

Глава 1: Кинематика точки

§ 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть V — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли, $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь a^k — коэффициенты разложения по \mathbf{e}_k — называются контравариантными координатами.

Пусть V^* — сопряжённое к V , его базисом являются координатные функции $f_k :: f_k(\mathbf{x}) = x^k$. Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм $V \rightarrow V^*$. Нам, правда, потребуется $V^* \rightarrow V$.

Введём ещё одну систему векторов в V : $\mathbf{e}^k = f_k^*$, то есть $f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{x}$. Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в V^* . Линейную независимость легко получить из ЛНЗ f_k , а раз их $\dim V$, то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.
- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

А вот теперь можно уже развлекаться с индексами.

Утверждение 1. $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{kj}$

Утверждение 2. Пусть $\mathbf{r} = \xi^k \mathbf{e}_k$ и $\xi^k \mathbf{e}_k$. Тогда $\xi_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k$