Курс лекций по ОДУ (Часть I)

В. В. Басов

математико-механический факультет СПбГУ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ 2016 год

Годовой Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, читаемый на протяжении ряда лет на мат.-мех. факультете Санкт-Петербургского государственного университета студентам второго курса по специальностям прикладная математика, математическое обеспечение ЭВМ, механика и астрономия.

Экзаменационная практика показывает, что студенты, как правило, затрудняются проводить простые доказательства самостоятельно. Поэтому в предлагаемом Курсе имеется большое число пояснений, планов рассуждений и приводятся подробные доказательства результатов, обычно отсутствующие в учебниках по ОДУ в связи с их достаточной очевидностью.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА I

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

1^0. Объект изучения.

В этой главе будут изучаться обыкновенные дифференциальные уравнения I порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

или, более подробно, $\dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, где x — независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция, вещественная функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области G плоскости Oxy, т. е. $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$. Следует помнить, что областью называется непустое связное открытое множество.

2^0. Определение решения уравнения.

На вещественной оси возьмем непустое связное множество.

Хорошо известно, что это может быть только промежуток $\langle a, b\,\rangle$, где символ $\langle$, например, подразумевает одну из скобок: (или [.

Промежуток (a, b), как обычно, будем называть интервалом и допускать в этом случае значения $a = -\infty$ и $b = +\infty$, а промежуток $[a, b]$ — отрезком, и тогда $|a|, |b| < +\infty$.

Df. *Функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$, называется решением дифференциального уравнения (1.1), если для любого $x \in \langle a, b\,\rangle$ выполняются следующие три условия:*

1) функция $\varphi(x)$ — дифференцируемая,

2) точка $(x, \varphi(x)) \in G$,

3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Замечания: 1. Фактически, решение уравнения (1.1) — это пара: промежуток $\langle a, b\,\rangle$ и определенная на нем функция $\varphi(x)$. Поэтому сужение $\varphi(x)$ на меньший промежуток будет уже иным решением.

2. Первые два условия в определении решения носят вспомогательный характер. Они позволяют выписать условие 3), т. е. выполнить подстановку функции $\varphi(x)$ в левую и правую части (1.1).

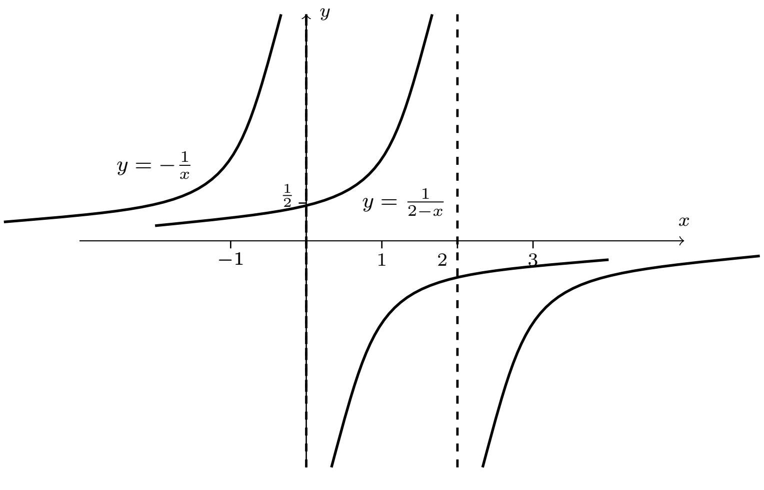
3. Любое решение $y = \varphi(x)$ является функцией не просто дифференцируемой по условию 1), а непрерывно дифференцируемой или гладкой на $\langle a, b\,\rangle$, что обычно записывается так: $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\,\rangle)$.

Действительно, функция в правой части 3) непрерывна как композиция непрерывных функций, а значит, таковой является и левая часть. При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах считаются односторонние производные.

4. Поскольку решение $y = \varphi(x)$ — гладкая функция, то через любую ее точку $(x, \varphi(x))$ можно провести касательную под углом $\alpha(x)$ с осью абсцисс таким, что $\operatorname{tg}\alpha(x) = f(x, \varphi(x))$. Именно поэтому графики решений, проходящих через одну и ту же точку (x_0, y_0) не могут в ней пересекаться, а могут только касаться.

5. В определении решения существенно, что оно задано на связном множестве о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = y^2$. В качестве области G для него можно взять всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Подстановкой легко проверить, что для любой вещественной константы C и для любого $x \neq C$ функция $\varphi(x) = (C - x)^{-1}$ удовлетворяет уравнению, но решением при таких x не является, так как $\mathbb{R}^1 \backslash \{C\}$ — несвязное множество. Очевидно, что для любой константы C предложенная функция $\varphi(x)$ будет решением уравнения $y' = y^2$ на интервалах $(-\infty, C)$ и $(C, +\infty)$.



Подводя итоги, можно еще раз сказать, что решением уравнения (1.1) будет любая гладкая на некотором промежутке $\langle a, b\,\rangle$ функция $y = \varphi(x)$, результатом подстановки которой в уравнение (1.1) является тождество

$$\varphi'(x) \stackrel{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x, \varphi(x)). \tag{1.2}$$

3^0. **Задача Коши для дифференциального уравнения.**

Рассмотрим одно из простейших дифференциальных уравнений $y' = f(x)$. Домножая обе его части на dx и интегрируя, убеждаемся, что оно имеет несчетное число решений: $y(x) = \int f(x)\,dx + C$.

Эта ситуация стандартна, так как решая так или иначе любое уравнение первого порядка, придется один раз интегрировать, что приведет к появлению свободной вещественной константы C.

При этом часто в множестве всех решений требуется найти какое-то одно конкретное решение при помощи дополнительного условия, выделяющего его из остальных решений.

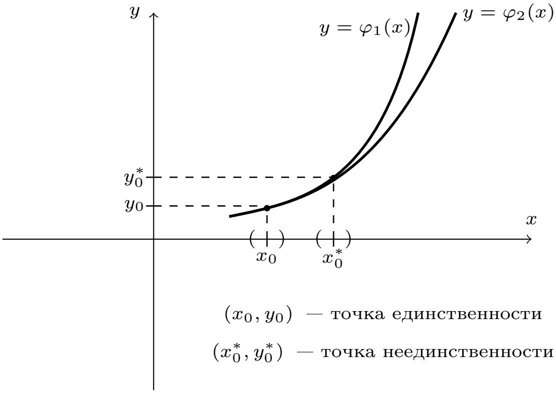
Упомянутое дополнительное условие называется начальным условием или задачей Коши для дифференциального уравнения (1.1). Оно заключается в том, чтобы для некоторой точки $(x_0, y_0) \in G$ найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на каком-либо промежутке $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Df. *Любые два числа x_0, y_0 такие, что точка (x_0, y_0) лежит в G, называются начальными данными (н. д.) задачи Коши.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 существует, если существуют такие интервал $(a, b) \ni x_0$ и решение $y = \varphi(x)$, определенное на нем, что $y_0 = \varphi(x_0)$.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 единственно, если для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ поставленной задачи Коши можно указать такой интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $\varphi_1(x) \stackrel{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi_2(x)$.*

Таким образом решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 не единственно, если найдутся два решения уравнения (1.1), графики которых проходят через точку (x_0, y_0), имеют в ней одинаковую касательную, но отсутствует окрестность точки x_0, в которой эти графики совпадают.



В заключение приведем еще два естественных определения.

Df. *Любая точка* (x_0, y_0) *из* G, *в которой решение задачи Коши единственно, называется точкой единственности.*

Df. *Область* $\widetilde{G} \subset G$ *называется областью единственности, если каждая точка* $\widetilde{G}$ *является точкой единственности.*

4^0. Интегральное уравнение.

Df. *Уравнение*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\, ds, \tag{1.3}$$

где функция $f(x, y)$ *определена и непрерывна в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *точка* $(x_0, y_0) \in G$, *а* $x_0, x \in \langle a, b \rangle$, *называется интегральным уравнением на промежутке* $\langle a, b \rangle$.

Df. *Функция* $y = \varphi(x)$, *определенная на промежутке* $\langle a, b \rangle$, *называется решением интегрального уравнения (1.3), если для любого* $x \in \langle a, b \rangle$ *выполняются следующие три условия:*

1) функция $\varphi(x)$ *непрерывна,*

2) точка $(x, \varphi(x)) \in G$,

3) $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$.

Замечание 6. Согласно 3) решение интегрального уравнения $\varphi \in C^1(\langle a, b \rangle)$, поскольку интеграл с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций из правой части 3) является непрерывно дифференцируемой функцией, каковой будет и левая часть. При этом $\varphi(x_0) = y_0$.

Теорема (о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области G. Для того чтобы определенная на $\langle a,b\,\rangle$ функция $y=\varphi(x)$ была решением задачи Коши дифференциального уравнения* (1.1) *с начальными данными x_0,y_0, необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения* (1.3) *на $\langle a,b\,\rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $y=\varphi(x)$ на $\langle a,b\,\rangle$ — это решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0,y_0, т. е. $x_0\in\langle a,b\,\rangle$, $(x_0,y_0)\in G$, $\varphi(x_0)=y_0$ и справедливо тождество (1.2) $\varphi'(x)\overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x,\varphi(x))$.

Интегрируя его по s от x_0 до x и перенося $\varphi(x_0)$ в правую часть, получаем тождество

$$\varphi(x)\overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv}\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds, \tag{1.4}$$

означающее, что функция $y=\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.3) на промежутке $\langle a,b\,\rangle$.

Достаточность. Подставляя решение $y=\varphi(x)$ в уравнение (1.3), по определению получаем тождество (1.4), которое согласно замечанию 6 можно продифференцировать по x. В результате получаем тождество (1.2), означающее, что $\varphi(x)$ — это решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0,y_0. $\square$

Замечание 7. Если отказаться от предположения о непрерывности функции f в области G и потребовать только ее суммируемость там, то достаточность в теореме доказать не удастся, так как в правой части тождества (1.4) будет стоять только непрерывная функция, а значит, функция $\varphi(x)$ тоже только непрерывна. Поэтому, являясь решением интегрального уравнения (1.3), она не будет решением дифференциального уравнения (1.1).

Понятие решения дифференциального уравнения в этом случае можно обобщить, называя обобщенным решением дифференциального уравнения (1.1) любое решение интегрального уравнения (1.3).

5^0. Отрезок Пеано.

Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ отрезком Пеано называют отрезок оси абсцисс, содержащий x_0 внутри себя, на котором, как будет доказано, заведомо существует решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0.

Построим какой-либо отрезок Пеано, тем самым определяя его.

Итак, для любой точки (x_0, y_0) из области G найдутся константы $a, b > 0$ такие, что замкнутый прямоугольник

$$\overline{R} = \{(x, y):\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\} \subset G$$

в силу того, что G — открытое множество.

Прямоугольник $\overline{R}$ является компактом, т. е. замкнутым ограниченным множеством.

Замкнутость любого множества здесь и всегда в дальнейшем будет подчеркивать стоящая над ним черта.

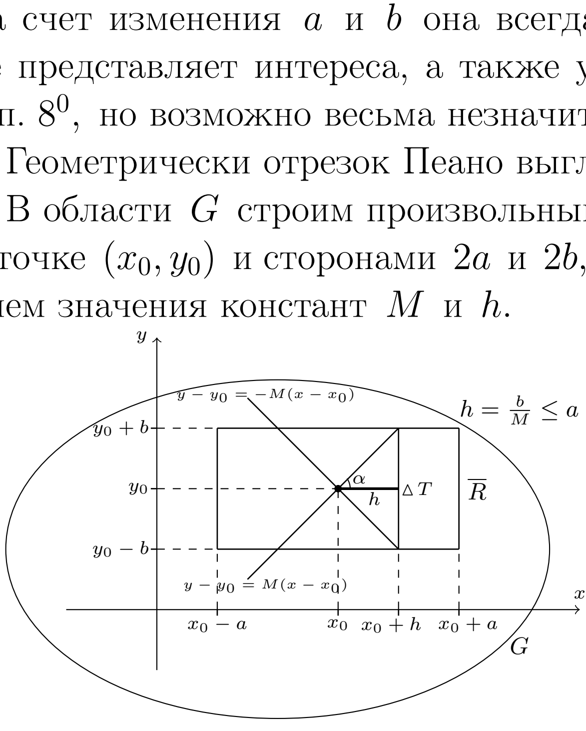
Поскольку на компакте любая непрерывная функция достигает максимума, обозначим через M максимум $|f|$ на $\overline{R}$, т. е. положим $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)| > 0$, и введем константу $h = \min\{a, b/M\} > 0$.

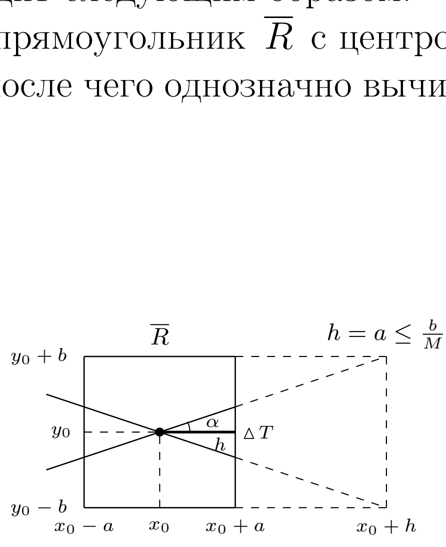
Df. *Отрезок* $P_h(x_0, y_0) = \{x:\ |x - x_0| \le h\} = [x_0 - h, x_0 + h]$ *называется отрезком Пеано, построенным для точки* (x_0, y_0).

Константа $h > 0$ для точки (x_0, y_0) находится не однозначно. За счет изменения a и b она всегда может быть уменьшена, что не представляет интереса, а также увеличена, как будет показано в п. 8^0, но возможно весьма незначительно.

Геометрически отрезок Пеано выглядит следующим образом.

В области G строим произвольный прямоугольник $\overline{R}$ с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$, после чего однозначно вычисляем значения констант M и h.





Далее, через точку (x_0, y_0) проводим две прямые с тангенсами углов наклона равными $\pm M$ вплоть до пересечения их с какой-либо из сторон прямоугольника.

Справа от прямой $x = x_0$ возникает равнобедренный треугольник T с вершинами в точке (x_0, y_0) и точках пересечения прямых со сторонами $\overline{R}$. Если основание T лежит на вертикальной стороне $\overline{R}$, то его высота равняется a и $a \le b/M$, а если $b/M \le a$, то основание T лежит на прямой $x = b/M$ внутри прямоугольника.

Таким образом константа h — это высота треугольника T, и важно то, что $T \subset \overline{R} \subset G$. Слева от прямой $x = x_0$ все аналогично.

6^0. Теоремы о существовании и единственности решения.

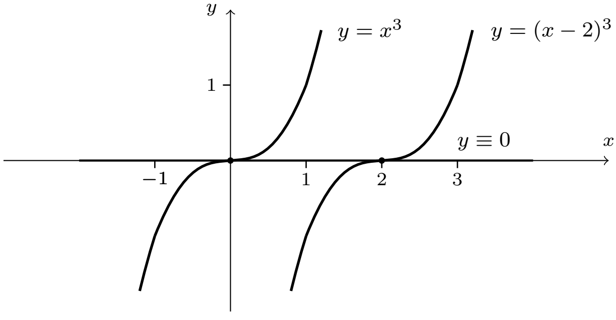
Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Эта важнейшая теорема будет доказана в следующем параграфе.

Отметим, что условие $f \in C(G)$, гарантирующее существование решений, чрезвычайно компактно, удобно и легко проверяется.

К сожалению, непрерывности $f(x, y)$ в области G не достаточно для того, чтобы G была областью единственности, т. е. чтобы через каждую ее точку проходил график только одного решения.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = 3y^{2/3}$, тогда $G = \mathbb{R}^2$ и f непрерывна в G. Легко проверить, что для всякой вещественной константы C функция $y = (x - C)^3$ – кубическая парабола – будет решением уравнения на интервале $(-\infty, +\infty)$. Столь же очевидно, что решением является функция $y \equiv 0$.



В результате через любую точку оси абсцисс $(x_0, 0)$ проходят графики двух решений: $y = (x - x_0)^3$ и $y \equiv 0$, и эти графики больше ни в одной точке плоскости не совпадают. Поэтому в каждой точке оси абсцисс нарушается единственность решения задачи Коши.

Итак, для того чтобы гарантировать единственность решения задачи Коши в любой точке некоторой области $\widetilde{G} \subset G$, правая часть уравнения (1.1) в ней должна удовлетворять дополнительным условиям. Чем более слабыми, но достаточными, они будут, тем более сильной получится теорема единственности.

Ниже будет сформулирована теорема, являющаяся одной из самых простых, но весьма удобных для практического применения, теорем единственности.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$, а в области $\widetilde{G} \subset G$ существует и непрерывна частная производная $\partial f(x, y)/\partial y$, тогда $\widetilde{G}$ — это область единственности для уравнения (1.1).*

Эта теорема будет доказана в § 3, где будут приведены также две более сильные теоремы единственности.

Вернемся к примеру 2. Очевидно, что в нем $\partial f(x, y)/\partial y = 2y^{-1/3}$, а значит, при $y \equiv 0$ частная производная по y отсутствует. Но именно в любой точке оси абсцисс, как было установлено, единственность и нарушается. Поэтому уравнение $y' = 3y^{2/3}$ имеет две области единственности $\widetilde{G}$ — это верхняя и нижняя полуплоскости.

7^0. Частное, особое и общее решение.

Df. *Решение уравнения (1.1) $y = \varphi(x)$, определенное на промежутке $\langle a, b \rangle$, называется частным, если каждая его точка является точкой единственности, и называется особым, если каждая его точка является точкой неединственности.*

В примере 2 для любой константы C функция $y = (x - C)^3$ задает два частных решения, одно на интервале $(-\infty, C)$ и другое на интервале $(C, +\infty)$. В то же время решение $y \equiv 0$ — особое.

А как записать сразу все решения уравнения (1.1)?

Пусть $y = y(x, x_0, y_0)$ — это решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, т. е. $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$.

Таким образом решение задачи Коши является, вообще говоря, функцией трех аргументов, но один из них — лишний, поскольку переменные x_0 и y_0 связаны между собой движением по графику выбранного решения.

Df. *Пусть $\widetilde{G}$ — это область единственности. Непрерывная функция $y = \varphi(x, C)$ называется общим решением дифференциального уравнения (1.1) в области $A \subset \widetilde{G}$, если выполняются два условия:*

1) для любой точки $(x_0, y_0) \in A$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C_0 = U(x_0, y_0)$;

2) функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши (1.1) с начальными данными x_0, y_0.

Иными словами, непрерывная по совокупности аргументов функция $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением уравнения (1.1) в окрестности точки (x_0, y_0) из G такой, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ при некотором C_0, если найдется окрестность точки C_0, в которой функция $\varphi(x_0, C)$ монотонна по C и для всякого C из этой окрестности $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (1.1).

Таким образом, $\varphi(x, C)$ — однопараметрическое семейство решений, задающее в некой области $A \subset \widetilde{G}$ любое решение уравнения.

Теорема (о существовании общего решения). *Для любой точки (x_0, y_0) из области единственности $\widetilde{G}$ уравнения (1.1) найдется область $A \subset \widetilde{G}$, в которой существует общее решение* (см. § 4).

Можно сказать, что первой задачей, стоящей перед теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, является задача выделения тех уравнений первого порядка, для которых общее решение может быть выписано в явном виде, т. е. в квадратурах.

8^0. Продолжимость решений.

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (1.1) на промежутке $\langle a, b \rangle$. Как уже отмечалось, если сузить этот промежуток, то на нем $\varphi(x)$ тоже будет решением. А можно ли расширить $\langle a, b \rangle$ и, если можно, то на сколько?

Пример 1 показывает, что расширение возможно не всегда. Так, интервал $(-\infty, 1)$ для решения $\varphi(x) = (1 - x)^{-1}$ уравнения $y' = y^2$ увеличить невозможно.

Df. *Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на промежутке $\langle a, b\,\rangle$, продолжимо вправо за точку b, если существуют число $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ уравнения (1.1) на $\langle a, \widetilde{b}\,\rangle$ такие, что сужение функции $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b\,\rangle$ совпадает с функцией $\varphi(x)$. При этом $y = \widetilde{\varphi}(x)$ называется продолжением решения $y = \varphi(x)$ вправо (за точку b).*

Аналогично определяется продолжимость влево за точку a.

Лемма (о продолжении решения за границу отрезка). *Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на промежутке $\langle a, b\,]$, продолжимо вправо за точку b.*

Доказательство. По определению решения точка $(b, \varphi(b)) \in G$. Следовательно по теореме Пеано уравнение (1.1) имеет на отрезке Пеано $P_h(b, \varphi(b))$ с неким $h > 0$ решение $y = \psi(x)$. В частности это решение определено на отрезке $[b, b+h]$.

Положим $\widetilde{\varphi}(x) = \{\, \varphi(x)$ при $x \in \langle a, b\,]$, $\psi(x)$ при $x \in [b, b+h]\,\}$.

Введенная таким образом функция, очевидно, удовлетворяет всем трем условиям из определения решения уравнения (1.1), являясь, тем самым, продолжением решения $y = \varphi(x)$ вправо за точку b. $\square$

Аналогичным образом доказывается, что решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенное на $[a, b\,\rangle$, продолжимо влево за точку a.

Df. *Решение уравнения (1.1) называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо.*

Df. *Область определения полного решения называется максимальным интервалом существования этого решения.*

Утверждение. *Максимальный интервал существования решения — это интервал.*

Доказательство утверждения от противного очевидно.

9^0. Интегральные кривые и поле направлений.

Df. Кривая, являющаяся графиком полного решения, называется интегральной кривой.

Поэтому интегральная кривая решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) имеет своей областью определения максимальный интервал существования решения, который будет обозначаться (α, β).

Если решение рассматривается на промежутке $\langle a, b\,\rangle \subsetneqq (\alpha, \beta)$, то его график обычно называют дугой интегральной кривой.

Согласно определению единственности решения задачи Коши в области единственности $\widetilde{G}$ интегральные кривые не только не пересекаются, но и не касаются друг друга.

Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области определения G уравнения (1.1). В этой точке известен тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой: $\operatorname{tg}\alpha(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Df. *Отрезок, вообще говоря, единичной длины с центром в точке* $(x_0, y_0) \in G$ *и тангенсом угла наклона, равным* $f(x_0, y_0)$, *называется направлением поля или отрезком поля направлений в точке* (x_0, y_0), *индуцированным уравнением (1.1).*

Df. *Область* G, *заполненная отрезками поля направлений, называется полем направлений, индуцированным уравнением (1.1).*

Из последнего определения следует, что задание уравнения (1.1) равносильно заданию непрерывного поля направлений.

С этой точки зрения, кривая, лежащая в области G, является интегральной кривой тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке.

Таким образом, геометрически, решить дифференциальное уравнение (1.1) означает найти в G все его интегральные кривые.

$\mathbf{10^0}$. Метод изоклин.

Представляет интерес задача, не решая уравнения (1.1), которое может в явном виде и не решаться, построить приближенно все его интегральные кривые, а точнее, все наиболее характерные из них.

Наиболее удобно осуществлять приближенное построение интегральных кривых при помощи метода изоклин.

Df. *Изоклиной уравнения (1.1) называется любая кривая, расположенная в области* G, *в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона.*

Поэтому все изоклины задаются уравнением $f(x, y) = k$ $(k \in \mathbb{R})$.

Метод изоклин заключается в том, чтобы, нарисовав достаточно много изоклин и отрезков поля на них, провести характерные интегральные кривые, касающиеся построенных на изоклинах отрезков поля направлений.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $y' = 2y/x$. Его правая часть непрерывна на открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$. Поэтому в качестве G можно выбрать, например, правую полуплоскость $\{x > 0\}$.

Уравнение для изоклин имеет вид: $2y/x = k$ или $y = (k/2)x$ — это множество лучей, выходящих из начала координат.

Построим несколько изоклин:

при $k = -2$ изоклина $y = -x$ пересекается интегральными кривыми с углом наклона $\alpha = -\operatorname{arctg} 2$ в точке пересечения;

при $k = -1$ изоклина $y = -x/2$ и $\alpha = -\pi/4$;

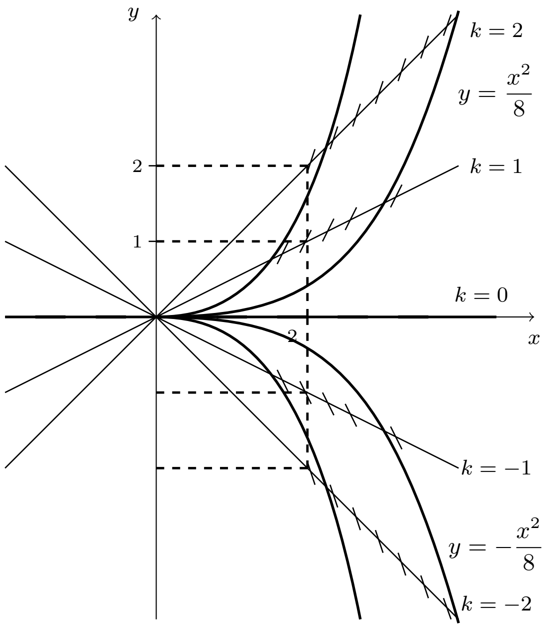
при $k = 0$ изоклина $y \equiv 0$ и $\alpha = 0$, т.е. отрезки поля направлений лежат на изоклине, которая в данном случае является решением, что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение;

при $k = 1$ изоклина $y = x/2$ и $\alpha = \pi/4$;

при $k = 2$ изоклина $y = x$ и $\alpha = \operatorname{arctg} 2$;

при дальнейшем росте k изоклины выходят и начала координат под все большим углом и в точках пересечения с каждой из них интегральные кривые имеют все больший угол наклона.

Построенные методом изоклин интегральные кривые очень напоминают параболы, коими, конечно, и являются, так как общее решение уравнения имеет вид $y = Cx^2$. И эта формула справедлива как при $x > 0$, так и в области $\{x < 0\}$.



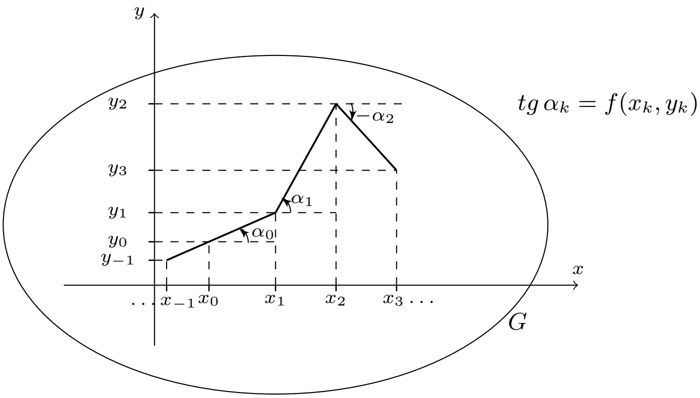
§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Ломаные Эйлера.

В этой параграфе будет доказана сформулированная в § 1, п. 6^0 теорема Пеано о существовании решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1) $y' = f(x, y)$, в котором $f \in C(G)$.

Решение будет строиться при помощи так называемого метода ломаных Эйлера, который и будет изложен в этом пункте.

Выберем в области G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G, начинаясь, скажем, в точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1). Проведем вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся соответственно в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}), и т. д.



Поскольку G — область, а значит, открытое множество, этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов N.

Полученная непрерывная кусочно линейная кривая $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера. Она определена в окрестности (x_0, y_0), лежит в G и абсциссы ее угловых точек равны x_j $(j = \overline{-N, N})$.

Рангом дробления ломаной Эйлера назовем $\max\limits_{j=\overline{1-N,N}} \{x_j - x_{j-1}\}$.

Формула, задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, имеет следующий вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее последовательно по $j = 0, 1, \dots, N-1$ для $\forall\, x \in (x_j, x_{j+1}]$ или по $j = 0, -1, \dots, 1-N$ для $\forall\, x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j) \tag{1.5}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определен для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$.

Из формулы (1.5) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$ производная $\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j))$, а в точке x_{j+1} она, вообще говоря, не определена, как и в точках x_{j-1} при $j \leq 0$.

Доопределим $\psi'(x)$ в возможных точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, т. е. положим

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) = \lim_{x \to x_j \mp 0} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm N).$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$, причем $\psi'(x_0) = \psi'_{-}(x_1) = \psi'_{+}(x_{-1})$.

Таким образом, для $\forall\, x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ или для $\forall\, x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, \ldots, 1-N)$, дифференцируя равенство (1.5) по x, получаем

$$\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j)) \quad (j \in \{1-N, \ldots, N-1\}) \tag{1.6}$$

Кроме того, интегрируя разрывную кусочно постоянную функцию $\psi'(x)$ по s от x_0 до x, для всякого $x \in [x_{-N}, x_N]$ получаем

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds, \tag{1.7}$$

где $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\, ds + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\, ds$ при $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j \in \{0, \ldots, N-1\})$ и $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\, ds + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\, ds$ при $x \in [x_j, x_{j+1})$ $(j \in \{-N, \ldots, -1\})$.

2^0. Лемма об ε-решении.

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области G, такую, что при подстановке ее в уравнение (1.1) разность между левой и правой частями уравнения окажется по модулю меньше любого сколь угодно малого наперед заданного положительного числа.

Df. *Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется ε-решением уравнения (1.1) на $[a, b]$, если для $\forall\, x \in [a, b]$ точка $(x, \psi(x)) \in G$ и*

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \le \varepsilon. \tag{1.8}$$

Лемма (о ломаных Эйлера в роли ε-решения) *Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y_0)$ имеем:*

1) для $\forall\, \delta > 0$ на отрезке Пеано можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, график которой лежит в $\overline{R}$;

2) для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, является ε-решением уравнения (1.1) на $P_h(x_0, y_0)$.

Доказательство.

1) Аналогично тому, как это было сделано в п. 5^0 § 1, для произвольной точки (x_0, y_0) из области G построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в этой точке и два симметричных равнобедренных треугольника $T \subset \overline{R}$ с общей вершиной в той же точке и основаниями, параллельными оси ординат. При этом будут зафиксированы константы a, b, M и h.

Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $h/\delta_* = N \in \mathbb{N}$, и положим $x_{j+1} = x_j + \delta_*$ $(j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_n = x_0 + h$.

Будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках x_j для $x > x_0$.

Для $\forall\, j = 0, \ldots, N-1$ это сделать возможно, так как модуль тангенса угла наклона каждого отрезка равен $|f(x_j, \psi(x_j))|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника T по построению равны $\pm M$, где $M = \max_{\overline{R}} |f(x, y)|$. Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку треугольника T, а значит, остается в нем. Тем самым, для $\forall\, x \in [x_0, x_0{+}h]$ точка $(x, \psi(x)) \in T \subset \overline{R} \subset G$, и требуемая ломаная Эйлера построена на полуотрезке Пеано $[x_0, x_0 + h]$.

Для левого полуотрезка Пеано все аналогично.

2) Зафиксируем теперь произвольное положительное число ε.

Функция $f(x,y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора f равномерно непрерывна на нем. По определению это значит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек (x',y') и (x'',y'') из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x'-x''| \le \delta_1$ и $|y'-y''| \le \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x',y') - f(x'',y'')| \le \varepsilon$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1/M\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим чем δ справедливо неравенство (1.8) на отрезке Пеано $P_h(x_0,y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$.

Возьмем любую точку x из отрезка Пеано, например, справа от x_0. Найдется индекс $j \in \{0,\ldots,N-1\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. x_j — ближайшая к x левая угловая точка ломаной Эйлера.

Согласно (1.6) $\psi'(x) - f(x,\psi(x)) = f(x_j,\psi(x_j)) - f(x,\psi(x))$.

Оценим близость аргументов функции f.

По выбору δ и j имеем: $|x - x_j| \le \delta \le \delta_1$, и теперь согласно (1.5) $|\psi(x) - \psi(x_j)| = |f(x_j,\psi(x_j))||x - x_j| \le M\delta \le \delta_1$.

Поэтому из определения равномерной непрерывности функции f вытекает, что $|f(x_j,\psi(x_j)) - f(x,\psi(x))| \le \varepsilon$, а значит, неравенство (1.8) из определения ε-решения справедливо для $\forall\, x \in P_h(x_0,y_0)$. $\Box$

$\mathbf{3^0}$. Лемма Асколи - Арцело.

Вспомним для начала несколько определений из математического анализа, касающихся функциональных последовательностей, поскольку нам предстоит иметь дело с последовательностью ломаных Эйлера, являющихся ε_n-решениями, и ε_n будет стремиться к нулю.

Рассмотрим последовательность $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, заданную на $[a,b]$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a,b]$, если $\forall n \ge 1\;\; \exists K_n > 0 : \;\; \forall\, x \in [a,b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \le K_n$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена на* $[a,b]$, *если* $\exists K > 0 : \;\; \forall n \ge 1, \;\; \forall\, x \in [a,b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \le K$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на $[a,b]$, а значит, согласно теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$, если $\forall\, \varepsilon > 0, \;\; \forall\, n \ge 1 \;\; \exists\, \delta_n > 0 : \;\; \forall\, x', x'' \in [a,b] :$ $|x' - x''| \le \delta \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \le \varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равностепенно непрерывна на* $[a,b]$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \;\; \forall\, n \ge 1, \;\; \forall\, x', x'' \in [a,b] :$ $|x' - x''| \le \delta \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \le \varepsilon$.

Последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\,x\in[a,b]$ $\exists\,N_x>0:\ \ \forall\,i,j\ge N_x\ \Rightarrow\ |h_i(x)-h_j(x)|\le\varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к некоторой функции* $h(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *если* $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N>0:$ $\forall\,i,j\ge N,\ \ \forall\,x\in[a,b]\ \Rightarrow\ |h_i(x)-h_j(x)|\le\varepsilon$.

Поточечная сходимость обозначается $h_n(x)\to h(x)$ при $n\to\infty$ для $\forall\ x\in[a,b]$, а равномерная — $h_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} h(x)$ при $n\to\infty$.

Таким образом, в первых двух определениях слова равномерно и равностепенно означают, что константы K и δ не зависят от выбора n, а в третьем определении равномерность означает, что N не зависит от выбора x.

Лемма Асколи - Арцело (о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на* $[a,b]$ *последовательности функций* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно извлечь равномерно сходящуюся на* $[a,b]$ *подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хорошо известно, что рациональные числа образуют счетное всюдуплотное множество на любом промежутке вещественной прямой. Поэтому всюдуплотное множество рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a,b]$, можно перенумеровать, обозначив их $r_1,r_2,\ldots$.

В точке r_1 числовая последовательность $\{h_n(r_1)\}_{n=1}^{\infty}$ по предположению ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует последовательность чисел натурального ряда $n^{(1)}=\{n_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(1)}<n_{i+1}^{(1)})$ такая, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится при $x=r_1$.

В точке r_2 числовая последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(r_2)\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ существует подпоследовательность $n^{(2)}=\{n_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(2)}<n_{i+1}^{(2)})$ такая, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в точке $x=r_2$. При этом она сходится и при $x=r_1$ как подпоследовательность сходящейся последовательности.

Разряжая аналогичным способом числовую последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(r_3)\}_{i=1}^{\infty}$, получаем функциональную подпоследовательность $\{h_{n_i^{(3)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся в точках r_1, r_2, r_3. И т. д.

Введем последовательность индексов $\{n_i^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ — это, очевидно, i-й член подпоследовательности $n^{(i)}$.

Тогда функциональная подпоследовательность $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ исходной последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках отрезка $[a,b]$.

Действительно, в любой рациональной точке r_k последовательность $\{h_{n_i^{(k)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходится по построению, а $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=k}^{\infty}$ является ее подпоследовательностью.

Покажем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$, является искомой подпоследовательностью исходной последовательности.

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.

По определению последовательность $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному ε найдется $\delta > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\forall\, x', x'' \in [a,b]:\ |x' - x''| \leq \delta \ \Rightarrow\ |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \leq \varepsilon/3$.

По построению последовательность $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках r_k из $[a,b]$, поэтому по выбранному ε для $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \exists\, N_{r_k} > 0:\ \forall\, i_*, j_* \geq N_{r_k}\ \Rightarrow\ |h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит δ. Пусть их окажется l штук.

Множество рациональных чисел всюдуплотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, \ldots, r_l^*$.

Пусть $N = \max\{N_{r_1^*}, \ldots, N_{r_l^*}\}$, где константы N_r взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

Возьмем теперь произвольный $x \in [a,b]$. Предположим, что он попал в промежуток с номером p. Тогда для $\forall\, i_*, j_* \geq N$ по неравенству треугольника получаем $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$, поскольку $|x - r_p^*| \leq \delta$ и справедлива оценка из определения равномерной сходимости.

Итак, для $\forall\, \varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что для $\forall\, i_*, j_* \geq N$ и для $\forall\, x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$. $\square$

Пояснение. Пусть, например, для сходимости функциональной последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в очередной рациональной точке из имеющейся на данный момент подпоследовательности требуется выкидывать все члены через одного, начиная с первого. Имеем:

$$\begin{aligned} n_1 &= \ \ \underline{2},\ \ 4,\ \ 6,\ \ 8, 10, 12\ldots\ ; \\ n_2 &= \ \ 4,\ \ \underline{8}, 12, 16, 20, 24\ldots\ ; \\ n_3 &= \ \ 8, 16, \underline{24}, 32, 40, 48\ldots\ ; \\ n_4 &= 16, 32, 48, \underline{64}, 80, 96\ldots \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Выбирая теперь в i-й строке индексов i-й индекс, получаем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\, h_2(x), h_8(x), h_{24}(x), h_{64}(x), h_{160}(x), \ldots\}$.

Замечание 8. По теореме Стокса-Зайделя предельная функция $h(x)$, к которой равномерно относительно $[a,b]$ сходится последовательность функций $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, определена и непрерывна на $[a,b]$.

4^0. Доказательство теоремы о существовании решения.

Теорема Пеано (о существовании решения). *Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области G, тогда для любой точки $(x_0,y_0)\in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0,y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0,y_0, определенное на $P_h(x_0,y_0)$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из области G и построим какой-либо отрезок Пеано $P_h(x_0,y_0)$.

Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. По лемме об ε-решении для всякого n можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку (x_0,y_0), определенную на $P_h(x_0,y_0)$ и являющуюся ε_n-решением дифференциального уравнения (1.1) на отрезке $P_h(x_0,y_0)$.

Тем самым, для $\forall\, n\in\mathbb{N}$ и $\forall\, x\in P_h(x_0,y_0)$ точка $(x,\psi_n(x))\in\overline{R}$ и выполняется неравенство (1.8) $|\psi_n'(x)-f(x,\psi_n(x))|<\varepsilon_n$.

Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $P_h(x_0,y_0)$ удовлетворяет лемме Асколи-Арцело.

Последовательность $\psi_n(x)$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y=\psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)|\le|y_0|+b$ для $\forall\, x\in[x_0-h,x_0+h]$.

Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \varepsilon/M$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)|$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ и для любых $x', x'' \in P_h(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем: $|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| \overset{(1.7)}{=} \Big| \displaystyle\int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\,ds - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\,ds\Big| = \Big|\int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\,ds\Big| \overset{(1.6)}{\le} \Big|\int_{x'}^{x''} \max_{j=\overline{1-N,N-1}} |f(x_j, \psi_n(x_j))|\,ds\Big|$ $\le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon$.

Таким образом, последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Асколи-Арцело и из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\psi_{i_*}(x)\}_{i_*=1}^{\infty}$.

Пусть $\psi_{i_*}(x) \overset{x\in P_h}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $i_* \to \infty$ $(i_* \to \infty$ при $i \to \infty)$.

По замечанию 8 функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано.

Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ является по построению ε-решением, то из (1.8) вытекает, что для $\forall\, x \in P_h(x_0, y_0)$

$$\psi_{i_*}'(x) = f(x, \psi_{i_*}(x)) + \Delta_{i_*}(x), \quad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}.$$

Интегрируя последнее равенство по s от x_0 до x, получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \psi_{i_*}(s))\,ds + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,ds. \tag{1.9}$$

При этом $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$, $\left|\int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,ds\right| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \to 0$ при $i_* \to \infty$, так как $|x - x_0| \le h$. Кроме того, поскольку любая точка $(s, \psi_{i_*}(s))$ принадлежит $\overline{R}$, а функция $f(x,y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на компакте $\overline{R}$, имеем: $f(s, \psi_{i_*}(s)) \overset{s\in P_h}{\rightrightarrows} f(s, \varphi(s))$.

Поэтому $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \psi_{i_*}(s))\,ds \to \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds$ при $i_* \to \infty$.

Переходя в левой и правой частях (1.9) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество $\varphi(x) \overset{[x_0-h,x_0+h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds$, означающее, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.3) на отрезке Пеано $P_h(x_0, y_0)$.

Следовательно, по теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением задачи Коши дифференциального уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0 на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$. $\square$

Замечания.

9. Теорема Пеано не дает информации о количестве решений уравнения (1.1), проходящих через заданную точку области G.

10. В связи с возможным нарушением единственности решений в некоторых точках области G в этих точках существуют решения, которые нельзя приблизить ломаными Эйлера. Так, в примере 2 решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$ — это функции $y = (x - C)^3$ и $y \equiv 0$. Но любой отрезок любой ломаной Эйлера, проходящей через точку $(x_0, 0)$, имеет нулевой угол наклона, поэтому ломаная может приближать только решение $y \equiv 0$. А если точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G} \subset G$ и $\widetilde{G}$ — область единственности, то любая равномерно сходящаяся на отрезке Пеано подпоследовательность произвольной последовательности ломаных Эйлера сходится к одному и тому же решению.

§ 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Лемма Гронуолла.

В этом параграфе будут представлены три различные теоремы единственности, две из которых будут доказаны, включая теорему, сформулированную в § 1, п. 6^0.

Доказательство любой из теорем единственности, как и доказательство многих других результатов, основано на использовании леммы Гронуолла, позволяющей из интегральной оценки функции, когда функция оценивается сверху через интеграл от нее самой и оценка в этом смысле является рекуррентной, получить прямую оценку сверху только через аргумент функции и входящие в интегральную оценку константы.

Лемма. *Пусть функция* $h(x)$ *непрерывна на* $\langle a, b\rangle$ *и*

$$\exists\, \lambda, \mu \geq 0 :\ \forall\, x_0, x \in \langle a, b\rangle \ \Rightarrow\ 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\, ds \right|, \tag{1.10}$$

тогда справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x - x_0|}. \tag{1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $x \ge x_0$.

Введем в рассмотрение функцию $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\,ds$.

Тогда $g(x_0) = 0$, $g(x) \ge 0$, $g(x) \in C^1([x_0, b\rangle)$ и $g'(x) = h(x) \ge 0$.

Подставляя функцию $g(x)$ в оценку (1.10), получаем неравенство $g'(x) \le \lambda + \mu g(x)$.

Перенося последнее слагаемое в левую часть, домножая обе части на $e^{-\mu(x-x_0)}$ и выделяя слева производную, получаем неравенство $(g'(x) - \mu g(x))e^{-\mu(x-x_0)} = (g(x)e^{-\mu(x-x_0)})' \le \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$.

Интегрируя обе его части по s от x_0 до x, получаем неравенство $g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - g(x_0) \le \lambda \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\,ds = -(\lambda/\mu)(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$.

Учитывая, что $g(x_0) = 0$, и домножая обе части неравенства на $e^{\mu(x-x_0)}$, получаем прямую оценку для g : $g(x) \le (\lambda/\mu)(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$.

Подставляя это неравенство в правую часть неравенства (1.10), получаем прямую оценку для h : $h(x) \le \lambda + \mu g(x) \le \lambda e^{\mu(x-x_0)}$.

Таким образом, неравенство (1.11) доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$.

Если $x \le x_0$, то в неравенстве (1.10) $h(x) \le \lambda - \mu \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\,ds$ и введенная функция $g(x) \le 0$.

Дальнейшее доказательство аналогично случаю, когда $x \ge x_0$, только домножать и делить соответствующие неравенства придется на $e^{\mu(x-x_0)}$, получая неравенство (1.11) в виде $h(x) \le \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$. □

Следствие. *Если в лемме Гронуолла* $\lambda = 0$, *т. е. в неравенстве (1.10)* $0 \le h(x) \le \mu \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\,ds \right|$, *то* $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$.

2^0. Условия Липшица.

Зачастую требование дифференцируемости функции, особенно от нескольких переменных, по какой-либо переменной, не смотря на удобство в применении и проверке, оказывается чрезмерным и его заменяют так называемым локальным условием Липшица, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в окрестности каждой точки из некоторой области.

Df. *Функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *глобально на множестве* $D \subset \mathbb{R}^2$, *т. е.* $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, *если*

$$\exists\, L > 0 :\ \forall\, (x, \widehat{y}), (x, \widetilde{y}) \in D \ \Rightarrow\ |f(x, \widetilde{y}) - f(x, \widehat{y})| \le L|\widetilde{y} - \widehat{y}|. \quad (1.12)$$

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y локально в области $G\subset\mathbb{R}^2$, т.е. $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, если для любой точки $(x_0,y_0)\in G$ найдется окрестность этой точки $V(x_0,y_0)\subset G$ такая, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет в ней условию Липшица по y глобально, т.е. $f\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(V(x_0,y_0))$.*

Более подробно условия Липшица будут рассмотрены в главе 3, посвященной нормальным системам дифференциальных уравнений, где будут установлена связь между ними.

$\mathbf{3^0}$. Теоремы о единственности решения.

Теорема (о единственности решения). *Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области G, тогда G — это область единственности для уравнения (1.1).*

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из области G. Поскольку $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, найдется окрестность $V=V(x_0,y_0)\subset G$ и глобальная константа Липшица $L=L(x_0,y_0)>0$ такие, что $f\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(V)$ с константой L.

Покажем, что (x_0,y_0) — точка единственности.

Рассмотрим любые два решения $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ уравнения (1.1), проходящие через эту точку, т.е. $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$.

Выберем интервал $(\alpha,\beta)\ni x_0$ такой, что оба решения на нем определены и для любого $x\in(\alpha,\beta)$ точки $(x,\varphi_1(x)),(x,\varphi_2(x))\in V$.

По теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями функции $y=\varphi_j(x)$ $(j=1,2)$ являются решениями интегрального уравнения (1.3) на (α,β), т.е. для всякого $x\in(\alpha,\beta)$ выполняется тождество (1.4): $\varphi_j(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^x f(s,\varphi_j(s))\,ds.$

В результате $\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=\displaystyle\int_{x_0}^x\big(f(s,\varphi_2(s))-f(s,\varphi_1(s))\big)\,ds$ и точки $(s,\varphi_1(s)),(s,\varphi_2(s))\in V$.

Поэтому в этих точках выполняется глобальное условие Липшица, т.е. неравенство (1.12), а значит, $|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\le$
$$\Big|\int_{x_0}^x|f(s,\varphi_2(s))-f(s,\varphi_1(s))|\,ds\Big|\le\Big|\int_{x_0}^x L|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)|\,ds\Big|.$$

К последнему неравенству можно применить лемму Гронуолла, а точнее, следствие к ней.

Положим $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$, $\lambda = 0$, $\mu = L$, тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 совпадают в каждой точке интервала (α, β), содержащего x_0. По определению это значит, что (x_0, y_0) — это точка единственности. $\square$

Слабая теорема единственности, сформулированная § 1, п. 6^0, имеет более жесткие ограничения на функцию $f(x, y)$, являясь, тем самым, следствием основной теоремы единственности. Докажем ее.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^2$, а в области $\widetilde{G} \subset G$ существует и непрерывна частная производная $\partial f(x, y)/\partial y$, тогда $\widetilde{G}$ — это область единственности.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области $\widetilde{G}$. Существуют ограниченная окрестность этой точки $V = V(x_0, y_0)$ такая, что ее замыкание $\overline{V} \subset \widetilde{G}$ и V выпукла по y, т. е. отрезок прямой, соединяющий любые две точки из области V с одинаковыми абсциссами, целиком содержится в V. В качестве V, очевидно, можно взять любой открытый круг достаточно малого радиуса с центром в точке (x_0, y_0).

По предположению $\partial f(x, y)/\partial y$ непрерывна в области $\widetilde{G}$.

Следовательно на компакте $\overline{V}$ она достигает своего максимума.

Положим $L = \max\limits_{(x,y)\in\overline{V}} \left|\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|$ и применим теорему Лагранжа, согласно которой для любых двух точек $(x, \widehat{y}), (x, \widetilde{y}) \in V$ с $\widehat{y} < \widetilde{y}$ существует $y^* \in (\widehat{y}, \widetilde{y}):\quad f(x, \widetilde{y}) - f(x, \widehat{y}) = \dfrac{\partial f(x, y^*)}{\partial y}(\widetilde{y} - \widehat{y})$.

Здесь точка $(x, y^*) \in V$, так как V выпукла по y. Поэтому в V верно неравенство $|f(x, \widetilde{y}) - f(x, \widehat{y})| \leq L|\widetilde{y} - \widehat{y}|$, и по определению $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V(x_0, y_0))$. Тогда по определению $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$, а значит, по теореме единственности $\widetilde{G}$ — область единственности. $\square$

Следует иметь в виду, что локальное условие Липшица так же, как и гладкость функции f по y, не является необходимым и его можно ослабить, сохраняя единственность решения задачи Коши.

Теорема Осгуда (о единственности, сильная). *Пусть в уравнении (1.1) функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* $G\subset\mathbb{R}^2$ *и*

$$\forall\,(x,\widehat{y}),(x,\widetilde{y})\in G:\quad |f(x,\widetilde{y})-f(x,\widehat{y})|\le h(|\widetilde{y}-\widehat{y}|), \tag{1.13}$$

где функция $h(s)$ *определена, непрерывна и положительна для всякого* $s\in(0,a]$ *и* $\displaystyle\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,ds\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$. *Тогда* G *— область единственности для уравнения (1.1)* (без доказательства).

В качестве функции $h(s)$ можно выбрать, например, функцию $y=Ls$ $(L>0)$. Тогда неравенство (1.13) превратится в неравенство (1.12), т. е. окажется глобальным условием Липшица в области G, а теорема Осгуда — следствием теоремы единственности.

Но $\int_0^a h^{-1}(s)\,ds$ будет также расходящимся для любой функции $h(s)=Ks\,|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|\,\ln\ln|\ln s|$ и т. д. А условие (1.13) на функцию $f(x,y)$ с такими функциями $h(s)$ уже значительно слабее, чем условие Липшица. Очевидно, оно допускает нелинейный рост функции f по y.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

1^0. Область существования общего решения.

В § 1, п. 7^0 было дано определение общего решения дифференциального уравнения (1.1) и сформулирована теорема о его существовании, которую предстоит доказать в этом параграфе.

По определению общее решение — это непрерывная функция двух переменных $y=\varphi(x,C)$, обладающая определенными свойствами. Поэтому первое, что надо сделать, — задать ее область определения.

Гарантировать существование общего решения в произвольной области единственности G нельзя, даже если она будет достаточно мала. Область определения функции $y=\varphi(x,C)$ задается локально, т. е. в окрестности любой точки из G, и имеет строго определенную форму, позволяющую получить ряд необходимых результатов.

Итак, пусть G — область единственности для уравнения (1.1).

Возьмем произвольную точку $(x_0^*,y_0^*)\in G$. Тогда найдутся такие y_1,y_2, что $y_1<y_0^*<y_2$ и для любого $y\in[y_1,y_2]$ точка $(x_0^*,y)\in G$.

Рассмотрим решения задачи Коши $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ с начальными данными (x_0^*, y_1) и (x_0^*, y_2), определенные на интервалах (a_1, b_1) и (a_2, b_2), содержащих точку x_0^*.

Рассмотрим также любой отрезок $[a, b]$ такой, что $x_0^* \in [a, b] \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, и открытое множество

$$A = \{(x, y) \,|\, a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}. \tag{1.13}$$

Очевидно, что уменьшая при необходимости отрезок $[a, b]$, можно всегда добиться, чтобы замыкание множества A — это компакт $\overline{A} = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ содержался в области G. Для этого, например, достаточно уменьшить $[a, b]$ так, чтобы графики решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$ попали в замкнутый круг с центром в точке (x_0^*, y_0^*), лежащий в G. Такой круг выбирается из счетной базы окрестностей пространства $\mathbb{R}^2$.

Поскольку по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$ и G — это область единственности, то $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$. Поэтому открытое множество A — это область, так как дуги интегральных кривых решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$ не могут соприкоснуться, разбивая A на несвязные подмножества.

В чем же заключаются достоинства области A?

Лемма (о поведении решений в области A). *1) Существует число $h > 0$ такое, что для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ можно построить $P_h(x_0, y_0)$ — отрезок Пеано универсальной длины $2h$; 2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1.1) $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 продолжимо на весь отрезок $[a, b]$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0^*, y_0^*) из области G и построим ее окрестность A вида (1.13) так, чтобы $\overline{A} = \{(x, y) \,|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} \subset G$.

1) Обозначим через $\overline{A}_c$ $(c > 0)$ c-окрестность компакта $\overline{A}$, т. е. $\overline{A}_c = \{(x, y) \,|\, \exists\, (x_0, y_0) \in \overline{A} :\ |x - x_0| < c,\ |y - y_0| < c\}$.

Очевидно, что $\overline{A}_c = A_c$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что замыкание ε- окрестности компакта $\overline{A}$ или области A — это компакт $\overline{A_\varepsilon}$ — содержится в области G. Тогда существует $M = \max_{\overline{A_\varepsilon}} |f(x, y)|$.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из $\overline{A}$. Тогда замкнутый прямоугольник $\overline{R} = \{(x, y) \,|\, |x - x_0| \le \varepsilon,\ |y - y_0| \le \varepsilon\} \subset \overline{A_\varepsilon} \subset G$.

Положим $h = \min\{\varepsilon, \varepsilon/M\}$. Тогда по определению $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ является отрезком Пеано, построенным для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$.

2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ по теореме Пеано решение задачи Коши $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого согласно 1) неизменна для всех точек компакта $\overline{A}$.

Рассмотрим $\varphi(x)$, например, при $x > x_0$.

Если $x_0 + h \geq b$, то доказывать нечего. Если $x_0 + h < b$, то $\varphi_1(x_0 + h) < \varphi(x_0 + h) < \varphi_2(x_0 + h)$, а значит, $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \in \overline{A}$. Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y = \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0 + h, x_0 + 2h]$.

Если теперь $x_0 + 2h \geq b$, то доказательство закончено, если нет, то сделаем очередное продолжение решения вправо на длину h.

Таким образом за конечное число шагов решение будет продолжено вправо до точки b включительно.

Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки a. $\square$

2^0. Формула общего решения.

Для любой точки (x_0, y_0) из $\overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0. Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$ и по лемме из п. 1^0 решение $y = y(x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$.

Для произвольной точки $\zeta \in (a, b)$ положим

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C) \qquad ((\zeta, C) \in \overline{A}). \tag{1.14}$$

Теорема (о существовании общего решения). *Введенная в (1.14) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1.1) в области A из (1.13), построенной в окрестности произвольной точки из области единственности G.*

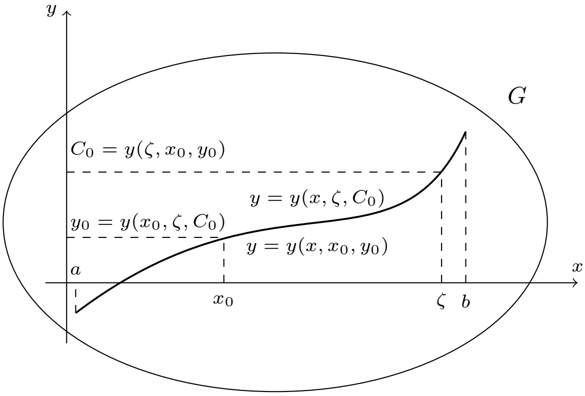
Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1.1), сформулированному в § 1, п. 7^0.

1) Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in A$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (1.14) уравнение

$$y_0 = y(x_0, \zeta, C). \tag{1.15}$$

Наличие у него решения $C = C_0$, фактически, означает, что выпущенное из точки $(\zeta, C_0) \in A$ решение уравнения (1.1) в момент x_0 попадает в точку $(x_0, y_0) \in A$. Покажем, что решение уравнения (1.15) существует и единственно.

Выпустим из точки (x_0, y_0) решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме из п. 1^0 определено на всем отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in (a, b)$ по определению (1.14).



Положим $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда точка (ζ, C_0) принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$ и по предположению является точкой единственности. Поэтому решение задачи Коши уравнения (1.1) $y = y(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными ζ, C_0 $y = y(x, \zeta, C_0)$ по лемме продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$. В частности, $y_0 = y(x_0, \zeta, C_0)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ при $x = x_0$ попадает в точку (x_0, y_0).

Другими словами, дуга интегральной кривой уравнения (1.1), построенная на $[a, b]$ и проходящая через точки (x_0, y_0), (ζ, C_0) имеет две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = y(x, \zeta, C_0)$.

Итак, установлено, что уравнение (1.15) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0))$.

При этом функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, поскольку согласно (1.14) и (1.15) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$.

2) Покажем теперь, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна, т. е. непрерывна по совокупности переменных.

Опишем сначала область определения введенной в (1.14) функции $\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C)$, где фиксированное число $\zeta \in (a, b)$, а точка $(\zeta, C) \in \overline{A}$ и, тем самым, $\varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$.

Учитывая, что по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для всякого $x \in [a, b]$ и что при $x = \zeta$ по определению решения задачи Коши $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$, заключаем, что $\varphi(x, C)$ определена в прямоугольнике $\overline{H} = \{(x, C) \,|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)\}$.

Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1.1), она непрерывна по x при $x \in [a, b]$.

Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$.

Допуская противное, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a, b]$ и последовательность $C_k \to \widetilde{C}$ при $k \to +\infty$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})| \ge \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \ge 1$. Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт и, в частности, $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ содержит все свои предельные точки.

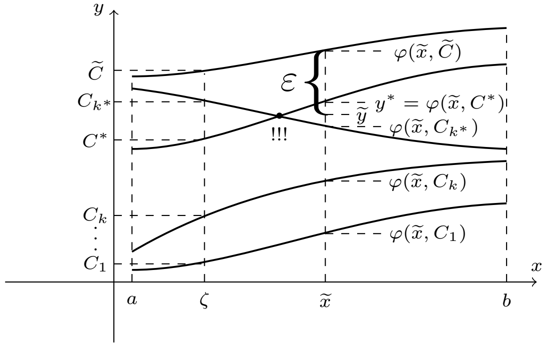
В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \ne \zeta$, так как если $\widetilde{x} = \zeta$, то по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k$, а тождественная функция непрерывна.

Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ решения уравнения (1.1), получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$.

Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность, будем считать, не уменьшая общности, что последовательность C_k, например, монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \ge 1$.

В области единственности интегральные кривые не пересекаются, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \le \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Положим $\widetilde{y} = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \le \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$.



Выберем произвольную точку y^* из интервала $(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}))$ и рассмотрим определенное на $[a, b]$ решение задачи Коши с начальными данными $\widetilde{x}, y^*$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$.

Положим $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$.

Тогда $C^* < \widetilde{C}$, поскольку $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{x}, \zeta, \widetilde{C})$.

Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на отрезке $[a, b]$, как было установлено выше, параметризует также решение с начальными данными ζ, C^*, имеющее согласно формуле (1.14) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причем $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$.

Однако, существует индекс k^* такой, что член C_{k^*} сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности C_k будет больше чем C^*.

В результате получилось, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k^*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются при некотором x^*, лежащем между ζ и $\widetilde{x}$, поскольку $\varphi(\zeta, C_{k^*}) = C_{k^*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k^*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$.

Этот факт противоречит условию теоремы о том, что G является областью единственности.

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C, а значит, по каждой из переменных. Однако, само по себе, этого недостаточно для ее непрерывности по совокупности переменных.

Придется дополнительно воспользоваться еще одним свойством функции φ. Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при любом $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (1.1), то $\partial\varphi(x, C)/\partial x \overset{[a,b]}{\equiv} f(x, \varphi(x, C))$. Но $(x, \varphi(x, C)) \in \overline{A}$, когда $(x, C) \in \overline{H}$, а на компакте $\overline{A}$ $|f(x, y)| \leq M$.

Следовательно, $|\partial\varphi(x, C)/\partial x|$ равномерно ограничен. Этого достаточно для непрерывности функции $y = \varphi(x, C)$ по x на $[a, b]$ равномерной относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$.

А это наряду с поточечной непрерывностью по C гарантирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в $\overline{H}$. $\square$

Df. *Общее решение* $y = \varphi(x, C)$, *определенное формулой (1.14), называется общим решением в форме Коши или классическим общим решением.*

ГЛАВА II

Дифференциальные уравнения I порядка в симметричной форме

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ, ЕГО СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

1^0. Объект изучения.

В главе I рассматривалось классическое уравнение первого порядка (1.1) $y' = f(x, y)$, т. е. уравнение, разрешенное относительно производной.

Недостатком классического уравнение является его несимметричность относительно переменных x и y. В частности, интегральную кривую такого уравнения нельзя продолжить за точку с вертикальной касательной. Чтобы не исключать вертикальные направления, можно рассматривать "перевернутое" уравнение $dx/dy = 1/f(x, y)$, в нем переменные x и y, фактически, меняются местами. Это уравнение равносильно (1.1) всюду в области G, где $f(x, y) \neq 0$, но имеет аналогичный недостаток.

Существует форма записи дифференциального уравнения первого порядка, которая объединяет и обобщает классическое и перевернутое уравнения, — это запись уравнения в симметричной форме.

Уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.1}$$

где вещественные функции M и N определены и непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, т. е. $M, N \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

2^0. Решение уравнения в симметричной форме.

Специфику уравнения в (2.1) отражает следующее определение.

Df. *Точка* $(x_0, y_0) \in D$ *называется особой для уравнения (2.1), если* $M(x_0, y_0), N(x_0, y_0) = 0$. *Точка, которая не является особой, называется неособой или обыкновенной.*

Обозначим через H множество особых точек уравнения (2.1).

Множество H замкнуто, так как является пересечением двух множеств, образованных нулями непрерывных функций M и N. Поэтому множество $D\backslash H$ открыто.

Обозначим через G какую-либо компоненту связности множества D/H. Тогда G — область в $\mathbb{R}^2$, состоящая из обыкновенных точек.

Следовательно для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ либо $M(x_0, y_0) \neq 0$, либо $N(x_0, y_0) \neq 0$, а значит, в силу непрерывности функций M и N существует окрестность $V = V(x_0, y_0) \subset G$, в которой либо $M(x, y) \neq 0$, либо $N(x, y) \neq 0$.

Поэтому в области V уравнение в симметричной форме (2.1) сводится по крайней мере к одному из классических уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}. \tag{2.2}$$

Это раздвоение, а также наличие особых точек, приводит к обобщению определения решения для уравнений в симметричной форме.

Df. *Решением дифференциального уравнения (2.1) на промежутке* $\langle a, b \rangle$ *называется функция* $y = \varphi(x)$ *или* $x = \psi(y)$, *определенная и непрерывная на* $\langle a, b \rangle$ *и удовлетворяющая трем условиям:*

1) функция $\varphi(x)$ *или* $\psi(y)$ *дифференцируема на* $\langle a, b \rangle$,

2) точка $(x, \varphi(x)) \in D$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b \rangle$ *или*
точка $(\psi(y), y) \in D$ *для* $\forall\, y \in \langle a, b \rangle$,

$3_x)$ $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} 0$ *или*

$3_y)$ $M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} 0$.

Пусть, например, $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (2.1).

Тогда согласно тождеству $3_x)$ для любой точки $x_0 \in \langle a, b \rangle$ имеем:

a) если $N(x_0, \varphi(x_0)) \neq 0$, то существует интервал (α, β) такой, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset \langle a, b \rangle$ и для $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$ функция $N(x, \varphi(x)) \neq 0$ и $d\varphi(x)/dx = -M(x, \varphi(x))/N(x, \varphi(x))$, т. е. на интервале (α, β) функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема и является решением классического уравнения (2.2_1);

b) если $N(x_0, \varphi(x_0)) = 0$, то точка $(x_0, \varphi(x_0))$ — особая, так как по условию 1) $\varphi'(x)$ существует, а значит, $M(x_0, \varphi(x_0)) = 0$.

Аналогичные рассуждения справедливы для решения $x = \psi(y)$, удовлетворяющего тождеству $3_y)$.

Реализация случая b) означает, что любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, чей график состоит из особых точек уравнения в симметричной форме, является его решением.

Df. *Особым граничным решением уравнения (2.1) на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$ *называется любое решение* $y = \varphi(x)$ *или* $x = \psi(y)$, *определенное на* $\langle a, b\rangle$, *у которого* $(x, \varphi(x)) \in H$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b\rangle$ *или* $(\psi(y), y) \in H$ *для* $\forall\, y \in \langle a, b\,\rangle$.

3^0. Существование и единственность решения.

Поскольку в окрестности любой неособой точки уравнение (2.1) сводится к одному из классических уравнений (2.2), то все локальные определения и теоремы главы 1 будут верны для уравнения в симметричной форме. Переформулируем их начиная с определения задачи Коши.

Выберем в качестве начальных данных координаты произвольной точки (x_0, y_0) из области неособых точек G. Тогда в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ уравнение (2.1) будет равносильно хотя бы одному из уравнений (2.2), решение задачи Коши которого с начальными данными x_0, y_0 и будет по определению решением задачи Коши для уравнения (2.1).

Теорема (о существовании решения). *Пусть в уравнении (2.1) функции* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *непрерывны в области* $G \subset D\backslash H$, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$, *построенного для первого или второго уравнения (2.2) в некоторой окрестности* $V(x_0, y_0)$, *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении (2.1)* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *непрерывны в области* $G \subset D\backslash H$, *а в области* $\widetilde{G} \subset G$ *выполняется хотя бы одно из условий:*

a) $N(x, y) \neq 0$, *существуют и непрерывны частные производные* $\partial M(x, y)/\partial y$, $\partial N(x, y)/\partial y$;

b) $M(x, y) \neq 0$, *существуют и непрерывны частные производные* $\partial M(x, y)/\partial x$, $\partial N(x, y)/\partial x$.

Тогда $\widetilde{G}$ *— это область единственности для уравнения (2.1).*

Действительно, пусть, например, выполняется условие а). Тогда в $\widetilde{G}$ (2.1) равносильно уравнению (1.1) $y' = f(x,y)$ с $f = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{N\,\partial M/\partial y - M\,\partial N/\partial y}{N^2}$ — существует и непрерывна, а значит, выполняются условия слабой теоремы единственности из § 1.

4^0. Интегральная кривая.

Через каждую точку открытого множества $D\backslash H$, используя одно из уравнений (2.2), можно провести отрезок поля направлений, построив, тем самым, на $D\backslash H$ поле направлений уравнения (2.1). Разумеется, если в некоторой области уравнение (2.1) можно свести как к первому, так и ко второму уравнению (2.2), то отрезки поля направлений в каждой точке этой области будут одни и те же.

Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой. А именно, интегральной кривой уравнения (2.1) в компоненте связности G множества $D\backslash H$ назовем любую гладкую кривую в G, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

Таким образом, локально дуга интегральной кривой задается или функцией $y = \varphi(x)$, или функцией $x = \psi(y)$.

Например, единичная окружность является одной из интегральных кривых уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому в окрестностях точек $(0,1)$ или $(0,-1)$, где касательные к ней близки к горизонтальной, интегральная кривая задается функциями $y = (1-x^2)^{1/2}$ или $y = -(1-x^2)^{1/2}$, а в окрестности точек $(1,0)$ или $(-1,0)$, где касательные близки к вертикальной, — функциями $x = (1-y^2)^{1/2}$ или $x = -(1-y^2)^{1/2}$. В окрестностях остальных точек окружность может быть представлена и как функция x, и как функция y.

Очевидно, что в области единственности любые две интегральные кривые, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают. В противном случае для получения противоречия достаточно в качестве начальных данных взять "крайнюю" точку, в которой интегральные кривые совпадают, а в последующих точках уже расходятся. И эта крайняя точка есть точка единственности.

§ 2. ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЕ

1^0. Определение интеграла.

Для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной $y' = f(x,y)$, или перевернутого уравнения $x' = g(y,x)$ параметризация интегральных кривых функциями $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, являющихся решениями соответствующих уравнений на максимальном интервале существования, порождена несимметричным вхождением в эти уравнения переменных x и y. Тем самым, интегральные кривые классических уравнений не могут иметь соответственно вертикальных или горизонтальных касательных.

Но интегральная кривая уравнения в симметричной форме может иметь, как было установлено, любые касательные. Параметризуют такие кривые непрерывные неявные функции вида $U(x,y) = 0$.

Именно в таком неявном виде следует искать и записывать решения уравнения (2.1), называя их при этом интегралами.

Дадим строгое определение интеграла уравнения в симметричной форме и опишем в каком виде задавать формулу для всех решений уравнения (2.1), которую будем называть общим интегралом, в отличие от общего решения, введенного для уравнения (1.1) в I, § 1, 7^0.

При этом следует иметь в виду, что интеграл и общий интеграл — это обобщения классических понятий решения и общего решения, а значит, они в определенном смысле должны сводиться друг к другу.

Поэтому в первую очередь необходимо потребовать, чтобы неявные функции, задающие интегралы, были разрешимы хотя бы относительно одной из своих переменных. Выделим для этого специальный класс функций, среди которых только и имеет смысл определять интеграл.

Df. *Непрерывная в области G пространства $\mathbb{R}^2$ функция $U(x,y)$ называется допустимой, если для любой точки $(x_0,y_0) \in G$ существует такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ (или $x = \eta(y)$), определенная на интервале (α,β), содержащем точку x_0 (или y_0), что:*

1) $y_0 = \xi(x_0)$ (или $x_0 = \eta(y_0)$);

2) $(x,\xi(x)) \in G$ для $\forall\, x \in (\alpha,\beta)$ (или $(\eta(y),y) \in G$ для $\forall\, y \in (\alpha,\beta)$);

3) $y = \xi(x)$ (или $x = \eta(y)$) является единственным решением уравнения

$$U(x,y) = U(x_0,y_0), \tag{2.3}$$

т. е. $U(x,\xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0)$ или $U(\eta(y),y) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0)$.

Отметим также, что общий интеграл, как и классическое общее решение, может быть построен только в области единственности.

Df. *Допустимая функция $U(x,y)$ называется интегралом дифференциального уравнения (2.1) в области единственности G, если для любой точки $(x_0,y_0) \in G$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_0, y_0, т. е. удовлетворяет тождеству 3_x) или 3_y) из определения решения.*

2^0. Характеристическое свойства интеграла.

В математике часто один и тот же новый объект можно определить различными способами. Тогда один из способов выдают за определение данного объекта, а другой называют характеристическим свойством объекта. При желании их можно менять местами.

Теорема (о характеристическом свойстве интеграла). *Для того чтобы допустимая функция $U(x,y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (2.1) в области единственности G, необходимо и достаточно, чтобы $U(x,y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (2.1), т. е. чтобы $U(x,\varphi(x)) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y = \varphi(x)$, определенного на $\langle a,b\rangle$, и $U(\psi(y),y) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x = \psi(y)$, определенного там же.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

<u>Необходимость</u>. Пусть $U(x,y)$ — это интеграл уравнения (2.1) в области единственности G и пусть, например, $y = \varphi(x)$ — какое-либо решение уравнения (2.1), определенное на промежутке $\langle a,b\rangle$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \langle a,b\rangle$ и положим $y_0 = \varphi(x_0)$.

По определению решения точка $(x_0,y_0) \in G$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (2.3) $U(x,y) = U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо или относительно x, или относительно y.

Предположим сначала, что (2.3) однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует единственная функция $y = \xi(x)$, определенная на некотором $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такая, что $U(x, \xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

Эта функция по определению интеграла является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_0, y_0.

Поскольку G — область единственности, а $(x_0, y_0) \in G$, то по определению единственности решения задачи Коши для решений $y = \varphi(x)$ и $y = \xi(x)$, интегральные кривые которых проходят через точку (x_0, y_0), найдется такой интервал $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subset \langle a, b\,\rangle \cap (\alpha, \beta)$, на котором эти решения тождественно совпадают. Следовательно,

$$U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

Предположим теперь, что уравнение (2.3) однозначно разрешимо относительно x, т. е. существует единственная функция $x = \eta(y)$, определенная на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni y_0$, что $\eta(y_0) = x_0$ и $U(\eta(y), y) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

По определению интеграла $x = \eta(y)$ при $y \in (\alpha, \beta)$ является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными y_0, x_0.

В результате, единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 имеет два представления: $y = \varphi(x)$ и $x = \eta(y)$.

Поэтому дуга интегральной кривой этого решения в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y = \varphi(x)$, так и функцией $x = \eta(y)$, т. е. эти функции взаимно обратны.

Сказанное означает, что существуют такие интервалы $(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ и $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, что $x_0 \in (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset (a, b)$, $y_0 \in (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subset (\alpha, \beta)$ и $y \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \varphi(\eta(y))$, а $x \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} \eta(\varphi(x))$. Поэтому справедлива цепочка тождеств

$$U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} U(\eta(\varphi(x)), \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(\eta(y), y) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0).$$

Таким образом, при наличии решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1), определенного на $\langle a, b\,\rangle$, в окрестности любой точки $x_0 \in (a, b)$ уравнение (2.3) с $y_0 = \varphi(x_0)$ обязательно однозначно разрешимо относительно y и выполняется тождество (2.4).

Остается показать, что тождество (2.4) справедливо не только на $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$, а на всем промежутке $\langle a,b\,\rangle$, если, конечно, $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\subsetneqq\langle a,b\,\rangle$.

Ситуация, когда $\widetilde{\beta}=b$, решение $y=\varphi(x)$ определено на $\langle a,b\,]$, $U(x,\varphi(x))\overset{(\widetilde{\alpha},b)}{\equiv}U(x_0,y_0)$, а $U(b,\varphi(b))\neq U(x_0,y_0)$, невозможна в силу непрерывности функции U.

Действительно, в этой ситуации для $\forall\,\delta>0$ из непрерывности слева решения $y=\varphi(x)$ следует, что $\exists\,\delta_1>0$ $(\delta_1\le\delta)$ такое, что для $\forall\,x:\ b-x<\delta_1$ выполняется неравенство $|\varphi(x)-\varphi(b)|<\delta$.

Выберем $x^*=b-\delta_1/2$, тогда точка $(x^*,\varphi(x^*))$ принадлежит произвольно выбранной δ-окрестности точки $(b,\varphi(b))$ и при этом $|U(x^*,\varphi(x^*))-U(b,\varphi(b))|=|U(x_0,y_0)-U(b,\varphi(b))|=\varepsilon>0$. Это значит, что функция $U(x,y)$ терпит разрыв в точке $(b,\varphi(b))$.

Допустим теперь, что $\widetilde{\beta}<b$ и $\exists\,x_1,x_2\in[\widetilde{\beta},b\,\rangle$ $(x_1<x_2)$, что $U(x,\varphi(x))\overset{(\widetilde{\alpha},x_1\,]}{\equiv}U(x_0,y_0)$, $U(x,\varphi(x))\neq U(x_0,y_0)$ для $\forall\,x\in(x_1,x_2)$.

Пусть $y_1=\varphi(x_1)$. Тогда из последнего тождества вытекает, что $U(x_1,y_1)=U(x_0,y_0)$, и по определению решения точка $(x_1,y_1)\in G$, поэтому для нее верны все рассуждения, касающиеся точки (x_0,y_0).

В частности, если $y=\xi_1(x)$ — единственное на интервале (α_1,β_1) $(\,x_1\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(x_0,x_2)\,)$ решение уравнения $U(x,y)=U(x_1,y_1)$ относительно y, т. е. $U(x,\xi_1(x))\overset{(\alpha_1,\beta_1)}{\equiv}U(x_1,y_1)$, и оно же по определению интеграла является единственным решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_1,y_1, т. е. $\xi_1(x)\overset{(\alpha_1,\beta_1)}{\equiv}\varphi(x)$, то $U(x,\varphi(x))\overset{[x_1,\beta_1)}{\equiv}U(x_1,y_1)=U(x_0,y_0)$. !!!

Ситуация с точками $x_1,x_2\in\langle a,\widetilde{\alpha}\,]$ рассматривается аналогично.

<u>Достаточность</u>. Пусть допустимая функция $U(x,y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (2.1). Покажем, что тогда $U(x,y)$ — интеграл этого уравнения в области единственности G.

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in G$. По определению допустимой функции уравнение (2.3) $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо либо относительно y, либо относительно x.

Так как (x_0,y_0) — это точка единственности, существует единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0,y_0 вида $y=\varphi(x)$ для $\forall\,x\in(a,b)\ni x_0$ или $x=\psi(y)$ для $\forall\,y\in(a,b)\ni y_0$.

Пусть, например, функция $x = \psi(y)$ является решением уравнения (2.1). Тогда по условию теоремы $U(\psi(y), y) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0, y_0)$, т. е. $U(x, y)$ разрешима относительно x и, поскольку она допустимая, $x = \psi(y)$ является единственным решением уравнения (2.3). А если уравнение (2.3) было однозначно разрешимо относительно y, то как и при доказательстве необходимости можно показать, что функция $y = \xi(x)$ — решение уравнения (2.1), поскольку является обратной к решению $x = \psi(y)$.

Поэтому допустимая функция $U(x, y)$ — это интеграл уравнения (2.1) в области единственности G. $\square$

$\mathbf{3^0}$. Характеристическое свойство гладкого интеграла.

Df. *Непрерывную в области G функцию $U(x, y)$ будем называть гладкой и использовать запись: $U(x, y) \in C^1(G)$, если в G существуют и непрерывны частные производные U по x и по y.*

Будем для краткости обозначать $\partial U/\partial x = U'_x$ и $\partial U/\partial y = U'_y$.

Df. *Функция $U(x, y)$ называется гладкой допустимой в области G пространства $\mathbb{R}^2$, если $(U'_x)^2 + (U'_y)^2 > 0$ для $\forall\,(x, y) \in G$.*

По теореме о неявной функции для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ уравнение (2.3) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ с гладкой допустимой функцией U однозначно разрешимо относительно y, если $U'_y \neq 0$, и полученное решение $y = \xi(x)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_0. Аналогично в окрестности точки y_0 имеется единственное гладкое решение уравнения (2.3) $x = \eta(y)$, если $U'_x \neq 0$. Ну, а если же в точке $(x_0, y_0) \in G$ обе частные производные функции $U(x, y)$ отличны от нуля, то уравнение (2.3) однозначно разрешимо как относительно y, так и относительно x.

Df. *Интеграл $U(x, y)$ уравнения (2.1) называется гладким, если U — гладкая допустимая функция.*

Теорема (о характеристическом свойстве гладкого интеграла). *Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x, y)$ была гладким интегралом уравнения (2.1) в области единственности G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$N(x, y)\,U'_x(x, y) - M(x, y)\,U'_y(x, y) \overset{G}{\equiv} 0. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Необходимость. Пусть $U(x,y)$ — это интеграл уравнения (2.1).

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in G$. По определению области G эта точка — обыкновенная. Пусть, например, $N(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда существует окрестность $V(x_0,y_0)\subset G$, в которой $N(x,y)\neq 0$ и уравнение (2.1) равносильно классическому уравнению (2.2_1).

Пусть $y=\varphi(x)$ — решение задачи Коши с начальными данными x_0,y_0 уравнений (2.1), (2.2_1), определенное на некотором интервале $(a,b)\ni x_0$. Тогда по определению решения справедливо тождество

$$\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} -M(x,\varphi(x))/N(x,\varphi(x)). \tag{2.6}$$

По теореме о характеристическом свойстве интеграла имеем:

$$U(x,\varphi(x)) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0,y_0).$$

Продифференцируем это тождество по x :

$$U'_x(x,\varphi(x))+U'_y(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

Подставляя сюда $\varphi'(x)$ из (2.6) и домножая на N, получаем:

$$N(x,\varphi(x))\,U'_x(x,\varphi(x))-M(x,\varphi(x))\,U'_y(x,\varphi(x)) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

Положив $x=x_0$, а тогда $\varphi(x_0)=y_0$, получаем равенство (2.5) для любой точки $(x_0,y_0)\in G$.

Достаточность. Пусть в области G выполняется равенство (2.5).

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in G$, и пусть, например, $U'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда $U'_y(x,y)\neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0,y_0)$ и в ней уравнение (2.3) $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует и единственна такая функция $y=\xi(x)$, определенная на некотором интервале $(\alpha,\beta)\ni x_0$, что $\xi(x_0)=y_0$, $\xi\in C^1(\,(\alpha,\beta)\,)$ и $U(x,\xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0)$.

Продифференцировав это тождество, получаем

$$U'_x(x,\xi(x))+U'_y(x,\xi(x))\,\xi'(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0 \qquad (\,(x,\xi(x)\in V),$$

а значит, $\xi'(x)\equiv -U'_x(x,\xi(x))/U'_y(x,\xi(x))$.

Покажем, что $y=\xi(x)$ является решением уравнения (2.1), т. е. на интервале (a,b), например, удовлетворяет тождеству $3_x)$ из определения решения. Тогда функция U — гладкий интеграл.

Подставим функцию $\xi(x)$ в $3_x)$: $M(x,\xi(x))+N(x,\xi(x))\xi'(x)\equiv$ $(M(x,\xi(x))\,U'_y(x,\xi(x))-N(x,\xi(x))\,U'_x(x,\xi(x)))/U'_y(x,\xi(x)) \overset{(2.5)}{\equiv} 0.$ $\square$

Следствие. *Гладкая допустимая функция* $U(x,y)$ *является гладким интегралом классического уравнения (1.1)* $y'=f(x,y)$ *в области единственности* G *тогда и только тогда, когда выполняется тождество* $U'_x(x,y)+f(x,y)U'_y(x,y)\overset{G}{\equiv}0$.

4^0. Существование интеграла, связь между интегралами.

Итак, в предыдущих пунктах были введены понятия интеграла и гладкого интеграла. Теперь, как обычно, надо ответить на вопрос об их существовании.

Существование только непрерывного интеграла, фактически, вытекает из существования общего решения классического уравнения.

Теорема (о существовании непрерывного интеграла). *Для любой точки* (x_0,y_0) *из области единственности* G *существует окрестность* $A\subset G$, *в которой дифференциальное уравнение (2.1) имеет интеграл* $U(x,y)$.

Доказательство. Пусть (x_0,y_0) — произвольная точка из области единственности G. Тем самым, она — неособая. И пусть, например, $N(x_0,y_0)\neq0$. Тогда найдется окрестность $V(x_0,y_0)\in G$, в которой $N(x,y)\neq0$, а значит, в V уравнение (2.1) равносильно классическому уравнению (2.2_1) $\quad y'=-M(x,y)/N(x,y)$.

По теореме о существовании общего решения в области $A=\{\,(x,y)\,|\,a<x<b,\ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}\subset V$ существует общее решение $y=\varphi(x,C)$ уравнения (2.2_1).

По определению общего решения уравнение $y=\varphi(x,C)$ однозначно разрешимо относительно C для любой точки $(x,y)\in A$, т. е. $C=U(x,y)$, причем $U(x,\varphi(x,C))\overset{(a,b)}{\equiv}C$.

В результате уравнение $U(x,y)=C$ однозначно разрешимо относительно y, а значит, функция U — допустимая и постоянна вдоль любого решения, график которого лежит в области A.

По теореме о характеристическом свойстве интеграла функция $U(x,y)$ является интегралом уравнения (2.1) в области A. $\square$

Df. *Пусть $U(x,y)$ — интеграл уравнения (2.1) в области единственности G. Тогда равенство $U(x,y)=C$ называется общим интегралом дифференциального уравнения (2.1).*

Из приведенной теоремы непосредственно вытекает, что общий интеграл задает все решения уравнения (2.1) в неявном виде.

Доказать существование гладкого интеграла уравнения (2.1) при имеющихся предположениях о функциях M, N не удается, так как ни откуда не следует что используемое в предыдущей теореме общее решение $y=\varphi(x,C)$ непрерывно дифференцируемо по C.

Теорема (о существовании гладкого интеграла). *Пусть в уравнении (2.1) функции $M(x,y), N(x,y)$ являются гладкими в некоторой области $G\subset D/H$, т. е. в G определены и непрерывны частные производные $M'_x(x,y), M'_y(x,y), N'_x(x,y), N'_y(x,y)$. Тогда для любой точки (x_0,y_0) из G существует окрестность $A\subset G$, в которой уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл $U(x,y)$.*

Доказательство. Согласно слабой теореме единственности из п. 3^0 область G является областью единственности.

Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из G. Поскольку она — обыкновенная, считаем, например, что $N(x_0,y_0)\neq 0$.

Пусть $V\in G$ — окрестность (x_0,y_0), в которой $N(x,y)\neq 0$ и уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно классическому уравнению (2.2_1) $y'=f_0(x,y)$, где $f_0=-M(x,y)/N(x,y)$, причем по условию теоремы в V определена и непрерывна $\partial f_0(x,y)/\partial y$.

Пусть, как обычно, $A=\{\,(x,y)\,|\,a<x<b,\ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$ — лежащая в V окрестность точки (x_0,y_0), в которой существует общее решение $y=\varphi(x,C)$ уравнения $y'=f_0(x,y)$, задаваемое формулой (1.14) $\varphi(x,C)=y(x,\zeta,C)$, где $\zeta\in(a,b)$ можно выбирать произвольным образом, $(\zeta,C)\in\overline{A}$, т.е. $C\in[\varphi_1(\zeta),\varphi_2(\zeta)]$, а $y(x,\zeta,C)$ — решение задачи Коши с начальными данными ζ, C.

Выберем $\zeta=x_0$, тогда по теореме о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам, которая будет сформулирована и доказана в Гл. III, §6, 2^0, в окрестности $W=\{\,(x,C)\,|\,a<x<b,\ \varphi_1(x_0)<C<\varphi_2(x_0)\}$ точки (x_0,y_0) существует и непрерывна частная производная $\varphi'_C(x,C)=y'_C(x,x_0,C)$.

При этом $d\varphi(x_0,C)/dC = dy(x_0,x_0,C)/dC = dC/dC = 1$ для $\forall\, C \in (\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0))$.

Поэтому по теореме о неявной функции уравнение $\varphi(x,C)-y=0$ однозначно разрешимо относительно C и решение $C=U(x,y)$, являющееся, как уже установлено, интегралом дифференциального уравнения (2.1), непрерывно дифференцируемо по y в области W.

При этом, очевидно, $dU(x_0,y)/dy|_{y=y_0}=1$.

Остается заметить, что функция $U(x,y)$ является также непрерывно дифференцируемой по x, поскольку таковой по определению общего решения является обратная к ней функция $y=\varphi(x,C)$.

Следовательно U — гладкая допустимая функция, т. е. гладкий интеграл дифференциального уравнения первого порядка, записанного в симметричной форме, с непрерывно дифференцируемыми функциями M и N.

Случай, когда $N(x_0,y_0)=0$, а $M(x_0,y_0)\neq 0$ рассматривается аналогично, только уравнение (2.1) сводится к классическому "перевернутому" уравнению (2.2_2) $\quad \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$, в котором потребуется гладкость функций M и N по x, после чего переменные x и y можно поменять местами. $\square$

Ответим теперь на следующие вопросы: как связаны между собой любые два интеграла (непрерывные или гладкие) и как из одного интеграла получить другой.

Теорема (о связи между интегралами). *Пусть $U(x,y)$ является интегралом уравнения (2.1) в некоторой области A, тогда:*

1) Если $U_1(x,y)$ — еще один интеграл уравнения (2.1) в области A, то существует функция $\Phi(z)$ такая, что

$$U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} \Phi(U(x,y)); \tag{2.7}$$

2. Если функция $\Phi(U(x,y))$ — допустимая, то функция $U_1(x,y)$, определяемая формулой (2.7), есть интеграл уравнения (2.1) в A.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. По построению интеграла $U(x,y)$ по общему решению $\varphi(x,C)$ имеем: $U(x,\varphi(x,C)) \overset{(a,b)}{\equiv} C$. Поскольку $U_1(x,y)$ — это еще один

интеграл в области A, то $U_1(x,\varphi(x,C)) \equiv \Phi(C)$ для $\forall\, C$, откуда $U_1(x,\varphi(x,C)) \overset{(a,b)}{\equiv} \Phi(U(x,\varphi(x,C))$. При этом точки $(x,\varphi(x,C))$ заполняют всю область A. А значит, выполняется тождество (2.7).

2. Пусть Φ — произвольная вещественная функция такая, что $\Phi(U(x,y))$ оказывается допустимой функцией.

Положим $U_1(x,y) = \Phi(U(x,y))$. Тогда функция U_1 — допустимая и обращается в постоянную вдоль любого решения, поскольку по предположению U — интеграл. Поэтому U_1 — интеграл. $\square$

§ 3. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1^0. Уравнение в полных дифференциалах.

Рассмотрим уравнение (2.1) в области G, состоящей из обыкновенных точек. Тем самым, $M^2(x,y)+N^2(x,y) \neq 0$ для $\forall\,(x,y) \in G$.

Df. *Уравнение (2.1) называется уравнением в полных дифференциалах в области единственности G, если существует такая гладкая функция $U(x,y)$, что для $\forall\,(x,y) \in G$*

$$U'_x(x,y) = M(x,y), \quad U'_y(x,y) = N(x,y). \tag{2.8}$$

В этом случае U называется дифференциалом уравнения (2.1).

Как всегда, после введения в рассмотрение нового объекта надо ответить на три стандартных вопроса:

1) зачем нужен объект? 2) существует ли он? 3) как его найти?

Давайте последовательно ответим на эти вопросы.

Теорема (об интеграле уравнения в полных дифференциалах). *Пусть уравнение (2.1) является уравнением в полных дифференциалах в области единственности G и $U(x,y)$ — его дифференциал. Тогда U — это гладкий интеграл в G.*

Доказательство. Пусть существует гладкая функция $U(x,y)$, для которой в G выполняются тождества (2.8).

Поскольку G состоит из обыкновенных точек, ${U'_x}^2 + {U'_y}^2 \neq 0$.

Следовательно функция U однозначно разрешима относительно x или y, т. е. является допустимой. При этом в G, очевидно, выполняется тождество (2.5), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла $U(x,y)$ — гладкий интеграл в G. $\square$

Таким образом, зная дифференциал уравнения (2.1), мы знаем его общий интеграл.

Убедимся теперь, что для любой вещественной константы C общий интеграл $U(x,y)=C$, как и классическое общее решение, при подстановке в уравнение обращает последнее в тождество. Имеем: $dC = d(U(x,y))$ или $0 = U'_x\,dx + U'_y\,dy \overset{(2.7)}{=} M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

Теорема (о существовании дифференциала и его нахождении). *Пусть в односвязной области* G *существуют и непрерывны* M'_y *и* N'_x. *Для того чтобы уравнение (2.1) было уравнением в полных дифференциалах в* G, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$M'_y(x,y) - N'_x(x,y) \overset{G}{\equiv} 0. \tag{2.9}$$

В этом случае дифференциал

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \tag{2.10}$$

где (x_0,y_0) *— любая фиксированная точка из* G, *а* $\int$ *— это криволинейный интеграл II рода по любому пути, соединяющему в* G *точку* (x_0,y_0) *с точкой* (x,y).

Доказательство этой теоремы смотри, например, в книге Фихтенгольца "Дифференциальное и интегральное исчисление" , Т. 3. 1969.

Выбирая конкретные пути, из (2.10) можно получить различные формулы для нахождения дифференциала $U(x,y)$.

Например, если область G содержит прямоугольник с вершинами в точках (x_0,y_0) и (x,y), то справедливы формулы

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds \tag{2.10$_1$}$$

или

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y} M(x_0,s)\,ds + \int_{x_0}^{x} N(s,y)\,ds. \tag{2.10$_2$}$$

А если G — выпуклая область и $x \ne x_0$, то можно проинтегрировать по прямой, соединяющей точку (x_0,y_0) с точкой (x,y) :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} (M(s,l(s)) + N(s,l(s))\,ds, \quad l(s) = y_0 + \frac{s-x_0}{x-x_0}(y-y_0).$$

2^0. **Интегрирующий множитель.**

Как выяснилось в предыдущем параграфе, найти общий интеграл уравнения уравнения в полных дифференциалах просто. Но что делать, если для уравнения (2.1) не выполняются тождества (2.9)? Нельзя ли превратить исходное уравнение в уравнение в полных дифференциалах, домножив его на некоторую функцию?

Df. *Функция $\mu(x,y)$, определенная, непрерывная и не обращающаяся в нуль в области G, называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (2.1), если уравнение*

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)\,N(x,y)\,dy=0 \tag{2.11}$$

является в G уравнением в полных дифференциалах.

Введен новый объект — интегрирующий множитель. Значит, надо ответить на стандартные три вопроса.

Необходимость понятия интегрирующего множителя вытекает непосредственно из определения, так как знание функции $\mu(x,y)$, позволяет найти общий интеграл уравнений (2.11) и (2.1).

А когда интегрирующий множитель существует?

Теорема (о существовании интегрирующего множителя). *Если в области единственности $\widetilde{G}\subset G$ уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл, тогда в $\widetilde{G}$ существует интегрирующий множитель.*

Доказательство. Пусть $U(x,y)$ — гладкий интеграл уравнения (2.1) в $\widetilde{G}$. Тогда из тождества (2.5) вытекает, что в $\widetilde{G}$

$$U'_x(x,y)/M(x,y)=U'_y(x,y)/N(x,y),$$

причем числитель и знаменатель в одной из частей равенства могут одновременно обращаться в нуль.

Поэтому функция $\mu(x,y)=U'_x(x,y)/M(x,y)=U'_y(x,y)/N(x,y)$ удовлетворяет определению интегрирующего множителя, так как левая часть уравнения (2.11) равна $dU(x,y)$, а значит, U является дифференциалом (2.11). $\square$

Итак, интегрирующий множитель существует практически всегда. Но найти его в явном виде удается далеко не всегда, что естественно, иначе решалось бы в квадратурах любое дифференциальное уравнение I порядка, разрешенное относительно производной.

Получим сначала дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\mu(x,y)$.

Предположим, что $M'_y,\, N'_x \in C(G)$. Будем искать $\mu \in C(G)$.

Если (2.11) — уравнение в полных дифференциалах, то согласно тождеству (2.9) $(\mu M)'_y - (\mu N)'_x = 0$.

После перегруппировки, получаем

$$\mu'_x N - \mu'_y M = (M'_y - N'_x)\mu \qquad (2.12)$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение I порядка, но только в частных производных, относительно μ.

Получается, что решить в явном виде простейшее уравнение математической физики (2.12) также трудно, как решить произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение (2.1) или (1.1).

Для решения уравнения (2.12) его надо свести к обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется после разделения переменных. А для этого надо, чтобы $\mu(x,y)$ была функцией только одной переменной, т. е. записать μ в виде сложной функции.

Выберем какую-либо функцию $\omega(x,y)$, например, $\omega = x^2 + y^2$, и будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(\omega(x,y))$.

Теорема (о нахождении интегрирующего множителя). *Пусть нашлась такая функция $\omega(x,y) \in C^1(G)$, что непрерывна функция*

$$\psi(\omega) = \frac{M'_y - N'_x}{\omega'_x N - \omega'_y M}, \qquad (2.13)$$

тогда дифференциальное уравнение (2.1) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \exp\{\int \psi(\omega)\, d\omega\}$.

Доказательство. Будем искать μ как функцию ω.

В этом случае уравнение (2.12) примет вид $\dfrac{d\mu}{d\omega}\omega'_x N - \dfrac{d\mu}{d\omega}\omega'_y M = (M'_y - N'_x)\mu$ или с учетом сделанного в теореме предположения:

$$d\mu/d\omega = \psi(\omega)\mu.$$

Функция $\mu(\omega) = C\exp\{\int \psi(\omega)\, d\omega\}$ является общим решением этого линейного однородного уравнения. Свободную константу в нем обычно выбирают равной единице. $\square$

Искать на практике функцию $\omega(x,y)$ — дело в достаточной степени неблагодарное. Нужно выписать функцию ψ из (2.13), числитель которой отличен от нуля, иначе (2.1) было бы уравнением в полных дифференциалах, и подставлять на место частных производных ω'_x и ω'_y различные функции, стараясь подобрать их так, чтобы после приведения подобных членов ψ оказалась бы функцией только ω.

Первое, что нужно сделать на этом пути, проверить не будет ли интегрирующий множитель μ функцией только x или только y, т. е. выбрать $\omega = x$ или $\omega = y$ и посмотреть не будет ли в (2.13) $(M'_y - N'_x)/N = \psi(x)$ или $(M'_y - N'_x)/(-M) = \psi(y)$?

Применим теперь разработанный выше метод для того, чтобы проинтегрировать в квадратурах (найти в явном виде общее решение с точностью до не берущихся интегралов) два важнейших класса обыкновенных дифференциальных уравнений — это уравнения с разделяющимися переменными и линейные уравнения.

$\mathbf{3^0}$. Уравнения с разделяющимися переменными.

Df. *Уравнение (2.1) вида*

$$g_1(x)h_2(y)dx + g_2(x)h_1(y)dy = 0, \tag{2.14}$$

где $g_i(x) \in C((a,b))$, $h_i(y) \in C((c,d))$ $(i = 1,2)$, *называется уравнением с разделяющимися переменными в симметричной форме.*

Тем самым, в (2.1) $M(x,y) = g_1(x)h_2(y) \in C(D)$ и $N(x,y) = g_2(x)h_1(y) \in C(D)$, где область $D = \{\, (x,y) \,|\, a < x < b,\ c < y < d \,\}$.

Выберем в качестве интегрирующего множителя функцию $\mu(x,y) = (g_2(x)h_2(y))^{-1} \neq 0$, которая запрещает g_2, h_2 обращаться в нуль.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{k_x}$, $\{y_m\}_{m=1}^{m_y}$, $(k_x, m_y \in (\mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}))$ — семейства нулей g_2 и h_2. Поставляя их в уравнение (2.14), заключаем, что функции $x \equiv x_k$, $y \equiv y_m$ являются решениями этого уравнения.

Домножая уравнение (2.14) на выбранный интегрирующий множитель, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,dx + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,dy = 0. \tag{2.15}$$

Тождество (2.9) для него, очевидно, выполняется, а само уравнение (2.15) называют еще уравнением с разделенными переменными.

Согласно (2.10_1) функция $U(x,y)=\displaystyle\int_{x=x_0}^{x}\frac{g_1(s)}{g_2(s)}\,ds+\int_{y=y_0}^{y}\frac{h_1(s)}{h_2(s)}\,ds$ является дифференциалом уравнения (2.15) в области G — произвольной компоненте связности открытого множества $D/(\overline{H}\cup\overline{H}_0)$, в котором $\overline{H}=(\cup_{k=1}^{k_x}\{(x,y)\,|\,x=x_k\})\bigcup(\cup_{m=1}^{m_y}\{(x,y)\,|\,y=y_m\})$ — объединение интегральных кривых, потерянных при умножении на μ решений уравнения (2.14), а $\overline{H}_0=\{(x,y)\,|\,g_1(x),h_1(y)=0\}$ — множество особых точек уравнения (2.15).

По теореме об интеграле уравнения в полных дифференциалах формула $U(x,y)=C$ задает общее уравнения (2.15) в области G.

4^0. Линейные уравнения.

Df. *Классическое уравнение (1.1) вида*

$$y'+p(x)y=q(x)\qquad (p(x),q(x)\in C((a,b))), \tag{2.16}$$

называется линейным дифференциальным уравнением I порядка.

Очевидно, что уравнение (2.16) линейное (относительно y), поскольку его слагаемые содержат искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ в первой и нулевой степени.

Таким образом в линейном уравнение (1.1) $f(x,y)=q(x)-p(x)y$ и область существования и единственности $G=(a,b)\times\mathbb{R}^1$, так как в ней f вместе со своей частной производной по y непрерывна.

Найдем общее решение уравнения (2.16) при помощи интегрирующего множителя, для чего перепишем (2.16) в симметричной форме:

$$(p(x)y-q(x))\,dx+\,dy=0. \tag{2.17}$$

Очевидно, в G существуют и непрерывны M'_y,N'_x. Будем искать μ как функцию x $(\omega(x,y)=x)$. Тогда в (2.13) $\psi(x)=p(x)$, и по теореме о нахождении интегрирующего множителя для $\forall\,x_0\in(a,b)$ $\mu(x)=e^{P(x)}\neq 0$, где $P(x)=\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt$. Домножая (2.17) на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$e^{P(x)}(p(x)y-q(x))\,dx+e^{P(x)}\,dy=0.$$

При $y_0=0$ из (2.10_1) находим $U=-\displaystyle\int_{x_0}^{x}e^{P(s)}q(s)\,ds+\int_{0}^{y}e^{P(x)}\,ds$ — дифференциал уравнения (2.17).

Тогда $e^{P(x)}y - \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,ds = C$ — это общий интеграл уравнения (2.17). Отсюда

$$y = \varphi(x, C) = e^{-P(x)}\Big(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,ds\Big)$$

— это классическое общее решение линейного уравнения (2.16), а

$$y(x, x_0, y_0) = \exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\Big\}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\Big\{\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt\Big\}q(s)\,ds\Big)$$

— решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 или формула Коши.

Г Л А В А III
Нормальные системы ОДУ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

1^0. Виды систем.

В общем виде система из n обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными выглядит следующим образом

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \ldots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0. \end{cases} \tag{3.1*}$$

Решением системы будем называть n функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, определенных на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ таких, что подстановка их в систему (3.1^*) обращает ее в n тождеств на $\langle a, b\rangle$.

Система (3.1^*) называется системой, не разрешенной относительно старших производных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Очевидно, что при $n = 1$ и $m_1 = 1$ она превращается в уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$, не разрешенное относительно производной.

Первым шагом на пути как теоретического, так и практического решения системы (3.1^*), должна стать попытка разрешить ее относительно старших производных. Если эта попытка удастся, то система (3.1^*) примет вид

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \ldots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \tag{3.1**}$$

Система (3.1^{**}), естественно, называется системой, разрешенной относительно старших производных. При $n = 1$ и $m_1 = 1$ она превращается в хорошо знакомое, изученное в главе 1 классическое уравнение первого порядка (1.1) $y' = f(x, y)$ или в уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Рассмотрим два важнейших частных случая системы (3.1^{**}) :

I. $m_1 = \ldots = m_n = 1$,

II. $n = 1 \quad (m_1 = m)$.

В случае I система (3.1^{**}) превращается в систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \ldots, y_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

которая называется нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n и будет являться основным объектом изучения в этой главе. А различные частные случаи нормальной системы (3.1) предстоит изучать в последующих главах.

В случае II система (3.1^{**}) превращается в уравнение

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}), \tag{3.2}$$

которое называется обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $m,$ разрешенным относительно старшей производной.

Следует иметь в виду, что уравнение (3.2) является частным случаем нормальной системы (3.1) порядка $m,$ так как это уравнение всегда можно свести к системе стандартной заменой переменных

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ \ldots,\ y^{(m-1)} = y_m. \tag{3.3}$$

Последовательно дифференцируя уравнения (3.3) и подставляя в последнее правую часть (3.2), получаем нормальную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \ldots \\ y_{m-1}' = y_m, \\ y_m' = f(x, y_1 \ldots, y_m). \end{cases} \tag{3.4}$$

Система (3.4) эквивалентна уравнению (3.2) в следующем смысле: если $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (3.2), то вектор $(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m-1)}(x))$ — это решение системы (3.4), и наоборот, если $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ является решением системы (3.4), то функция $y = \varphi_1(x)$ — это решение уравнения (3.2).

В заключение отметим, что любую систему (3.1^{**}) всегда можно свести к нормальной системе более высокого порядка, т. е. с большим числом неизвестных, путем введения в системе (3.1^{**}) в качестве новых переменных производных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x),$ как это делалось для уравнения (3.2) в замене (3.3).

2^0. Решение нормальной системы.

В дальнейшем будет рассматриваться нормальная система (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \ldots, y_n), \end{cases}$$

в которой вещественные функции $f_1, \ldots, f_n \in C(G)$, т. е. непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — пространстве переменных $x, y_1, \ldots, y_n$.

Df. *Решением нормальной системы (3.1) называются n непрерывных на промежутке $\langle a, b\rangle$ функций $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, для всякого $x \in \langle a, b\rangle$ удовлетворяющих следующим трем условиям:*

1) функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — дифференцируемые,

2) точка $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in G$,

3) ${\varphi_i}'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (i = \overline{1, n})$.

Из условия 3), в частности, вытекает, что все функции $\varphi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, т. е. $\varphi_i \in C^1(\langle a, b\rangle)$.

Теорема (о существовании решения). *Пусть в нормальной системе (3.1) функции $f_1, \ldots, f_n \in C(G)$, тогда через каждую точку области G проходит по крайней мере одно решение системы (3.1), определенное на каком-либо отрезке Пеано.*

Эту теорему можно было бы доказать аналогично теореме Пеано для уравнений (1.1) методом Ломаных Эйлера. Такое доказательство помимо незначительных трудностей, связанных с многомерностью пространства переменных $y_1, \ldots, y_n$, не содержит новых идей и не представляет особого интереса.

Вместо этого в §3 будет приведено доказательство теоремы существования новым, интегральным методом, называемым методом последовательных приближений Пикара. Правда, метод Пикара существенно использует предположение о том, что правые части системы (3.1) в области G удовлетворяют условию Липшица по $y_1, \ldots, y_n$ локально. Это предположение, как видно из теоремы Пеано, не является необходимым, но позволяет применить интегральный метод и попутно доказать единственность решения задачи Коши.

3^0. Геометрическая интерпретация решений.

Пусть $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ — это решение системы (3.1), определенное на интервале (a, b).

Df. *Кривая, образуемая множеством точек* $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, *где* $x \in (a, b)$, *называется дугой интегральной кривой. Максимальная дуга интегральной кривой называется интегральной кривой.*

Интегральная кривая, очевидно, лежит в области G и является гладкой кривой, так как функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — непрерывно дифференцируемые. Поэтому она имеет непрерывно вращающуюся касательную в каждой точке $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in G$.

Уравнение касательной к интегральной кривой в этой точке имеет вид $y_1 - y_1^0 = \varphi_1'(x_0)(x - x_0), \ldots, y_n - y_n^0 = \varphi_n'(x_0)(x - x_0)$.

Но $\varphi_i'(x_0) = f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ $(i = \overline{1, n})$.

Следовательно, касательная известна:

$$\begin{aligned} &y_1 - y_1^0 = f_1(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)(x - x_0), \\ &\ldots \\ &y_n - y_n^0 = f_n(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)(x - x_0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Это значит, что для системы (3.1) в области G можно построить поле направлений, проведя через каждую точку G единичный отрезок, направление которого совпадает с направлением касательной (3.5) к интегральной кривой в этой точке.

Наличие поля направлений, индуцированного системой (3.1), позволяет дать геометрическое определение интегральной кривой.

Df. *Интегральная кривая — это любая гладкая кривая, лежащая в области* G, *направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.*

4^0. Задача Коши и общее решение системы.

Пусть дана произвольная точка $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ из области G.

Задача Коши для системы (3.1) заключается в том, чтобы найти такое решение $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, определенное на каком-либо интервале, содержащем точку x_0, которое удовлетворяет начальным условиям: $y_1^0 = \varphi_1(x_0), \ldots, y_n^0 = \varphi_n(x_0)$.

Числа $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ при этом называются начальными данными задачи Коши.

Df. *Решение задачи Коши с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ *существует, если можно указать такой интервал* (α, β)*, содержащий точку* x_0*, что на нем определено решение* $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ *системы (3.1) и* $y_1^0 = \varphi_1(x_0), \dots, y_n^0 = \varphi_n(x_0)$.

Df. *Решение задачи Коши с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ *единственно для системы (3.1), если для любых двух решений* $y_1 = \widetilde{\varphi}_1(x), \dots, y_n = \widetilde{\varphi}_n(x)$ *и* $y_1 = \widehat{\varphi}_1(x), \dots, y_n = \widehat{\varphi}_n(x)$ *этой задачи Коши можно указать такой интервал* (α, β)*, содержащий точку* x_0*, на котором оба эти решения определены и тождественно совпадают, т. е.* $\widetilde{\varphi}_i(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \widehat{\varphi}_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$.

Df. *Точка* $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in G$ *называется точкой единственности для системы (3.1), если единственно решение задачи Коши с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$.

Df. *Область* $\widetilde{G} \subset G$ *называется областью единственности, если каждая ее точка является точкой единственности.*

Df. *Набор из* n *непрерывных функций* $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$ $(i = \overline{1, n})$ *называется общим решением системы (3.1) в области единственности* $\widetilde{G}$*, если для любой точки* $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \widetilde{G}$ *существует и единственно решение* $C_1^0, \dots, C_n^0$ *алгебраической системы* $y_1^0 = \varphi_1(x_0, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n^0 = \varphi_n(x_0, C_1, \dots, C_n)$ *такое, что функции* $y_i = \varphi_i(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ *есть решения задачи Коши системы (3.1) с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$.

Приведенные определения являются естественными обобщениями на многомерный случай соответствующих определений, данных для классического уравнения первого порядка (1.1) $y' = f(x, y)$.

5^0. Механическая интерпретация решений.

В механике обычно независимую переменную обозначают через t и трактуют как время, искомые функции обозначают $x_1(t), \dots, x_n(t)$ и трактуют как движение материальной точки в фазовом пространстве $(x_1, \dots, x_n)$, считая $x_1(t), \dots, x_n(t)$ в каждый момент времени t координатами материальной точки, а $\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$ — вектором скорости материальной точки.

Поэтому нормальную систему (3.1) в механике принято записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad f_1, \ldots, f_n \in C(G). \tag{3.1_m}$$

Как было только что отмечено, любое решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (3.1_m), заданное по времени на промежутке $\langle a, b \rangle$, определяет некоторое движение материальной точки в фазовом пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ с момента времени a до момента времени b.

Фактически система (3.1_m) задает $(f_1, \ldots, f_n)$ — вектор скорости движения материальной точки в фазовом пространстве.

Df. *Множество точек* $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *фазового пространства при* $t \in (a, b)$ *называется траекторией движения.*

Следовательно, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство вдоль оси времени.

Хотя в области единственности интегральные кривые системы (3.1_m) не пересекаются, но их траектории вполне могут пересекаться, например, в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, причем под любым углом. Это всего лишь означает, что интегральные кривые проходят через указанную точку, только в разные моменты времени.

Df. *Если в системе* (3.1_m) *функции* $f_1, \ldots, f_n$ *определены и непрерывны для* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *и есть решение* $x_1(t) = x_1^0, \ldots, x_n(t) = x_n^0$, *определенное для всякого вещественного* t, *то это решение называется состоянием (положением) равновесия, или точкой покоя, или особой точкой системы* (3.1_m).

Траекторией состояния равновесия является точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Очевидно, что все точки покоя можно найти из алгебраической системы тождеств $f_1(t, x_1^0, \ldots, x_n^0) \overset{t}{\equiv} 0, \ldots, f_n(t, x_1^0, \ldots, x_n^0) \overset{t}{\equiv} 0$.

6^0. Системы в симметричной форме.

Df. Систему дифференциальных уравнений порядка n

$$\frac{d\, x_1}{X_1(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \ldots = \frac{d\, x_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}, \tag{3.6}$$

где $X_1, \ldots, X_{n+1}$ определены и непрерывны в области G пространства $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, называют системой в симметричной форме.

Df. *Точка $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$ из области G называется особой для системы (3.6), если $X_i(x^0) = 0$ для всякого $i = \overline{1, n+1}$. В противном случае точка называется обыкновенной.*

Теорема (о связи системы в симметричной форме и нормальной системы). *Для любой обыкновенной точки $x^0 \in G$ существует окрестность $V(x^0)$, в которой система в симметричной форме (3.6) эквивалентна нормальной системе (3.1) порядка n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x^0 — обыкновенная точка для системы (3.6). Тогда, например, $X_{n+1}(x^0) \neq 0$. В противном случае можно перенумеровать переменные. Поскольку функция X_{n+1} непрерывна в области G, то найдется такая окрестность $V(x^0) \in G$, что для всякого $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V(x^0)$ функция $X_{n+1}(x) \neq 0$. Теперь в окрестности $V(x^0)$ систему (3.6) можно переписать в виде

$$\frac{d\,x_1}{d\,x_{n+1}} = \frac{X_1(x_1, \dots, x_{n+1})}{X_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})}, \dots, \frac{d\,x_n}{d\,x_{n+1}} = \frac{X_n(x_1, \dots, x_{n+1})}{X_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})}.$$

А это — нормальная система вида (3.1), правые части которой непрерывны в $V(x^0)$. $\square$

Обратная теорема справедлива во всей области G. Нормальная система (3.1) всегда может быть записана в симметричной форме:

$$\frac{d\,y_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{d\,y_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{d\,x}{1}.$$

Очевидно, что в полученной системе все точки обыкновенные.

7^0. Векторная запись нормальных систем.

Хорошо известно, что векторная запись многих математических объектов, в том числе нормальных систем, очень удобна, так как существенно сокращает и облегчает теоретические выкладки. Но прежде чем ее использовать, давайте вспомним некоторые факты, касающиеся действий с векторами и вектор-функциями.

Вообще говоря, вектор размерности n — это упорядоченный набор из n чисел, чаще всего вещественных, но возможно целых, рациональных, комплексных. При необходимости различают $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор-строка.

Множество векторов размерности n образует n-мерное линейное пространство над полем вещественных, если $a_j \in \mathbb{R}$, или комплексных, если $a_j \in \mathbb{C}$, чисел $(j = \overline{1, n})$.

В отличие от геометрии, где обычно используется евклидова норма вектора или норма ℓ_2 : $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, в дифференциальных уравнениях удобно использовать норму ℓ_∞ :

$$\|a\| = \max_{j=1,\ldots,n} |a_j|.$$

Поэтому, например, множество $\|a\| \le 1$ при $n = 3$ в геометрии — это шар радиуса единица, а в дифференциальных уравнениях — куб, ребро которого имеет длину равную двум.

Очевидно, что для обеих норм выполняются все три свойства, являющиеся аксиомами нормы: 1) $\|a\| \ge 0 \Rightarrow a = \mathbf{0}\,(= (0, \ldots, 0))$; 2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$: $\|\alpha\ a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$; 3) $\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$.

Отметим, что "привычные" свойства нормы $\|a\| \ge 0$, $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \mathcal{O}$ не входят в определение нормы, а вытекают из него.

Действительно, согласно 2) $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = 0 \cdot \|\mathbf{0}\| = 0$ и теперь согласно 3) $\forall\, a$: $0 = \|\mathbf{0}\| = \|x - x\| \le \|x\| + \| - x\| = 2\|x\|$.

Норма позволяет определить расстояние между векторами:

$$\rho(a, b) = \|a - b\|.$$

Df. Последовательность векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots$ сходится к предельному вектору a, если $\|a^{(k)} - a\| \to 0$ при $k \to +\infty$.

Т. е. сходимость векторов означает покомпонентную сходимость.

Df. Функция $y(x)$ является вектор-функцией скалярного аргумента, если $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, где $y_1, \ldots, y_n$ — скалярные функции.

Вектор-функция скалярного аргумента $y(x)$ непрерывна, дифференцируема или интегрируема, если непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы все ее компоненты, при этом

$$\int_a^b y(x)dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)dx \\ \ldots \\ \int_a^b y_n(x)dx \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, легко проверить, что $\left\|\int_a^b y(x)\,dx\right\| \le \left|\int_a^b \|y(x)\|\,dx\right|$.

Df. Функция $y(x)$ является скалярной функцией векторного аргумента, если $x = (x_1, \dots x_m)$, т. е. $y = y(x_1, \dots x_m)$.

Скалярная функция векторного аргумента $y(x)$ непрерывна, если она непрерывна по совокупности аргументов, и непрерывно дифференцируема, если существуют и непрерывны частные производные по всем компонентам x. При этом $y'(x) = \left(\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial y(x)}{\partial x_m}\right)$.

Df. Функция $y(x)$ является векторной функцией векторного аргумента, если $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix}$.

Следуя ранее введенным определениям, заключаем, что

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1(x)}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial y_1(x)}{\partial x_m} \\ \dots \\ \dfrac{\partial y_n(x)}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial y_n(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби размерности } n \times m.$$

Если при этом $m = n$, то $\det \left(\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}\right)$ — это Якобиан.

Возвращаясь к обыкновенным дифференциальным уравнениям, заметим, что нормальную систему (3.1) чрезвычайно удобно записывать и исследовать в векторной форме.

Положим $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, тогда система (3.1) примет вид

$$y' = f(x, y).$$

Очевидно, что при $n = 1$ эта запись идентична записи (1.1) классического уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной и являющегося, тем самым, частным случаем нормальной системы.

§ 2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ, УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА

1^0. Лемма Адамара.

Хорошо известна формула конечных приращений для скалярной непрерывно дифференцируемой функции f скалярного аргумента $x \in [a, b]$ — это формула Лагранжа:

$$\forall\, \tilde{x}, \hat{x} \in [a, b],\ \tilde{x} < \hat{x} \ \Rightarrow\ \exists\, u \in (\tilde{x}, \hat{x}) : \quad f(\hat{x}) - f(\tilde{x}) = f'(u)(\hat{x} - \tilde{x}).$$

Выведем аналог формулы Лагранжа для скалярной и векторной функций векторного аргумента.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, скалярная функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_m$ в некой области $G \subset \mathbb{R}^{l+m}$, которая выпукла по y, т. е. для любых двух точек $(x, \tilde{y})$, $(x, \hat{y}) \in G$ следует, что для всякого $s \in [0, 1]$ точка $(x, u(s)) \in G$, где $u(s) = \tilde{y} + s(\hat{y} - \tilde{y})$. Тогда

$$f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y}) = f(x, u(1)) - f(x, u(0)) = \int_0^1 \frac{df(x, u(s))}{ds}\, ds.$$

Но $u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \ldots \\ u_m(s) \end{pmatrix}$, поэтому $\dfrac{df(x, u(s))}{ds} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x, u(s))}{\partial y_j} \frac{du_j(s)}{ds}$, а $du_j(s)/ds = \hat{y}_j - \tilde{y}_j$. В результате получаем формулу конечных приращений для скалярной функции векторного аргумента

$$f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y}) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\partial f(x, u(s))}{\partial y_j}\, ds \cdot (\hat{y}_j - \tilde{y}_j). \tag{3.7}$$

Пусть теперь $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \end{pmatrix}$, тогда формула (3.7) справедлива для любой компоненты $f_1, \ldots, f_n$.

Поэтому для вектор-функции f формула (3.7) имеет вид

$$f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y}) = \int_0^1 \frac{\partial f(x, u(s))}{\partial y}\, ds \cdot (\hat{y} - \tilde{y}).$$

Здесь, очевидно, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(x, u(s))}{\partial y}\, ds$ — матрица размерности $n \times m$.

Лемма Адамара. *Если вектор-функция* $f(x,y)$ *непрерывна вместе со своей частной производной по* y *в выпуклой по* y *области* G, *то для любых* $(x,\tilde y)$, $(x,\hat y)\in G$ *существуют непрерывные вектор-функции* $h^{(1)}(x,\tilde y,\hat y),\ldots,h^{(m)}(x,\tilde y,\hat y)$ *такие, что*

$$f(x,\hat y)-f(x,\tilde y)=\sum_{j=1}^{m}h^{(j)}(x,\tilde y,\hat y)\cdot(\hat y_j-\tilde y_j).$$

Действительно, $h^{(j)}(x,\tilde y,\hat y)=\displaystyle\int_0^1\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds.$

$\mathbf{2^0}$. Локальное и глобальное условия Липшица.

Пусть, по-прежнему, x — скалярная переменная, y — вектор размерности n, $f(x,y)$ — вектор-функция той же размерности, определенная и непрерывная в области $G\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица глобально по* y *на множестве* D *или* $f(x,y)\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, *если найдется такая константа* $L=L_D>0$, *что*

$$\forall\,(x,\tilde y),(x,\hat y)\in D\ \Rightarrow\ \|f(x,\hat y)-f(x,\tilde y)\|\le L\|\hat y-\tilde y\|. \tag{3.8}$$

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица локально по* y *в области* G *или* $f(x,y)\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *если для любой точки* (x_0,y^0) *из* G *существуют окрестность* $V(x_0,y^0)$, *лежащая в* G, *и константа Липшица* $L=L_V>0$ *такие, что для любых двух точек* $(x,\tilde y),(x,\hat y)$ *из* $V(x_0,y^0)$ *выполняется неравенство* (3.8).

Следует иметь в виду, что условия Липшица призваны заменить дифференцируемость по y функции f, если таковая отсутствует, и означают, что во всей области G или в некой окрестности любой ее точки рост функции $f(x,y)$ по y не более чем линеен.

Лемма (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица). *Если* $f(x,y)\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *то для любого компакта* $\overline{H}$ *из* G *следует, что* $f(x,y)\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть существует замкнутое ограниченное множество (компакт) $\overline{H}\in G$, в котором $f(x,y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y глобально.

Значит, найдутся последовательность констант $L_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ и последовательности точек $(x_k, \tilde{y}^{(k)}), (x_k, \hat{y}^{(k)}) \in \overline{H}$, что

$$\forall\, k \geq 1: \quad \|f(x_k, \hat{y}^{(k)}) - f(x_k, \tilde{y}^{(k)})\| \geq L_k \|\hat{y}^{(k)} - \tilde{y}^{(k)}\|. \tag{3.9}$$

Надо показать, что при каком-то k это неравенство нарушается.

Разряжая при необходимости два раза подряд последовательность индексов k натурального ряда и пользуясь тем, что из каждой последовательности точек компакта $\overline{H}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, выберем подпоследовательность индексов $k_l \to \infty$ при $l \to \infty$, что $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}) \to (x_0, \tilde{y}^{(0)})$, $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)}) \to (x_0, \hat{y}^{(0)})$. При этом обе точки $(x_0, \tilde{y}^{(0)}), (x_0, \hat{y}^{(0)}) \in \overline{H}$, поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

В результате векторы $\tilde{y}^{(0)}$ и $\hat{y}^{(0)}$ либо совпадают, либо нет.

Предположим сначала, что $\tilde{y}^{(0)} \neq \hat{y}^{(0)}$. Тогда можно ввести в рассмотрение функцию $h(x, \tilde{y}, \hat{y}) = \|f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y})\| / \|\hat{y} - \tilde{y}\|$, определенную в некоторой окрестности точки $(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$.

Пусть $h(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = L_0$. Тогда существует окрестность $V = V(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$, в которой h непрерывна и $h(x, \tilde{y}, \hat{y}) < L_0 + 1$.

Поэтому найдется такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точка $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}, \hat{y}^{(k_l)}) \in V(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$, а значит, $h(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}, \hat{y}^{(k_l)}) < L_0 + 1$ или $\|f(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)}) - f(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})\| < (L_0 + 1)\|\hat{y}^{(k_l)} - \tilde{y}^{(k_l)}\|$.

Но это неравенство при $l = l^*$ противоречит неравенству (3.9), поскольку всегда найдется индекс l^* такой, что $L_{k_{l^*}} > L_0 + 1$, так как $L_{k_l} \to +\infty$ при $l \to \infty$.

Пусть теперь $y^{(0)} = \tilde{y}^{(0)} = \hat{y}^{(0)}$, тогда точка $(x_0, y^{(0)}) \in \overline{H} \subset G$. В этом случае используем предположение о том, что функция f удовлетворяет локальному условию Липшица.

По определению для точки $(x_0, y^{(0)})$ существуют лежащая в G окрестность $V(x_0, y^{(0)})$ и константа Липшица $L > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \tilde{y})$, $(x, \hat{y})$ из $V(x_0, y^{(0)})$ выполняется неравенство (3.8). Кроме того, обе подпоследовательности $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)})$ имеют общий предел — точку $(x_0, y^{(0)})$.

Следовательно найдется такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точки $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)})$ принадлежат $V(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$, а значит, выполняется неравенство (3.8).

Однако, существует индекс l^* такой, что $L_{k_{l^*}} > L$, и неравенства (3.8) и (3.9) несовместны при $l = l^*$. $\square$

3^0. Связь между дифференцируемостью и условием Липшица.

Докажем теперь, что дифференцируемость действительно более сильное свойство, чем липшицевость.

Лемма (о достаточном условии для локальной липшицевости). *Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной по y в области G, то она удовлетворяет условию Липшица по y локально в G.*

Доказательство. Пусть V — окрестность произвольной точки из области G. Очевидно, что ее можно выбрать выпуклой по y и такой, что $\overline{V} \in G$. Для этого достаточно в качестве V взять куб с центром в выбранной точке и достаточно маленьким ребром.

Покажем, что вектор-функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально в окрестности V.

По формуле конечных приращений (3.7) для любых двух точек $(x,\tilde y),(x,\hat y) \in V:\ f(x,\hat y)-f(x,\tilde y)=\displaystyle\sum_{j=1}^n\int_0^1\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds\cdot(\hat y_j-\tilde y_j)$,
где $u(s)=\tilde y+s(\hat y-\tilde y)$ для всякого $s\in[0,1]$, при этом точка $(x,u(s))\in V$ в силу выпуклости окрестности по y.

Поскольку частные производные функции f по y непрерывны в G и их конечное число, а компакт $\overline{V}\in G$ по построению, то

$$\exists\, M>0:\ \ \forall\, s\in[0,1],\ \ \forall\, j=\overline{1,n}\ \Rightarrow\ \left\|\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\right\|\le M.$$

Поэтому $\|f(x,\hat y)-f(x,\tilde y)\|\le \displaystyle\sum_{j=1}^n\left\|\int_0^1\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds\cdot(\hat y_j-\tilde y_j)\right\|\le$ $\displaystyle\sum_{j=1}^n\int_0^1\left\|\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\right\|ds\cdot|\hat y_j-\tilde y_j|\le M\int_0^1 ds\cdot n\cdot\max_{j=\overline{1,n}}|\hat y_j-\tilde y_j|\le$ $nM\|\hat y-\tilde y\|$, а значит, выполняется неравенство (3.8) с глобальной константой Липшица $L=nM$, обслуживающей окрестность V произвольной точки из области G. □

§3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПИКАРА

1^0. Теорема Пикара.

Рассмотрим нормальную систему (3.1) $y' = f(x, y)$ с $f \in C(G)$. Наша задача заключается в построении решения задачи Коши системы (3.1) $y = y(x)$ с произвольными начальными данными (x_0, y^0) из области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, определенного на каком-либо отрезке.

Решение будем строить при помощи последовательных приближений Пикара, которые ниже рекуррентно определим по индукции.

Итак, зафиксируем произвольную точку $(x_0, y^0) \in G$.

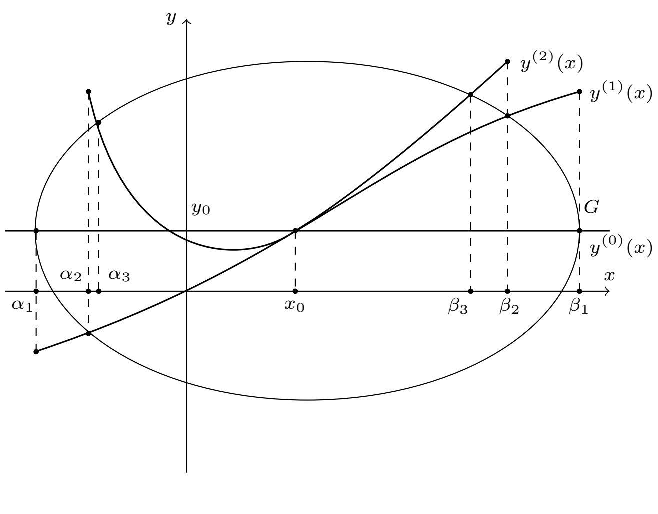
В качестве нулевого приближения возьмем $y^{(0)}(x) \equiv y^0$.

Функция $y^{(0)}(x)$, очевидно, определена для всякого $x \in \mathbb{R}$, но возможно не при всех значениях переменной x точка $(x, y^{(0)}(x))$ окажется в области G. Однако, существует интервал (α_1, β_1) такой, что $x_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$ и для всякого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ точка $(x, y^{(0)}(x)) \in G$, а значит, функция $f(x, y^{(0)}(x))$ определена и непрерывна на (α_1, β_1).

Теперь в качестве первого пикаровского приближения возьмем $y^{(1)}(x) = y^0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\, ds$, и оно определено и непрерывно как суперпозиция непрерывных функций на интервале (α_1, β_1).

Но, опять-таки, возможно не при всех x точка $(x, y^{(1)}(x))$ попадет в область G. В этом случае (α_1, β_1) придется уменьшить.

Существует интервал $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$ такой, что $x_0 \in (\alpha_2, \beta_2)$ и для всякого x из (α_2, β_2) точка $(x, y^{(1)}(x)) \in G$, а значит, функция $f(x, y^{(1)}(x))$ определена и непрерывна на (α_2, β_2). И так далее.



Предположим, что $y^{(k)}(x)$ определено и непрерывно на некотором интервале (α_k, β_k), содержащем точку x_0, и $y^{(k)}(x_0) = y^0$. Тогда существует интервал $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$, что $x_0 \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ и для всякого $x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ точка $(x, y^{(k)}(x)) \in G$.

Для $\forall\, x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ введем $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds \tag{3.10}$$

Оно определено и непрерывно на интервале $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

Таким образом, каждое пикаровское приближение определено в некоторой окрестности точки x_0 и $y^{(k)}(x_0) = y^0$ при любом $k \geq 0$.

Но последовательность вложенных интервалов (α_k, β_k) при их пересечении может стянуться в точку x_0, т. е. общий интервал для всех пикаровских приближений, вообще говоря, может отсутствовать. Кроме того, может оказаться, что вектор-функции $y^{(k)}(x)$ не будут равномерно ограничены сверху по норме. Каждая из этих возможностей, очевидно, помешает получить предельную функцию, которую и хотелось бы видеть решением системы (3.1).

Теорема Пикара. *Пусть в системе (3.1)* $f(x,y) \in C(G)$, $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$ *и пусть для любой точки* (x_0, y^0) *из области* G *последовательные приближения Пикара* $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *с начальными данными* x_0, y^0 *определены на некотором отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем существует такой компакт* $\overline{H} \subset G$, *что для любых* $k \geq 0$ *и* $x \in [\alpha, \beta]$ *точка* $(x, y^{(k)}(x)) \in \overline{H}$. *Тогда функции* $y^{(k)}(x)$ *равномерно относительно* $[\alpha, \beta]$ *стремятся при* $k \to \infty$ *к предельной функции* $y(x)$, *которая является решением задачи Коши системы (3.1) с начальными данными* x_0, y^0 *на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0, y^0) из области G. По условию теоремы для этой точки найдутся отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий x_0, и компакт $\overline{H}$, содержащийся в G, такие, что можно построить последовательные пикаровские приближения

$$y^{(k)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s))\, ds \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

определенные для всякого $x \in [\alpha, \beta]$, и такие, что их графики, т. е. точки $(x, y^{(k)}(x))$, при всех x и k принадлежат компакту $\overline{H}$.

Наличие компакта позволяет незамедлительно ввести на нем две глобальные константы. Обозначим через L константу Липшица, обслуживающую $\overline{H}$. Она существует по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица, согласно которой функция $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$. Положим также $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{H}} \|f(x,y)\|$, так как на компакте непрерывная функция достигает своего максимума.

Нам предстоит установить равномерную сходимость последовательности пикаровских приближений. Для этого существует стандартный прием, основанный на замене последовательности функций соответствующим функциональным рядом. А для рядов имеются простые и эффективные критерии абсолютной сходимости.

Введем новую последовательность функций $\varphi^{(k)}(x)$, заданных на отрезке $[\alpha,\beta]:\quad \varphi^{(0)}(x) = y^{(0)}(x), \quad \varphi^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x),\ \ldots,$ $\varphi^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x),\ \ldots\ .$

Рассмотрим функциональный ряд $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)$.

Очевидно, что его n-я частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(x)$ совпадает с $y^{(n)}(x)$. Поэтому сходимость ряда $\varphi(x)$, означающая сходимость последовательности его частичных сумм, равносильна сходимости последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$.

Построим для ряда $\varphi(x)$ мажорантный ряд, оценив по норме сверху при помощи метода математической индукции члены $\varphi^{(k)}(x)$.

Для $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$ имеем:

$$\|\varphi^{(0)}(x)\| = \|y^{(0)}(x)\|, \quad \|\varphi^{(1)}(x)\| = \|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| =$$
$$= \left\|\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\,ds\right\| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f(s, y^{(0)}(s))\right\|\,ds\right|.$$

Но по условию теоремы любая точка $(s, y^{(0)}(s))$ лежит в $\overline{H}$, так как $s \in [x_0, x] \subset [\alpha,\beta]$ $(x_0 \le x)$ или $s \in [x, x_0] \subset [\alpha,\beta]$ $(x_0 \ge x)$.

Следовательно, $\|\varphi^{(1)}(x)\| \le M|x - x_0|$.

Далее,

$$\|\varphi^{(2)}(x)\| = \|y^{(2)}(x) - y^{(1)}(x)\| =$$
$$= \left\|\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(1)}(s))\,ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\,ds\right\| \le$$
$$\le \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f(s, y^{(1)}(s)) - f(s, y^{(0)}(s))\right\|\,ds\right|.$$

Аналогично предыдущему точки $(s, y^{(1)}(s))$ и $(s, y^{(0)}(s))$ принадлежат компакту $\overline{H}$, в котором $f(x,y)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица. Поэтому

$$\|\varphi^{(2)}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\|\, ds \right| = L \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi^{(1)}(s)\|\, ds \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} M|s - x_0|\, ds \right| \leq LM \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

или $\|\varphi^{(2)}(x)\| \leq \dfrac{M}{L} \dfrac{(L|x - x_0|)^2}{2!}$.

Предположим, что для любых $k \geq 2$ и $x \in [\alpha, \beta]$

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \tag{3.11}$$

Оценим $\varphi^{(k+1)}(x)$:

$$\|\varphi^{(k+1)}(x)\| = \|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| =$$

$$\left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s))\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f(s, y^{(k)}(s)) - f(s, y^{(k-1)}(s)) \right\| \, ds \right|.$$

Поскольку аргументы f принадлежат $\overline{H}$, используем для оценок глобальное условие Липшица и индукционное предположение (3.11):

$$\|\varphi^{(k+1)}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\|\, ds \right| =$$

$$L \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi^{(k)}(s)\|\, ds \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \frac{(L|s - x_0|)^k}{k!}\, ds \right| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Таким образом индукционное предположение (3.11) доказано. И поскольку $|x - x_0| \leq \beta - \alpha$, справедлива равномерная оценка членов ряда $\varphi(x)$: $\|\varphi^{(k)}(x)\| \leq \dfrac{M}{L} \dfrac{(L(\beta - \alpha))^k}{k!}$ для любого x из $[\alpha, \beta]$.

Мажорантный для $\varphi(x)$ ряд $\|y^0\| + \dfrac{M}{L}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(L(\beta-\alpha))^k}{k!}$ сходится при любых конечных $\alpha, \beta,$ и его сумма есть экспонента.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(x)$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha,\beta]$, а значит, последовательность $y^{(k)} \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} y(x)$ при $k\to\infty$.

Для всякого $x\in[\alpha,\beta]$ предельная функция $y(x)$ непрерывна по теореме Стокса-Зайделя и точка $(x,y(x))$, являясь предельной, содержится в $\overline{H}$. Следовательно $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$ существует.

Рассмотрим равенство (3.10), устремив в нем k к бесконечности.

По доказанному выше, слева получим функцию $y(x)$.

Покажем, что справа $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y^{(k)}(s))\,ds \to \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$ при $k\to\infty$ или что разность интегралов стремится к нулю.

Равномерная сходимость последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$ означает, что

$$\forall\,\varepsilon_0>0\ \ \exists\,K>0:\ \forall\,k>K,\ \forall\,x\in[\alpha,\beta]\ \Rightarrow\ \|y^{(k)}(x)-y(x)\|<\varepsilon_0,$$

т. е. K — универсальная, не зависящая от x, константа.

Итак, зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Теперь выберем $\varepsilon_0=\varepsilon/(L(\beta-\alpha))$, по нему найдется K из определения равномерной сходимости. Возьмем произвольное числа $k>K$ и $x\in[\alpha,\beta]$, тогда

$$\left\|\int_{x_0}^{x} f(s,y^{(k)}(s))\,ds - \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x}\left\|f(s,y^{(k)}(s))-f(s,y(s))\right\|\,ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}\|y^{(k)}(s)-y(s)\|\,ds\right| \le$$

$$\le L\varepsilon_0|x-x_0|\le\varepsilon,$$

а значит, в правой части (3.10) тоже можно перейти к пределу.

В результате $y(x)=y^0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$ для $\forall\,x\in[\alpha,\beta]$, т. е. предельная функция $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, что равносильно тому, что $y(x)$ является решением задачи Коши системы (3.1) с начальными данными x_0, y^0 на отрезке $[\alpha,\beta]$. $\square$

Замечание. Оценка остатка:

$$\|y(x)-y^{(k)}(x)\| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L(\beta-\alpha))^{k+1}}{(k+1)!}. \qquad (3.12)$$

Действительно, базу индукции получаем при $k=0$:

$$\|y(x)-y^{(0)}(x)\| \le \left\|\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds\right\| \le M|x-x_0| \le \frac{M}{L}L(\beta-\alpha).$$

Пусть выполнено индукционное предположение (3.12), тогда

$$\|y(x)-y^{(k+1)}(x)\| \le \left\|\int_{x_0}^{x} (f(s,y(s))-f(s,y^{(k)}(s))\,ds\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} L\|y(s)-y^{(k)}(s)\|\,ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x} \frac{M}{L}\frac{(L|s-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\,ds\right| \le$$

$$\le \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L|\beta-\alpha|)^{k+2}}{(k+2)!} \qquad \forall\, x\in[\alpha,\beta].$$

Пример 1. Уравнение $y'=y$, задача Коши $y(0)=1$.

По определению для любого вещественного x имеем: $y^{(0)}(x)=1$, $y^{(1)}(x)=1+\int_0^x 1\cdot dx = 1+x$, $y^{(2)}(x)=1+\int_0^x (1+s)\,dx = 1+x+\dfrac{x^2}{2}$, $\ldots, y^{(k)}(x)=1+\int_0^x \left(1+s+\ldots+\dfrac{s^{k-1}}{(k-1)!}\right)dx = 1+x+\ldots+\dfrac{x^k}{k!},\ldots$

Очевидно, что последовательность приближений Пикара $y^{(k)}(x)$ равномерно относительно x из любого конечного промежутка при $k\to\infty$ сходится к решению $y(x)=e^x$.

2^0. Существование и единственность решения системы.

Из теоремы Пикара следует, что для доказательства существования решения системы (3.1), проходящего через точку (x_0,y^0), остается найти отрезок, на котором будут определены все пикаровские приближения, и компакт, в котором будут лежать все их графики.

Теорема (о существовании и единственности). *Пусть в системе (3.1) $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области G, тогда для любой точки $(x_0,y^0)\in G$ существует и единственно решение задачи Коши с начальными данными x_0, y^0, определенное на некотором отрезке Пеано $P_h(x_0,y^0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Существование. Возьмем любую точку (x_0, y^0) из области G и найдем для нее отрезок $[\alpha, \beta]$ и компакт $\overline{H}$ из теоремы Пикара.

Сначала, как обычно, построим отрезок Пеано с центром, расположенным в точке x_0. Для этого возьмем такие числа $a, b > 0$, что компакт $\overline{R} = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, \|y - y^0\| \le b\} \subset G$.

Положим $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} \|f(x, y)\|$, $h = \min\{a, b/M\}$, $\alpha = x_0 - h$, $\beta = x_0 + h$. Тогда $[\alpha, \beta]$ — это отрезок Пеано $P_h(x_0, y_0)$.

Выберем $\overline{H} = \{(x, y) : \alpha \le x \le \beta, \|y - y^0\| \le b\}$, тогда $\overline{H} \subset \overline{R}$.

Покажем методом математической индукции по $k = 0, 1, \ldots$, что

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta] : \quad \|y^{(k)}(x) - y^0\| \le b. \tag{3.13}$$

Тогда точка $(x, y^{(k)}(x))$ попадет в компакт $\overline{H}$, что позволит определить пикаровское приближение $y^{(k+1)}$ на всем отрезке Пеано $[\alpha, \beta]$.

По определению $y^{(0)}(x) \equiv y^0$, поэтому база индукции очевидна.

Предположим, что неравенство (3.13) верно. Тогда $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds \right\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f(s, y^{(k)}(s)) \right\| ds \right|.$$

Но согласно (3.13) точка $(s, y^{(k)}(s)) \in \overline{H} \subset \overline{R}$, поэтому под знаком интеграла $\|f\| \le M$ и $\|y^{(k+1)}(x) - y^0\| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$.

В результате выполняются условия теоремы Пикара и существование решения системы (3.1) на отрезке Пеано $P_h(x_0, y^0)$ доказано.

Единственность. Стандартно доказываем ее от противного.

Предположим, что существует еще одно решение $\tilde{y}(x)$ с теми же начальными данными, т. е. $\tilde{y}(x_0) = y^0$, определенное на некотором интервале $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, содержащем точку x_0.

Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором определены оба решения. Для завершения доказательства достаточно показать, что на (a, b) решения $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ совпадают.

Используя интегральную формулу (1.4), для любого $x \in (a, b)$ запишем разность этих решений:

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) \right) ds.$$

Существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для всякого $s \in [a, b]$ точки $(s, y(s))$, $(s, \tilde{y}(s)) \in \overline{H}$.

По условию теоремы в области G для функции $f(x,y)$ выполняется локальное условие Липшица. А значит, по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$, и L — глобальная константа Липшица, обслуживающая компакт $\overline{H}$.

В результате $\|y(x)-\tilde{y}(x)\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \|f(s,y(s))-f(s,\tilde{y}(s)\| \, ds\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} \|y(s)-\tilde{y}(s)\| \, ds\right|$.

По следствию из леммы Гронуолла с $\mu = L$ заключаем, что $\|y(x)-\tilde{y}(x)\| \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. $\square$

§4. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

1^0. Условия продолжения за границу интервала.

Рассмотрим нормальную систему (3.1) $y' = f(x,y)$ с $f \in C(G)$. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение системы, определенное на отрезке $[a,b]$. Поскольку по определению решения точка $(b,\varphi(b)) \in G$, то $\varphi(x)$ может быть продолжено вправо за точку b на полуотрезок Пеано, построенный в точке b (аналогично — влево за точку a). И т. д.

При этом иногда можно таким образом продвинуться далеко, в том числе и до бесконечности, а иногда нет.

Разберемся, от чего это зависит.

В примере 1 Гл.I, § 1, п. 2^0 уравнение $y' = y^2$ имеет, например, решение $y = (1-x)^{-1}$ задачи Коши с начальными данными $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Влево оно продолжимо до $-\infty$, а вправо — только до 1.

Лемма (о продолжении решения за интервал). *Пусть $y = \varphi(x)$ — решение системы (3.1), определенное на интервале (a,b). Для того чтобы оно могло быть продолжено вправо за точку b, необходимо и достаточно, чтобы 1) $\exists\ \eta = \lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$, 2) $(b,\eta) \in G$. Аналогичны условия продолжимости влево за точку a).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточность. Предположим, что решение может быть продолжено вправо за точку b. Значит, существует такое решение $y = \psi(x)$, определенное на интервале (a,b_1) с $b_1 > b$, что $\psi(x) \overset{(a,b)}{\equiv} \varphi(x)$. Поскольку функция $y = \psi(x)$ непрерывна, то $\psi(b) = \eta = \lim\limits_{x\to b} \psi(x)$, т. е. $\eta = \lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$. Кроме того, по определению решения точки $(x, \psi(x)) \in G$ при $x \in (a, b_1)$. В частности точка $(b, \eta) \in G$.

Необходимость. По условию существует $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x) = \eta$. Доопределим функцию $\varphi(x)$ в точку b, положив $\varphi(b) = \eta$, и проверим, что $y = \varphi(x)$ является решением системы (3.1), определенным на промежутке $(a, b]$. Поскольку $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$ для $\forall\, x, x_0 \in (a, b)$ и точка $(b, \eta) \in G$, функция f определена и непрерывна в этой точке. Перейдем в последнем равенстве к пределу при $x \to b-$, который, очевидно, существует, а значит, равенство справедливо и при $x = b$. Тогда по лемме о продолжении решения за границу отрезка $\varphi(x)$ может быть продолжено вправо за точку b. $\square$

Df. *Интервал (α, β) называется максимальным интервалом существования решения $y = \varphi(x)$ системы (3.1), если это решение определено на (α, β) и не может быть продолжено ни на какой промежуток, содержащий (α, β) внутри себя.*

Df. *Интегральной кривой системы (3.1) называется график любого ее решения $y = \varphi(x)$, определенного на максимальном интервале существования (α, β).*

Иными словами, интегральная кривая — это множество точек $\gamma(x) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in (\alpha, \beta)\} \in G$.

А как ведет себя интегральная кривая при $x \to \beta$ или $x \to \alpha$?

2^0. Поведение решений вблизи границ максимального интервала существования.

Теорема (о поведении интегральной кривой при стремлении аргумента решения к границе максимального интервала существования). *Пусть в системе (3.1) $f(x, y) \in C(G)$, тогда при стремлении аргумента любого решения к границе своего максимального интервала существования интегральная кривая стремится к границе области G, т. е. покидает любой компакт $\overline{H} \subset G$ и никогда в него не возвращается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = \varphi(x)$ — произвольное решение системы (3.1), определенное на максимальном интервале существования (α, β). Надо показать, что для $\forall\, \overline{H} \subset G$ найдется такое $\sigma \in (\alpha, \beta)$, что для $\forall\, x \in (\sigma, \beta)$ точки $(x, \varphi(x))$ интегральной кривой $\gamma(x)$ лежат в множестве $G \backslash \overline{H}$.

Или, другими словами,

$$\forall\, \overline{H} \subset G,\ \ \forall\,\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in (\alpha,\beta):\ \ x_k \to \beta\ \Rightarrow$$
$$\exists K>0:\ \forall\, k>K\ \Rightarrow\ \gamma_k=(x_k,\varphi(x_k)) \in G\backslash\overline{H}.$$

Доказывая от противного, предположим, что

$$\exists\, \overline{H}_1 \subset G,\ \ \exists\,\{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ \ x_k \to \beta:\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \gamma_k \in \overline{H}_1.$$

Отсюда сразу же вытекает важнейшее утверждение о том, что $\beta<+\infty$, так как в противном случае последовательность x_k оказывается неограниченной, и найдется индекс k^* такой, что точка γ_{k^*} интегральной кривой $\gamma(x)$ будет лежать вне компакта $\overline{H}_1$.

Возьмем теперь любой компакт $\overline{H}_2$ такой, что $\overline{H}_1 \subsetneqq \overline{H}_2 \subset G$. Это значит, что если Γ_1,Γ_2 — границы $\overline{H}_1,\overline{H}_2$, то $d=\rho(\Gamma_1,\Gamma_2)>0$, где расстояние $\rho(\Gamma_1,\Gamma_2)=\min\limits_{\forall\,\xi\in\Gamma_1,\,\forall\,\eta\in\Gamma_2}\{\|\xi-\eta\|\}$.

Покажем, что при $x\to\beta$ интегральная кривая $\gamma(x)$ покидает компакт $\overline{H}_2$ хотя бы один раз.

В противном случае (второй раз "от противного")

$$\forall\, x_0 \in (\alpha,\beta),\ \forall\, x \in [x_0,\beta)\ \Rightarrow\ \gamma(x) \in \overline{H}_2.$$

Покажем, что при таком предположении решение $y=\varphi(x)$ можно продолжить вправо за границу максимального интервала существования β, для чего установим существование $\lim\limits_{x\to\beta-}\varphi(x)=\eta$.

Если допустить, что такой предел отсутствует (в третий раз "от противного"), то найдутся такие последовательности аргументов $x_k^*,\,x_k^0 \in [x_0,\beta)$, что $x_k^*,\,x_k^0 \to \beta$, $\varphi(x_k^*)\to y^*$, $\varphi(x_k^0)\to y^0$ при $k\to\infty$ и $y^*\neq y^0$.

Поскольку точки $(x,\varphi(x))\in\overline{H}_2$ при $x\in[x_0,\beta)$, то предельные точки $(\beta,y^*),(\beta,y^0)\in\overline{H}_2$, а значит, y^*,y^0 ограничены по норме и $\|y^*-y^0\|=\delta>0$.

В результате существует число $K_1>0$ такое, что для $\forall\, k>K_1$: $\|\varphi(x_k^*)-\varphi(x_k^0)\|\geq\delta/2$.

С другой стороны, поскольку обе последовательности аргументов стремятся к одному пределу β, то для $\forall\,\varepsilon$ существует число $K_2>0$ такое, что для $\forall\, k>K_2$: $|x_k^*-x_k^0|<\varepsilon$.

Выберем $l > K_1, K_2$ и $\varepsilon = \delta/(2M)$, где $M = \max_{\overline{H}_2} \|f(x,y)\|$.

Тогда приходим к противоречию:

$$\frac{\delta}{2} \le \|\varphi(x_l^*) - \varphi(x_l^0)\| \le \left| \int_{x_l^0}^{x_l^*} \|f(s,\varphi(s))\|\, ds \right| \le M|x_l^* - x_l^0| < M\varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Итак, $\exists \lim\limits_{x\to\beta-} \varphi(x) = \eta$ и точка $(\beta,\eta) \in \overline{H}_2 \subset G$, так как любой компакт содержит все свои предельные точки.

Мы попали в условие леммы о продолжении решения за интервал, согласно которой (α,β) не будет являться максимальным интервалом существования для решения $y = \varphi(x)$. !!!

Следовательно $\gamma(x)$ покидает компакт $\overline{H}_2$ хотя бы один раз, т. е. $\exists\, \chi \in [x_0, \beta) : \quad (\chi, \varphi(\chi)) \notin \overline{H}_2$.

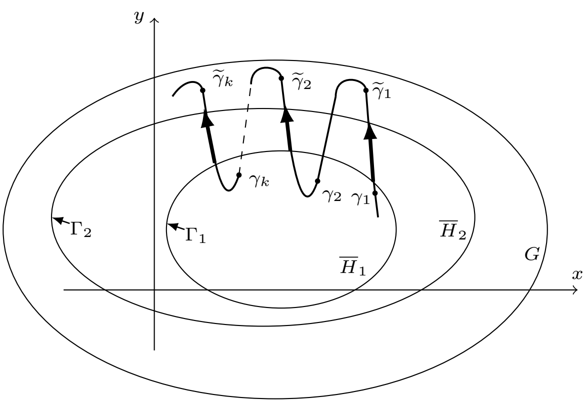
Поскольку x_0 — произвольная точка из (α,β), для $\forall\, k \ge 1$ рассмотрим последовательность точек $x_0^k = \beta - (\beta-\alpha)/(k+1)$, лежащую в (α,β) и стремящуюся к β.

По доказанному выше существует $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\chi_k \in [x_0^k, \beta)$ $(\chi_k \to \beta$ при $k \to \infty)$ и $\tilde{\gamma}_k = (\chi_k, \varphi(\chi_k)) \notin \overline{H}_2$ для $\forall\, k \ge 1$.

Разряжая при необходимости точки последовательностей $x_k \in \overline{H}_1$ и $\chi_k \in G \backslash \overline{H}_2$, перенумеруем их так, чтобы они чередовались:

$$x_1 < \chi_1 < x_2 < \chi_2 < x_3 < \ldots\ ,$$

и для $\forall\, k \ge 1$ рассмотрим интервалы (x_k, χ_k).



Существуют моменты $t_k^1, t_k^2 \in (x_k, \chi_k)$ такие, что $(t_k^i, \varphi(t_k^i)) \in \Gamma_i$ и для $\forall\, x \in (t_k^1, t_k^2)$ точка $(x, \varphi(x)) \in H_2 \backslash \overline{H}_1$.

Оценим длину промежутков $t_k^2 - t_k^1$.

По построению $\|(t_k^2,\varphi(t_k^2))-(t_k^1,\varphi(t_k^1))\|\geq d>0$ или по определению нормы $\max\{t_k^2-t_k^1,|\varphi_1(t_k^2)-\varphi_1(t_k^1)|,\ldots,|\varphi_n(t_k^2)-\varphi_n(t_k^1)|\}\geq d$.

Следовательно или $t_k^2-t_k^1>d$, или существует индекс j такой, что $d\leq|\varphi_j(t_k^2))-\varphi_j(t_k^1))|\leq\displaystyle\int_{t_k^1}^{t_k^2}|f_j(s,\varphi(s))|\,ds\leq M(t_k^2-t_k^1)$, откуда $t_k^2-t_k^1\geq d/M$. Поэтому в любом случае $t_k^2-t_k^1\geq\tilde d=\min\{d,d/M\}$.

Поскольку число β конечно, существует номер $\tilde k$ такой, что $\sum_{k=2}^{\tilde k}(t_k^2-t_k^1)\geq\tilde k\tilde d>\beta$, а значит, $t_{\tilde k}^2>\beta$, но $t_{\tilde k}^2\in(\alpha,\beta)$. !!!

Рассуждения для левого конца интервала (α,β) аналогичны. $\square$

Следствие. *Пусть $G=(a,b)\times D$, где D — область фазового пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда либо решение $y=\varphi(x)$ системы (3.1) определено на всем интервале (a,b), либо при стремлении аргумента x к границе максимального интервала существования его интегральная кривая покидает любой компакт $\overline{D}_1\subset D$ и никогда в него не возвращается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если, например, у максимального интервала существования (α,β) решения $y=\varphi(x)$ правый конец $\beta<b$, то β конечно. Если допустить, что найдется $\overline{D}_1\subset D$, что $\varphi(x)\in\overline{D}_1$ для $\forall x\in[x_0,\beta)$, то $(x,\varphi(x))\in[x_0,\beta]\times\overline{D}_1\subset G$. !!! $\square$

3^0. Продолжимость решений почти линейных систем.

Каждое из решений произвольной нормальной системы (3.1) может быть определено, вообще говоря, на своем максимальном интервале существования, которые не обязательно совпадают и даже имеют общие точки. Но существует класс систем, имеющих общий максимальный интервал существования для всех решений.

Df. *Система (3.1) называется почти линейной, если функция $f(x,y)\in C(G)$, где область $G=(a,b)\times\mathbb{R}^n$, и существуют непрерывные и неотрицательные на (a,b) функции $L(x),M(x)$ такие, что $\|f(x,y)\|\leq L(x)+M(x)\|y\|$ для $\forall\,(x,y)\in G$.*

Теорема (о продолжимости решений почти линейных систем). *Любое решение почти линейной системы продолжимо на (a,b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное решение почти линейной системы $y=\varphi(x)$, заданное на максимальном интервале существования (α,β).

Для $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)$ в силу (1.4) $\varphi(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds,$ следовательно $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + \Big| \int_{x_0}^{x} \|f(s, \varphi(s))\|\, ds \Big| \leq \|\varphi(x_0)\| + \Big| \int_{x_0}^{x} (L(s) + M(s)\|\varphi(s)\|)\, ds \Big|.$

Если $\beta < b$, тогда отрезок $[x_0, \beta] \subset (a, b)$, и в силу непрерывности функций L и M имеем: $L(x) \leq L_0$, $M(x) \leq M_0$ для $\forall\, x \in [x_0, \beta]$.

Поэтому $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) + M_0 \Big| \int_{x_0}^{x} \|\varphi(s)\|\, ds \Big|.$

По лемме Гронуолла $\|\varphi(x)\| \leq (\|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0))e^{M_0(\beta - x_0)}$ для $\forall\, x \in [x_0, \beta]$, что противоречит следствию.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha > a$. $\square$

§5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ВВЕДЕНИЕ

1^0. Существование и единственность решений.

Df. *Система (3.1) называется линейной, если она имеет вид*

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x),$$

где матрица $P(x) = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$, *вектор* $q(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x))$, *функции* $p_{ij}(x)$ *и* $q_i(x)$ *непрерывны на* (a, b).

Таким образом, система (3.1) — линейная, если $f = P(x)y + q(x)$, а область $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Df. *Линейная система (3.14) называется однородной (ЛОС), если в ней* $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, *в противном случае линейная система — неоднородная (ЛНС). Функция* $q(x)$ *— неоднородность системы (3.14).*

Очевидно, что ЛОС всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Df. *Линейная система (3.14) называется вещественной, если все функции* $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ *принимают только вещественные значения.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, будут рассматриваться только вещественные линейные системы.

Исходя из структуры области G, начальные данные для задачи Коши — это произвольная точка x_0 из интервала (a,b) и произвольный вектор $y^0=(y_1^0,\ldots,y_n^0)$ из пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема (о существовании и единственности решений линейных систем). *Для любой точки* $x_0\in(a,b)$ *и для любого вектора* $y^0\in\mathbb{R}^n$ *существует и единственно решение задачи Коши линейной системы (3.14) с начальными данными* x_0,y^0, *определенное на некотором отрезке Пеано* $P_h(x_0,y^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $f(x,y)\in G$ и $f'_y(x,y)=P(x)\in G$, а значит, $f\in Lip_y^{loc}(G)$, для системы (3.14) справедлива теорема о существовании и единственности решений нормальной системы (3.1). $\square$

$\mathbf{2^0}$. Продолжимость решений линейных систем.

Теорема (о продолжимости решений линейных систем). *Любое решение линейной системы (3.14) продолжимо на* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что линейная система является почти линейной.

Положим $p_0(x)=\max\limits_{i,j=\overline{1,n}}\{|p_{ij}(x)|\}$, $q_0(x)=\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{|q_i(x)|\}$, тогда функции $p_0(x),q_0(x)$ непрерывны на (a,b).

Оценим сверху компоненты правой части системы (3.14). Имеем: $|f_i(x,y)|=|p_{i1}(x)y_1+\ldots+p_{in}(x)y_n+q_i(x)|\le\sum_{j=1}^n|p_{ij}(x)|\,|y_j|+|q_i(x)|\le\sum_{j=1}^n p_0(x)|y_j|+q_0(x)\le np_0(x)\max_{j=\overline{1,n}}|y_j|+q_0(x)$.

Поэтому по определению нормы $\|f(x,y)\|\le np_0(x)\|y\|+q_0(x)$, т. е. система (3.14) почти линейна и любое ее решение продолжимо на (a,b). $\square$

$\mathbf{3^0}$. Комплексные линейные системы.

Если в линейной системе (3.14) $p_{ij}(x)$ и $q_i(x)$ — комплекснозначные функции вещественного аргумента x, то решение системы (3.14) $y=y(x)$ также будет иметь комплексные значения.

Возникает естественный вопрос о существовании, единственности и продолжимости такого решения.

Пусть $y=u(x)+\mathrm{i}v(x)$, $P=R(x)+\mathrm{i}S(x)$, $q=g(x)+\mathrm{i}h(x)$, тогда согласно определению решения, подставляя $y(x)$ в систему (3.14), получаем тождество на интервале (a,b)

$$u' + \mathrm{i}v' \equiv (R + \mathrm{i}S)(u + \mathrm{i}v) + g + \mathrm{i}h.$$

Выделяя в нем вещественную и мнимую части, заключаем, что вектор функция $(u(x), v(x))$ удовлетворяет вещественной линейной системе из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными

$$u' \equiv Ru - Sv + g, \quad v' \equiv Su + Rv + h,$$

к которой можно применить теоремы о существовании и единственности и продолжимости решений.

Таким образом доказано, что решение линейной системы (3.14) с непрерывными на (a,b) комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал (a,b).

§6. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

1^0. Непрерывность решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим нормальную систему (3.1), зависящую от параметра $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, изменяющегося в окрестности расчетной точки μ^0

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{3.15}$$

где функция $f(x,y,\mu)$ непрерывна в области $F = G \times \mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, область изменения параметров $\mathfrak{M} = \{\mu \mid \|\mu - \mu^0\| < c\}$.

Фактически, (3.15) представляет собой семейство систем, каждая из которых отвечает своему значению вектора параметров μ.

Особое место в указанной семействе занимает расчетная система

$$y' = f(x, y, \mu^0), \tag{3.15_0}$$

которая в той или иной форме интегрируется и ее решение поставленной задачи Коши определяет расчетное движение материальной точки в пространственно-временном континууме.

Реальное движение материальной точки, естественно, будет отличаться от расчетного не только из-за погрешностей счета, но и за счет различий между реальными и расчетными значениями начальных данных и параметров как в момент начала, так и в процессе самого движения.

Поэтому основополагающая задача заключается в установлении непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров. В противном случае реальное движение со временем может начать катастрофически отличаться от расчетного.

Приведенные рассуждения вынуждают рассматривать решения зависящими не только от независимой переменной x, но и от начальных данных x_0, y^0 и вектора параметров μ.

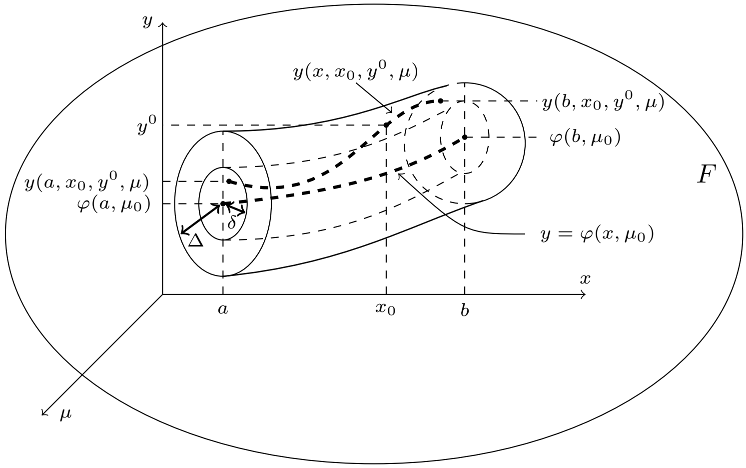
Иными словами, решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$, причем по определению $y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0(\mu)$, т. е. эта запись задает решение задачи Коши с начальными данными x_0, y^0, а y^0, вообще говоря, может непрерывно зависеть от μ.

Теорема (об интегральной непрерывности). *Пусть в системе (3.15) функция* $f(x, y, \mu)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* $F = G \times \mathfrak{M}$ *пространства точек* (x, y, μ). *И пусть* $y = \varphi(x) = \varphi(x, \mu_0)$ *есть решение системы* (3.15_0), *определенное на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для системы (3.15) существуют число* $\delta > 0$ *и область начальных данных* $U_\delta = \{(x_0, y^0, \mu) \,|\, a < x_0 < b,\ \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta,\ \|\mu - \mu^0\| < \delta\}$ *такие, что для любой точки* $(x_0, y^0, \mu) \in U_\delta$ *решение* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *определено для* $\forall x \in [a, b]$ *и является непрерывной функцией по совокупности своих аргументов в области* $V_\delta = (a, b) \times U_\delta$ (эту теорему называют также теоремой о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует $\Delta > 0$ такое, что компакт $\overline{U}_\Delta = \{(x, y, \mu) \,|\, a \le x \le b,\ \|y - \varphi(x)\| \le \Delta,\ \|\mu - \mu^0\| \le \Delta\} \subset F$. По сути, $\overline{U}_\Delta$ — это трубчатая Δ-окрестность решения $y = \varphi(x, \mu^0)$.

Будем доказывать наличие столь малой константы $\delta > 0$, что любое решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ с начальными данными из трубчатой окрестности U_δ продолжимо на $[a, b]$, непрерывно в $V_\delta = (a, b) \times U_\delta$ по совокупности аргументов и его интегральная кривая остается в компакте $\overline{U}_\Delta$ при $x \in [a, b]$.

Для этого для любой точки (x_0, y^0, μ) из U_δ будем строить решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ методом последовательных приближений Пикара, по мере необходимости уменьшая δ, но так, чтобы в конечном итоге оно оказалось большим нуля.



Учитывая тот факт, что все должно происходить в малой трубчатой окрестности дуги интегральной кривой расчетного решения $y = \varphi(x, \mu^0)$, выберем нулевое пикаровское приближение не константой, а лежащим в окрестности кривой $\gamma_0 = \{(x, \varphi(x, \mu^0)) \,|\, a \le x \le b\}$.

Выберем также, для начала, $\delta \le \Delta$ и положим

$$y^{(0)}(x) = y^{(0)}(x, x_0, y^0, \mu^0) = y^0 - \varphi(x_0, \mu^0) + \varphi(x, \mu^0) \quad (\forall\, x \in [a, b]).$$

Отметим четыре свойства нулевого пикаровского приближения:

а) $y^{(0)}(x_0) = y^0$;

б) $y^{(0)}(x) = y^0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s, \mu^0), \mu^0)\, ds$ для $\forall\, x \in [a, b]$;

в) $\|y^{(0)}(x) - \varphi(x)\| = \|y^0 - \varphi(x_0)\|$ для $\forall\, x \in [a, b]$;

г) $\forall\, \delta \;\; (0 < \delta \le \Delta), \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; (x, y^{(0)}(x), \mu) \in \overline{U}_\Delta \subset F$.

Непосредственно из вида $y^{(0)}(x, x_0, y^0, \mu^0)$ в б) вытекает, что нулевое пикаровское приближение непрерывно по каждому из аргументов x_0, y^0, μ, а по x непрерывно дифференцируемо, что гарантирует непрерывность $y^{(0)}$ по совокупности аргументов.

Кроме того, свойство г), очевидно, вытекает из в), поскольку в области U_δ $\|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta \le \Delta$, а $\|\mu - \mu_0\|$ всегда меньше δ.

Теперь для $\forall\, k \ge 1$ стандартно рекуррентным образом введем

$$y^{(k)}(x) = y^{(k)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s), \mu)\, ds \qquad (3.16)$$

— k-е пикаровское приближение, которое определено в некоторой окрестности точки x_0, и $y^{(k)}(x_0) = y^0$.

Наличие компакта $\overline{U}_\Delta$ позволят ввести две константы.

Пусть $L = L_\Delta \ge 1$ — глобальная константа Липшица для $\overline{U}_\Delta$, а $\tau = \tau_{\Delta,L} = \Delta L/(2(e^{L(b-a)} - 1))$.

Покажем методом математической индукции по k $(k \ge 1)$, что существует такое $\delta = \delta_\tau$ $(0 < \delta \le \Delta/2)$, что

$1_k)$ $y^{(k)}(x, x_0, y^0, \mu)$ определено для $\forall\, x \in [a, b]$, непрерывно в V_δ;

$2_k)$ $\forall\, x \in [a, b]:\quad \|y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x)\| \le \dfrac{\tau}{L} \cdot \dfrac{(L|x - x_0|)^k}{k!}$;

$3_k)$ $\forall\, x \in [a, b]$ точка $(x, y^{(k)}(x), \mu) \in \overline{U}_\Delta$.

Опять же, $3_k)$ означает, что $\|y^{(k)}(x) - \varphi(x)\| \le \Delta$ и $\|\mu - \mu_0\| \le \Delta$.

Установим сначала базу индукции.

$1_1)$ Согласно свойству г) нулевого приближения для $\forall\,\delta \le \Delta$ и $\forall\, x \in [a, b]$ функция $f(x, y^{(0)}(x), \mu)$ определена и непрерывна. Поэтому первое пикаровское приближение $y^{(1)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \int_{x_0}^x f(s, y^{(0)}(s), \mu)\, ds$ определено для $\forall\, x \in [a, b]$ и непрерывно в V_δ как композиция непрерывных функций.

$2_1)$ Для $\forall\, x \in [a, b]$ имеем:

$$\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| \overset{\text{б)}}{=} \|\int_{x_0}^x f(s, y^{(0)}(s), \mu)\, ds - \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)\, ds\|$$

$$\le |\int_{x_0}^x \|f(s, y^{(0)}(s), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)\|\, ds|.$$

Согласно свойству г) аргумент функции f принадлежит $\overline{U}_\Delta \subset F$ и f непрерывна в F, следовательно $f(x, y, \mu)$ равномерно непрерывна на компакте $\overline{U}_\Delta$.

По определению равномерной непрерывности для $\forall\,\varepsilon$, в качестве которого используем введенную выше константу τ, найдется константа $\delta = \delta_\tau$ $(0 < \delta \le \Delta/2)$ такая, что если $\|y^{(0)}(s) - \varphi(s)\| \le \delta$ и $\|\mu - \mu_0\| \le \delta$, то $\|f(s, y^{(0)}(s), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu_0), \mu_0)\| \le \tau$.

Но точка $(x_0, y^0, \mu) \in U_\delta$ и выполняется свойство в), поэтому последнее неравенство справедливо.

В результате $\|y^{(0)}(s) - \varphi(x)\| \le \tau|x - x_0|$ для $\forall\, x \in [a, b]$, что совпадает с $2_k)$ при $k = 1$.

$3_1)$ Для $\forall\, x \in [a,b]$ по неравенству треугольника имеем:

$$\|y^{(1)}(x) - \varphi(x)\| \le \|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| + \|y^{(0)}(x) - \varphi(x)\| \overset{2_1),\ \text{в})}{\le}$$
$$\le \tau|x - x_0| + \delta \le \tau(b-a) + \Delta/2 \le \Delta,$$

так как, очевидно, $\tau \le \Delta/(2(b-a))$ и $\delta \le \Delta/2$.

Предположим теперь, что утверждения 1) — 3) выполнены для приближений $y^{(2)}, \dots, y^{(k)}$, и докажем их для $y^{(k+1)}$ $(k \ge 1)$.

$1_{k+1})$ Функция $y^{(k+1)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s), \mu)\, ds$ по определению (3.16) является $(k+1)$-м пикаровским приближением. По индукционному предположению $3_k)$ это приближение определено для $\forall\, x \in [a,b]$ и непрерывно по совокупности аргументов в V_δ как композиция непрерывных функций.

$2_{k+1})$ Для $\forall\, x \in [a,b]$ имеем:

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| \le \Big| \int_{x_0}^{x} \|f(s, y^{(k)}(s), \mu) - f(s, y^{(k-1)}(s), \mu)\|\, ds \Big|.$$

Согласно $3_k)$ и $3_{k-1})$ аргументы f принадлежат компакту $\overline{U}_\Delta$, на котором функции f удовлетворяет условию Липшица глобально с константой L. Поэтому, используя неравенство (3.8), получаем:

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| \le \Big| L \int_{x_0}^{x} \|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\|\, ds \Big| \overset{2_k)}{\le}$$
$$\le L \Big| \int_{x_0}^{x} \frac{\tau}{L} \cdot \frac{(L|s - x_0|)^k}{k!}\, ds \Big| = \frac{\tau}{L} \cdot \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$3_{k+1})$ Для $\forall\, x \in [a,b]$ по неравенству треугольника имеем:

$$\|y^{(k+1)}(x) - \varphi(x)\| \le \|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| + \dots$$

$$\dots + \|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| + \|y^{(0)}(x) - \varphi(x)\| \overset{2),\ \text{в})}{\le}$$

$$\le \frac{\tau}{L}\Big(\frac{(L(b-a))^{k+1}}{(k+1)!} + \dots + \frac{L(b-a)}{1!} \Big) + \delta \le \frac{\tau}{L}(e^{L(b-a)} - 1) + \frac{\Delta}{2} = \Delta.$$

Таким образом, индукционные предположения $1_k) - 3_k)$ доказаны.

Дословно следуя теперь доказательству теоремы Пикара, можно показать, что пикаровские приближения, определенные в (3.16), равномерно относительно $[a, b]$ сходятся к непрерывной в области V_δ функции $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$, являющейся единственны решением системы (3.15) с начальными данными $x_0, y^0(\mu)$. $\Box$

$\mathbf{2^0}$. Дифференцируемость решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Продолжим изучение нормальной системы (3.15) $y' = f(x, y, \mu)$, зависящей от векторного параметра $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, с непрерывной в области $F = G \times \mathfrak{M}$ функцией f, где $\mathfrak{M} = \{\mu \mid \|\mu - \mu^0\| < c\}$.

Пусть $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ — решение задачи Коши системы (3.15) с начальными данными x_0, y^0, т. е. $y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0(\mu)$.

В предыдущем разделе была установлена непрерывность решения по совокупности своих четырех аргументов.

Однако большой практический интерес представляет собой знание производных выбранного решения по параметрам и начальным данным, причем как их наличие, так и способы нахождения.

Разумеется, чтобы рассчитывать на дифференцируемость решений не только по независимой переменной x, придется наложить дополнительные ограничения на функцию f системы (3.15).

Теорема (о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам). *Пусть в системе (3.15) функция $f(x, y, \mu)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные f'_y, f'_μ в области F пространства точек (x, y, μ), т. е. $f \in C^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$. Тогда решение системы (3.15) $y = y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,1,1,1}_{x,x_0,y^0,\mu}(D) = C^1(D)$, где $D = \{(x, x_0, y^0, \mu) \mid (x_0, y^0, \mu) \in F,\ x \in I_{max}\}$, I_{max} — максимальный интервал существования решения $y(x, x_0, y^0, \mu)$, причем*

1) для $\forall\, j = \overline{1, m}$ вектор функция $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j$ является решением задачи Коши линейной неоднородной системы

$$v' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, v + \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j} \qquad (3.17)$$

с начальными данными $x_0, \partial y^0(\mu)/\partial \mu_j$;

2) для $\forall\, i = \overline{1,n}$ *вектор функция* $\varphi^{(i)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial y_i^0$ *является решением задачи Коши линейной однородной системы*

$$u' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, u \tag{3.18}$$

с начальными данными $x_0, e^{(i)}$, *где* $e^{(i)} = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$;

3) вектор функция $\varphi^{(0)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial x_0$ *является решением задачи Коши той же самой линейной однородной системы в вариациях* (3.17), *но с начальными данным* $x_0, -f(x_0, y^0, \mu)$.

Df. *Линейные системы (3.17) и (3.18) называются системами в вариациях вдоль решения* $y(x, x_0, y^0, \mu)$.

Доказательство. Существование частных производных решения доказывается путем непосредственного вычисления предела приращения функции к приращению аргумента. Это техническое рассуждение можно найти практически в любом учебнике по ОДУ.

Перейдем к доказательству неформальной части теоремы.

Подставляя решение $y(x, x_0, y^0, \mu)$ в систему (3.15), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\, y(x, x_0, y^0, \mu) \overset{x}{\equiv} f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu). \tag{3.19}$$

1) Поскольку в F существуют и непрерывны f'_y и f'_μ, а в D — $y'_\mu(x, x_0, y^0, \mu)$, левую и правую (как сложную функцию) части тождества (3.19) можно продифференцировать по компоненте μ_j, т. е. найти их частные производные по μ_j: $\dfrac{\partial}{\partial \mu_j}\dfrac{\partial}{\partial x}\, y(x, x_0, y^0, \mu) = \dfrac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\,\dfrac{\partial}{\partial \mu_j}\, y(x, x_0, y^0, \mu) + \dfrac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j}$.

Правая часть полученного равенства непрерывна по x и μ_j как композиция непрерывных функций, следовательно и левая часть непрерывна, а значит, во второй смешанной производной дифференцирование по x и по μ_j можно поменять местами. После этого становится очевидным, что функция $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j$ $(j = \overline{1,m})$ удовлетворяет системе в вариациях (3.17).

При этом в силу независимости переменных x и μ в частной производной решения по μ_j можно выбрать x равным x_0. Тогда $\psi^{(j)}(x_0) = \partial y(x_0, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j = \partial y^0(\mu)/\partial \mu_j$.

2) По соображениям аналогичным тем, которые приведены в 1), левую и правую части тождества (3.19) можно продифференцировать по компоненте начального данного y_i^0, получая равенство:
$$\frac{\partial}{\partial y_i^0}\frac{\partial}{\partial x}\,y(x,x_0,y^0,\mu)=\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y^0,\mu),\mu)}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y_i^0}\,y(x,x_0,y^0,\mu).$$
Меняя в левой части порядок дифференцирования, заключаем, что функция $\varphi^{(i)}(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial y_i^{(0)}$ $(i=\overline{1,n})$ удовлетворяет системе в вариациях (3.18).

Кроме того, $\varphi^{(i)}(x_0)=\partial y(x_0,x_0,y^0,\mu)/\partial y_i^{(0)}=\partial y^0/\partial y_i^{(0)}=e^{(i)}$, поскольку компоненты $y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}$ не зависят друг от друга.

3) Дифференцируя тождество (3.19) по начальному данному x_0 и меняя порядок дифференцирования, устанавливаем, что функция $\chi(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial x_0$ также удовлетворяет системе (3.18).

Остается только вычислить $\chi(x_0)$. Но зафиксировать в частной производной решения по x_0 аргумент x равным x_0 нельзя, так как x_0 в рассматриваемом случае оказалась не константой, а независимой переменной, по которой и берется частная производная.

Поэтому придется использовать тождество $y(x_0,x_0,y^0,\mu)=y^0$.

Дифференцируя его по x_0, получаем
$$\frac{\partial y(x,x_0,y^0,\mu)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}+\frac{\partial y(x_0,x_0,y^0,\mu)}{\partial x_0}=0.$$

Согласно (3.19) первое слагаемое полученного равенства равно $f(x,y(x,x_0,y^0,\mu),\mu)|_{x=x_0}$ и равно $f(x_0,y^0,\mu)$, а второе — это $\chi(x_0)$. Отсюда $\chi(x_0)=-f(x_0,y^0,\mu)$. $\square$

Если допустить, что в системе (3.15) функция $f(x,y,\mu)$ имеет большую чем единица гладкость по y и μ, то естественно ожидать, что и решение $y=y(x,x_0,y^0,\mu)$ системы (3.15) можно большее число раз продифференцировать по начальным данным и параметрам.

Теорема (о существовании у решения производных высших порядков). *Пусть в системе (3.15) функция* $f(x,y,\mu)\in C^{0,k,k}_{x,y,\mu}(F)$, *тогда решение системы (3.15)* $y=y(x,x_0,y^0,\mu)\in C^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем его методом математической индукции по степени гладкости k функции f.

База индукции уже имеется, так как при $k=1$ справедлива теорема о дифференцируемости по начальным данным и параметрам.

Используем теперь доказываемую теорему в качестве индукционного предположения, т. е. считаем, что $y(x,x_0,y^0,\mu)\in C^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$.

Пусть в системе (3.15) $f\in C^{0,k+1,k+1}_{x,y,\mu}(F)$.

Тогда матрица линейной части $\dfrac{\partial f(x,y(x,x_0,y^0,\mu),\mu)}{\partial y}$ и неоднородность $\dfrac{\partial f(x,y(x,x_0,y^0,\mu),\mu)}{\partial \mu_j}$ систем в вариациях (3.17) и (3.18) как производные сложных функций оказываются функциями k раз непрерывно дифференцируемыми по параметрам x_0,y^0,μ, поскольку таковыми по индукционному предположению является решение $y(x,x_0,y^0,\mu)$ и все функции f'_{y_i}, f'_{μ_j}.

Применяя теперь индукционное предположение непосредственно к линейным системам в вариациях, заключаем, что функции $\psi^{(j)}(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial\mu_j$, $\varphi^{(i)}(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial y^0_i$, $\chi(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial x_0$, являющиеся решениями соответствующей системы (3.17) или (3.18), k раз непрерывно дифференцируемы по x_0,y^0,μ. А значит, само решение $y(x,x_0,y^0,\mu)$ системы (3.15) дифференцируемо по каждой из этих переменных $(k+1)$ раз. $\Box$

3^0. Аналитичность решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим, наконец, нормальную систему (3.15) $y'=f(x,y,\mu)$ с непрерывной в области $F=G\times\mathfrak{M}$ функцией f в предположении, что для всякой точки $(x_0,y^0,\mu^0)\in F$ функция $f(x,y,\mu)$ является вещественно-аналитической функцией переменных y,μ в некоторой окрестности точки (y^0,μ^0).

Иными словами, в поликруге $K_r(y^0,\mu^0)=\{(y,\mu)\mid \|y-y^0\|<r,$ $\|\mu-\mu^0\|<r\}$ радиуса r с центром (y^0,μ^0) вещественная функция f допускает разложение в абсолютно сходящийся степенной ряд:

$$f(x,y,\mu)=\sum\nolimits_{p,q=0}^{\infty} f^{(p,q)}(x)(y-y^0)^p(\mu-\mu^0)^q,$$

где $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $q=(q_1,\ldots,q_m)$, $p_i,q_j\in\mathbb{Z}_+$, $z^s=z_1^{s_1}\ldots z_l^{s_l}$, векторные коэффициенты $f^{(p,q)}(x)$ — это вещественные непрерывные функции в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема Ляпунова–Пуанкаре (о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметров). *Пусть в системе (3.15) выполнены предположения, сделанные выше для* $f(x, y, \mu)$, *и пусть система* (3.15_0) $y' = f(x, y, \mu^0)$ *имеет решение* $y = \varphi(x, \mu^0)$, *определенное на отрезке* $[a, b]$. *Тогда* $\exists\, \rho > 0$ *такое, что решение системы (3.15)* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *определено и непрерывно на множестве* $[a, b] \times [a, b] \times K_\rho(\varphi(x_0), \mu^0)$ *и для любых* $x, x_0 \in [a, b]$ *является вещественно-аналитической функцией переменных* y^0, μ *в поликруге* $K_\rho(\varphi(x_0), \mu^0) = \{(y^0, \mu) \mid \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \rho,\ \|\mu - \mu^0\| < \rho\}$, *т. е.* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *раскладывается в сходящийся степенной ряд:*

$$y(x, x_0, y^0, \mu) = \sum\nolimits_{p,q=0}^{\infty} y^{(p,q)}(x, x_0)(y^0 - \varphi(x_0))^p (\mu - \mu^0)^q,$$

где коэффициенты $y^{(p,q)}(x, x_0)$ *непрерывны по* $x, x_0 \in [a, b]$.

Доказательство теоремы см., например, в книге Ю. Н. Бибикова "Курс обыкновенных дифференциальных уравнений изд-во "Лань" СПб-Москва-Краснодар, 2011 (Гл. VI, § 2).

4^0. Аналитичность решений нормальной системы по независимой переменной.

До сих пор, рассматривая систему (3.15) $y' = f(x, y, \mu)$, мы последовательно улучшали зависимость функции f от y и от μ, получая улучшение свойств решений по начальным данным и параметрам, не затрагивая при этом зависимость f от x.

Здесь этот пробел будет восполнен, причем поскольку зависимость f от параметра μ непосредственно использоваться не будет, вернемся к рассмотрению исходной системы (3.1) $y' = f(x, y)$.

Теорема Коши (об аналитичности решения задачи Коши аналитической системы). *Пусть в системе (3.1)* $f(x, y)$ *является аналитической функцией* x, y *в области* G, *т. е. для любой точки* $(x_0, y^0) \in G$ *функция* f *раскладывается в этой точке в сходящийся степенной ряд:* $f(x, y) = \sum_{k,p=0}^{\infty} f^{(k,p)}(x - x_0)^k (y - y^0)^p$, *где* $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{Z}_+$, *с радиусом сходимости* $r = r(x_0, y^0) > 0$. *Тогда решение системы* $y = y(x, x_0, y^0)$ *раскладывается в точке*

x_0 *в сходящийся степенной ряд:*

$$y(x, x_0, y^0) = \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} a^{(m)}(x - x_0)^m,$$

в котором $a^{(0)} = y^0$ *и радиус сходимости которого* $\rho = \rho(x_0)$ *вне зависимости от величины* r *может быть достаточно мал.*

Доказательство теоремы см. напр. в цитированной выше книге Ю. Н. Бибикова (Гл. VI, § 4).

Г Л А В А IV
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ, ЗАДАЧА КОШИ

1^0. Объект изучения.

В этой главе будут исследоваться линейное дифференциальное уравнения порядка n $(n \geq 2)$, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \qquad (4.1)$$

в котором функции $p_j(x), q(x)$ $(j = \overline{1,n})$ определены и непрерывны на некотором интервале (a,b) и, если не оговорено противное, принимают на нем вещественные значения.

Если $n = 1$, то получаем линейное уравнение первого порядка $y' + p_1(x)y = q(x)$, общее решение которого найдено в § 5 главы II.

Df. *Линейное уравнение* (4.1) *называется однородным (ЛОУ), если функция* $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, *противном случае* (4.1) *— неоднородное (ЛНУ), при этом функция* $q(x)$ *называется неоднородностью.*

Очевидно, что любое ЛОУ имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

ЛНУ (4.1), очевидно, является частным случаем обыкновенного дифференциального уравнения порядка n, разрешенного относительно старшей производной, (3.2) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

К сожалению уже для ЛОУ II порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ не удается в общем виде выписать общее решение, как это сделано в формуле Коши для ЛОУ первого порядка.

Кроме того, для линейных уравнений высокого порядка нельзя применять векторную запись. Именно поэтому многие формулы и доказательства будут более громоздкими по сравнению с аналогами, которые будут получены для линейных систем, хотя уравнения и являются их частным случаем.

2^0. Применение к ЛНУ фундаментальных теорем.

Стандартная замена (3.3) $y = y_1,\ y' = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_n$ сводит ЛНУ к частному случаю нормальной системы (3.4), а именно: линейной неоднородной системе (ЛНС) порядка n

$$y_1' = y_2, \ \ldots \ y_{n-1}' = y_n, \ \ y_n' = -p_n(x)y_1 - \ldots - p_1(x)y_n + q(x). \quad (4.2)$$

Как уже отмечалось, система (4.2) эквивалентна уравнению (4.1) в следующем смысле: если $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ является решением системы (4.2), то функция $y = \varphi_1(x)$ — это решение уравнения (4.1). И, наоборот, если $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (4.1), то вектор $(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$ — это решение системы (4.2).

Если записать ЛНС (4.2) в векторном виде $y' = P(x)y + q_0(x)$, то

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \ldots & -p_1 \end{pmatrix}, \ q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Вспоминая, как ставится задача Коши для произвольной линейной системы (3.14) и возвращаясь к уравнению (4.1) при помощи стандартной замены (3.3), получаем постановку задачи Коши для уравнения: надо найти такое решение $y = \varphi(x)$, что $\varphi(x_0) = y_0^0$, $\varphi'(x_0) = y_1^0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0$, где $x_0 \in (a, b)$, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$.

Теорема (о существовании, единственности и продолжимости решений линейных уравнений). *Для любого* $x_0 \in (a, b)$ *и любых* $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$ *существует и единственно решение задачи Коши линейного уравнения (4.1) с начальными данными* $x_0, y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, *продолжимое на весь интервал* (a, b).

Доказательство. По теореме о существовании и единственности решений линейных систем решение задачи Коши уравнения (4.1), равносильного линейной системе (4.2), существует на отрезке Пеано и единственно. По теореме о продолжимости решений линейных систем это решение продолжимо на (a, b). $\square$

3^0. Комплексные линейные уравнения.

Если в линейном уравнении (4.1) $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ и $q(x)$ — комплекснозначные функции вещественного аргумента x, то решение уравнения (4.1) $y=y(x)$ также будет иметь комплексные значения.

Возникает естественный вопрос о существовании, единственности и продолжимости такого решения.

Пусть $y=u(x)+\mathrm{i}v(x)$, $p_j=r_j(x)+\mathrm{i}s_j(x)$, $q=g(x)+\mathrm{i}h(x)$.

По определению решения, подставляя $y(x)$ в уравнение (4.1), получаем тождество на интервале (a,b)

$$u^{(n)}+\mathrm{i}v^{(n)}+(r_1+\mathrm{i}s_1)(u^{(n-1)}+\mathrm{i}v^{(n-1)})+\ldots+(r_n+\mathrm{i}s_n)(u+\mathrm{i}v)\equiv g+\mathrm{i}h.$$

Выделяя вещественную и мнимую части в этом тождестве, получаем систему из двух линейных уравнений порядка n с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} &u^{(n)}+r_1u^{(n-1)}-s_1v^{(n-1)}+\ldots+r_nu-s_nv=g,\\ &v^{(n)}+s_1u^{(n-1)}+r_1v^{(n-1)}+\ldots+s_nu+r_nv=h. \end{aligned}$$

Сделав двойную стандартную замену вида (3.3)

$$u=u_1,\ u'=u_2,\ \ldots,\ u^{(n-1)}=u_n,\ v=v_1,\ v'=v_2,\ \ldots,\ v^{(n-1)}=v_n,$$

установим, что функции $u_1(x),\ldots,u_n(x),v_1(x),\ldots,v_n(x)$ удовлетворяют вещественной линейной системе порядка $2n$ с непрерывными на (a,b) коэффициентами, к которой можно применить теоремы о существовании и единственности и продолжимости решений.

Таким образом доказано, что решение линейного уравнения (4.1) с комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал существования самого уравнения (4.1).

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Линейность пространства решений.

В этом параграфе будут изучаться вещественные ЛОУ

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \quad\text{или}\quad Ly=0. \tag{4.3}$$

все решения которых, как было установлено, определены на (a,b).

Пусть $Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$ — это линейный дифференциальный оператор. Он действует на пространстве n раз непрерывно дифференцируемых функций, т. е. на пространстве функций $y(x) \in C^n((a,b))$, и линеен в силу линейности операции дифференцирования, т. е. $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ly_1 + \alpha_2 Ly_2$.

Следовательно, ЛОУ (4.3) при желании можно записать в виде $Ly = 0$, и его решения образуют линейное пространство.

Действительно, если $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — это решения ЛОУ (4.3), то для $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$ линейная комбинация $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$ также является решением.

2^0. Линейная зависимость и независимость решений, определитель Вронского.

Хорошо известно, что n функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$, определенных на интервале (a,b), называются линейно зависимыми на (a,b), если существует постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, что

$$\alpha_1\psi_1(x) + \ldots + \alpha_n\psi_n(x) \stackrel{(a,b)}{\equiv} 0. \tag{4.4}$$

А функции, не являющиеся линейно зависимыми на (a,b), называются линейно независимыми.

Тем самым, функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ линейно независимы на интервале (a,b), если тождество (4.4) выполняется только при $\alpha = 0$.

Пусть $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x) \in C^{n-1}((a,b))$. Составим матрицу $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \ldots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Df. *Функция $W(x) = \det\Psi(x)$ называется определителем Вронского (ОВ), построенном на системе функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$.*

Лемма (о связи между линейной зависимостью функций и ОВ). *Если $n-1$ раз непрерывно дифференцируемые на (a,b) функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ линейно зависимы на (a,b), то ОВ $W(x) \stackrel{(a,b)}{\equiv} 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, что справедливо тождество (4.4).

Дифференцируя его $n-1$ раз, получаем линейную однородную алгебраическую систему $\begin{cases} \alpha_1\psi_1(x)+\ldots+\alpha_n\psi_n(x)=0 \\ \vdots \\ \alpha_1\psi_1^{(n-1)}(x)+\ldots+\alpha_n\psi_n^{(n-1)}(x)=0 \end{cases}$ или $\Psi(x)\alpha=0$, имеющую для $\forall\, x\in(a,b)$ нетривиальное решение α. Следовательно определитель этой системы $W(x)\overset{(a,b)}{\equiv}0$. $\square$

Обратное утверждение неверно.

Пусть, например, $n=2$, $\psi_1=\begin{bmatrix} x^3 \ (x\ge 0) \\ 0 \ \ (x\le 0) \end{bmatrix}$, $\psi_2=\begin{bmatrix} 0 \ \ (x\ge 0) \\ x^3 \ (x\le 0) \end{bmatrix}$. Тогда $W(x)=\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix}\overset{(a,b)}{\equiv}0$, так как один из столбцов определителя всегда равен нулю. Но функции ψ_1,ψ_2, очевидно, линейно независимы на (a,b).

Однако для решений ЛОУ (4.3) обратное утверждение верно.

Теорема (о связи между ОВ и линейной зависимостью решений ЛОУ). *Пусть $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ — решения ЛОУ (4.3) и $\exists\, x_0\in(a,b)$, что $W(x_0)=0$, тогда $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ линейно зависимы на (a,b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть определитель Вронского, построенный на решениях $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, обращается в нуль в некой точке $x_0\in(a,b)$. Тогда линейная однородная алгебраическая система $\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \vdots \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$ или $\Phi(x_0)\alpha=0$, где

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и $\det\Phi(x_0)=W(x_0)=0$, имеет нетривиальное решение $\alpha^0=(\alpha_1^0,\ldots,\alpha_n^0)\ne 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\alpha_1^0\varphi_1(x)+\ldots+\alpha_n^0\varphi_n(x)$, которая согласно п. 1^0 является решением уравнение (4.3).

При $x=x_0$ имеем: $\varphi(x_0)=0$, $\varphi'(x_0)=0,\ldots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=0$.

С другой стороны тривиальное решение $y(x)\equiv 0$ ЛОУ имеет в точке x_0 те же нулевые начальные данные. Поэтому по теореме единственности $\varphi(x)\equiv 0$ или $\alpha_1^0\varphi_1(x)+\ldots+\alpha_n^0\varphi_n(x)\overset{(a,b)}{\equiv}0$, что и означает линейную зависимость функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ на (a,b). $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского $W(x)$, построенный на решениях ЛОУ (4.3), обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала (a,b), то $W(x)\overset{(a,b)}{\equiv}0$. И наоборот, если $\exists\, x_0\in(a,b)$, что $W(x_0)\neq 0$, то $W(x)\neq 0$ для $\forall\, x\in(a,b)$.*

Второе утверждение следствия очевидным образом доказывается от противного.

Таким образом, если решения $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ линейно независимы, то построенный на них ОВ $W(x)$ является знакоопределенной на интервале (a,b) функцией.

3^0. Фундаментальная система решений, формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений ЛОУ (4.3) называются любые n линейно независимых на (a,b) решений этого уравнения.*

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОУ (4.3) существует.*

Доказательство будет проведено конструктивно, т. е. ФСР будет построена такой, какая может потребоваться в дальнейшем.

Выберем произвольным образом неособую постоянную матрицу
$$A=\begin{pmatrix} a_{0\,1} & \ldots & a_{0\,n}\\ \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{n-1\,1} & \ldots & a_{n-1\,n}\end{pmatrix}\quad(\det A\neq 0)$$ и точку x_0 из (a,b).

По теореме существования для $\forall\, j=\overline{1,n}$ существует решение $y=\varphi_j(x)$ с начальными данными $x_0,\ a_{0\,j},\ldots,a_{n-1\,j}$.

Возникшие таким образом решения $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ ЛОУ (4.3) линейно независимы на (a,b), поскольку $W(x_0)=\det A\neq 0$. $\square$

Фундаментальную систему решений обычно называют нормированной, если в качестве A выбрана единичная матрица E. У такой ФСР $W(x_0)=1$.

Теорема (об общем решении ЛОУ). *Пусть $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений, тогда непрерывная функция $\varphi(x,C_1,\ldots,C_n)=C_1\varphi_1(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)$ является общим решением ЛОУ (4.3) в области $G=(a,b)\times\mathbb{R}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку любая линейная комбинация решений ЛОУ (4.3) есть решение, то для любых вещественных констант $C_1, \ldots, C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ будет решением уравнения (4.3) на интервале (a, b).

Дифференцируя эту функцию $n-1$ раз по x, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \\ \varphi'(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1'(x) + \ldots + C_n\varphi_n'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

из n уравнений с n неизвестными $C_1, \ldots, C_n$.

Поскольку $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют ФСР, $\det\Phi(x) = W(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$, где матрица Φ системы (4.6) введена (4.5).

Выберем произвольный набор начальных данных для задачи Коши из области G, т. е. $x_0 \in (a, b)$, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$ и покажем, что найдется единственный набор констант $C_1^0, \ldots, C_n^0$, при котором $\varphi(x_0, C_1^0, \ldots, C_n^0) = y_0^0$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, \ldots, C_n^0) = y_{n-1}^0$.

Подставляя начальные данные в (4.6), получаем систему

$$\begin{cases} y_0^0 = C_1\varphi_1(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n(x_0) \\ y_1^0 = C_1\varphi_1'(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}^0 = C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases},$$

у которой определитель матрицы $\Phi(x_0)$, как было установлено, отличен от нуля вне зависимости от выбора точки x_0.

Следовательно система имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$.

В результате $y = \varphi(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ — это решение задачи Коши ЛОУ (4.3) с начальными данными x_0, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, определенное на интервале (a, b), в чем легко убедиться, подставив набор констант $C_1^0, \ldots, C_n^0$ в систему (4.6). $\square$

Замечание 1. Эта теорема будет также непосредственно вытекать из теоремы об общем решении линейных однородных систем, которая будет доказана в следующем параграфе.

Теорема (о размерности пространства решений ЛОУ). *Множество вещественных решений ЛОУ (4.3) образует n-мерное вещественное линейное пространство над полем вещественных чисел.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — какая-либо ФСР. Тогда по теореме об общем решении функция $y = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ является общим решением ЛОУ (4.3), а значит, для любого решения $y = \varphi^*(x)$ существует и единственен вещественный вектор $C^* = (C_1^*, \ldots, C_n^*)$, что $\varphi^*(x) = C_1^*\varphi_1(x) + \ldots + C_n^*\varphi_n(x)$.

Таким образом, любое решение ЛОУ можно отождествить с вектором $C \in \mathbb{R}^n$, компоненты которого являются координатами точки линейного пространства $\mathbb{R}^n$ в базисе $\varphi^{(1)} = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x))$, $\ldots \varphi^{(n)} = (\varphi_n(x), \ldots, \varphi_n^{(n-1)}(x))$. $\square$

Следствие. *Линейное однородное уравнение порядка n не может иметь более чем n линейно независимых решений.*

4^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Хотя ЛОУ (4.3) предполагается вещественным, оно вполне может иметь комплексные решения, которые могут входить в ФСР.

Но интерес, естественно, представляют вещественные ФСР.

Оказывается, что ФСР всегда можно овеществить.

Чтобы это доказать, отметим сначала три очевидных свойства комплексных решений.

Пусть $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ — решение уравнения (4.3) (функции $u(x), v(x)$ вещественны), тогда $u(x)$, $v(x)$ — также решения ЛОУ.

Действительно, пользуясь тем, что $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ вещественны, в тождестве $u^{(n)} + \mathrm{i}v^{(n)} + p_1(u^{(n-1)} + \mathrm{i}v^{(n-1)}) + \ldots + p_n(u + \mathrm{i}v) \equiv 0$ достаточно выделить вещественную и мнимую части.

Кроме того, $\overline{y}(x) = u(x) - \mathrm{i}v(x)$ является решением и при этом $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ линейно независимы на (a, b). Поэтому, в частности, к комплексному решению из какой-либо ФСР всегда можно добавить комплексно сопряженное, заменив им любое другое решение.

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОУ). *Пусть набор функций $\Theta_1 = \{\varphi_1(x), \overline{\varphi}_1(x), \ldots, \varphi_l(x), \overline{\varphi}_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, где $\varphi_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ $(j = \overline{1, l})$, а $\varphi_{2l+1}, \ldots, \varphi_n$ вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОУ (4.3). Тогда набор $\Theta_2 = \{u_1(x), v_1(x), \ldots, u_l(x), v_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ является вещественной фундаментальной системой решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку набор Θ_1 — ФСР, то построенный по ним определитель Вронского $W_1(x)\neq 0$.

Набор Θ_2 состоит из n вещественных решений. Остается установить их линейную независимость, т. е. доказать, что построенный по ним определитель Вронского $W_2(x)\neq 0$ для $\forall\, x\in(a,b)$.

Имеет место следующая цепочка равенств, основанная на свойствах определителей:

$$0\neq W_1(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \overline{\varphi}_1 & \ldots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \overline{\varphi}_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1+\mathrm{i}v_1 & u_1-\mathrm{i}v_1 & \ldots & \varphi_n\\ u_1'+\mathrm{i}v_1' & u_1'-\mathrm{i}v_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_1-\mathrm{i}v_1 & \ldots & \varphi_n\\ u_1' & u_1'-\mathrm{i}v_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}+\mathrm{i}\begin{vmatrix}v_1 & u_1-\mathrm{i}v_1 & \ldots & \varphi_n\\ v_1' & u_1'-\mathrm{i}v_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_1 & \ldots & \varphi_n\\ u_1' & u_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}-\mathrm{i}\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & \ldots & \varphi_n\\ u_1' & v_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}+\mathrm{i}\begin{vmatrix}v_1 & u_1 & \ldots & \varphi_n\\ v_1' & u_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}v_1 & v_1 & \ldots & \varphi_n\\ v_1' & v_1' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=(-2\mathrm{i})\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & u_2+\mathrm{i}v_2 & u_2-\mathrm{i}v_2 & \ldots & \varphi_n\\ u_1' & v_1' & u_2'+\mathrm{i}v_2' & u_2'-\mathrm{i}v_2' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=$$

$$(-2\mathrm{i})^l\begin{vmatrix}u_1 & v_1 & \ldots & u_l & v_l & \varphi_{2l+1} & \ldots & \varphi_n\\ u_1' & v_1' & \ldots & u_l' & v_l' & \varphi_{2l+1}' & \ldots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\end{vmatrix}=(-2\mathrm{i})^lW_2(x).\ \square$$

$\mathbf{5^0}$. Обратная задача.

Можно ли построить линейное однородное уравнение, имеющее в качестве ФСР заранее заданный набор функций? Если можно, то сколько и какого порядка?

Конструктивный ответ на поставленные вопросы дает следующее утверждение.

Теорема (о построении ЛОУ по заданному набору функций). *Пусть $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ — набор из n раз непрерывно дифференцируемых на интервале (a,b) функций и построенный по ним определитель Вронского $W(x)\neq 0$ для $\forall\, x\in(a,b)$. Тогда существует и единственно линейное однородное уравнение (4.3), для которого $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений на (a,b).*

Доказательство.

Единственность. Предположим, что помимо уравнения (4.3) найдется еще одно ЛОУ порядка n $\quad y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0$ с $q_1(x), \ldots, q_n(x) \in C((a, b))$, имеющее ту же ФСР $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Тогда существует натуральное τ — наибольшее число такое, что $p_\tau(x) \not\equiv q_\tau(x)$ на (a, b). В силу непрерывности коэффициентов уравнений найдется интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, на котором $p_\tau(x) \neq q_\tau(x)$.

Следовательно каждое из решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ удовлетворяет разности двух уравнений: $(p_\tau - q_\tau)y^{(n-\tau)} + \ldots + (p_n - q_n)y = 0$, которую для $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$ можно поделить на $p_\tau - q_\tau$, получая ЛОУ $y^{(n-\tau)} + \ldots + \tilde{p}_{n-\tau}(x)y = 0$ порядка меньшего чем n.

Однако это уравнение имеет n линейно независимых на (α, β) решений, что невозможно в силу следствия из п. 3^0.

Существование. Покажем, что ЛОУ порядка n, имеющее указанный в формулировке теоремы набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ в качестве ФСР, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) & y \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) & y' \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (x \in (a, b)). \tag{4.7}$$

Действительно, разлагая определитель по элементам последнего столбца, получаем уравнение $W(x)y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + r_n(x)y = 0$ с непрерывными на (a, b) коэффициентами $r_1(x), \ldots, r_n(x)$, причем

$$r_1(x) = -\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Разделив теперь это уравнение на $W(x)$, получим ЛОУ (4.3) порядка n, в котором, в частности, $p_1(x) = r_1(x)/W(x)$.

Остается проверить, что $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — это его решения.

Но это — очевидно, поскольку при подстановке любой функции $\varphi_j(x)$ в левую часть уравнения (4.7) она будет обращаться в нуль, так как в определителе появятся два одинаковых столбца. $\square$

6^0. Формула Лиувилля.

Оказывается, что вычислить определитель Вронского удается, даже не зная ФСР, по которой он строится. Достаточно только задать начальные данные для решений, входящих в ФСР, или $W(x_0)$.

Для вывода требуемой формулы напомним правило дифференцирования определителя. Если матрица $\Phi(x) = \{\varphi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, то

$$|\Phi(x)|' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \dots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi'_{21} & \dots & \varphi'_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi'_{n1} & \dots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n \\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = -r_1(x),$$

так как в сумме все определители, кроме последнего, имеют по две одинаковые строки.

В итоге получили ЛОУ первого порядка $W'(x) = -p_1(x)W(x)$. Разделяя переменные и интегрируя по s от x_0 до x $(x_0, x \in (a,b))$, имеем: $-\displaystyle\int_{x_0}^x p_1(s)\,ds = \int_{x_0}^x \frac{dW(s)}{W(s)} = \ln\frac{W(x)}{W(x_0)}$, откуда

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^x p_1(s)\,ds\Big) \ \text{— формула Лиувилля.}$$

Таким образом оказалось, что определитель Вронского не зависит от коэффициентов $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ ЛОУ (4.3).

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Структура общего решения ЛНУ.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (4.1) порядка n: $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$ или $Ly = q$.

Пусть $y = \psi(x)$ решение ЛНУ (4.1) на (a, b), т. е. $L\psi \equiv q$. Используя его, сведем (4.1) к линейному однородному уравнению (4.3).

Для этого сделаем "сдвигающую" замену $y = z + \psi(x)$.

Имеем: $L(z + \psi) = q \;\Leftrightarrow\; Lz + L\psi = q \;\Leftrightarrow\; Lz = 0$.

Пусть $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ — общее решение ЛОУ $Lz = 0$.

Тогда, подставляя его в замену, устанавливаем, что функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) + \psi(x) \tag{4.8}$$

является общим решением ЛНУ (4.1).

Иными словами, общее решение ЛНУ есть сумма общего решения ЛОУ и частного решения ЛНУ.

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНУ). *Пусть набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решений ЛОУ (4.3) на (a, b). Тогда частное решение $y = \psi(x)$ ЛНУ (4.1) может быть найдено в виде квадратур от $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и неоднородности $q(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частное решение будем искать в виде

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x), \tag{4.9}$$

где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x) \in C^1((a, b))$, т. е. варьировать произвольные константы из формулы общего решения $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ ЛОУ (4.3).

Подставляя решение $y = \psi(x)$ в виде (4.9) в ЛНУ (4.1), получаем только одну связь на n неизвестных функций $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Остается возможность разумным образом наложить еще $(n-1)$-у связь на эти функции, рассчитывая затем их однозначно определить из появившейся системы из n уравнений.

Идея выбора связей заключается в недопущении роста числа слагаемых в ходе нахождения производных функции $\psi(x)$, необходимых для подстановки их в ЛНУ.

Итак,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= C_1\varphi_1+\ldots+C_n\varphi_n,\\
\psi'(x) &= C_1\varphi_1'+\ldots+C_n\varphi_n'+\overbrace{C_1'\varphi_1+\ldots+C_n'\varphi_n}^{=0},\\
\psi''(x) &= C_1\varphi_1''+\ldots+C_n\varphi_n''+\overbrace{C_1'\varphi_1'+\ldots+C_n'\varphi_n'}^{=0},\\
&\vdots\\
\psi^{(n-1)}(x) &= C_1\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+C_n\varphi_n^{(n-1)}+\overbrace{C_1'\varphi_1^{(n-2)}+\ldots+C_n'\varphi_n^{(n-2)}}^{=0},\\
\psi^{(n)}(x) &= C_1\varphi_1^{(n)}\quad+\ldots+C_n\varphi_n^{(n)}\quad+C_1'\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'\varphi_n^{(n-1)},
\end{aligned}$$

т. е. в ходе дифференцирования ψ на $C_1',\ldots,C_n'$ была наложена ровно $(n-1)$-а связь.

Теперь для подстановки решения в уравнение домножим левую и правую части первого равенства на $p_n(x)$, второго — на $p_{n-1}(x)$ и так далее, предпоследнего — на $p_1(x)$ и последнего — на единицу, после чего все равенства сложим и приравняем к $q(x)$. В результате получим: $L\psi=C_1L\varphi_1+\ldots+C_nL\varphi_n+C_1'\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'\varphi_n^{(n-1)}=q$.

Но $L\varphi_j\equiv 0$ $(j=\overline{1,n})$, поскольку $\varphi_j(x)$ — решения ЛОУ (4.3).

Собрав вместе все связи на $C_1',\ldots,C_n'$, получим линейную неоднородную алгебраическую систему n уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{l}
C_1'\varphi_1(x)+\ldots+C_n'\varphi_n(x)=0\\
\vdots\\
C_1'\varphi_1^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'\varphi_n^{(n-2)}(x)=0\\
C_1'\varphi_1^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'\varphi_n^{(n-1)}(x)=q(x)
\end{array}\right. . \tag{4.10}$$

Определитель ее матрицы $\Phi(x)$, выписанный в (4.5), — это ОВ $W(x)$, который отличен от нуля при $\forall\, x\in(a,b)$, так как по условию $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решений.

Следовательно система (4.10) по формуле Крамера имеет единственное решение $C_j'=A_{nj}(x)\,q(x)/W(x)$ $(j=\overline{1,n})$, где A_{nj} — алгебраическое дополнение n-й строки и j-о столбца матрицы Φ. Согласно (4.9) частное решение $\psi(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{A_{nj}(s)}{W(s)}q(s)\,ds$ для $\forall\, x_0,x\in(a,b)$. $\square$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Пусть в ЛОУ (4.3) коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ постоянны, тогда оно имеет вид

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1). \quad (4.3^c)$$

При этом, очевидно, что любое решение уравнения (4.3^c) определено на всей вещественной оси.

Общее решение ЛОУ (4.3^c) с постоянными коэффициентами можно всегда найти в явном виде, в отличие ЛОУ (4.3) с произвольными непрерывными коэффициентами, структура общего решения которых исследована в § 2, ФСР существует, но отсутствуют способы гарантированного нахождения в явном виде решений из ФСР.

Для того чтобы решить ЛОУ (4.3^c), предварительно потребуются два технических результата.

Утверждение 1. *Функции* $x^{k_1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_n}e^{\lambda_n x}$, *где* $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $(k_j, \lambda_j) \neq (k_l, \lambda_l) \quad (j, l = \overline{1, n},\ j \neq l)$, *линейно независимы на* $\mathbb{R}^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя определению, покажем, что $\alpha_1 x^{k_1}e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n x^{k_n}e^{\lambda_n x} \overset{\mathbb{R}^1}{\equiv} 0$ верно только при $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$.

Приводя в этом тождестве подобные члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем

$$\sum\nolimits_{s=1}^{m} P^{(s)}(x) e^{\lambda_s^* x} \equiv 0 \qquad (1 \le m \le n), \qquad (4.11)$$

где $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ различны и любой коэффициент многочленов $P^{(s)}$ — какое-либо α_j из набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, так как пары (k_j, λ_j) различны.

Докажем методом математической индукции по m, что в тождестве (4.11) многочлены $P^{(1)}(x), \ldots, P^{(m)}(x) \equiv 0$, а значит, равны нулю все их коэффициенты, и набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ тривиален.

При $m = 1$ в (4.11) имеется одно слагаемое: $P^{(1)}(x)e^{\lambda_1^* x} \equiv 0$, поэтому $P^{(1)} \equiv 0$.

Предположим, что из (4.11) вытекает, что $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)} \overset{\mathbb{R}^1}{\equiv} 0$.

Рассмотрим тождество $\sum\nolimits_{s=1}^{m+1} P^{(s)}(x) e^{\lambda_s^* x} \equiv 0$.

После деления на $e^{\lambda^*_{m+1}}$ оно равносильно тождеству

$$\sum_{s=1}^{m} P^{(s)}(x)e^{(\lambda^*_s-\lambda^*_{m+1})x} + P^{(m+1)}(x) \equiv 0 \qquad (\lambda^*_s - \lambda^*_{m+1} \neq 0).$$

Продифференцировав его по x на один раз больше, чем степень многочлена $P^{(m+1)}(x)$, получим $\sum_{s=1}^{m} Q^{(s)}(x)e^{(\lambda^*_s-\lambda^*_{m+1})x} \equiv 0$, при этом все многочлены $Q^{(s)}(x)$ имеют ту же степень, что и $P^{(s)}(x)$, поскольку коэффициент при старшей степени $Q^{(s)}$ равен коэффициенту при старшей степени $P^{(s)}$ (какому-либо α_{j^s}), умноженному на $(\lambda^*_s - \lambda^*_{m+1})^{\mathfrak{m}+1}$.

По индукционному предположению все $Q^{(s)} \equiv 0$, следовательно все $P^{(s)} \equiv 0$, а тогда и все $P^{(m+1)} \equiv 0$. $\square$

При $n = 1$ ЛОУ (4.3^c) имеет вид $y' + a_1 y = 0$, а его общее решение $y = Ce^{-a_1 x}$. Поэтому, чтобы выяснить какие решения может иметь уравнение (4.3^c) при $n \geq 2$, подставим в него функцию $y = e^{\lambda x}$ с пока что произвольным показателем λ.

Чтобы $e^{\lambda x}$ оказалось решением, должно выполняться тождество

$$L^c e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} \equiv 0. \tag{4.12}$$

Df. *Функция* $g(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *называется характеристическим многочленом ЛОУ* (4.3^c), *а его нули или корни характеристического уравнения* $g(\lambda) = 0$ *называются характеристическими числами.*

По основной теореме высшей алгебры характеристическое уравнение имеет n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, причем комплексные корни могут появляться только комплексно сопряженными парами из-за предположения о вещественности коэффициентов уравнения.

Благодаря тождеству (4.12) ясно, что функции $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ являются решениями ЛОУ (4.3^c) тогда и только тогда, когда показатели $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа.

Кроме того, если характеристические показатели различны (у них всех кратность — единица), то набор $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ является ФСР, правда, не обязательно вещественной ЛОУ (4.3^c).

А что делать, если кратность k_0 какого-либо характеристического числа, обозначим его λ_0, окажется больше единицы? Как тогда набрать n линейно независимых решений?

Утверждение 2. *Пусть* λ_0 — *характеристическое число кратности* k_0, *тогда ЛОУ* (4.3^c) *имеет следующие линейно независимые решения:* $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k_0-1}e^{\lambda_0 x}$.

Доказательство. Согласно (4.12) $L^c e^{\lambda x} = g(\lambda)e^{\lambda x}$.

Продифференцируем это равенство k раз по λ, тогда в левой части с учетом линейности оператора L^c получим: $d^k(L^c e^{\lambda x})/d\lambda^k = L^c(d^k e^{\lambda x})/d\lambda^k) = L^c(x^k e^{\lambda x})$, а в правой части k-я производная произведения дает: $d^k(g(\lambda)e^{\lambda x})/d\lambda^k = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu\, g^{(\nu)}(\lambda)x^{k-\nu}e^{\lambda x}$.

В итоге

$$L^c(x^k e^{\lambda x}) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{k} C_k^\nu\, g^{(\nu)}(\lambda)x^{k-\nu}e^{\lambda x}. \tag{4.13}$$

Но $g(\lambda_0) = g'(\lambda_0) = \ldots = g^{(k_0-1)}(\lambda_0) = 0$, а $g^{(k_0)}(\lambda_0) \neq 0$, так как корень λ_0 имеет кратность k_0.

Поэтому при $\lambda = \lambda_0$ и $k = \overline{0, k_0 - 1}$ в (4.13) $L^c(x^k e^{\lambda_0 x}) = 0$. $\square$

Теорема (о ФСР ЛОУ с постоянными коэффициентами). *Пусть характеристическое уравнение ЛОУ* (4.3^c) *имеет корни* λ_j *кратности* k_j $(j = \overline{1, m})$. *Тогда ФСР уравнения* (4.3^c) *имеет вид:*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Предложенный набор содержит n функций $(k_1 + \ldots + k_n = n)$, они линейно независимы на $\mathbb{R}^1$ по утверждению 1 и являются решениями (4.3^c) по утверждению 2. $\square$

Замечание 2. Если ЛОУ (4.3^c) имеет вещественные коэффициенты, то комплексные решения из ФСР (4.14) следует овеществить, как это делается в лемме об овеществлении. В частности, если $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta$, то $\mathrm{Re}\,(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\mathrm{Im}\,(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 1. Рассмотрим ЛОУ второго порядка

$$y'' + \beta^2 y = 0 \qquad (\beta > 0),$$

описывающее свободные колебания математического маятника без трения, так как отсутствует слагаемое с y'.

Характеристический многочлен этого уравнения $g(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2$, характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm\mathbf{i}\beta$, ФСР образуют $e^{\mathbf{i}\beta x}, e^{-\mathbf{i}\beta x}$, а вещественную ФСР — $\cos\beta x, \sin\beta x$.

В результате общее вещественное решение имеет вид:

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}^1).$$

2^0. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (4.1^c)$$

в котором $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1$, а неоднородность $q(x) \in C((a,b))$.

Общее решение соответствующего (4.1^c) ЛОУ (4.3^c) известно — это линейная комбинация решений из ФСР (4.14). Поэтому частное решение ЛНУ (4.1^c) всегда может быть найдено в квадратурах методом вариации произвольной постоянной и явный вид общего решения ЛНУ (4.1^c) даст формула (4.8).

Однако метод вариации весьма громоздок. Согласно (4.9) частное решение приходится раскладывать в сумму из n произведений и в каждое произведение, помимо решений ЛОУ, входят функции $C_j(x)$, для вычисления которых требуется решать систему (4.10) и затем n раз интегрировать. При этом на практике после приведения подобных членов в формуле (4.9) формула частного решения существенно упрощается.

Существует еще один метод нахождения частного решения ЛНУ (4.1^c), не связанный со знанием ФСР ЛОУ и интегрированием, что является его несомненным достоинством. Это — метод неопределенных коэффициентов, при котором, зная только корни характеристического уравнения, удается указать структуру частного решения с точностью до тех самых неопределенных коэффициентов, задающих многочлены, входящие в искомое решение.

"Расплатой" за сравнительную простоту метода неопределенных коэффициентов является отсутствие универсальности.

Метод можно применять только в случае, когда неоднородность q имеет специальный вид: $q(x) = p(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $p(x)$ — многочлен, возможно, с комплексными коэффициентами.

Итак, рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = p(x)e^{\lambda x}, \qquad (4.15)$$

в котором λ_j — нуль характеристического многочлена кратности k_j $(j = \overline{1,m})$, многочлен $p(x) = \sum_{j=0}^{l} p_j x^j$.

Df. *Говорят, что в уравнении (4.15) имеет место резонанс порядка* k, *если* $\lambda = \lambda_k$ *кратности* k $(k = \overline{1,m})$, *и резонанс отсутствует (его порядок равен нулю), если* $\lambda \neq \lambda_j$ *для* $\forall\, j = \overline{1,m}$.

Теорема (о построении решения ЛНУ методом неопределенных коэффициентов). *Пусть показатель* λ *из правой части (4.15) совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* k. *Тогда существует и единственно частное решение ЛНУ (4.15)*

$$\psi(x) = x^k r(x) e^{\lambda x},$$

где $r(x) = \sum_{s=0}^{l} r_s x^s$ *— некий многочлен.*

Доказательство. Будем искать пока еще неопределенные коэффициенты r_s многочлена $r(x)$. Для этого подставим решение $y = \psi(x)$ в уравнение (4.15), получая тождество по x на $\mathbb{R}^1$

$$L^c\Big(\sum_{s=0}^{l} r_s x^{k+s} e^{\lambda x}\Big) \equiv \sum_{j=0}^{l} p_j x^j e^{\lambda x}. \tag{4.16}$$

Используя линейность L^c и равенство (4.13), преобразуем левую часть тождества (4.16): $L^c(\sum_{s=0}^{l} r_s x^{k+s} e^{\lambda x}) = \sum_{s=0}^{l} r_s L^c(x^{k+s} e^{\lambda x}) = \sum_{s=0}^{l} r_s \sum_{\nu=0}^{k+s} C_{k+s}^{\nu}\, g^{(\nu)}(\lambda) x^{k+s-\nu} e^{\lambda x}$.

Сокращая теперь в (4.16) обе части на $e^{\lambda x}$ и учитывая, что $g(\lambda) = g'(\lambda) = \ldots = g^{(k-1)}(\lambda) = 0$, а $g^{(k)}(\lambda) \neq 0$, получаем тождество

$$\sum_{s=0}^{l} r_s \sum_{\nu=k}^{k+s} C_{k+s}^{\nu}\, g^{(\nu)}(\lambda) x^{k+s-\nu} \equiv \sum_{j=0}^{l} p_j x^j, \tag{4.17}$$

в котором, как легко заметить, степень переменной x в обеих частях не превосходит l.

Приравняем в (4.17) коэффициенты при различных степенях x, начиная со старшей степени l.

Пусть в левой части степень икса $k+s-\nu = l$ или $k-\nu = l-s$.

Но $l \geq s$, поэтому $k \geq \nu$, а значит, $\nu = k$, откуда $s = l$.

В результате при x^l в (4.17) имеем равенство $r_l C_{k+l}^{k}\, g^{(k)}(\lambda) = p_l$, из которого однозначно находим коэффициент r_l.

Предположим теперь, что однозначно найдены коэффициенты $r_{l-1}, \ldots, r_{i+1}$ $(0 \leq i \leq l-1)$, и будем искать коэффициент r_i, стоящий при x^i.

Итак, пусть в левой части (4.17) $k+s-\nu=i$ или $k-\nu=i-s\le 0$, а значит, индекс s может принимать значения $i, i+1, \ldots, l$.

Если $s=i$, то $\nu=k$ и в левой части (4.17) при x^i имеется только одно слагаемое с таким s — это $r_i C_{k+i}^k\, g^{(k)}(\lambda)$. А если $s>i$, то в любое слагаемое множителем входит коэффициент r_s, который по индукционному предположению уже однозначно найден.

Следовательно при x^i из тождества (4.17) получаем равенство $r_i C_{k+i}^k\, g^{(k)}(\lambda)+h(r_{i+1},\ldots,r_l)=p_i$ с известной функцией h и из него однозначно находим коэффициент r_i. $\square$

Приведем два соображения, которые полезны при практическом нахождении частного решения ЛНУ (4.1^c).

Первое соображение обычно называют "принцип суперпозиции". Он применяется к уравнениям (4.1^c) вида

$$L^c y = q_0(x)+q_1(x)+\ldots+q_m(x) \qquad (m\ge 0) \tag{4.18}$$

и заключается в следующем: если ψ_j — частное решение уравнения $L^c y = q_j(x)$ $\quad (j=\overline{0,m})$, то функция $\psi(x)=\psi_0(x)+\ldots+\psi_m(x)$ будет частным решением уравнения (4.18).

Действительно, $L^c(\psi)=L^c(\sum_{j=0}^m \psi_j)=\sum_{j=0}^m L^c(\psi_j)=\sum_{j=0}^m q_j$.

Чтобы использовать этот принцип, произвольную неоднородность $q(x)$ разбивают в сумму неоднородностей $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_m(x)$, в которой для $\forall\, i=\overline{1,m}$ функции $q_i(x)$ имею вид неоднородности из правой части уравнения (4.15), т. е. $q_i(x)=p^{(i)}(x)e^{\lambda^{(i)}x}$, и частное решение $y=\psi_i(x)$ каждого из уравнений (4.15) ищется методом неопределенных коэффициентов, а частное решение уравнения $L^c y = q_0(x)$ ищется методом вариации произвольной постоянной. После этого все найденные решения складываются.

Разумеется, при $m\ge 1$ возможно, что $q_0(x)\equiv 0$.

Второе соображение связано с решением вещественных линейных неоднородных уравнений (4.1^c). Метод неопределенных коэффициентов в них применим для $q(x)=p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Введем $\tilde\lambda=\alpha+\mathbf{i}\beta$, $\tilde q(x)=(p_1(x)-\mathbf{i}p_2(x))e^{\tilde\lambda x}$. Тогда $q=\operatorname{Re}\tilde q$ и, если $y=\tilde\psi(x)$ — какое-либо частное (комплексное) решение уравнения $L^c y=\tilde q$, то функция $y=\operatorname{Re}\tilde\psi$ будет частным решением вещественного уравнения $L^c y = p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 2. Рассмотрим ЛНУ второго порядка

$$y'' + \beta^2 y = b\cos\omega x \qquad (\beta, \omega > 0,\ b \in \mathbb{R}^1), \tag{4.19}$$

описывающее вынужденные колебания математического маятника под воздействием $2\pi/\omega$-периодической возмущающей силы.

В примере 1 было найдено $2\pi/\beta$-периодическое общее решение $y = A\sin(\beta x + \theta)$ с $A = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(C_1/C_2)$ ЛОУ $y'' + \beta^2 y = 0$, имеющего характеристические числа $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\beta$.

Следуя изложенному выше соображениям, рассмотрим ЛНУ

$$y'' + \beta^2 y = be^{\mathrm{i}\omega x}, \tag{4.20}$$

вещественная часть неоднородности которого совпадает с правой частью уравнения (4.19).

Вид частного решения уравнения (4.20) зависит от величины ω.

1) $\omega \neq \beta$ — частота вынужденных колебаний не совпадает с частотой свободных колебаний, поэтому резонанс отсутствует.

Тогда частное решение уравнения (4.20) согласно теореме о построении решения ЛНУ методом неопределенных коэффициентов ищем в виде $\tilde\psi = ae^{\mathrm{i}\omega x}$.

Подставляя $\tilde\psi$ и $\tilde\psi'' = -a\omega^2 e^{\mathrm{i}\omega x}$ в (4.20), имеем $-a\omega^2 + a\beta^2 = b$, откуда $\tilde\psi(x) = b(\beta^2 - \omega^2)^{-1} e^{\mathrm{i}\omega x}$.

Выделяя вещественную часть $\tilde\psi$, находим общее решение (4.19) $y = A\sin(\beta x + \theta) + b(\beta^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega x$ — ограниченная функция x.

2) $\omega = \beta$ — частота вынужденных колебаний совпадает с частотой свободных колебаний, поэтому имеет место резонанс.

Тогда частное решение ЛНУ (4.20) надо искать в виде $\tilde\psi = axe^{\mathrm{i}\omega x}$.

Подставляя $\tilde\psi$ и $\tilde\psi'' = (2\mathrm{i}a\omega - a\omega^2)e^{\mathrm{i}\omega x}$ в (4.20), имеем $2\mathrm{i}a\omega = b$, откуда $\tilde\psi(x) = b(2\mathrm{i}\omega)^{-1} x e^{\mathrm{i}\omega x}$.

Выделяя вещественную часть $\tilde\psi$, находим общее решение (4.19) $y = A\sin(\beta x + \theta) + b(2\beta^2)^{-1} x\sin\beta x$ — не ограничено с ростом x.