1 Волновое уравнение

№ 1 Классификация уравнений второго порядка

Выглядят так

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{i,j} A^{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_i B^i\partial_i u + Cu = 0$$

В зависимости от собственных чисел A классифицируются

$$\begin{array}{lll} \text{эллиптический} & \Rrightarrow & \forall\, i \ :: \ \Lambda_i > 0 \\ \text{параболический} & \Rrightarrow & \exists\, j : \ \Lambda_j = 0, \quad \forall\, i \neq j \ :: \ \Lambda_i > 0 \\ \text{гиперболический} & \Rrightarrow & \exists\, j : \ \Lambda_j < 0, \quad \forall\, i \neq j \ :: \ \Lambda_i > 0 \end{array}$$

И их канонические формы

$$\begin{aligned} \square\, u = 0 &\quad \Rrightarrow \quad \text{волновое уравнение} \\ \Delta u = 0 &\quad \Rrightarrow \quad \text{уравнение Лапласа} \\ \left(-\partial_t + a^2\Delta\right) u = 0 &\quad \Rrightarrow \quad \text{уравнение теплопроводности} \end{aligned}$$

№ 2 Характеристические поверхности

Здесь непросто, потому что обычно характеристики определяют для уравнений первого порядка. А тут нужно как-то факторизовать.

Впрочем, можно сказать, что характеристическая поверхность — $(w_x, Aw_x) = 0$ Здесь $\xi = w(x, y)$, и для тех типов уравнений, что мы рассматриваем, верно

- $\omega \equiv \mathrm{const}$
- при замене переменных $\xi = \omega(x, y)$ член при $u_{\xi\xi}$ зануляется[1]

№ 3 Волновое уравнение

Уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x, 0) = \varphi_1(x) \end{aligned}$$

Решение Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

№ 4 Принцип Дюамеля

Основная мысль в том, чтобы научиться получать из решения однородного уравнения решение неоднородного неочевидным способом.

1. $\square\, P = 0$, $P(x, t, t) = 0$, $P_t(x, t, t) = f(x, t)$ (если существует)
2. $w = \displaystyle\int_0^t P(x, t, t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x, t)$

Для волнового уравнения $P = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\xi, t')\,\mathrm{d}\xi$

№ 5 Энергетическое неравенство

<+картиночка+>

1. Ω_t — срез конуса причинности (характеристическая поверхность волнового уравнения).
2. $E[u] = u_t^2 + a^2 u_x^2$

Само энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega_0} E[u]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_t} E[u]\,\mathrm{d}x$$

Отсюда можно заполучить единственность решения волнового уравнения.

№ 6 Формула Кирхгофа ($\mathbb{R}^3$)

$$u(x,t) = t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_1(y)\,\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_0(y)\,\mathrm{d}S\right)$$

Здесь видно, что что возмущения (начальные) влияют на решение только будучи на границе конуса прчинности. Получается, что волна не «запоминает» своё прошлое. То есть, возмущение приходит с волновым фронтом и уходит с ним.

Это не принцип Гюйгенса-Френеля (тот про функцию Грина), но тоже принцип Гюйгенса.

№ 7 Формула Пуассона ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{t^2}{2} \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x - y|^2}}\,\mathrm{d}y + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2} \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_0(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x - y|^2}}\,\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Здесь возмущение «чувствуется» даже после прохождения фронта. В каком-то смысле оно «размывается». Видимо, это и есть упомянутая диффузия?

2 Теплопроводность

№ 1 Вывод уравнения

1. Уравение неразрывности: $u_t = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}$
2. Связь потока с текущим веществом $\boldsymbol{F} \propto -\operatorname{grad} u$

$$u_t + a^2\Delta u = 0$$

Характерные множества

$$\begin{array}{lll} \text{параболический цилиндр } (Q_T) & \Rrightarrow & \Omega \times (0, T),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \text{параболическая граница } (\partial' Q_T) & \Rrightarrow & (\Omega \times \{0\}) \cup \partial\Omega \times [0; T] \end{array}$$

Для удобства $R_T := Q_T(\Omega = \mathbb{R}^n)$.

Разные задачи:

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(0; T) \cap C(\partial' R_T), \quad u(x, 0) = \varphi \tag{1}$$

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(0; T) \cap C(\partial' Q_T), \quad u\big|_{\partial' Q_T} = \varphi \tag{2}$$

№ 2 Закон сохранения

При довольно мутных условиях (что-то вроде в меру быстрого убывания u к бесконечности)

$$\mathcal{U}(t, R) := \int_{\mathcal{B}_R(0)} u(x, t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const}$$

№ 3 Ограниченный принцип максимума

$$\inf_{\partial' Q_T} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\partial' Q_T} u(x,t) \quad (\text{в } Q_T)$$

№ 4 Принцип максимума в полупространстве

Пусть u ограничена сверху[2]

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,t)$$

№ 5 Единственность

кажется, это очевидно следует из № 3, № 4.

№ 6 Автомодельные решения

- ▷ $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$
- ▷ $v(\xi) = c \displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\xi^2/4a^2}\,\mathrm{d}\xi$

№ 7 Функция источника (одномерье)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

№ 8 Функция источника (многомерье)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

№ 9 Свойства функции источника

1. $G(x,t) \in C^\infty$ при $t > 0$, $|x| > 0$
2. $G_t - a^2 \Delta G = 0$, при $t > 0$, $|x| > 0$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$ при $t > 0$
4. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G(x,t)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

G — функция Грина: $G(x,0) = \delta(x)$

№ 10 Формула Пуассона

Поставлена задача Коши:

$$\begin{gathered} \varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u_t - a^2 \Delta u = 0 \qquad (t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad (u(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi(x)) \end{gathered}$$

Решение имеет вид

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) G(y,t)\,\mathrm{d}y = \varphi * G$$

№ 11 Принцип Дюамеля

1. $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + a^2 \Delta\right) P = 0$, $P(x,t,t) = 0$, $P_t(x,t,t) = f(x,t)$
2. $w = \displaystyle\int_0^t P(x,t,t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x,t)$

Для уравнения теплопроводности

$$P(x,t,t') = \int_{\mathbb{R}^n} f(y,t')\, G(x-y, t-t')\,\mathrm{d}y$$

3 Уравнение Лапласа

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad -\Delta u = f \quad (\text{в } \mathbb{R}^n)$$ [3]

Разные задачи (по н.у.):

Дирихле $\Rightarrow$ $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$

Неймана $\Rightarrow$ $u_n\big|_{\partial\Omega} = \psi(x)$ $(u_n = (\nabla u, \boldsymbol{n} \text{ к } \partial\Omega))$

№ 1 Фундаментальное решение

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,|S_1|}\, \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geqslant 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & n = 2 \end{cases}$$

Тут $|S_1|$ — мера единичной сферы.

№ 2 Представление функции в виде суммы потенциалов

$$\begin{aligned} u(x) = &- \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_\Omega \frac{\Delta u(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}y \\ &- \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\partial\Omega} u(y) \left(\nabla_y \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}, \boldsymbol{n}\right) \mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{(n-2)\,|S_1|} \int_{\partial\Omega} \frac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} u = &-\{\text{объёмный потенциал}\} \\ &-\{\text{потенциал двойного слоя}\} \\ &-\{\text{потенциал простого слоя}\} \end{aligned}$$

№ 3 Интегральное представление гармонической функции

$$u(x) = \frac{-1}{(n-2)\,|S_1|} \left(\int_{\partial\Omega} u(y) \tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \tfrac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega} \tfrac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s \right)$$

№ 4 Теорема о среднем для гармонических функций

$$u \in C^2(U), \Delta u = 0 \Rightarrow \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \ :: \ \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y$$

№ 5 Обратная теорема о среднем

$$u \in C^2(U), \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \ :: \ \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y \Rightarrow \Delta u = 0$$

№ 6 Свойства гармонических функций

1. $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $\Delta u = 0 \quad \Rightarrow$
$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \quad (\text{принцип максимума})$$
2. 1, U связно, $\exists\, x_0 \in U :\ u(x_0) = \max u \quad \Rightarrow$
$$u \underset{U}{\equiv} \text{const} \quad (\text{сильный принцип максимума})$$

Единственность решения задачи Дирихле (почти очевидно).

№ 7 Свойства объёмного потенциала

Пусть $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $J[f] = \displaystyle\int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y$[4]

1. $J[f] \in C^2$
2. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \;\Rightarrow\; \Delta\, J[f] = 0$
3. $x \in \Omega \qquad \Rightarrow \quad \Delta\, J[f] = (n-2)|S_1|f(x)$

что весьма похоже на потенциалы из небмеха.

№ 8 Формула Пуассона

Сначала введём *ядро Пуассона:* $K(x,y)$. При этом $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$

1. $\Delta\, u = 0 \;\Rightarrow\; u = \displaystyle\int_{\partial\Omega} Ku$
2. $u = \displaystyle\int K\varphi \;\Rightarrow\; u \in C^\infty(\Omega),\; \begin{cases} \Delta\, u = 0 \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$

Конкретные случаи:

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \quad \Rrightarrow \; K(x,y) = \frac{2x_n}{|S_1|\,\|x-y\|^n} \text{ (плоскость)}$$

$$\Omega = \mathcal{B}_R(0) \quad \Rrightarrow \; K(x,y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{|S_1|\,\|x-y\|^n} \text{ (шар)}$$

№ 9 Решение задачи Дирихле в шаре

$$\Omega = \mathcal{B}_R$$
$$f \in C_c^2(\Omega), \quad \varphi \in C(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega);$$
$$u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad -\Delta\, u = f, \quad u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

1. $v = \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{|S_1|} \displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^n}\,\mathrm{d}y$
2. $w = \dfrac{1}{|S_1|\,(n-2)} \displaystyle\int_{\mathcal{B}} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}$
3. $u = v + w$

Дальше мутно

Заметки

1 У нас было всё наоборот, но так ещё непонятней что происходит

2 в Эвансе $\leqslant Ae^{a|x|^2}$, например

3 здесь "$-$" из-за того, что оператор Лапласа отрицательно определённый

4 где-то вообще требуют C^∞ (то же получают для J). У нас было C^1, но верится с трудом.