Что-то про теорвер в 3 семестре

Лектор: Р. ?. Пусев
Записал :taxus

14 января 2017 г.

Оглавление

Глава 1: Элементарная теория вероятностей

§ 1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 1 (σ-алгебра)**.** Алгеброй $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется такой набор его подмножеств с заданными операциями объединения, пересечения и дополнения множеств, что

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{X} \in \mathcal{A}$
3. $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X_1 \cup X_2$

Сигма-алгеброй подмножеств называется всё тоже самое, только можно объединять счётное число подмножеств.

Определение 2 (Вероятностное пространство)**.** Рассмотрим упорядоченную тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

Ω **—** Множество (элементарных исходов). Чисел, например.

$\mathcal{F}$ **—** σ — алгебра подмножеств Ω

P **—** Собственно, вероятность

Определение 3 (Вероятность)**.** $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ такая, что

1. $\forall A \;\; F(A) \geqslant 0$
2. $\forall \{A_i\}\colon A_i \cap A_j = \varnothing \;\; P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

Как видно, сильно похоже на площадь. Что впрочем неслучано, вероятность — нормированная мера. Последнее условие как раз и означает нормированность.

Определение 4 (Тривиальные события)**.** $\varnothing, \Omega$.

Утверждение 1. *Свйоства вероятности:*

1. $P(\varnothing) = 0$

2. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

А это очень важное и будет в отдельном утверждении.

Утверждение 2 (Непрерывность меры)**.** *Пусть* $A_1 \subset \cdots A_n \subset \cdot$, $\bigcup_i A_i = A$. *Тогда* $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

▼

Пусть

$$\begin{aligned} &B_1 = A_1 \\ &B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ &\cdots\cdots\cdot \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i; \;\; A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_n$$

Следовательно,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Всё работает, потому что в σ-алгебре можно объединять счётное число множеств.

▲

§ 2 Формула полной вероятности

ну мы же делим, нажо убедиться что неноль

Определение 1 (Условная вероятность)**.** Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. Тогда

$$P(B \mid A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Утверждение 1. *Пусть* $\{A_i, H\} \subset \mathcal{F}$ *и*

1. $P(A_i) > 0$

2. $A_i \cap A_j = \varnothing$

3. $\bigcup_i A_i = \Omega$

(полная группа/система событий). Тогда

$$P(H) = \sum_i P(A_i) \cdot P(H \mid A_i)$$

§ 3 Теорема Байеса

Теорема 1. *Пусть A_i — полная система событий, $H \in \mathcal{F}$: $P(H) > 0$. Тогда*

$$P(A_k \mid H) = \frac{P(A_k) \cdot P(H \mid A_k)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(H \mid A_i)}$$

§ 4 Независимые события

Определение 1. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Они называыются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Утверждение 1. *События A, B независимы $\Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A) \vee P(B \mid A) = P(B)$ (в зависимости от того, что определено, вдруг там ноль где-нибудь).*

Утверждение 2. *Если A, B несовместны, то нетривиальные A, B — зависимы.*

§ 5 Случайные величины и их распределения

Определение 1 (Случаная величина)**.** Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Тут нужно бы сказать про измеримость, это потребуется, чтобы говорить о вероятности попадания в интервал на прямой. Так что

$$X\colon \left(X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}\right) \in \mathcal{F},$$

где B — борелевское множество

тут вроде концы могут входить, так что точка — тоже борелевское множество.

Определение 2. Пусть $B \subset \mathbb{R}$, B — промежуток, или дополнение в нему (борелевское множество).

$$P(X \in B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Определение 3. Случайная величина называется дискретной, если

$$\exists\, (\{a_i\} \sim \mathbb{N})\colon \left(\sum_i P(X = a_i) = 1\right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i,\ p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists\, (f_X\colon B \to \mathbb{R})\colon \left(P(X \in B) = \int\limits_B f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Определение 5 (Распределение случайной величины)**.** $F(B) = P(X \in B)$

Пример 1 (К непрерывному распределению)**.** Пусть $X(\omega) = \omega$, $B = (0,1)$, $\Omega = (-1;1)$. Выберем $f_X \equiv \frac{1}{2}$.

$$F(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \mid \omega \in (0,1)\}) = P\big((0,1)\big) = \tfrac{1-0}{1+1} = \tfrac{1}{2}$$

$$F(B) = \int\limits_{(0,1)} \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1-0}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Это всё верно, потому что на множестве интервалов вероятность — нормированная длина интервала.

Определение 6 (Функция распределения)**.**

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0;1]\colon\ F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$$

Утверждение 1. *Про $F(x)$ верно следущее:*

1. $F \uparrow \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$

Утверждение 2. *Верно и обратное: если существует функция с указанными свойствами, под неё найдётся случайная величина.*

Замечание. Если рассматривать обобщённые функции, то любое распределение запишется как

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u$$

§ 6 Моменты случайных величин

Определение 1. Пусть X — случайная величина,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Тогда

$$\langle x\rangle \equiv \bar{x} \equiv \mathrm{M}\,X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Утверждение 1. *Свойства матожидания:*

1. $\mathrm{M} < \infty$
2. $\mathrm{M}(aX + bY) = a\,\mathrm{M}\,X + b\,\mathrm{M}\,Y$
3. $P(X \geqslant 0) = 1 \Rightarrow \mathrm{M}\,X \geqslant 0$
4. $\begin{cases} P(X \geqslant 0) = 1 \\ \mathrm{M}\,X = 0 \end{cases} \Rightarrow P(X = 0) = 1$
5. *если* X, Y *— независимы, то* $\mathrm{M}(XY) = \mathrm{M}\,X \cdot \mathrm{M}\,Y$

Определение 2. Момент k-ого порядка относительно начала a:

$$\lambda_{k,a} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

(если есть абсолютная сходимость)

Определение 3. Начальный момент: $\nu_k = \lambda_{k,0}$

Определение 4. Центральный момент: $\mu_k = \lambda_{k,\bar{x}}$

Утверждение 2. $\nu_k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i \lambda_{k-i,a}$

Определение 5 (Дисперсия)**.** $\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2$, $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\,X}$ — среднеквадратичное отклонение.

Утверждение 3.
$\mathrm{D}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{D}\,X + b^2\,\mathrm{D}\,Y$
если X, Y *— независимы, то* $\mathrm{D}(XY) = \mathrm{D}\,X \cdot \mathrm{D}\,Y$
$\mathrm{D}(X + C) = \mathrm{D}\,X$

§ 7 Характеристическая функция

Определение 1 (Характеристическая функция)**.** $\Phi(t) = \mathrm{M}\,e^{itx}$

Утверждение 1. *Свойства характеристической функции:*

1. *Всегда существует и* $|\Phi(t)| \leqslant 1$.

2. $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Phi(t)\,dt$

3. $\Phi_{a+Xb}(t) = e^{ita}\Phi_X(tb)$

4. *Если* X, Y *— независимы, то* $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$

5. *Если* $\mathrm{M}\,|X|^n < \infty$*, то* $\Phi^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{M}\,X^k$

Определение 2 (Сходимость по распределению)**.** $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \to F(x)$

Теорема 2 (О непрерывном соответствии)**.** $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \Phi_{X_n}(t) \underset{t}{\rightrightarrows} \Phi_X(t)$*. Здесь на самом деле всё сложно. В разных книжках пишут равномерную сходимость на разных интервалах. У нас вроде было на всей вещественной прямой, но тогда это слишком сильное утверждение. К слову так же в [1] и [2]. А вот в [3] требуют только сходимости в каждом конечном интервале. Можно взять экспоненту, и понять, что эти условия разные.*

§ 8 Случаные векторы

Определение 1 (Случаная величина)**.** Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. См. примечание про измеримость в § 5. Борелевские множества можно рассматривать и в $\mathbb{R}^n$, как наименьшую сигма-алгебру, содержащую все полуоткрытые параллелепипеды.

Так же можно считать, что случайный вектор — набор случайных величин.

Определение 2 (Функция распределения)**.**

$$F_X\colon \mathbb{R}^n \to [0;1]\colon\ F_X(x) = P(X^1 < x^1, \ldots, X^n < x^n)$$

То есть вероятность попадания в параллелепипед, уходящий в бесконечность.

Замечание 1. Тут как раз используется, что борелевские множества «прямоугольные».

Утверждение 1. *Про* $F(x)$ *верно следущее:*

1. F *не убывает по каждому аргументу.*

2. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x) = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ *(по совокупности переменных) Это следует из непрерывности меры.*

тоже важно, так что отдельно

Утверждение 2. *Пусть $a^1 < b^1, \dots, a^n < b^n$, тогда работает формула включений и исключений*

$$F(b^1, \dots, b^n) - \sum_i F(b^1, \dots, a^i, \dots, b^n) + \dots + F(a^1, \dots, a^n) = P(x \in [a^1, b^1) \times [a^n, b^n))$$

По сути следствие формулки про вероятность объединения.

Определение 3. Векторная случайная величина называется дискретной, если

$$\exists\,(\{a_i \mid a_i \in \mathbb{R}^n\} \sim \mathbb{N})\colon \left(\sum_i P(X = a_i) = 1\right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i,\ p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Векторная случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists\,(f_X\colon B \to \mathbb{R})\colon \left(P(X \in B) = \int\limits_B f_X(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n\right)$$

Замечание 1. Для функций распределения:

$$F(x^1, \dots, x^n) = \int\limits_{-\infty}^{x^n} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x^1} f_X(x^1, \dots, x^n)\,\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Утверждение 3. *Пусть X, Y — независимы. Тогда $p_{X+Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$*

▼

По определению функции распределения

$$F_{X,Y}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Из независимости X, Y

$F_{X,Y}(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(\omega \mid X(\omega) \in (-\infty; x] \cap \omega \mid Y(\omega) \in (-\infty; y] = P(\omega \mid X(\omega) \in (-\infty; x]) \cdot P(\omega \mid Y(\omega) \in (-\infty; y]) = P(X$

А тогда из независимости подынтегральных функций

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} p_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_X(x) \cdot p_Y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

А дальше можно заметить, что нам неважно по какому множеству интегрировать.

$$\int\limits_B (p(x, y) - p_X(x) \cdot p_Y(y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

Здесь правда всё ломается на отсутствии непрерывности у p. Но если она есть, то дальше стандартное рассуждение в окрестности точки где не 0.

▲

§ 9 Функция от случайного вектора

Определение 1 (Функция от случайного вектора)**.** $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Здесь нужно снова говорить про измеримость g — прообраз борелевского множества должен быть борелевским множеством. Иначе $g(X)$ может не получиться случайной величиной. Но всякие мерзкие отображения всё равно никому не нужны ⌣̈.

Утверждение 1. *Пусть X — дискретная случайная величина, f — обратима, $Y = g(X)$, $b_j = f(a_j)$. Тогда $P(Y^i = b^i_j) = P(X^i = a^i_j)$.*

▼

$$P(Y^i = b^i_j) = P(f(X^i) = f(a^i_j)) = P(\omega \mid f(X^i(\omega)) = f(a^i_j))$$

Поскольку f — обратима, она биективна. Значит $f(X) = f(a_j) \Leftrightarrow X = a_j$. Собственно, всё.

▲

Утверждение 2. *Пусть X — непрерывная случайная величина, f — обратима, $Y = g(X), f^{-1} = g$. Тогда $p_y(y) = p_X(g(y)) \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right|$.*

▼

Пусть $D = f(B)$. Тогда $P(Y \in D) = P(X \in B)$ опять-таки в силу биективности f. Ну, ничего нового туда попасть не может и у всего есть прообраз. Так что (здесь будем рисовать один значок интеграла из экономии размера пдф-ки, хотя в этом замечании данных может и больше)

$$\int\limits_D \langle p_Y(y)\, \mathrm{d}y\rangle = \int\limits_B \langle p_X(x)\mathrm{d}x\rangle = \int\limits_D \langle p_X(g(y)) \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\right|\rangle$$

Якобиан тут под модулем, так как множество неориентированное. Я верю, что нам ещё про это расскажут на матане.

▲

§ 10 Матожидание и дисперсия суммы случайных величин

Утверждение 1. *Пусть $X, Y, n \in (A \sim \mathbb{N})$ — две дискретные независимые случайные величины. Тогда*

$$P(X+Y=n) = \sum_{k\in A} P(X=n-k)\cdot P(Y=k)$$

▼

Из формулы полной вероятности ($Y=k, k\in A$ правда полная группа)

$$P(X+Y=n) = \sum_{k\in A} P(X+Y=n \mid Y=k)\cdot P(Y=k) = \sum_{k\in A} P(X=n-k \mid Y=k)\cdot P(Y=k)$$

А вот тут уже поможет независимость X, Y.

$$\dots = P(X=n-k)\cdot P(Y=k)$$

▲

Утверждение 2. *Пусть $X_1, X_2, n \in \mathbb{R}$ — две непрерывные независимые случайные величины. Тогда*

$$p_{X_1+X_2}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} p_1(y-t)p_2(t)\,\mathrm{d}t$$

▼

Пусть $Y = X_1 + X_2$. Тут видно, что нет биекции, придется руками что-то делать.

$$F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} p(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x_1\int\limits_{-\infty}^{y} p(x_1,u-x_1)\,\mathrm{d}u$$

слишком много раз пользовались на физике, так что оставим на 4 семестр

Переменные независимы, так что можно поменять местами интегралы (ещё же по области интегрируем, неважно как) А тогда, убирая внешний интеграл из определения функции распределения, получаем

$$p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(t, y-t)\,\mathrm{d}t$$

Поскольку X_1, X_2 независимы, то $p(t,y-t) = p_1(t)\cdot p_2(y-t)$. Нумерация никого не интересует, так что

$$p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(y-t)\cdot p_2(t)\,\mathrm{d}t$$

▲

Теперь можно перейти и к содержанию билета

Утверждение 3. $\mathrm{M}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathrm{M}\, X_i$. *Да и вообще оно линейно.*

▼

Пусть $f(X, Y) = X + Y$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(X+Y) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{M}\,X + \mathrm{M}\,Y\end{aligned}$$

Покажем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y = p_X(x)$

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y &= F(x,+\infty) = P(X<x, Y<+\infty) = P(\omega \mid X(\omega)\in(-\infty,x], Y\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) \\ &= P(X<x) = F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Опять-таки интервал можно сжать как угодно, правда снова проблемы с непрерывностью.

Часть про константу слишком очевидна, не будем её доказывать.

▲

Утверждение 4 (Дисперсия суммы)**.** $\mathrm{D}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathrm{D}\, X_i$

▼

Сначала заметим, что $\mathrm{D}\,X = \mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X)^2$, $\mathrm{M}(X - \mathrm{M}\,X) = \mathrm{M}\,X - \mathrm{M}\,X = 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X+Y) &= \mathrm{M}\big(X+Y-M(X+Y)\big)^2 = \mathrm{M}\big((X-\mathrm{M}\,X)+(Y-\mathrm{M}\,Y)\big)^2 = \mathrm{M}(X-\mathrm{M}\,X)^2 + \mathrm{M}(Y-\mathrm{M}\,Y)^2 + 2\,\mathrm{M}(X-\mathrm{M}\,X)\,\mathrm{M}(Y-\mathrm{M}\,Y) \\ &= \mathrm{D}\,X + \mathrm{D}\,Y\end{aligned}$$

▲

Утверждение 5. *Если X, Y — независимы, то* $\mathrm{M}\,XY = \mathrm{M}\,X\,\mathrm{M}\,Y$

▼

▲

§ 11 Матожидание функции случайной величины

Определение 1. $\mathrm{M}\, f(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\,\mathrm{d}x$. В случае чего он многомерный, просто прикидывается. Существует, если есть абсолютная сходимость.

Утверждение 1. *Матожидание функции линейно*

Утверждение 2. *Если X, Y — независимы, то* $\mathrm{M}\, f_1(X_1)f_2(X_2) = \mathrm{M}\, f_1(X_1)\,\mathrm{M}\, f_2(X_2)$

§ 12 Неравенство Шварца

Утверждение 1. $(\mathrm{M}\, XY)^2 \leqslant \mathrm{M}\, X^2\, \mathrm{M}\, Y^2$

▼
$\mathrm{M}(X+tY)^2 = t^2\,\mathrm{M}\, Y^2 + 2t\,\mathrm{M}\, XY + \mathrm{M}\, X^2 \geqslant 0$ из свойств матожидания. Ну там и подынтегральная функция положительна. Тогда квадратное уравнение в правой части может иметть не более одного корня.

$$(2\,\mathrm{M}\, XY)^2 - 4\,\mathrm{M}\, X^2\,\mathrm{M}\, Y^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (\mathrm{M}\, XY)^2 \leqslant \mathrm{M}\, X^2\,\mathrm{M}\, Y^2$$

▲

Литература

[1] Чернова Н.И. Теория вероятностей.

[2] Ширяев А.Н. *Вероятность*. М.: Наука, 1980.

[3] Пономаренко Л.С. Прохоров Ю.В. *Лекции по теории вероятности и математической статистике*. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Московского университета, 2012.