Заметки к экзамену по анализу

t a x u s

10.06.2016

Оглавление

Аннотация

Главная цель данного документика — удобно собрать формулировки всяких утверждений из анализа и по возможности их доказательства (ну или идеи доказательств). Как показала практика, часто удобно глянуть в похожую бумажку в поисках чего-нибудь подзабытого. Так что это скорее справочник, причём весьма субъективный. Ну или путевые заметки. Не обольщайтесь. Автор скорее надеется чем уверен, что данный "труд" кому-нибудь поможет. Ещё одно примечание: тут все номера утверждений и т.п. имеют вид
`<глава>.<параграф>.<№ утверждения>`

Билет № 0: Неравенство Енсена

Теорема 1. *Пусть* $f \underline{\cup} I$. *Тогда* $\forall x_1, \dots x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0 : \sum_i \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Глава 5: Интегралы и их применения

Билет № 1: Интегральные неравенства

Утверждение 1 (Интегральное неравенство Йенсена)**.** *Пусть* $f \in C(I)$*, где* I *—промежуток;* $f \underline{\cup} I$*,* $\varphi \in C(I), \varphi \geqslant 0$*. Тогда:*

$$f\left(\frac{\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x}$$

□ Заменим интегралы суммами Римана со следующими условиями:

$$\tau = \left\{a + \frac{b-a}{n}\right\},\ \xi_i = x_i \text{ (левые прямоугольники)}$$

Тогда

$$\sigma_1 = \sum_i \varphi(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = I_1$$

$$\sigma_2 = \sum_i x_i\varphi(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i\varphi(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x = I_2$$

$$\sigma_3 = \sum_i f(x_i)\varphi(x_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\varphi(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = I_3$$

Пусть $\lambda_i = \frac{\varphi(x_i)}{\sum_i \varphi(x_i)} \geqslant 0$. Тогда из оригинальной теоремы Йенсена (0.0.1) и Римана

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_i \lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \leqslant \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \leqslant \frac{I_3}{I_1}$$

■

Утверждение 2 (Интегральное неравенство Гёльдера)**.** *Пусть* $\varphi, \psi \in C(I)$*, где* I *—промежуток,* $\varphi, \psi \underset{I}{\geqslant} 0$ *(иначе степень не определена);* $p, q > 1$*,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Тогда:*

$$\int_a^b \varphi\psi \leqslant \left(\int_a^b \varphi^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_a^b \psi^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

Билет № 2: Формула Валлиса

Лемма 1.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 0\ \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} &,\ n = 2k+1 \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} &,\ n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

▼

Если поинтегрировать по частям, получится соотношение:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Всё сводится к двум "отправным точкам"

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x = 1$$

Отсюда очевидным образом получаются оба ответа

▲

Теорема 2 (Формула Валлиса)**.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big((2n)!!\big)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}$$

Билет № 3: Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора

Теорема 1. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R},\ f \in C^{n+1}(I),\ a \in I$. *Тогда:*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$\text{где } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}x,$$

$$\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Билет № 4: Аддитивные функции промежутка

Определение 1. Пусть Δ — промежуток. Тогда $\Phi(\Delta)$ — аддитивная функция промежутка Δ, если

$$\forall\, \alpha < \beta < \gamma \in \Delta \quad \Phi([\alpha;\gamma]) = \Phi([\alpha;\beta]) + \Phi([\beta;\gamma])$$

Пример 1. $\Phi(\Delta) = |\Delta|$

Определение 2. $\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ — средняя плотность аддитивной функции

Определение 3. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, $x \in \Delta$

$$\lim_{\alpha,\beta\to x} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} = \rho(x)$$

$\rho(x)$ — плотность аддитивной функции в точке.

Утверждение 1. *Пусть* $I = [A; B]$, $x \in I$, Φ *— аддитивная функция на* I, $\Delta \subset I$, $\Delta = [\alpha, \beta]$. *Тогда если ввести такую функцию:* $F(x) := \Phi([A, x])$, *то* $\Phi(\Delta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Лемма 2. *Если* $\rho(x)$ *существует, то* $\rho(x) = F'(x)$

Лемма 3. *Пусть* Φ *— аддитивна на* I, $\exists\, \rho \in C(I)$, $\Delta = [\alpha, \beta] \in I$. *Тогда*

$$\Phi(\Delta) = \int_\alpha^\beta \rho(x)dx$$

Пример 1. Площадь криволинейной трапеции.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Билет № 5: Тесты на плотность

Утверждение 1. *Пусть* Φ *— аддитивная функция промежутка* $\Delta \subset I$, $f \in C(I)$, $m(\Delta), M(\Delta)$ *— ещё 2 функции от переменного промежутка* Δ. *Если при этом:*

1. $\forall\, \Delta \subset I \quad m(\Delta) \leqslant \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant M(\Delta)$
2. $\forall\, \Delta \subset I$, $\forall\, x \in \Delta \quad m(\Delta) \leqslant f(x) \leqslant M(\Delta)$
3. $|\Delta| \to 0 \Rightarrow M(\Delta) - m(\Delta) \to 0$

то $\rho(x) = f(x)$

Утверждение 2. *Пусть* Φ *— аддитивная функция промежутка* $\Delta \subset I$, $f \in C(I)$ *и*

$$\forall\, \Delta \subset I \left(\min_\Delta f\right) \cdot |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \left(\max_\Delta f\right) \cdot |\Delta|$$

Тогда $\rho(x) = f(x)$

Утверждение 3. *Пусть* Φ *— аддитивная функция промежутка* $\Delta \subset I$, $f, g \in C(I)$, $f, g \geqslant 0$ *и*

$$\forall\, \Delta \subset I \left(\min_\Delta\right) \cdot \left(\min_\Delta g\right) \cdot |\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \left(\max_\Delta f\right) \cdot \left(\max_\Delta g\right) \cdot |\Delta|$$

Тогда $\rho(x) = f(x)g(x)$

Билет № 6: Площадь криволинейного сектора

Определение 1. Пусть $I = [\varphi_1; \varphi_2]$, $g \in C(I)$, $g \geqslant 0$, $\Delta = [\alpha; \beta] \subset I$. Тогда

$$\mathrm{Sec}_\Delta^g = \{(r; \varphi) \mid \varphi \in \Delta, 0 \leqslant r \leqslant g(\varphi)\}$$

Теорема 1.

$$S(\mathrm{Sec}_\Delta^g) = \frac{1}{2} \int_\Delta g^2(\varphi) d\varphi$$

Билет № 7: Объём тела вращения

Определение 1. Пусть $I = [\varphi_1; \varphi_2]$, $g \in C(I)$, $g \geqslant 0$, $\Delta = [\alpha; \beta] \subset I$. Тогда

$$\mathrm{B}_\Delta = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \Delta, y^2 + z^2 \leqslant g^2(x)\}$$

Теорема 1.

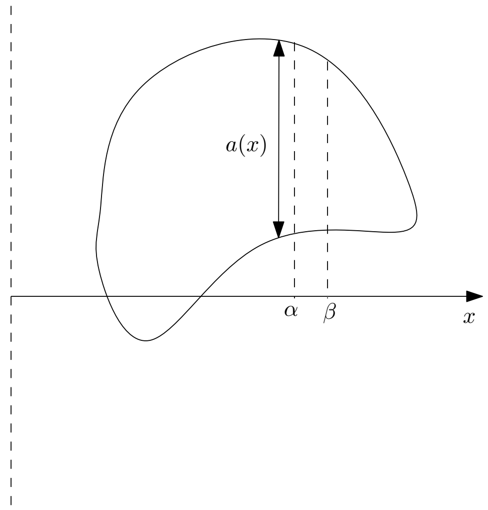
$$\mathrm{Vol}(\mathrm{B}_\Delta) = \pi \int_\Delta g^2(x) d\varphi$$

Теорема 2 (Обобщение 5.7.1)**.** *Пусть V — объём трёхмерного тела, $S(x)$ — площадь сечения плоскостью $\perp OX$. Тогда*

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Билет № 8: Приложение интегралов к физике

Пример 1. Статический момент плоской фигуры относительно оси.



Докажем, что

$$N = \int_{x_1}^{x_2} \sigma x a\,(x)\; dx$$

где $a\,(x)$ — длина “сечения” фигуры, σ — поверхностная плотность

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta] \subset [x_1, x_2]$ — промежуток на оси x, $\Phi(\Delta)$ — момент такой “полоски”.

Будем считать статический момент аддитивным по определению. Ещё мы умеем считать момент точки: он равен $m_i x_i$. Чтобы воспользоваться тестом 5.5.3 докажем, что (то, что они все положительные, очевидно)

$$\left(\min_\Delta a\,(x)\right) \left(\min_\Delta x\sigma\right) |\Delta| \leqslant \Phi\,(\Delta) \leqslant \left(\max_\Delta a\,(x)\right) \left(\max_\Delta x\sigma\right) |\Delta|$$

$$\left(\min_\Delta a\,(x)\right) |\Delta| = |\Delta|\, a_{\min} = S_1 \text{ —вписанная площадь полоски}$$

$$\left(\max_\Delta a\,(x)\right) |\Delta| = |\Delta|\, a_{\max} = S_2 \text{ —описанная площадь полоски}$$

$$\left(\min_\Delta x\right) = \alpha$$

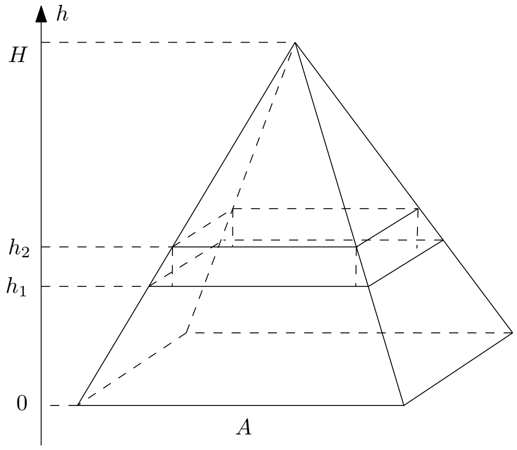
$$\left(\max_\Delta x\right) = \beta$$

Тогда нижний предел — это если бы мы сгребли всю массу с S_1 и поместили в ближний к оси край и посчитали момент всего этого. Видно, что момент полоски на самом деле больше: и масса оценена снизу, и есть хотя бы одна точка с ненулевой массой дальше от оси чем α. Аналогичные рассуждения применимы про оценку сверху.

Все условия теста 5.5.3 выполнены, значит

$$N_\Delta = \Phi\left(\Delta\right) = \int_\Delta a(x)x\sigma\,dx$$

Пример 2. Работа, которую нужно затратить на возведение пирамиды.



Пусть $\Delta = [h_1, h_2] \subset [0; H]$ — промежуток на оси высот, $\Phi\left(\Delta\right)$ — работа которую нужно затратить чтобы поднять слой толщины $|\Delta|$ на нужную высоту, $a\left(h\right)$ — сторона пирамиды в зависимости от высоты (она правильная и с квадратом в основании).

Чтобы получить функцию плотности, посмотрим сначала, что происходит с блоком в форме параллелепипеда со стороной основания a. Если поднять его на высоту h то работа, затрачена на это — $mgh = \rho a\left(h\right)^2 hg$.

Теперь, давайте докажем, что

$$\Phi\left(\Delta\right) = \int_\Delta a\left(h\right)^2 hg\,dh$$

Будем пользоваться условием теста 5.5.3

$$\left(\min_\Delta a\left(x\right)^2\right)\left(\min_\Delta x\rho\right)|\Delta| \leqslant \Phi\left(\Delta\right) \leqslant \left(\max_\Delta a\left(x\right)^2\right)\left(\max_\Delta x\rho\right)|\Delta|$$

Как видно, от предыдущего примера отличается только степенью при $a\left(x\right)$. Доказательство здесь почти такое же, разве что вместо площадей — объёмы.

У нормальной пирамиды $a\left(h\right) = A\frac{H-h}{H}$. Тогда

$$A = \int_0^H A^2\left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 h\rho\,d\,x = \rho\frac{A^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{1}{12}\rho A^2 H^2$$

Билет № 9: Путь и кривая

Определение 1. Пусть $\gamma\colon [a; b] \to \mathbb{R}^2$, γ — непрерывна (в многомерном смысле). Тогда γ — *путь* на плоскости. Путь — отображение.

Определение 2. Множество $\Gamma = \gamma([a; b])$ — носитель пути. γ в таком случае называется *параметризацией* Γ.

Определение 3. Путь называется *простым*, если отображение γ — биекция.

Определение 4. Носитель простого пути называется *кривой* [1] в $\mathbb{R}^2$ (ну или в $\mathbb{R}^3$, путь туда был).

Замечание. Полезно заметить, что у одной и той же кривой есть много параметризаций.

E.g.

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}, t \in (0; +\infty) \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(t) = e^{t^3-547} \\ y(t) = e^{t^3-547} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Определение 5. Пусть Γ — кривая, $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^2$ — её параметризация.

$\tau : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ разбиение отрезка $[a;b]$
$A_i = \gamma(t_i)$, $p(\tau) = A_1 \dots A_n$ ломанная, вписанная кривую
$\ell(p(\tau)) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |A_i A_{i+1}|$ длина ломанной

Тогда длина пути определяется так:[1]

$$l(\gamma) := \sup_\tau \ell(p(\tau))$$

При таком определении аддитивность вроде как очевидна ($\sup(\ell_1 + \ell_2) = \sup \ell_1 + \sup \ell_2$).

Билет № 10: Вычисление длины гладкого пути

Теорема 1. *Пусть* Γ *— кривая с гладкой параметризацией* $\gamma\colon [a;b] \to R$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma \in C^1([a;b])$. *Тогда длину пути можно найти так:*

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} = \int_a^b |\gamma'| \quad \forall \gamma$$

$\square$ Пусть $[\alpha, \beta] = \Delta \subset [a;b]$, $\Phi(\Delta) = \ell(\gamma\big|_\Delta)$. К тому же, как заметили выше, Φ — аддитивна. Докажем, что γ' — её плотность.

Будем пытаться свести всё к тесту 5.5.1. Пусть

$$m(\Delta) = \sqrt{\left(\min_\Delta |x'(t)|\right)^2 + \left(\min_\Delta |y'(t)|\right)^2}$$
$$M(\Delta) = \sqrt{\left(\max_\Delta |x'(t)|\right)^2 + \left(\max_\Delta |y'(t)|\right)^2}$$

Условия теста:

1. $m(\Delta) \leqslant \dfrac{\ell(\Gamma_\Delta)}{|[\alpha;\beta]|} \leqslant M(\Delta)$
   Посмотрим на кусочек кривой, который $\gamma(\Delta)$. Разобьём отрезок $[\alpha;\beta]$ и приблизим кривую ломаной, как это делали в 5.9.5. Тогда по теореме Лагранжа длину звена ломаной можно записать так

$$|A_i A_{i+1}| = \sqrt{|\Delta x_i|^2 + |\Delta y|^2} = |\Delta t_i| \sqrt{(x'(\xi_1))^2 + (y'(\xi_2))^2}$$
$$|\Delta x_i| = |x'(\xi_1)\Delta t_i|, \ \xi_1 \in [t_i; t_{i+1}] \subset \Delta$$
$$|\Delta y_i| = |y'(\xi_2)\Delta t_i|, \ \xi_2 \in [t_i; t_{i+1}] \subset \Delta$$

[1] Длину кривой мы видимо считаем по определению равной длине пути

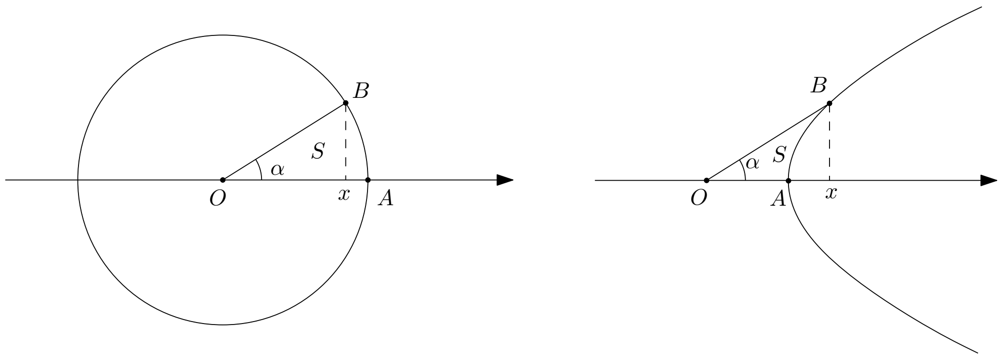


Рис. 5.1: Иллюстрация к геометрическому смыслу

Отсюда понятно как ограничить длину звена

$$m(\Delta)|\Delta t_i| \leqslant |A_i A_{i+1}| \leqslant M(\Delta)|\Delta t_i|$$

Сложим все такие неравенства:

$$m(\Delta)|\Delta| \leqslant \ell(p) \leqslant M(\Delta)|\Delta|$$

Перейдём к супремуму:

$$m(\Delta)|\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant M(\Delta)|\Delta|$$

2. очевидно из определения m, M

3. из теоремы Вейерштрасса

$$\exists\, t^m, t_m \in \Delta \colon |x'(t_m)| = \min_{\Delta} |x'(t)|, |x'(t^m)| = \max_{\Delta} |x'(t)|$$

Тогда при $\alpha, \beta \to t$ точки где достигаются экстремальные значения $t_m, t^m \to x$ и по непрерывности $x(t)$ $x(t_m), x(t^m) \to x(t)$. То же самое рассуждение и для $y(t)$ применимо. А тогда $|m(\Delta) - M(\Delta)| \to 0$.

Все условия выполнены, значит

$$\Phi(\Delta) = \int_{\Delta} |\gamma'| \Rightarrow \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

■

Билет № 11: Геометрический смысл обратных тригонометрических функций

см. Рис. 5.1

$$x = \cos t \Rightarrow t = \arccos x = \frac{1}{2} S_{AOB} \tag{5.1}$$

$$x = \operatorname{ch} t \Rightarrow t = \operatorname{arch} x = 2 S_{AOB} \tag{5.2}$$

Глава 6: Несобственные интегралы

Билет № 12: Общие свойства несобственного интеграла

Определение 1. Пусть $f \in C\big([a;b)\big)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f := \lim_{t \to b-0} \int_a^t f$$

Аналогичным образом можно поступить и для нижнего предела (или обоих сразу)

Определение 2. $\displaystyle\int_a^{\to b}$ называется *сходящимся*, если он существует и конечен.

Свойства несобственного интеграла:

1. $f \in C\big([a;b]\big)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \int_{\to a}^{b} f = \int_a^b f$$

2. $f \in C\big([a;b)\big)$, $c \in (a;b)$ Тогда

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^c f + \int_c^{\to b} f$$

Второе слагаемое ещё называют остатком.

$$\int_a^{\to b} f \text{ сходится } \Leftrightarrow \int_c^{\to b} f \text{ сходится}$$

3. $f \in C\big([a;b)\big)$, $c \in (a;b)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} f \;\; cx \;\Rightarrow \int_c^{\to b} f \xrightarrow[c \to b]{} 0$$

4. $f, g \in C\big([a;b)\big)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} (f+g) = \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$$

5. $f \in C\big([a;b)\big)$, $c \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{\to b} cf = f \int_a^{\to b} f$$

Пример 1.

$$\int_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ +\infty, & p \leqslant 1 \end{cases}$$

Билет № 13: Признак Больцано-Коши сходимости интеграла

Этот кусочек не сильно нужен, так что он будет таким шрифтом

Определение 1. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ — точка сгущения. Тогда f сходится в себе при $x \to c \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V(c) \colon \ \forall x', x'' \in \overset{\circ}{V} \ \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теорема 1 (Теорема Больцано-Коши для функций)**.** *f сходится в себе при $x \to c \Leftrightarrow \exists \lim_c f = M \in \mathbb{R}$.*

□

⇐ Рассмотрим произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда из условия конечности предела $\lim_c f$

$$\exists V(c) \colon \forall x \in V \ \ |f(x) - M| < \varepsilon/2$$

Тогда для $x', x'' \in V(c)$

$$|x' - x''| = |(x' - M) - (x'' - M)| \leqslant |x' - M| + |x'' - M| < \varepsilon$$

⇒ Будем доказывать через аналогичную теорему для последовательностей и определение предела по Гейне. Рассмотрим произвольную $(x_n) \colon x_n \to c, x_n \neq c$, произвольный $\varepsilon > 0$. Из условия равномерной сходимости

$$\exists V(c) \colon \forall x', x'' \in \overset{\circ}{V} |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$x_n \to c \Rightarrow$

$$\exists N \colon \forall m, n > N \ \ x_m, x_n \in \overset{\circ}{V}$$

Ну тогда $x' = x_n, x'' = x_m$ и по определению равномерной сходимости последовательностей $y_n = f(x_n)$ — фундаментальная. А значит, по теореме Больцано-Коши для последовательностей $\exists \lim y_n = L \in \mathbb{R}$.

Хорошо, мы получили, что для каждой последовательности (x_n) существует какой-то конечный предел последовательности $y_n = f(x_n)$. Для определения по Гейне необходимо, чтобы они все были равны.

Хорошо, пусть

$$\begin{aligned} x'_n &\to c \qquad & y'_n &= f(x'_n) \to L' \\ x''_n &\to c \qquad & y''_n &= f(x''_n) \to L'' \end{aligned}$$

Тогда $\sphericalangle \ z_n := (x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots)$. Она тоже $\to c$, значит $\exists M \in \mathbb{R} \colon f(z_n) \to M$. Но тогда у её подпоследовательностей разные пределы, что странно.

■

Теорема 2. *Пусть $f \in C\big([a;b)\big)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

$$\int_a^b f \ cx \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V(b) \colon \forall t', t'' \in \overset{\circ}{V} \ \ \left| \int_{t'}^{t''} f \right| < \varepsilon$$

Билет № 14: Свойства несобственного интеграла от положительных функций

Пусть $f \in C\big([a;b)\big)$, $f \geqslant 0$, $F' = f$.

0. $\displaystyle\int_a^{\to b} f \ cx \ \Leftrightarrow F(x) \leqslant M \ \forall x$

1. Признак сравнения интегралов.
   Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда

$$\int_a^{\to b} g \ cx \Rightarrow \int_a^{\to b} f \ cx$$
$$\int_a^{\to b} f \ pacx \Rightarrow \int_a^{\to b} g \ pacx$$

   Хватит и выполнения неравенства на $[c; b)$, $c \in (a; b)$, всё равно нужен только остаток.

2. Второй признак сравнения.
   Пусть $\exists \lim\limits_{t \to b-0} \dfrac{f(t)}{g(t)} = L$ Тогда:

   (a) $L < +\infty \Rightarrow \left(\int_a^{\to b} g \ cx \Rightarrow \int_a^{\to b} f \ cx\right)$

   (b) $L > 0 \Rightarrow \left(\int_a^{\to b} f \ cx \Rightarrow \int_a^{\to b} g \ cx\right)$

   В частности, из эквивалентности следует одинаковый характер сходимости

Попутно в этом же месте нормально определяли всякую тригонометрию, но, кажется, это не нужно в билете.

Билет № 15: Абсолютная и условная сходимость интеграла

Определение 1. Пусть $\int_a^{\to b}$ — сходится. Тогда говорят, что он абсолютно сходится, если $\int_a^{\to b} |f| < +\infty$. В противном случае говорят, что интеграл сходится условно.

Теорема 1. *Если интеграл абсолютно сходится, то он сходится.*

$\square \lessdot g = |f| - f$. Тогда $-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow 0 \leqslant g \leqslant 2|f|$. Теперь всё положительно и можно пользоваться признаками сравнения. Ещё можно воспользоваться признаком Больцано-Коши 6.13.2 [1]. $\blacksquare$

Билет № 16: Признаки Дирихле и Абеля

Теорема 1 (Признак сходимости Дирихле)**.** *Пусть* $f, g \in C^1\big([a; b)\big)$[1] *и*

1. $|f(x)|$[2] $\searrow 0$ *при* $x \to b - 0$
2. $\exists M : \left|\int_a^t g\right| \leqslant M \ \forall t$

[1] Вообще, хватило бы и просто непрерывности, но для этого нужно доказывать ещё сколько-то интегральных неравенств о среднем такого сорта :

$$\exists \xi \in [a; b]\colon \int_a^b (fg) = g(b) \int_a^\xi f + g(a) \int_\xi^b f \qquad \text{(см. [1, стр. 469])}$$

[2] Вообще, мы формулировали это без модуля, но для непрерывных функций эти условия эквивалентны

Тогда $\int_a^{\to b} fg$ *— сходится*

Теорема 2 (Признак сходимости Абеля)**.** *Пусть* $f, g \in C^1\big([a;b)\big)$ *и*

1. $f(x)$ *монотонна и ограничена*
2. $\int\limits_a^{\to b} g$ *сходится*

Тогда $\int_a^{\to b} fg$ *— сходится*

$\square$ Доказывать всё надо через признак Больцано-Коши 6.13.2. Сначала проинтегрировать по частям, а потом долго оценивать и доказывать что всё $\to 0$. $\blacksquare$

Глава 7: Числовые ряды

Билет № 17: Числовые ряды и примеры оных

Определение 1. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty},\ a_n \in \mathbb{R}$ — числовая последовательность. Тогда рядом можно назвать последовательность и желание её просуммировать☺.

- Элементы последовательности (a_n) — члены ряда.
- $S_n = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ — частичная сумма последовательности (a_n)
- $r_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ — остаток ряда.
- $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ — сумма ряда.

В принципе, ряд можно попробовать формализовать как упорядоченную пару $\big((a_n),(S_n)\big)$. Или просто называть рядом некий цельный символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 2. Ряд называется *сходящимся* когда предел частичных сумм существует и конечен и *расходящимся* во всех остальных случаях.

Пример 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

Посмотрим на член ряда:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Перепишем ряд:

$$\sum_{k=1}^{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Оно магически свернулось. Теперь:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-n}, & |q| < 1 \\ \text{ряд расходится }, & |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

Билет № 18: Общие свойства числовых рядов

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \ \Rightarrow a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

2. ряд сходится $\Leftrightarrow$ его остаток сходится.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ (если любые 2 ряда сходятся, то сходится и третий).

4. $\forall c \in \mathbb{R} \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (характер сходимости у рядов одинаковый)

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \ \Leftrightarrow r_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Утверждение 1 (Критерий сходимости Больцано-Коши)**.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n > N \ \forall p > 0 \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Билет № 19: Положительные ряды. Признаки сравнения

Определение 1. Ряд положителен, если $\forall k \ a_k \geqslant 0$

Утверждение 0. *Всегда* $\exists S \in [0; +\infty]$

Утверждение 1 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть* $\forall n \ a_n \geqslant b_n \geqslant 0$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ cx$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ pacx \ \Leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ pacx$$

Замечание. Хватит выполнения неравенства в $V(\infty)$, всё равно сходимость определяют только остатки.

Утверждение 2 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть* $\forall n \ a_n \geqslant 0, b_n > 0$ *и также*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in [0; +\infty]$$

Тогда:

$$L < +\infty \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ cx \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \right)$$
$$L > 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ cx \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ cx \right)$$

Следствие 1. *При* $0 < L < +\infty$ *ряды ведут себя одинаково*

-2

Билеты №№ 20–23: Признаки Даламбера и Коши

Теорема 1 (Признак Даламбера). *Пусть* $\sum a_n$ *— положительный ряд и*

$$\exists\, D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ D \in [0; +\infty]$$

Тогда

1. $D < 1 \Rightarrow$ *ряд сходится*
2. $D > 1 \Rightarrow$ *ряд расходится*
3. $D = 1 \Rightarrow$ *непонятно*

Теорема 2 (Признак Коши). *Пусть* $\sum a_n$ *— положительный ряд и*

$$\exists\, C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},\ C \in [0; +\infty]$$

Тогда

1. $C < 1 \Rightarrow$ *ряд сходится*
2. $C > 1 \Rightarrow$ *ряд расходится*
3. $C = 1 \Rightarrow$ *непонятно*

Замечание 1. Оба признака: и Коши и Даламбера — основаны на сравнении ряда с геометрической прогресией 7.17.2. А сумма геометрической прогрессии сходится, когда её знаменатель < 1. А $q = 1$ — точка в которой формулы суммы геометрической прогресии не существует. Так что она особенная ☺.

Замечание 2. В качестве примера к 3 пункту обеих теорем годится ряды $\sum \frac{1}{n}$ и $\sum \frac{1}{n^2}$. Второй сходится, а первый — нет.

-2

Билеты №№ 24–27: Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 1. Пусть (x_n) — целочисленная последовательность. Тогда

$$\underline{\ell} = \varliminf_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$$
$$\overline{\ell} = \varlimsup_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$$

где $\overline{\ell}, \underline{\ell}$ — верхний и нижний пределы соответственно.

Замечание 1. Можно ещё конечно отдельно упомянуть про случаи с $\pm\infty$, но вроде как все они уже заложены в определение предела.

Замечание 2. Верхний и нижний пределы существуют, так как последовательность супремумов/инфимумов монотонна.

Определение 2. Пусть (x_n) — целочисленная последовательность, (x_{n_k}) — её подпоследовательность. Тогда $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

называется частичным пределом последовательности.

Теорема 1 (Теорема о трёх пределах?).

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

□ Следствие теоремы 7.27.2 ■

Теорема 2 (о множестве частичных пределов). *Пусть (x_n) — целочисленная последовательность, $\overline{\ell}, \underline{\ell}$ — её верхний и нижний пределы соответственно.*

1. *c — частичный предел $\Rightarrow \underline{\ell} \leqslant c \leqslant \overline{\ell}$*

2. *$\underline{\ell}, \overline{\ell}$ сами являются частичными пределами*

□ Пусть

$$\overline{x_n} = \sup_{i\geqslant n} x_i, \ \underline{x_n} = \inf_{i\geqslant n} x_i, \ c = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

1. Из определения $\overline{x_n}$, $\underline{x_n}$ и правила 3 полицейских:

$$\underline{x_{n_k}} \leqslant x_{n_k} \leqslant \overline{x_{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \underline{\ell} \leqslant c \leqslant \overline{\ell}$$

   (тут они ещё не подспоследовательности, но вот брать n_k элемент мы уже умеем).

2. Докажем условие для $\overline{\ell}$, для инфимумов там то же самое будет. Из определения предела

$$\forall V_1(\overline{\ell}) \ \exists N \colon \forall n > N \ \ \overline{x_n} \in V_1$$

   К тому же

$$\forall n, V_2(\overline{x_n}) \ \exists k > n \colon x_k \in V_2^- \subset V_2 \text{ (иначе } \overline{x_n} \text{ не супремум } \{x_k \mid k \geqslant n\}).$$

   Тогда $x_k \in V_1 \cup V_2$. А такими объединениями можно собрать любую окрестность.

■

Билет № 28: Обобщённый признак Коши

Теорема 1. *Пусть $\sum a_n$ — положительный ряд и*

$$C = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \ C \in [0; +\infty]$$

Тогда

1. *$C < 1 \Rightarrow$ ряд сходится*

2. *$C > 1 \Rightarrow$ ряд расходится*

3. *$C = 1 \Rightarrow$ непонятно*

Замечание 1. В отличие от "обычного" признака Коши 7.23.2 тут не стоит вопрос о существовании предела, он есть всегда. Этим усиленный признак и лучше.

Билет № 29: Интегральный признак сходимости ряда

Теорема 1. *Пусть* $f \in C\big([1;+\infty)\big)$, $f \geqslant 0$, $f \searrow [1;+\infty)$. *Пусть также* $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f \text{ сх}$$

□ Пусть $F(t) = \int_1^t f$, тогда $F \nearrow [1;+\infty)$, $A_n \nearrow$. Значит, все пределы существуют. На основании этого немного перепишем условия:

$$\int_1^{\infty} f \text{ сх } \Leftrightarrow \exists \sup_{t \geqslant 1} F(t) \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сх } \Leftrightarrow \exists \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{R}$$

⇐ Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant x \leqslant k+1$. Тогда из убывания f

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx = a_{k+1}$$

Тогда

$$F(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} = A_n - a_1$$

Ну а тогда из ограниченности интеграла следует ограниченность частичных сумм .

⇒

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx = a_k$$

А дальше аналогично, только ограничиваем частичными суммами интеграл

■

Билет № 30: Признак Лейбница

Определение 1. Пусть (c_n) — числовая последовательность, $\forall\, n\ c_n > 0$, $c_n \searrow$, $c_n \to 0$ Тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$ — ряд Лейбница (знакопеременный ряд).

Теорема 1. *Про ряд Лейбница можно сказать следующее:*

1. *Он всегда сходится*
2. $S \in [0; c_0]$
3. $\forall\, n\ |r_n| \leqslant c_{n+1}$

□ Основная идея доказательства — посмотреть на половину ряда (например на чётную) и понять, что её частичные суммы убывают к 0, а значит и сходятся где-то в $[0; c_0]$. А вторая половина сходится туда же, так как члены ряда стремятся к 0.

Наконец, полезный пункт про остаток очевиден, если заметить, что остаток — тоже ряд Лейбница. ■

Билет № 31: Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов

Утверждение 1 (Преобразование Абеля)**.** *Пусть* $(a_n), (b_n)$ *— числовые последовательности,* $(B_n) : B_n = b_1 + \cdots b_n,\ B_0 = 0$ *Тогда*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1})B_k$$

▼

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(B_k - B_{k-1}) \\ &= a_{n+1}B_{n+1} - a_{n+1}B_n + \cdots + a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+p}B_{n+p-1} \\ &= a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k - a_{k+1})B_k\end{aligned}$$

▲

Замечание. По сути, аналог интегрирования по частям, только для для рядов.

Теорема 2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $\sum a_k b_k$ *— числовой ряд. Пусть также*

1. $a_n \searrow 0$[1]
2. $\exists\, M : \forall\, n\ |B_n| \leqslant M$

Тогда ряд $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Теорема 3 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $\sum a_k b_k$ *— числовой ряд. Пусть также*

1. a_n *монотонна и ограничена*
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сх*

Тогда ряд $\sum a_k b_k$ *сходится.*

□ a_n монотонна и ограничена ⇒ имеет конечный предел. Пусть $a_n \to a$. Тогда

$$\sum_{k=1} \infty a_k b_k = \sum_{k=1} \infty (a_k - a) b_k + a \sum_{k=1} \infty b_k$$

А теперь всё это сходится по признаку Дирихле. [3, стр. 309] ■

Замечание. Идеи тут в целом такие же, как и в аналогичных признаках для несобственного интеграла, разве что вместо интегрирования по частям — преобразование Абеля.

-2

[1] Тут уже трюк с модулем как в 6.16.1 не выйдет

Билеты №№ 32–35: Группировка и перестановка членов ряда

Определение 1. Пусть $\sum a_k$ — числовой ряд, (n_i) — неубывающая последовательность номеров, $n_0 = 0$. Тогда про ряд

$$\sum b_k\colon \left(b_k = \sum_{n_{k-1}<i\leqslant n_k} a_i\right)$$

говорят, что он получен из $\sum a_k$ группировкой слагаемых.

Теорема 1. *Пусть $\sum a_k$ — сходится, а $\sum b_k$ получен из него группировкой слагаемых. Тогда и $\sum b_k$ сходится, причём $\sum a_k = \sum b_k$. Ещё говорят, что ряд обладает сочетательным свойством.*

□ следствие теоремы о подпоследовательности ■

Замечание. В другую сторону такое свойство неверно, например ряд $(-1)^n$

Определение 2. Пусть $\sum a_k$ — числовой ряд, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биективное отображение. Тогда про ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\colon b_k = a_{\pi(k)}$$

говорят, что он получен из $\sum a_k$ перестановкой слагаемых.

Определение 3. Если в рамках предыдущего определения (7.35.2)

$$\forall\,\pi\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то говорят, что ряд $\sum a_n$ обладает переместительным свойством.

Теорема 2. *Положительные ряды обладают переместительным свойством.*

□ Пусть ряд $\sum b_n$ получился из положительного ряда $\sum a_n$ перестановкой $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Посмотрим на частичную сумму B_n.

$$B_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{\pi(1)} + \cdots + a_{\pi(n)} \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k = A_m,$$

где $m = \max\{\pi(k) \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$ (они все положительно, просто больше членов взяли). Таким образом, мы ограничили частичные суммы $\sum b_n$. А значит при переходе к пределам мы получим, что $B \leqslant A$.

Однако π — биекция $\Rightarrow \exists\,\pi^{-1}$. А значит, применяя те же самые рассуждения, мы получим, что $A \leqslant B$. Таким образом, $A = B$. ■

Теорема 3. *Абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством.*

Определение 4. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$a^+ := \max\{a, 0\}$$
$$a^- := \max\{-a, 0\}$$

Теорема 4 (Теорема Римана)**.** *Пусть ряд* $\sum a_n$ *сходится условно, а* $B \in \overline{R}$*. Тогда* $\exists\, \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = B$$

□ Вообще, строгого доказательства не будет, а вот картинка к нестрогому:

Мы можем сначала вынимать из ряда в том порядке, в котором они идут, положительные члены, пока не «перевесим» нужное значение. Потом вынимаем отрицательные, пока равновесие не сместится обратно. Потом снова положительные и так далее. Члены ряда уменьшаются по модулю, разность между «массами» на весах тоже уменьшается $\to 0$.

Но вообще, повторюсь, это скорее размахивание перекладиной весов, и закидывание оппонента гирьками, чем доказательство. ■

Ещё вот подтверждение:

Пример 1. Пусть $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\sum a_k = A$. Переставим чиселки в такие «тройки»:

$$\sum b_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

В итоге

$$\begin{aligned} B_{3n} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2n} \end{aligned}$$

Таким образом, $B_{3n} \to \frac{1}{2}A$. Все остальное сходится туда же, так как члены ряда $\to 0$

Билет № 36: Понятие о суммируемом семействе чисел

Этот кусок вообще какой-то странный… Давайте лучше верить, что “понятие” не требует особой строгости

Определение 1. Ладно, пусть есть какая-то $(a_i)_{i \in I}$, где I — множество индексов.

1. Пусть $\forall\, i\ a_i \geqslant 0$, $F \subset I$, $\#F < \infty$. По конечному множеству мы умеем суммировать.

$$S_F := \sum_{i \in F} a_i$$
$$S = \sum_{i \in I} a_i := \sup_F S_F$$

2. Пусть теперь $a_i \in \mathbb{R}$, но $\sum_{i \in I} |a_i| < +\infty$. Тогда семейство называется *суммируемым* и его сумма по определению считается как

$$S := \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-$$

А считать суммы чего-то положительного мы вроде уже умеем.

Если же обе этих суммы не конечны, то S по определению не существует. Впрочем, тогда и абсолютной сходимости нет ($\sum |a_k| = \sum a_k^+ + \sum a_k^-$).

Утверждение 1. *Пусть $I = \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S' = S'' = \sup_{\{F \mid \#F < \infty\}} S_F$$

То есть новое определение не противоречит старому.

▼
Можно рассматривать S_n как S_{F_n}, где $F_n = \{1, \ldots, n\}$. Тогда с одной стороны

$$\{F_n\} \subset \{F\} \Rightarrow \left(S' = \sup_{F_n} S_{F_n} \leqslant \sup_F S_F = S'' \right)$$

С другой стороны

$$\forall\, F \subset \mathbb{N} \colon \#F < \infty\ \ \exists\, m \colon F \subset F_m$$

А тогда $\sup\limits_F S_F = S'' \leqslant S'$. Следовательно, $S' = S''$.
▲

Следствие 1. *То же самое верно и для абсолютно сходящихся рядов. Можно рассмотреть у них отдельно положительную и отрицательную часть и всё получится.*

Утверждение 2. *Если $\#I > \aleph_0$, то $\sum_{i \in I} |a_i| = \infty$*

▼
Пусть это неправда и $S < +\infty$. Пусть $I_n = \{i \mid a_i > \frac{1}{n}\}$. Такое множество не может быть бесконечным, иначе $\sum_{I_n} |a_i| > \sum \frac{1}{n}$ — не конечна. Значит $\#I_n < \infty$. С другой стороны, из плотности $\mathbb{Q}$,

$$\left(\forall\, i \in I\ \ \exists n \in \mathbb{N} \colon a_i > \frac{1}{n} > 0 \right) = i \in I_n$$

Таким образом, $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, а объединение счётного числа конечных множеств счётно (?!?).
▲

Билет № 37: Двойные и повторные ряды

Определение 1. Пусть $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $a_i = a_{k\ell}$. Тогда можно просуммировать такое семейство разными способами:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k\ell} = b_\ell$, $\sum\limits_{\ell=1}^{\infty} b_\ell = \sum\limits_{\ell=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k\ell}$ — повторный ряд. Можно ещё индексы переставить.
2. $\sum\limits_{k,\ell=1}^{\infty} a_{k\ell} := \lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}$, $S_{mn} = \sum\limits_{\ell=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m} a_{k\ell}$ — двойной ряд
3. $d_n = \sum\limits_{k+\ell=n} a_{k\ell}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ — суммирование по Коши.
4. «змейкой».
5. etc.

Теорема 1.

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} |a_{mn}| < +\infty \Rightarrow \exists\, S = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{mn}$$

и S тогда можно посчитать любым другим способом.

Билет № 38: Произведение рядов

Определение 1. Двойной ряд $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m b_n$ называется произведением двух рядов $\sum a_m$, $\sum b_n$.

Теорема 1.

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty, & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B \end{cases} \Rightarrow \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m b_n = A\cdot B$$

□ Конечное множество индексов можно вписать в прямоугольник F_{mn}, так что

$$S_F = \sum_{(i,j)\in F} |a_i b_j| \leqslant \sum_{(i,j)\in F_{mn}} |a_i||b_j| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_i||b_j|$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|\right) < \infty$$

А тогда можно посчитать сумму как угодно, например так:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = B\sum_{m=1}^{\infty} a_m = AB$$

■

Пример 1.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}; \quad \varphi(x)\cdot\varphi(y) = \varphi(x+y)$$

Билет № 39: Асимптотика частичных сумм гармонического ряда

Теорема 1. *Пусть*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Тогда $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, *где* γ *— постоянная Эйлера*

□ Тут по сути нужно доказать, что кусочки ряда, выступающие над логарифмом, сходятся. А ряд из таких кусочков можно ограничить рядом из разностей столбиков, который сходится:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

■

-2

Билеты №№ 40–43: Формула Стирлинга

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

1. $n! \sim c\sqrt{n}n^n e^{-n}$
2. $n! = c\sqrt{n}n^n e^{-n}\left(1 + \frac{\theta_n}{4n}\right)$, $0 < \theta_n < 1$
3. $n! = c\sqrt{n}n^n e^{-n}\left(1 + \frac{\tilde{\theta}_n}{12n}\right)$, $0 < \tilde{\theta_n} < 1$

где $c \in \mathbb{R}$

□ Тут нужно считать площадь под графиком логарифма. А ряд из разностей реальной площади под кривым столбиком и площади его приближения трапецией нам нужно как-то оценить, см. рис. 7.1.

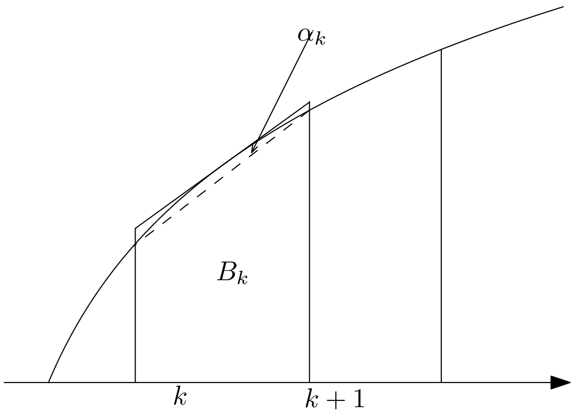


Рис. 7.1: К формуле Стирлинга

Нормальная площадь:

$$A_n = \int_1^n \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_1^n = n \ln n - n + 1$$

Приближение:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k+1) + \ln(k)}{2} \right) = \ln n! - \frac{1}{2} \ln n$$

Кусочки можно оценить сверху маленькими трапециями, касание там в центре промежутка:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \int_k^{k+1} \ln x \, dx - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) < \ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\big(\ln k + \ln(k+1)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)\right)\end{aligned}$$

А тогда $\sum \alpha_k$ — ряд Лейбница, и

$$\sum \alpha_k \in \left[0; \frac{1}{2} \ln {}^3\!/_2\right], \quad \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) > r_n > 0.$$

Остаток положительный, так как первый член остатка ряда положителен. Дальше много преобразований...

$$\begin{aligned} n \ln n - n + 1 - \ln n! + \frac{1}{2} \ln n = \alpha - r_n \Leftrightarrow \\ \ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + (1 - \alpha) - r_n\end{aligned}$$

Теперь разберёмся с остатком

$$e^{r_n} < e^{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} < 1 + \frac{1}{4n}$$

Таким образом,

$$e^{r_n} = \left(1 + \frac{\theta}{4n}\right), \quad \theta \in (0; 1)$$

если теперь ещё заменить $c = e^{1-\alpha}$, то получится формула 2. ■

Замечание 1. Если приближать не трапециями, а параболами, то можно получить и третью.

Теорема 2. *Константа c в формуле Стирлинга равна* $\sqrt{2\pi}$

□ Формулой Валлиса(5.2.2) пробьётся. ■

Глава 8: Функциональные ряды

Билет № 44: Равномерная сходимость

Определение 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда говорят, что $f_n \to f$ *поточечно*, если

$$\Big(\forall\, x \in X\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon, x) : \forall\, n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big) \Leftrightarrow f_n \to f$$

Определение 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда говорят, что f_n сходится к f *равномерно*, если

$$\Big(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) : \forall\, x \in X\ \forall\, n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big) \Leftrightarrow f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$$

E.g. $X = [0;1]$, $f_n(x) = x^n$. При этом

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

Достаточно взять ε равным $1/2$ чтобы понять что с равномерной сходимостью проблемы.

Определение 3. Пусть $f, g \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

называется чебышёвским уклонением.

Утверждение 1.

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \rho(f_n, f) \to 0$$

Билет № 45: Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема 1. *Пусть* $\forall\, n\ f_n \in C(I)$, $f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$. *Тогда и* $f \in C(I)$

$\square$ Скомбинировав определения непрерывности и равномерной сходимости, получим что такое:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

$\blacksquare$

Билет № 46: Предельный переход под знаком производной и интеграла

Теорема 1. *Пусть* $\forall\, n\ f_n \in C(I), I = [a;b],\ f_n \overset{I}{\rightrightarrows} f$. *Тогда*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

$\square$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \varepsilon(b-a) = \varepsilon_1$$

$\blacksquare$

Теорема 2. *Пусть* $\forall\, n\ f_n \in C^1(I),\ f_n \to f,\ f_n' \overset{I}{\rightrightarrows} \varphi$. *Тогда* $\varphi \in C^0(I),\ \varphi = f$

$\square$ Через теорему Барроу сводится к теореме 8.46.1 $\blacksquare$

Замечание. Поточечной сходимости не хватит, например $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(nx)$ в нуле.

Таким образом, три предыдущие теоремы можно (подразумевая соответствующие условия) коротко записать так:

8.45.1 $\lim\limits_{t\to x}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{t\to x} f_n(t)$

8.46.1 $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$

8.46.2 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$

Билет № 47: Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение 1. Функциональный ряд называется сходящимся при таком-то x, если частичные суммы сходятся поточечно.

Определение 2. Функциональный ряд $\sum u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на X, если $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S$

Несколько свойств:

1. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $X \Rightarrow u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum_{n=m}^{\infty} u_n(x)$ имеют одинаковый характер равномерной сходимости на X
3. $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $X \Leftrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon\ \exists\, N\colon \forall\, n > N\ \ \forall\, p > 0\ \forall\, x \in X\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

Докажем последний пункт веселья ради

▼

Сначала перепишем условие равномерной сходимости:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon \ \exists N \colon \forall x \ \forall n > N \ \ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

⇛ Заметим, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)|$$

Тогда из равномерной сходимости:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |S_{n+p}(x) - S(x)| + |S_n(x) - S(x)| < 2\varepsilon$$

⇚ Тут есть поточечная сходимость, по такому же критерию для рядов 7.18.1. Таким образом, $S_{n+p}(x) \xrightarrow[p\to\infty]{} S(x)$. А значит из условия признака

$$\forall \varepsilon \ \exists N \colon \forall n > N \ \ \forall p > 0 \ \ \forall x \in X \ \ |S(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

▲

Теорема 1 (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\sum u_n(x)$, $x \in X$, *и, также,* $\exists (c_n)$:

1. $\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |u_n(x)| \leqslant c_n$
2. $\sum c_n$ *сходится*

Тогда $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится на* X

□

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

■

Теорема 2 (Признак Дирихле)**.** *Пусть есть функциональный ряд* $\sum u_n(x) \cdot v_n(x)$, $x \in X$. *Пусть к тому же*

1. $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, $u_n \searrow$
2. $\exists M \colon \forall x \in X \ |v_1(x) + \cdots + v_n(x)| \leqslant M$.

Тогда $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится на* X

Теорема 3 (Признак Абеля)**.** *Пусть есть функциональный ряд* $\sum u_n(x) \cdot v_n(x)$, $x \in X$. *Пусть к тому же*

1. $u_n(x)$ *монотонна по* n *при фиксированном* x *и равномерно ограничена на* X *(* $\exists M \colon \forall x \in X \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ |u_n(x)| \leqslant M$ *).*
2. $\sum v_k(x)$ *равномерно сходится на* X.

Тогда $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится на* X

Билет № 48: Свойства суммы функционального ряда

Теорема 1. *Пусть есть функциональный ряд* $\sum u_n(x)$, $x \in X$. *Пусть к тому же*

1. $u_n(x)$ *непрерывна на* X
2. $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится на* X

Тогда $S(x) = \sum u_n(x)$ *непрерывна на* X

□ Про сумму конечного числа функций это правда. А дальше — следствие 8.45.1.
■

Теорема 2. *Пусть есть функциональный ряд* $\sum u_n(x)$, $x \in X$. *Пусть к тому же*

1. $u_n(x)$ *непрерывна на* X
2. $\sum u_n(x)$ *равномерно сходится на* X

Тогда

$$\int_X \sum_{\mathbb{N}} u_n(x)dx = \sum_{\mathbb{N}} \int_X u_n(x)dx$$

То есть ряд можно почленно интегрировать.

□ Про сумму конечного числа функций это правда. А дальше — следствие 8.46.1.
■

Теорема 3. *Пусть есть функциональный ряд* $\sum u_n(x)$, $x \in X$, $u_n \in C^1(X)$. *Пусть к тому же*

1. $\sum u_n(x)$ *сходится на* X *поточечно*
2. $\sum u_n'(x)$ *равномерно сходится на* X

Тогда $S(x) = \sum u_n(x)$ *дифференцируема на* X *и*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{\mathbb{N}} u_n(x)\right) = \sum_{\mathbb{N}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_n(x)$$

То есть ряд при соблюдении определённых условий можно почленно дифференцировать.

□ Про сумму конечного числа функций это правда. А дальше — следствие 8.46.2.
■

Билет № 49: Пределы и ряды в $\mathbb{C}$

Определение 1. Пусть $(z_k) \in \mathbb{C}$. Тогда $z_k = x_k + iy_k$, где $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, а $|z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$. Предел определим так:

$$z = \lim_{k\to\infty} z_k \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, N \colon \forall\, k > N \; |z_k - z| < \varepsilon$$

Теорема 1. *Пусть* $z = (x, y) = (r, \varphi)$, $z_k = (x_k, y_k) = (r_k, \varphi_k)$. *Тогда*

$$z_k \to z \Leftrightarrow \begin{cases} x_k \to x \\ y_k \to y \end{cases}$$

$$z_k \to z \Leftarrow \begin{cases} r_k \to r \\ \varphi_k \to \varphi \end{cases}$$

□ С одной стороны

$$|z_k - z| \leqslant |x_k - x| + |y_k - y|$$

С другой стороны

$$\begin{cases} |z_k - z| \geqslant |x_k - x| \\ |z_k - z| \geqslant |y_k - y| \end{cases}$$

В полярном представлении это следует из непрерывности, пользоваться ей уже в принципе можно, предел определён ведь. ■

Замечание. В полярном представлении нету равносильности, так как, например, можно накручивать спираль на $(0; 0)$ и поломать при этом φ

Определение 2. Пусть $(z_k) \in \mathbb{C}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Тогда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k := \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

Определение 3. Пусть $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$u'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h}$$

Теперь можно относительно безболезненно поверить во все ранее доказанные свойства и для $\mathbb{C}$. Дальше ряды будут в основном из $\mathbb{C}$, но всё то же самое будет верно и для $\mathbb{R}$

Билет № 50: Степенные ряды. Теорема об области сходимости

Определение 1. Такой функциональный ряд: $\sum c_k z^k$, где $c_k, z \in \mathbb{C}$ называется степенным рядом. Множество $\{z \in \mathbb{C} \mid \sum c_k z^k \text{ сх} \}$ — область сходимости.

Теорема 1 (Формула Коши-Адамара)**.** *Пусть есть степенной ряд* $\sum c_k z^k$ *и ещё несколько хитрых чисел:*

$$\ell := \varlimsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}, \ \ell \in [0; +\infty]$$

$$R := \begin{cases} +\infty, & \ell = 0 \\ 1/\ell, & 0 < \ell < +\infty \\ 0, & \ell = +\infty \end{cases}$$

Тогда:

1. $|z| < R \Rightarrow \sum |c_k x^k|$ *сх*

2. $|z| > R \Rightarrow \sum c_k x^k$ *расх*

3. $|z| = R$ *— ничего не понятно*

Таким образом, степенной ряд сходится абсолютно в круге. А вот что происходит на границе Ойкумены, этот признак не знает.

□ Усиленный признак сходимости Коши(7.28.1) поможет делу. ■

Замечание. Можно переехать из нуля в произвольную точку, тогда там просто всюду будет $|z-a|$ вместо $|z|$.

Теорема 2 (О равномерной сходимости степенного ряда)**.** *Пусть есть степенной ряд* $\sum c_k(z-a)^k$, $R \in (0;+\infty)$

1. *Пусть* $r\colon 0 < r < R$. *Тогда ряд* $\sum c_k(z-a)^k$ *равномерно сходится в* B_r.

2. *Пусть* z_0 *лежит на границе круга и* $\sum c_k(z-a)^k$ *сходится в точке* z_0. *Тогда ряд равномерно сходится на радиусе*

$$\{z \mid z = a + \theta(z_0 - a), \theta \in [0;1]\}$$

□

1. Признак Вейерштрасса 8.47.1 поможет тут.

2. Немного перепишем:

$$u_k(z) = c_k(z-a)^k = \underbrace{\theta^n}\underbrace{c_k(z_0-a)^k}$$

Первая часть монотонна по n и равномерно ограничена единицей. А сумма второй равномерно [1] сходится по предположению. Таким образом, $\sum u_k(z)$ сходится равномерно на $[a; z_0]$

■

Замечание. Вообще, последний пункт верен для любого $z_0 \in \mathbb{C}$, главное, чтобы в нём была сходимость

см. [2, стр. 448]

Билет № 51: Свойства суммы степенного ряда

Теорема 1. *Пусть* $S(z) = \sum c_k(z-a)^k$ *— степенной ряд,* $R \in \ (0;+\infty)$ *Тогда*

1. S *непрерывна в* $\mathcal{D}_r = \{z \mid |z-a| \leqslant r\}\ \forall r \in (0;R)$

2. *ряд сходится в* $z_0 \Rightarrow$

$$S(z_0) = \lim_{\theta \nearrow 1-0} S(a + \theta(z_0 - a))$$

Теорема 2. *Пусть* $S(z) = \sum c_k(z-a)^k$ *— степенной ряд,* $R \in (0;+\infty)$, $I = [z_1; z_2] \in$ *области сходимости. Тогда*

1. $|z_1 - a| < R \wedge |z_2 - a| < R \Rightarrow$

$$\int_I S(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_I c_k(z-a)^k\,dz$$

[1] ну она вообще от x не зависит

2. $z_2\colon |z_2 - a| = R,\ J = [a; z_2]$

$$\int_J S(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_J c_k (z-a)^k\,dz$$

Скорее всего, вот это место никто кроме меня внимательно читать не будет. Так что

Четырнадцать студентов
Пришли матан сдавать.
Не все вели конспекты
И их осталось пять.

Однако, продолжим.

Теорема 3. *Пусть* $S(z) = \sum c_k(z-a)^k$ *— степенной ряд,* $R \in (0; +\infty)$ *Тогда* $\forall\, z\colon |z-a| < R$ $S'(z)$ *сходится в круге с таким же радиусом и*

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k(z-a)^{k-1}$$

□ Нетрудно показать из 8.50.1, что радиус круга сходимости для ряда из производных такой же. А дальше комбинируя 8.48.3 и 8.50.2 получаем, что надо. ■

-2

Билеты №№ 52–55: Ряды Тейлора

Определение 1 (Ряд Тейлора)**.** Пусть $f \in C^{\infty}(I)$. Тогда

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Лемма 1. *В какой-то фиксированной точке x функция совпадает с разложением* $\Leftrightarrow R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Лемма 2. *Пусть на всем интервале* $I \subset \mathbb{R}$

$$\exists\, M\colon \forall\, x \in I\ \forall\, n\ \ |f^{(n)}(x)| \leqslant M^n$$

Тогда функция совпадает со своим разложением в ряд на I.

▼
Можно оценить остаток, представив его в форме Лагранжа, и оно к нулю сойдётся, так как факториал убывает быстрее показательной функции.
▲

Теорема 3 (Единственность степенного разложения)**.** *Пусть* $f(x) = \sum c_n x^n$. *Тогда* $\{c_i\}$ *— коэффициенты Тейлора.*

□ Достаточно посчитать производные в нуле, они совпадут с c_i-ыми. ■

Определение 2. Говорят, что функция аналитична в $z_0 \in \mathbb{C}$, если в $V(z_0)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Таблица 8.1: Разложение всяких функций в ряд

$f(x)$	$S(x)$	Область сходимости
$\sin x$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} x^k$	$(-1; 1]$
$(1+x)^\mu$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k$	$(-1; 1)$

Теперь можно раскладывать в ряд, всё нужные инструменты для этого есть.

Лемма 4. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *раскладываются как указано в таблице* 8.1.

▼
$f^{(n)}(x)$ — это либо синус либо косинус с каким-то знаком. Во всяком случае $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. А тогда по лемме 8.55.2 оно всё совпадает со своим разложением на $\mathbb{R}$.
▲

Лемма 5. *Функции* $\exp x$ *раскладываются как указано в таблице* 8.1.

▼
На любом конечном интервале $[-\infty; a]$ есть сходимость. А для любой точки из $\mathbb{R}$ можно найти содержащий её (даже вместе с некой окрестностью) конечный интервал. Таким образом, $\exp x$ аналитична на $\mathbb{R}$.
▲
▼ (*Разложение логарифма*)
Считать много производных тут неприятно. Зато можно почленно интегрировать и дифференцировать.

В круге с радиусом 1 вот такой степенной ряд сходится равномерно:

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \text{ (геометрическая прогрессия)}$$

Теперь можно его проинтегрировать (на отрезке $[0; x]$, $x \in (-1, 1)$, например).

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x)$$

Заметим, что такой ряд сходится в $x_0 = 1$. А значит, на отрезке $[0; 1]$ есть равномерная сходимость. А тогда по непрерывности $f(1) = \ln 2$.
▲
▼ (*Разложение степенной функции*)
Тут проще сразу взять ряд из таблицы 8.1, доказать, что он сходится равномерно в круге радиусом 1 и , затем, убедиться, что он удовлетворяет соотношению

$$(1+x)S'(x) = \mu S(x)$$

откуда уже следует, что это степенной ряд. Значение в нуле — 1 , так что произвольная константа окажется равной 0.
▲

Билет № 56: Экспонента и тригонометрия в $\mathbb{C}$

Определение 1. Определим $\forall\, z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}$$
$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}$$
$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, z^{k}$$

Из такого определения вытекают следующие свойства:

1. $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ \ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) + \exp(z_2)$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \ \ \exp(x) = e^x$
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \ \ \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$. В частности $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ (Формула Эйлера)
4. sin и cos можно выразить так:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$$
$$\sin z = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$$

5. $$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$
6. $\exp z$ — периодична с $T_0 = 2\pi i$

Ещё интересно заметить, что экспонента переводит прямоугольные координаты в полярные. А полярные координаты немного неоднозначны. Это к тому, что комплексный логарифм неоднозначен.

Билет № 57: Логарифм комплексного аргумента

Определение 1 (Комплексный логарифм)**.** $\forall\, w \neq 0 \ \ e^z = w$ имеет решение, правда неоднозначное.

$$z_k = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом:

$$\ln w = \ln|w| + i \arg w \text{ — главное значение логарифма}$$
$$\operatorname{Ln} w = \{\ln|w| + i(\arg w + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

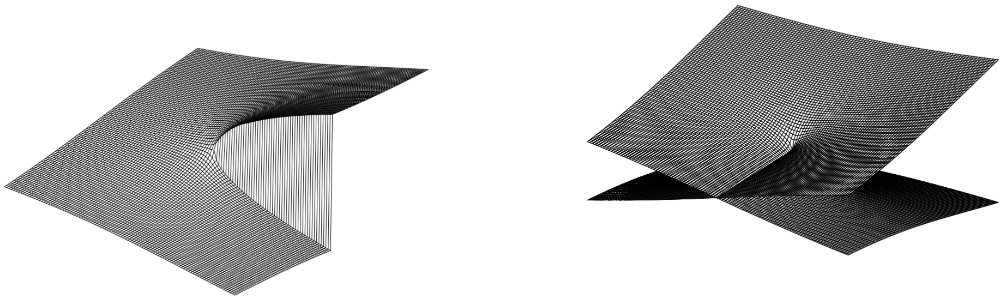


Рис. 8.1: Разрыв мнимой части у корня и риманова поверхность для него

Билет № 58: Понятие непрерывной ветви логарифма и корня

Осторожно! Дальше лажа!

Посмотрим на функцию $f(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z$. Она была бы всем хороша и непрерывна, если бы при обходе нуля угол внезапно не перескакивал из-за того, что $\arg z \in [-\pi; \pi]$. А непрерывности хочется.

Определение 1. Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f \in C(G)$. Тогда f — непрерывная ветвь логарифма, если $\forall\, z \in G \;\; \exp f(z) = z$.

Теорема 1. *1. В $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ бесконечно много ветвей логарифма.*

2. В $\mathbb{C} \setminus 0$ их нет вовсе.

Нужно было как-то запретить обход нуля, в первом случае это у нас получилось.

Определение 2 (Комплексная степень)**.**

$$z_1^{z_2} := \left\{z \mid z = e^{z_2(\ln z_1 + 2\pi i k)}\right\}$$

Определение 3. Пусть $G \subset \mathbb{C}$, $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f \in C(G)$. Тогда f — непрерывная ветвь корня n степени, если $\forall\, z \in G \;\; f(z)^n = z$.

Тут надо бы ещё про римановы поверхности сказать, но не вышло у меня $\ddot{\frown}$. Я лучше картинок вставлю.

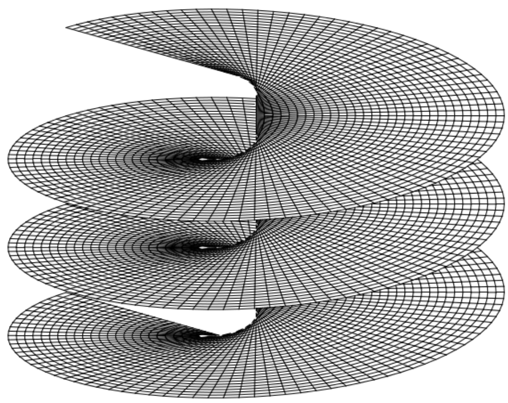


Рис. 8.2: Риманова поверхность для логарифма

Глава 9: Дифференциальное исчисление в $\mathbb{R}^n$

Билет № 59: Основные структуры в $\mathbb{R}^n$

Определение 1. $\mathbb{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \mid x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}\}$. Сделаем теперь из $\mathbb{R}^n$ векторное пространство над $\mathbb{R}$ введя соответствующие операции. В дальнейшем будем работать с $\mathbb{R}^n$ уже как с векторным пространством.

Определение 2. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ определяется как операция со следующими свойствами:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, x > 0\ \ \langle x, x\rangle > 0$

В частности, в ортонормированном базисе

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

Определение 3. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда определим норму в $\mathbb{R}^n$ так:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Свойства нормы:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \ \|x\| \geqslant 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\ \ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Последнее (котрое неренство треугольника) верно по неравенству Минковского, которое следствие неравенства Гёльдера.

Определение 4 (Метрика в $\mathbb{R}^n$)**.** $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \ \rho(x, y) := \|x - y\|$, ρ — эвклидово расстояние. Про него верны следующие свойства:

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\ \ \rho(x, y) \geqslant 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n\ \ \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Определение 5. $(\mathbb{R}^n, \rho)$ — метрическое пространство.

Замечание. Наверное было бы лучше определить и норму и метрику через их свойста, так более общо. А потом доказать, что и евклидова норма и евклидова метрика являются нормой и метрикой, соответственно. Но вроде не нужно, к тому же мне лень править этот кусок.

Определение 6 (Шар в $\mathbb{R}^n$)**.** Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < r\}$$

Определение 7. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, если

$$\forall\, a \in G\ \exists\, B_r(a)\colon B_r(a) \subset G$$

Если $G_1, \dots, G_n$ — открытые множества, то и $\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} G_i$, $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} G_i$ — открытые.

E.g. Шар в $\mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Определение 8. Топология на множестве X — такое семейство множеств $T \subset 2^X$, что

1. $\varnothing \in T$
2. $X \in T$
3. $A_1, \dots, A_n \in T \Rightarrow \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$
4. $A_1, \dots, A_n \in T \Rightarrow \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$

Элементы семейства называются открытыми множествами.

Пример 1. $T = \{X, \varnothing\}$ — тривиальная (антидискретная) топология на X.

Пример 2. Открытые множества, как мы их определили в 9.59.7 задают стандартную топологию на $\mathbb{R}^n$

Определение 9 (Окрестность в $\mathbb{R}^n$)**.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда $U(x)$ — произвольное открытое множество, содержащее x.

E.g. В качестве окрестности подойдёт B_ε, например.

Замечание. Проколотая окрестность определяется всё так же: $\overset{\circ}{U}(x) = U \setminus \{x\}$.

Определение 10 (Предел в $\mathbb{R}^n$)**.** Пусть $x_k \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a \Leftrightarrow \forall\, U(a)\ \exists\, N\colon \forall\, k > N\ \ x_k \in U(a)$$

Теперь для функций. Пусть $f \in X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 — точка сгущения X, $A \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \overset{\circ}{U}(A)\ \exists\, \overset{\circ}{V}(x_0)\colon x \in \overset{\circ}{V} \Rightarrow f(x) \in \overset{\circ}{U}$$

Утверждение 1 (Свойства предела в $\mathbb{R}^n$)**.** *$x_k \to a \Leftrightarrow \rho(x, a) \to 0 \Leftrightarrow \|x_k - a\| \to 0$. И тогда*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a \Leftrightarrow \forall\, i\ \ x_k^i \to a^i$$

То есть сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная.

▼

Тут на самом деле 2 утверждения:

1. $x_k \to a \Leftrightarrow \rho(x, a) \to 0$.

   - $\Leftarrow$ Из определения открытого множества в любой окрестности x_0 есть шар $B_\varepsilon(x_0)$. А если принадлежит шару, то и окрестности.
   - $\Rightarrow$ $B_\varepsilon(a)$ — тоже окрестность.

2. $x_k \to a \Leftrightarrow \forall\, i \;\; x_k^i \to a^i$

   - $\Leftarrow$ Ясно из того, как задана норма в $\mathbb{R}^n$ (9.59.3).
   - $\Rightarrow$ Многомерный параллелепипед — тоже окрестность.

▲

Билет № 60: Секвенциальная компактность

Определение 1 (Предельная точка)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ Тогда a — предельная точка X, если $\exists\,(x_n) \in X : x_n \to a$

Замечание. При таком определении предельная точка $\neq$ точка сгущения

E.g. $X = \{a\}$ — есть последовательность $(x_n) \equiv a$, сходящаяся к a, но $\mathring{V}(a) = \varnothing$

Определение 2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда X — замкнуто, если содержит все свои предельные точки

Определение 3 (Замыкание)**.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\overline{X} = \operatorname{clos}(X)$ — множество всех предельных точек X.

E.g. $\operatorname{clos}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Свойства замыкания:

1. $\varnothing$ замкнуто
2. $\mathbb{R}^n$ замкнуто
3. объединение и пересечение замкнутых множеств замкнуто

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^n \setminus G$. Тогда G открыто $\Leftrightarrow$ F замкнуто.*

Определение 4. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда X — компактное, если

$$\forall\,(x_m) \in X\ \exists\,(x_{m_k}) \colon x_{m_k} \to c, c \in X$$

То есть, в нём выполняется принцип Больцано-Вейерштрасса.

Определение 5. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченно, если

$$\sup_{x_1, x_2 \in X} \rho(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

Теорема 2. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда X — компактно $\Leftrightarrow$ X замкнуто и ограничено.*

□

$\Rightarrow$ Проблемы с пределом последовательности

$\Leftarrow$ Можно мнооого раз применять одномерную теорему Больцано-Коши для каждого измерения и оно получится.

■

Замечание. Не работает в бесконечномерных

Билет № 61: $\mathbb{R}^n$ как полное метрическое пространство

Определение 1. Последовательность (x_n) называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \colon \forall m, n > N \ \ \rho(x_n - x_m) < \varepsilon$$

Определение 2. Метрическое пространство (X, ρ) — полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится

E.g. $\mathbb{R} \setminus 0$ — не полное метрическое пространство, $x_n = {}^1\!/_n$ тому пример.

Утверждение 1. $\mathbb{R}^n$ *— полное метрическое пространство.*

▼
$\lhd$ произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho(x_n - x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \ \rho(x^i_m e_i - x^i_n e_i) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \ \ |x^i_m - x^i_n| < \varepsilon$$

Таким образом $(x^i_n) \in \mathbb{R}$ — фундаментальная. А в $\mathbb{R}$ по теореме из первого семестра фундаментальные последовательности сходятся. Тогда $\forall\, x^i_n \to a^i$. Значит и $x_n \to a$ по теореме 9.59.1
▲

Билет № 62: Непрерывные отображения

Определение 1. Пусть $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f непрерывна в $x_0 \in X$, если

$$\forall U\big(f(x_0)\big) \ \exists V(x_0) \colon x \in V \Rightarrow f(x) \in U$$

Можно например в качестве окрестности брать B_ε.

Определение 2. Множество $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым в G, если

$$\forall a \in A \ \ \exists B_r(a) \colon B_r(a) \cap X \subset A$$

Теорема 1. *Пусть* $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *— непрерывна, тогда и только тогда, когда*

$$\forall G \subset \mathbb{R}^m \colon G \text{ — открытое } \ f^{-1}(G) \text{ — открытое в } X$$

□

$\ominus$ Пусть $f(x) = y \in G$ Тогда из открытости G

$$\exists\, B_\varepsilon(y) \colon B_\varepsilon(y) \subset G$$

Но из непрерывности

$$\forall\, B_\varepsilon(y) \ \ \exists\, B_\delta(x) \colon \forall\, x' \in B_\delta \cap X \ \ y' = f(x') \in B_\varepsilon$$

А раз $f(x') \in B_\varepsilon \subset G$, то $x' \in f^{-1}(G)$. То есть

$$\forall\, x \in f^{-1}(G) \ \ \exists\, B_\delta(x) \colon \forall\, x' \in B_\delta \cap X \ \ x' \in f^{-1}(G)$$

А это как раз открытость $f^{-1}(G)$ в X.

$\Leftarrow$ Пусть $y = f(x)$. Рассмотрим тогда $B_\varepsilon(y)$. Оно открыто, и, по условию, $f^{-1}(B_\varepsilon)$ — открыто в X. Тогда

$$\forall\, x' \in f^{-1}(B_\varepsilon)\ \exists B_\delta(x')\colon B_\delta(x') \cap X \subset f^{-1}(B_\varepsilon)$$

Но в таком случае

$$\forall\, x'' \in B_\delta(x') \cap X\ \ f(x'') \in B_\varepsilon$$

■

Следствие 1. *f, g — непрерывны, $f \circ g$ определена $\Rightarrow$ $f \circ g$ непрерывна.*

Теорема 2 (Вейерштрасса)**.** *Пусть $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, X —компакт. Тогда $f \in C(x) \Rightarrow f(X)$ — компактно.*

□ Можно рассмотреть какую-нибудь последовательность в $f(X)$ и вытащить сходящуюся подпоследовательность из её прообраза. А тогда по непрерывности образ подпоследовательности сходится к чему-то в $f(X)$. А значит оно компактно. ■

Следствие 1. *При $m = 1$ f ограничена и достигает своего минимума/максимума*

▼
Ограниченность очевидна, а супремум и инфимум — предельные точки.
▲

Определение 3. Пусть $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда f равномерно непрерывна на X, если

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta(\varepsilon)\colon \forall\, x, x_0 \in X\ \ \|x - x_0\| \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|$$

Теорема 3 (Кантора)**.** *$f \in C(X), X$ — компакт $\Leftrightarrow$ f равномерно непрерывна на X.*

□ Так же, как и в одномерье — от противного; следствие принципа выбора Больцано-Вейерштрасса. ■

Теорема 4 (Больцано-Коши)**.** *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C(X)$ и $\forall\, a, b \in X$ $\exists\, \Gamma \in X\colon$ Γ — непрерывная кривая, содержащая a, b, и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists\, c \in X\colon f(c) = 0$.*

□ Следствие непрерывности композиции и одномерной теоремы Больцано-Коши.
■

Теорема 5.

$$f \in C(x_0) \Leftrightarrow \forall\, i\ \ f^i \in C(x_0)$$

□ Вообще-то, свойство предела. См. 9.59.1. ■

Билет № 63: Соотношение между непрерывностью по каждому аргументу и непрерывностью по совокупности переменных

Это не то же самое, что непрерывность по каждой координатной функции, надо это понимать. Я вот только сейчас (2016-06-09 01:43) понял это совсем хорошо.

Определение 1. Отображение $f_j : X \subset \mathbb{R}^n \to R$ непрерывно по i-ой координате в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon |x^i - x_0^i| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f_j(x_0^1, \ldots, x^i, \ldots, x_0^n) - f_j(x_0^1, \ldots, x_0^i, \ldots, x_0^n)| < \varepsilon$$

Лемма 1. *Отображение $f_j : X \subset \mathbb{R}^n \to R$ непрерывно точке x_0, $\Rightarrow$ f_j непрерывно по каждому аргументу. Обратное неверно, см. пример 9.68.1*

-2

Билеты №№ 64–67: Линейное отображение и его норма

Вспомним определение из алгебры:

Определение 1. Пусть $\varphi : V \to U$, V, U — линейные пространства и

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Тогда φ — линейное отображение.

Замечание 1. В дальнейшем $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ всюду будет линейным отображением, так что выберем в $\mathbb{R}^n$ стандартный базис и обозначим матрицу φ в нём за A.

Определение 2 (Норма линейного отображения)**.**

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Лемма 1.

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\|$$

Теорема 2 (Об оценке нормы линейного отображения)**.** *Пусть $A = (a_{ij})$, тогда*

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

□ Неравенство Коши-Буняковского в чистом виде. ■

Свойства нормы линейного отображения:

1. $\|A\| > 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A \equiv 0$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
4. $\begin{matrix} \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \end{matrix}$, $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ $\|BA\| \leqslant \|B\|\,\|A\|$.

▼
Основные инструменты доказательства — свойства нормы и неравенство $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$, очевидно следующее из определения 9.67.2
▲

Утверждение 3. *Линейное отображение непрерывно*

▼
Пусть A — матрица линейного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 — точка сгущения. Тогда при $x \to x_0$:

$$0 \leqslant \|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leqslant \|A\|\,\|x - x_0\| \to 0$$

Так можно, ведь норма отображения ограничена из 9.67.2.
▲

Билет № 68: Дифференцируемость отображения

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Тогда $f \in C^1(x)$ если

$$\exists\, \varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \colon \Delta f(x, h) = \mathrm{A}h + \alpha(h) \tag{9.1}$$

$$\alpha(h) = o(h) \Leftrightarrow \frac{\alpha(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \tag{9.2}$$

Замечание. Вообще, смещение h тут может быть любым. Например в частных производных меняется всего одна координата.

Утверждение 1. $f \in C^1(x) \Rightarrow f \in C^0(x)$

Утверждение 2 (Покоординатный характер сходимости)**.** *Пусть* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \in X$, $y = f(x) = (y_1, \ldots, y_n)$, $y^i = f_i(x)$.
Тогда

$$f \in C^1(x) \Leftrightarrow \forall\, i \;\; f^i \in C^1(x^i)$$

и

$$\Delta f^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h^j + o(h^j)$$

▼
Распишем равенство (9.1) через координатные функции, которые вещественнозначные :

$$\begin{cases} \Delta f^1 = f^1(x + h) - f^1(x) = A^1 h + \alpha^1(x, h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta f^m = f^m(x + h) - f^m(x) = A^m h + \alpha^m(x, h) \end{cases}$$

где $A = (A^1, \ldots, A^m)$ — все очевидно линейные функции. Также очевидно, что

$$\frac{\alpha}{\|h\|} \to 0 \Leftrightarrow \forall\, i \frac{\alpha}{\|h\|} \to 0$$

Ну а тогда координатные функции дифференцируемы. Если ещё вспомнить, чему равны A^i, получится оставшаяся часть утверждения.
▲

Определение 2 (Частная производная)**.** $f : X \subset \mathbb{R}^n \to R$, x — внутренняя точка X.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^i + t, \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^n)}{t}$$

Замечание.

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \equiv \partial_i f \equiv \mathcal{D}_i f \equiv f'_{x^i}$$

Теорема 3 (Единственность линейной части приращения)**.** *$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in$ дифференцируема в $x \Rightarrow$*

$$\exists\, \{a_i\} \colon \Delta f = \sum_{i=1}^{n} a_i h^i + o(h^i),\ a_i = \partial_i f(x)$$

То есть a_i определяются однозначно.

□ Получится, если рассмотреть

$$h = (0, \ldots, t, \ldots, 0)$$

и из определения частной производной 9.68.2 a_i как раз и получаются каким надоb ■

Замечание. Обратное утверждение неверно, существования всех частных производных не хватит для дифференцируемости.

Пример 1.

$$f = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Следствие 1. *Пусть теперь $f : \mathbb{R}^n \to R^m$. Тогда $f^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Таким образом $a_{ij} = \partial_j f^i(x)$.*

Билет № 69: Дифференциал

Определение 1. Производную $f'(x)$ можно теперь определить так:

$$f'(x) := A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \cdots & \partial_n f^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}$$

где A — матрица Якоби

Определение 2. Дифференциал $\mathrm{d}(f,h)$ определим так:

$$\mathrm{d}f(x) := \mathrm{d}(f,h) := Ah = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1(x) & \cdots & \partial_n f^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix},\ h = \Delta x = dx$$

Ещё видимо тут должно быть вот это утверждение: 9.68.3

Билет № 70: Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 1. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$. Пусть также в некоторой окрестности $U(a)$ $\exists\, \partial_i f(x)$ и они непрерывны в a. Тогда f дифференцируема в a.*

□ Не успею написать нормально, но расписать приращение , а потом применить теорему Лагранжа и *аккуратно* перейти к пределам... ■

Определение 1. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть также в G существуют и непрерывны все $\partial_i f$. Тогда отображение f называется *гладким*
$\big(f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)\big)$.

Билет № 71: Свойства дифференцируемых отображений

1. $f \in C^1 \Rightarrow f \in C^0$
2. $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
3. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$
4. $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(fg)' = f'g + fg'$
5. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

▼
Дифференцируемость всего следует из того, что производная — матрица. Все произведения тоже линейны. Получится короче, просто писать некогда.
▲

Билет № 72: Правило цепочки

Теорема 1. *Пусть $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $f(X) \subset Y$. Пусть также $f \in C^1(x), g \in C^1(\,f(x)\,)$.*

Тогда $(g \circ f) \in C(x)$ и $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$. (Это таки произведение матриц)

□ Посмотрим на приращение:

$$\Delta(g \circ f) = (g \circ f)(x + h) - (g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x + h)}_{y+k}) - g(\underbrace{f(x)}_{y})$$
$$= \mathrm{B}k + \beta = \mathrm{B}(\mathrm{A}h + \alpha) + \beta = \mathrm{B}\mathrm{A}h + \underbrace{\mathrm{B}\alpha + \beta}_{\gamma}$$

Здесь $B = g'(y)$, $A = f'(x)$. Осталось доказать, что $\gamma = o(\|h\|)$.

Сначала заметим, что B — ограничена $\Rightarrow$ $\mathrm{B}\alpha = \mathrm{B}o(\|h\|) = o(\|h\|)$. Теперь надо пострадать. Потому что $k = 0$ бывает.

Сначала рассмотрим случай $k \neq 0$.

$$\|k\| = \|Ah + \alpha\| \leqslant \|A\| \cdot \|h\| + \|\alpha\| = O(\|h\|)$$

Тогда
$$\beta = o(\|k\|) = o(O(\|h\|)) = o(\|h\|)$$

В случае же $k = 0$ ничего существенно не изменится, можно просто доопределить $\beta(0) = 0$ (ну и правда, $\beta = (\Delta g - B \cdot k)(0) = 0$). ■

Следствие 1 (Правило цепочки)**.** *Пусть $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$, $z^i = f^i(y^1, \ldots, y^m)$*

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial z^i}{\partial y^k}(y) \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(x) \right)$$

Билет № 73: Касательные к кривым на поверхности

Утверждение 1. *Пусть $S = f(x, y)$. Это какая-то поверхность а $p = (x^0, y^0, z^0)$, $z^0 = f(x^0, y^0)$ — точка на ней. Тогда уравнение касательной плоскости(непонятно что это, но вроде из геометрии видно) можно записать как-то так*

$$z - z^0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0) \cdot (x - x^0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y^0) \cdot (y - y^0)$$

Утверждение 2. *Пусть Γ — кривая в $S \subset \mathbb{R}^3$, а $S = f(x, y)$. Пусть на этой кривой есть точка $p = (x^0, y^0, z^0)$, $z^0 = f(x^0, y^0)$, а T — касательная плоскость к S в p. Тогда если L — касательная к Γ, то $L \subset T$*

Билет № 74: Признак постоянства функции в области

Определение 1. Область — открытое связное множество

Теорема 1. *Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(G)$. Пусть также в G $\forall\, \partial_i f \equiv 0$. Тогда $f \equiv const$*

$\square$ В области можно любые 2 точки соединить путём $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^n$. Теперь, если рассмотреть $F = f \circ \gamma$, то ситуация сведётся к одномерному случаю. $\blacksquare$

Билет № 75: Производная по вектору

Определение 1. Пусть $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G — открытое, $a \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{D}_v f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ — производная по вектору } v$$

(если существует, конечно)

Определение 2. $\operatorname{grad} f = \nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$ — градиент f. Вообще его в целом лучше определять как-то более инвариантней, но пока и так сойдёт.

Теорема 1 (Связь с градиентом)**.** *Пусть $f \in C(a)$.*

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \;\; \exists\, \mathcal{D}_v f(a) \wedge \Big(\mathcal{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle\Big)$$

$\square$ Рассмотрим $F(t) = f(x(t)) = f(a + tv)$. Тогда по правилу цепочки

$$\mathcal{D}_v = F'(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x(0) = a) \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t} = \langle \nabla f, v \rangle$$

$\blacksquare$

Замечание 1. Если рассмотреть всевозможные $v : \|v\| = 1$, то получится, что функция быстрей всего возрастает в направлении градиента со “скоростью” $\|\nabla f(a)\|$ соответственно

Замечание 2. $L : \langle \nabla f(a), v \rangle = 0$ — линии уровня, эквипотенциальные поверхности например.

Литература

[1] **Зорич В. А.**, Математический анализ. Часть I — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012

[2] **Зорич В. А.**, Математический анализ. Часть II — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012

[3] **Фихтенгольц Г. М.**, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трёх томах. Том II. — СПб.: Издательство «Лань», 1997. — 800 с.