§ 1 ⚒Интеграл от комплексной дифференциальной формы

здесь надо сильно больше определений

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z-a| < \varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0 < |z-a| < \varepsilon\}$. Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в $\mathbb{R}^2$. Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f\colon G \to C$, непрерывна, $f = f_1 + if_2$, $\omega(z, \mathrm{d}z) = f(z)\mathrm{d}z$ — комплексная дифференциальная форма. Пусть $\Gamma \subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int\limits_\gamma := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t := \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2)\mathrm{d}t + \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1)\mathrm{d}t$$

Свойства:

Утверждение 1. *см* **??**

Утверждение 2. *Пусть $\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$, $z_i = \gamma(t_i)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - zi$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\xi_i = \gamma(\tau_i)$. Пусть ещё*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta z_i$$
$$r = \max|\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

Следствие 1. *Пусть $|f(z)| \leqslant M \;\; \forall z \in \Gamma$*

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\cdot\ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)|\cdot|\Delta z_i| \leqslant M\cdot\sum_i|\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

```
.........................
{censored by galactic vimperor}
.........................
```

§ 42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

§ 46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a.

Теорема 1. *Пусть a — полюс первого порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z\to a} f(z)$$

Теорема 2. *Пусть a — ноль первого порядка для ψ, $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. *Пусть a — полюс p-го порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!}\bigg((z-a)^p f(z)\bigg)^{(p-1)}_{z=a}$$

§ 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I⟩ Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции g sin / cos заменены на $\frac{1}{2}\left(z \pm z^{-1}\right)$

II$\rangle$ Интеграл от рациональной функции на $\mathbb{R}$

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leqslant \deg Q - 2$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

III$\rangle$ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = I$

Пусть $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на $\mathbb{R}$. Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана)**.** *Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

§ 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение $f\colon G \to H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f\colon G \to G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. *Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу* $\operatorname{Aut} G$.

▼

Пусть $f, g, h \in \operatorname{Aut} G$. Тогда $f \circ g\colon G \to G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f(g(h(x))) = \big((f \circ g) \circ h\big)(x)$
- $\forall f\ \exists f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, $\Rightarrow$ конформно и однолистно.
- $\mathrm{id}\colon G \to G$ — конформно и однолистно.

▲

Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$

2. $\mathbb{C}$

3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $G \cong$ одной из классических областей*

1. $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$

2. $G = \overline{\mathbb{C}}\ \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$

3. $G = \overline{\mathbb{C}}\ U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}$, $|U| > 1$

§ 56 Лемма Шварца

§ 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \operatorname{Aut} G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall\, z_1, z_2 \in G \ \ \exists\, f \in \Gamma\colon\ f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, Γ — транзитивна. Пусть к тому же $\exists\, z_0\colon$ $\operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma$. Тогда $\Gamma = \operatorname{Aut} G$.*

▼

Выберем произвольный $f \in \operatorname{Aut} G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности G $\exists \gamma \in \Gamma\colon \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma \circ f \in \operatorname{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$. Но тогда

$$\forall\, f \in \operatorname{Aut} G \ \ f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in\Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in\Gamma} \in \Gamma$$

▲

§ 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь всё константы по умолчанию $\in \mathbb{C}$.

Теорема 1. $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\}$

$\square$ Пусть

$$\Gamma = f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для $\mathbb{C}$ хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен $\operatorname{Stab}\infty$. Нам нужно чтобы $\infty \mapsto \infty$. А значит $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Но из теоремы 0.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что $\operatorname{Stab}\infty < \Gamma$. А тогда по лемме 0.57.1 $\Gamma = \operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ ■

Теорема 2. $\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

$\square$ Пусть $A = U(\infty)$. Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть ∞ — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого $f(A)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. А значит в $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$ есть точка из $f(A)$ — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть ∞ — устранимая особая точка. Но тогда в кольце $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \cdots + c_0$$

Но $f \in \operatorname{Aut} G \Rightarrow f$ голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в ∞ — полюс. Но тогда $f(z)$ — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени n имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. ■

Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев $f(1/z)$ в $U(0)$

Теорема 3. $\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

$\square$ Опять рассмотрим Γ как в условии и покажем, что $\Gamma = \operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Надо сначала показать хотя бы, что $\Gamma < \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

$$\left| e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) > 0$$

Так что при $|z| < 1 \wedge |a| < 1$ это верно.

Дальше легко найти обратное к $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1}\frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta}a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \\ f_2(z) &= \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \\ a &= \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}} & |a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1 \\ f_2(f_1(z)) &= e^{i\theta_2}\frac{e^{i\theta}z - e^{i\theta}a_2 - a_1 + a_1\bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \end{aligned}$$

Осталось показать оба условия из леммы 0.57.1

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Будем строить так: $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \qquad f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \qquad f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на $f \in \operatorname{Stab} 0$. По лемме Шварца $\forall\, z \in D\ |f(z)| \leqslant |z|$. Поскольку $\operatorname{Stab} 0$ — группа, $\exists\, f^{-1}$ и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leqslant |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

   А тогда по второму пункту леммы Шварца $f(z) = cz$, $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$. Следовательно, $\operatorname{Stab} 0 < \Gamma$. Тогда по уже упомянутой лемме $\Gamma = \operatorname{Aut} \mathbb{D}$

$\blacksquare$