§ 1 ⚒Интеграл от комплексной дифференциальной формы

здесь надо сильно больше определений

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z-a| < \varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0 < |z-a| < \varepsilon\}$. Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в $\mathbb{R}^2$. Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f\colon G \to C$, непрерывна, $f = f_1 + if_2$, $\omega(z, \mathrm{d}z) = f(z)\mathrm{d}z$ — комплексная дифференциальная форма. Пусть $\Gamma \subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t := \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2)\mathrm{d}t + \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1)\mathrm{d}t$$

Свойства:

Утверждение 1. *см* **??**

Утверждение 2. *Пусть* $\{t_i\}$ *— разбиение отрезка* $[a; b]$, $z_i = \gamma(t_i)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - zi$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\xi_i = \gamma(\tau_i)$. *Пусть ещё*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta z_i$$
$$r = \max |\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0} \sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

Следствие 1. *Пусть* $|f(z)| \leqslant M \;\; \forall z \in \Gamma$

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leqslant M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

```
.........................
{censored by galactic vimperor}
.........................
```

§ 30 Свойства дробно-линейного отображения

Определение 1 (Дробно-линейное отображение)**.** $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad \neq bc$ В ∞ определим её как ${}^{a}/_{c}$, а в $-{}^{d}/_{c}$ как ∞.

Утверждение 1. *Дробно-линейное отображение — гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Определение 2. Углом между двумя путями на бесконечности называется угол между образами утих путей при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$

Замечание. Геометрическая мотивировка связана с углами между путями через северный полюс сферы Римана.

Утверждение 2. *Дробно-линейное отображение конформно во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$*

Утверждение 3. *Дробно-линейные отображения образуют группу.*

Утверждение 4. *Дробно-линейные отображения переводят обобщённые окружности (прямые или окружности) в обобщённые окружности.*

▼
Дробно-линейное — композиция линейного и инверсии (с отражением относительно вещественной оси). С линейными всё ясно, а с инверсией надо доказывать. Окружность можно записать уравнением

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2$$

А прямую

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (z-b)(\bar{z}-\bar{b}) \Leftrightarrow \overline{(a-b)}z + (a-b)\bar{z} + |b|^2 - |a|^2 = 0$$

Посмотрим, прообразом чего она является

$$\left(w^{-1}-a\right)\left(\bar{w}^{-1}-\bar{a}\right) = \frac{(1-aw)(1-\bar{a}\bar{w})}{|w|^2} = R^2 \Leftrightarrow \left(|a|^2-1\right)|w|^2 - a\bar{w} - \bar{a}w + 1 = 0$$

Дальше есть два случая:

$|a| = 1$**:** Это уравнение прямой с $|b| \neq |a|$. А такие прямые не проходят через 0. Ну, точки на одной окружности равноудалены от её центра. А центр у неё в 0.

$|a| \neq 1$ Поделим на $|a|^2 - 1$.

$$\left(w - \frac{a}{|a|^2-1}\right)\overline{\left(w - \frac{a}{|a|^2-1}\right)} = \frac{|a|^2}{|a|^2-1} - 1 = \frac{1}{|a|^2-1}$$

а сие есть уравнение окружности.

Ну, оставшиеся случаи разбираются аналогично. Разве что прямая через начало координат проще задаётся как

$$(e^{-ia} - e^{-ib})z + (e^{ia} - e^{ib})\bar{z} = 0$$

Ну и видно что не будет членов с $|w|^2$ — выйдет прямая.
▲

Утверждение 5. *Дробно-линейное отображение сохраняет ангармоническое отношение:*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} / \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_4}$$

Утверждение 6. *Дробно-линейное отображение однозначно задаётся 3 точками и их образами.*

```
.........................
{censored by galactic vimperor}
.........................
```

§ 42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

§ 46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a.

Теорема 1. *Пусть a — полюс первого порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \to a} f(z)$$

Теорема 2. *Пусть a — ноль первого порядка для ψ, $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. *Пусть a — полюс p-го порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \left((z-a)^p f(z) \right)^{(p-1)}_{z=a}$$

§ 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I⟩ Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции g sin / cos заменены на $\frac{1}{2}\left(z \pm z^{-1}\right)$

II⟩ Интеграл от рациональной функции на $\mathbb{R}$

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leqslant \deg Q - 2$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

III⟩ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = I$

Пусть $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на $\mathbb{R}$. Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана)**.** *Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

§ 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение $f\colon G \to H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f\colon G \to G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. *Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу* $\operatorname{Aut} G$.

▼

Пусть $f, g, h \in \operatorname{Aut} G$. Тогда $f \circ g\colon G \to G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $\big(f\circ(g\circ h)\big)(x) = f(g(h(x))) = \big((f\circ g)\circ h\big)(x)$
- $\forall f\ \exists f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, $\Rightarrow$ конформно и однолистно.
- $\mathrm{id}\colon G\to G$ — конформно и однолистно.

▲

Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$
2. $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть область $G\subset\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $G\cong$ одной из классических областей*

1. *$G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G\cong\overline{\mathbb{C}}$*
2. *$G = \overline{\mathbb{C}}\setminus\{a\} \Rightarrow G\cong\mathbb{C}$*
3. *$G = \overline{\mathbb{C}}\setminus U \Rightarrow G\cong\mathbb{D}$, $|U|>1$*

§ 56 Лемма Шварца

§ 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \operatorname{Aut} G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall z_1, z_2\in G\ \ \exists f\in\Gamma\colon f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. *Пусть область $G\subset\overline{\mathbb{C}}$, Γ — транзитивна. Пусть к тому же $\exists z_0\colon$ $\mathrm{Stab}(z_0) < \Gamma$. Тогда $\Gamma = \operatorname{Aut} G$.*

▼

Выберем произвольный $f\in\operatorname{Aut} G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности $G\ \exists\gamma\in\Gamma\colon \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma\circ f\in\mathrm{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\mathrm{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h\in\Gamma$. Но тогда

$$\forall f\in\operatorname{Aut} G\ \ f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in\Gamma}\circ\underbrace{h}_{\in\Gamma}\in\Gamma$$

▲

§ 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь всё константы по умолчанию $\in \mathbb{C}$.

Теорема 1. $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\}$

$\square$ Пусть

$$\Gamma = f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для $\mathbb{C}$ хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен $\operatorname{Stab} \infty$. Нам нужно чтобы $\infty \mapsto \infty$. А значит $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Но из теоремы 0.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что $\operatorname{Stab} \infty < \Gamma$. А тогда по лемме 0.57.1 $\Gamma = \operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}}$ ■

Теорема 2. $\operatorname{Aut} \mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

$\square$ Пусть $A = U(\infty)$. Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть ∞ — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого $f(A)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. А значит в $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$ есть точка из $f(A)$ — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть ∞ — устранимая особая точка. Но тогда в кольце $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \cdots + c_0$$

Но $f \in \operatorname{Aut} G \Rightarrow f$ голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в ∞ — полюс. Но тогда $f(z)$ — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени n имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. ■

Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев $f(^1/_z)$ в $U(0)$

Теорема 3. $\operatorname{Aut} \mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

$\square$ Опять рассмотрим Γ как в условии и покажем, что $\Gamma = \operatorname{Aut} \mathbb{D}$. Надо сначала показать хотя бы, что $\Gamma < \operatorname{Aut} \mathbb{D}$.

$$\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) > 0$$

Так что при $|z| < 1 \wedge |a| < 1$ это верно.

Дальше легко найти обратное к $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1}\frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta}a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \\
f_2(z) &= \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \\
a &= \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}} && |a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1 \\
f_2(f_1(z)) &= e^{i\theta_2}\frac{e^{i\theta}z - e^{i\theta}a_2 - a_1 + a_1\bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}
\end{aligned}$$

Осталось показать оба условия из леммы 0.57.1

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Будем строить так: $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \qquad f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \qquad f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на $f \in \operatorname{Stab} 0$. По лемме Шварца $\forall\, z \in D$ $|f(z)| \leqslant |z|$. Поскольку $\operatorname{Stab} 0$ — группа, $\exists\, f^{-1}$ и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leqslant |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

   А тогда по второму пункту леммы Шварца $f(z) = cz$, $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$. Следовательно, $\operatorname{Stab} 0 < \Gamma$. Тогда по уже упомянутой лемме $\Gamma = \operatorname{Aut}\mathbb{D}$

■