

# Глава 1: Кинематика точки

## § 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть  $V$  — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли,  $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$ ,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь  $a^k$  — коэффициенты разложения по  $\mathbf{e}_k$  — называются контравариантными координатами.

Пусть  $V^*$  — сопряжённое к  $V$ , его базисом являются координатные функции  $f_k :: f_k(\mathbf{x}) = x^k$ . Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм  $V \rightarrow V^*$ . Нам, правда, потребуется  $V^* \rightarrow V$ .

Введём ещё одну систему *векторов* в  $V$ :  $\mathbf{e}^k = f_k^*$ , то есть  $f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{x}$ . Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в  $V^*$ . Линейную независимость легко получить из ЛНЗ  $f_k$ , а раз их  $\dim V$ , то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.
- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

Ещё можно определить  $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$ , и перенести это на соответствующие линейные формы. Обобщая дальше, можно вообще сказать, что  $g_i^k = \delta_{ik}$ . Тогда  $g$  будет задавать действие формы на вектор. Вроде физикам это зачем-то надо.

А после тирады выше уже развлекаться с индексами.

**Утверждение 1.**  $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{kj}$

▼

Следует из определения координатной функции, ведь  $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{x} = f_k(\mathbf{x})$

▲

**Утверждение 2.**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a^i b_i$

**Утверждение 3.** Пусть  $\mathbf{r} = \sum_k \xi^k \mathbf{e}_k$  и  $u = \sum_k \xi_k \mathbf{e}^k$ . Тогда  $\xi_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi^j g_{jk}$

▼

Ну,  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi_j \delta_{jk} = \xi_k$ . Вроде всё.

▲

Аналогичная ситуация с  $\xi^k$ .

**Утверждение 4.**  $\xi^k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^k = \sum_j \xi_j g^{jk}$ .

**Утверждение 5.**

$$\mathbf{e}^k = \sum_j g^{jk} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_k = \sum_j g_{jk} \mathbf{e}^j$$

▼

Первое домножить на  $\mathbf{e}^i$ , второе на  $\mathbf{e}_i$ .

▲

**Утверждение 6.**  $\sum_i g^{il} g_{ik} = \delta_{lk}$

▼

$$\sum_i g^{il} g_{ik} = \sum_i g^{il} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}^l \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{lk}$$

▲

Как видно, когда определения безкоординатные, жизнь прекрасна!. <sup>2</sup>

## Глава А: Обозначения

$f$  — линейная форма.

$\langle \mathrm{mathrm f} \rangle$

<sup>2</sup>тут не опечатка, а отсылка к известной картинке ;)

$\boldsymbol{x}$  — вектор.

$\langle \mathbf{x} \rangle$