Пусть $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $x \in V$, $x \neq 0$. Пусть также $k \in \mathbb{N}$ — минимальное k, что $\psi^k(x) = 0$. Тогда*

$$\{x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)\} \text{ — линейно независимы}$$

[1] У меня тут в конспекте баг, а у вас?

▼
Пусть оно линейно зависимо. Тогда

$$\exists\, \beta_i \neq 0\colon\ \beta_0 x + \beta_1 \psi(x) + \cdots + \beta_{k-1}\psi^{k-1}(x) = 0$$

Пусть ℓ — наименьший индекс β не равного нулю. Тогда если применить к обеим частям предыдущего равенства $\psi^{k-1-\ell}$, то

$$0 + \cdots + 0 + \beta_\ell \psi^{k-1}(x) + 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow \beta_l = 0$$

А таким методом можно получить что все $\beta_i = 0$. (?!?)
▲

Утверждение 3.

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^n(x) = 0\},\ n = \dim V$$

▼
Больше размерности линейно независимых векторов не наберёшь.
▲

§ 21 Сумма корневых подпространств

Лемма 1. *Пусть* $f, g \in K[t]$, $(f, g) = 1$. *Тогда*

$$\big(f(\varphi)(x) = g(\varphi)(x) = 0\big) \Rightarrow x = 0$$

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $n = \dim V$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} V(\lambda_i)^n \text{ — \textit{прямая}}$$

□ Воспользуемся тут критерием прямой суммы. Докажем, что $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$. Хорошо, пусть это не так. Выберем x из этого пересечения. Тогда $x = \sum_{i \neq j} x_j$, где $x_j \in W_j$.

Рассмотрим:

$$f(\varphi) = \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j\,\mathrm{id})^n$$

Тогда

$$\forall\, j\ \ f(\varphi)(x_j) = 0 \Rightarrow f(\varphi)(x) = 0$$

В нём попросту найдётся нужное корневое число.

С другой стороны,

$$g(\varphi)(x) = (\varphi - \lambda_i)^n(x) = 0$$

А поскольку f, g — взаимно просты, то по лемме 0.21.1 $x = 0$. ■

$\boxed{\text{А вот тут начинается совсем жестище...}}$

§ 22 Про инвариантность корневых подпространств

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. *Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в* $\mathbb{C}$ *заберёмся)*

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-\lambda_i)^{k_i}$$

Тогда:

1. $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V(\lambda_i)$
2. $V(\lambda_i)$ *—* φ*-inv.*

□ Соорудим i многочленов

$$f_i(t) = \prod_{j\neq i}(t-\lambda_j)^{k_j}$$

Они все взаимно просты. Тогда есть такое линейное представление id :

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_m f_m)(\varphi) = \mathrm{id}$$

посчитаем такую штуку для каждого $x \in V$.

Пусть

$$W_i = \big((h_i f_i)(\varphi)\big)(V)$$

Тогда

$$\mathrm{id}(V) = W_1 + \dots + W_m = V$$

a) Докажем, что W_i — φ-inv. Там многочлены в процессе коммутируют, мы это доказывали в 0.11.4

$$\begin{aligned}\varphi(W_i) = \varphi\big(h_i f_i(\varphi)(V)\big) &= \big(\varphi \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)\big)(V)\\ &= \big(h_i(\varphi)\cdot f_i(\varphi)\big)(\varphi(V)) < \big(h_i(\varphi)\cdot f_i(\varphi)\big)(V) = W_i\end{aligned}$$

b) Докажем, что $W_i \subset V(\lambda_i)$. Пусть $y \in W_i$. Тогда

$$\begin{aligned} y &= (h_1(\varphi) f_1(\varphi))(x)\\ (\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i}(y) &= \big((\varphi-\lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i} h_1(\varphi) f_1(\varphi)\big)(x)\\ &= h_i(\varphi)\cdot\big(\underbrace{(\varphi-\lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i} f_1(\varphi)}_{\chi_\varphi(\varphi)=0}\big)(x) = 0\end{aligned}$$

Так как корневые подпространства — подпространства V, то

$$V \supset \bigoplus_{i=1}^{m} V(\lambda_i) \Rightarrow \dim V \geqslant \sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i)$$

С другой стороны,

$$\dim \sum_{i=1}^{m} W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim W_i$$

При этом

$$W_i \subset V(\lambda_i) \Rightarrow \dim W_i \leqslant \dim V(\lambda_i)$$

Так что

$$\dim V = \dim \sum_{i=1}^{m} W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i) \leqslant \dim V$$

■

§ 23 Размерность корневого подпространства

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. *Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в* $\mathbb{C}$ *заберёмся)*

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{k_i}$$

Тогда:

1. $\dim V(\lambda_i) = k_i$
2. $\varphi_i = {}^{\varphi}\big|_{V(\lambda_i)}$ *имеет единственное собственное число* λ_i.

□

2 Пусть μ — собственное число φ_i не равное λ_i. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi - \mu\,\mathrm{id})(x) &= 0 \\ (\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^n(x) &= 0 \\ \big((t-\mu), (t-\lambda_i)^n\big) &= 1 \end{aligned}$$

А по лемме 0.21.1 $x = 0$. А тут что-то не так.[1].

[1]Собственные числа есть, так как любой характеристический многочлен приводим в $\mathbb{C}$. А тогда $\det(A - \lambda E_n) = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A - \lambda E_n) < n$. Тогда и размерность $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ не ноль. Значит, ненулевой вектор там есть.

1 Так как мы уже доказали, что пространство — прямая сумма корневых, то его базис разбивается на базисы корневых подпространств.

$$\underbrace{\underbrace{e_1^1, \dots, e_{s_1}^1}_{\text{базис } V(\lambda_1)}, \dots, \underbrace{e_1^n, \dots, e_{s_n}^n}_{\text{базис } V(\lambda_m)}}_{\text{базис } V}$$

мы когда-то (0.12.1) доказали, что матрица φ в таком случае выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) = \det(A_1 - tE_n) \cdots \det(A_m - tE_n) = \\ = \chi_{\varphi_1}(t) \cdots \chi_{\varphi_m}(t)$$

Что может входить в χ_{φ_i}? $(t - \lambda_j), j \neq i$ там точно нет из второго пункта. Но часть $t - \lambda_i$ в него не входить не может, иначе мы просто не наберём нужную степень в $\chi_\varphi(t)$. Так что

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (t - \lambda_i)_i^k$$

Но

$$s_i = \dim V(\lambda_i) = \deg \chi_{\varphi_i}(t) = k_i$$

■

§§ 24–25 Жорданова нормальная форма

Сначала пара определений

Определение 1 (Относительная линейная независимость)**.** Пусть W — подпространство V, $e_1, \dots, e_s \in V$ Тогда $\{e_i\}$ ЛНЗ относительно W, если

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s \in W \Rightarrow \forall\, \alpha_i = 0$$

Или (эквивалентная формулировка) объединение с базисом подпространства линейно независимо в V.

Определение 2 (Относительный базис)**.** Пусть W — подпространство V. Тогда дополнение базиса W до базиса V называется базисом V относительно W

Или, что тоже самое, они относительно линейно независимы и их линейная оболочка с W равна V.

Лемма 1. *Относительно линейно независимую систему можно дополнить до относительного базиса.*

может это 1-ая корректность?

Теперь что известно:

- V - линейное пространство над K, $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$
- $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.
- $\chi_\varphi(t) = \prod\limits_{i=1}^{m}(t - \lambda_i)^{k_i}$
- $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V(\lambda_i)$
- $\dim V(\lambda_i) = k_i$
- A_i — матрица $\varphi\big|_{V(\lambda_i)}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Определение 3 (ЖНФ)**.** Такая форма записи матрицы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

где J_i — жорданова клетка

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Определение 4 (Жорданов базис)**.** Базис, в котором матрица линейного оператора выглядит, как в 0.25.3

Рассмотрим $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$. Тогда

$$V_\lambda = \begin{array}{c}\operatorname{Ker}\psi\\ \shortparallel\\ W_1\end{array} \supset \begin{array}{c}\operatorname{Ker}\psi^2\\ \shortparallel\\ W_1\end{array} \supset \cdots \supset \begin{array}{c}\operatorname{Ker}\psi^\ell\\ \shortparallel\\ W_\ell\end{array} = V(\lambda)$$

Во всей этой процедуре будем ещё базисы W_j искать

- s_ℓ векторов на первой ступеньке — базис W_ℓ относительно $W_{\ell-1}$, то есть что добавилось на последнем шаге.
- Все ступеньки выше $r-1$ — базис W_ℓ относительно W_{r-1}
- На каждом шаге считаем ψ от всего, что было на предыдущей ступеньке и добавляем векторов, чтобы выполнялось предыдущее условие.

Лемма 2. *На r-ой ступеньке лежат векторы из* $\operatorname{Ker}\psi^r$*.*

▼
По индукции:

База: Векторы на ℓ-ой ступеньке из $\operatorname{Ker}\psi^\ell$.

Переход: $x \in \operatorname{Ker}\psi^{r+1} \Rightarrow \psi(x) \in \operatorname{Ker}\psi^r$. А оставшиеся векторы добираются из $W_r = \operatorname{Ker}\psi^r$

▲

Лемма 3 (Корректность поиска базиса)**.** *После дополнения до базиса относительно W_{r-1} система будет ЛНЗ относительно W_{r-2}.*

▼
Пусть оно линейно зависимо относительно W_{r-2}. Тогда

$$\sum_{i=r}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{s_i}\alpha_j^i x_j^i\right) + \sum_{j=1}^{s_r}\beta_j\psi(x_j^r) = w \in W_{r-2} \tag{1}$$

1) не все $\alpha_j^i = 0$
Пусть t — наибольший номер этажа на котором есть ненулевые α_i^t. Применим ψ^{t-1} к обеим частям равенства ((1)).

Второй член уберётся совсем, ведь $t \geqslant r$. Правая часть пропадёт по тем же причинам. А вот от первого слагаемого левой останется кусок (это не весь, ещё штуки вида x^{t-k} есть, но они пока не нужны):

$$\sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t \psi^{t-1}(x_j^t) = 0 \Rightarrow \psi^{t-1}\left(\sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t \in W_{t-1}$$

В итоге оно линейно зависимо над W_{t-1},$t-1 > r-2$ а мы тут неявно предполагали по полной индукции, что нет.

2) все $\alpha_j^i = 0$ Тогда просто применяем ψ^{r-1} к ((1)). Выйдет, что

$$\psi^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{s_r} \beta_j x_j^r\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s_r} \beta_j x_j^r \in W_{r-1}$$

Но в таком случае снова проблемы с индукционным предположением.

▲

Теперь рассмотрим циклическое подпространство

$$N_x = \langle x, \psi(x), \ldots, \psi^{\ell-1}(x)\rangle$$

Пусть B_{N_x} — матрица $\psi\big|_{N_x}$. Тогда можно понять, как она выглядит:

$$\begin{cases} Bx = \psi(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B\psi^{\ell-1}(x) = \psi^{\ell}(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \ell\left\{\overbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix}}}^{\ell}\right.$$

Тогда блок жордановой формы выглядит так:

$$J_i = \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix}}$$

где λ_i — собственное число.