

## § 8 Кольцо линейных операторов

**Определение 1.** Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ . Пусть также  $\varphi: V \rightarrow V$ , и  $\varphi$  — линейное отображение. Тогда  $\varphi$  — линейный оператор.

**Определение 2** (Сложение и умножение операторов). Введём 2 операции:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V \wedge (\psi + \varphi)(x) = \psi(x) + \varphi(x) \\ \circ: V \times V &\rightarrow V \wedge (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Множество эндоморфизмов  $\text{End}(V)$  с операциями, определёнными в 0.8.2 — кольцо.

**Теорема 2.** Пусть  $\dim V = n$ . Тогда

$$(\text{End}(V), \circ, +) \cong (M_n(K), \cdot, +)$$

□ Пусть  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ ,  $A, B \in M_n(K)$ . Выберем базис в  $V$  и рассмотрим отображение  $f: \varphi \mapsto A_\varphi$ , композиция переходит в умножение матриц, сложение — в сложение матриц.

Такое отображение обратимо, действительно,

$$\forall A \in M_n(K) \quad (\omega(x) := Ax) \in \text{End}(V)$$

А значит  $f$  — биекция.

Пусть в выбранном базисе  $\varphi(x) = Ax$ ,  $\psi(x) = Bx$ . Уже доказывали, что матрица, соответствующая композиции  $\psi\varphi$ , равна  $BA$ . Теперь разберёмся с матрицей суммы

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = Ax + Bx = (A + B)x$$

То есть, в фиксированном базисе  $(\varphi + \psi)$  соответствует  $A + B$ .

Таким образом, раз базис выбирали произвольно, то в любом базисе  $V$ .

1.  $f$  — биекция.
2.  $f(\varphi + \psi) = A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = f(\varphi) + f(\psi)$
3.  $f(\varphi\psi) = A_{\varphi\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = f(\varphi) \cdot f(\psi)$

Следовательно,  $f$  — изоморфизм. ■

**Определение 3.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A$  — матрица  $\varphi$  в фиксированном базисе,  $p \in K[t]$ . Тогда

$$p(\varphi)(x) = a_k \varphi^l(x) + \cdots + a_1 \varphi(x) + a_0 p(A) = a_k A^l + \cdots + a_1 A + a_0$$

**Лемма 3.** Если в некотором базисе  $\varphi$  имеет матрицу  $A$ , то в том же базисе  $f(\varphi)$  имеет матрицу  $f(A)$ .

**Лемма 4.** Многочлены от одного и того же оператора и его матрицы в фиксированном базисе коммутируют.

▼

По сложению оно все коммутативно. В слагаемых переставлять нужно степени одного и того же. Циклические группы обычно абелевы.

▲

## § 12 Инвариантные подпространства

**Определение 1.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $W$  — подпространство  $V$ . Тогда если  $\varphi(W) \subset W$ , то  $W$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $V$ .

**Лемма 1.** Пусть:

- $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$
- $W_i$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство
- базис  $V$  разбивается на базисы  $W_i$ .
- $\varphi|_{W_i} \in \text{End}(W_i)$
- В фиксированном базисе  $A_i, A$  — матрицы  $\varphi_i, \varphi$  соответственно.

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

▼

Можно рассмотреть один такой «блок». Если сверху/снизу него не ноли, то с инвариантностью проблемы.

▲

### § 13 Характеристический многочлен оператора

**Определение 1.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A$  — его матрица в выбранном базисе. Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$$

**Утверждение 1.** *Какой бы базис не выбрали в  $V$ , характеристический многочлен не изменится.*

▼

Матрицы оператора во всевозможных базисах подобны. Единичная матрица не поменяется при смене базиса. А определители подобных матриц равны.

▲

#### Свойства

1.  $\deg \chi_\varphi = n$
2. Пусть  $\chi_\varphi(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \\ a_{n-1} &= (-1)^n (a_{11} + \dots + a_{nn}) \end{aligned}$$

**Определение 2.**  $\text{Tr } A = a_{11} + \dots + a_{nn}$

3.  $A \sim A' \Rightarrow \text{Tr } A = \text{Tr } A'$

### § 20 Корневые подпространства

**Определение 1.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in K$ <sup>1</sup> Корневой вектор — такой вектор  $x$ , что

$$\exists k \in \mathbb{N}: (\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = 0$$

**Определение 2.** Корневое подпространство — множество всех корневых векторов для данного числа  $\lambda$ . Обозначается  $V(\lambda)$ .

**Утверждение 1.**

$$\lambda \in \text{Spec } \varphi \Rightarrow V_\lambda \subset V(\lambda)$$

**Лемма 2.** Пусть  $\psi \in \text{End}(V)$ ,  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ . Пусть также  $k \in \mathbb{N}$  — минимальное  $k$ , что  $\psi^k(x) = 0$ . Тогда

$$\{x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)\} \text{ — линейно независимы}$$

---

<sup>1</sup>У меня тут в конспекте баг, а у вас?

▼

Пусть оно линейно зависимо. Тогда

$$\exists \beta_i \neq 0: \beta_0 x + \beta_1 \psi(x) + \dots + \beta_{k-1} \psi^{k-1}(x) = 0$$

Пусть  $\ell$  — наименьший индекс  $\beta$  не равного нулю. Тогда если применить к обеим частям предыдущего равенства  $\psi^{k-1-\ell}$ , то

$$0 + \dots + 0 + \beta_\ell \psi^{k-1}(x) + 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow \beta_\ell = 0$$

А таким методом можно получить что все  $\beta_i = 0$ . (?!?)

▲

**Утверждение 3.**

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid (\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0\}, \quad n = \dim V$$

▼

Больше размерности линейно независимых векторов не наберёшь.

▲

## § 21 Сумма корневых подпространств

**Лемма 1.** Пусть  $f, g \in K[t]$ ,  $(f, g) = 1$ . Тогда

$$(f(\varphi)(x) = g(\varphi)(x) = 0) \Rightarrow x = 0$$

**Теорема 2.** Пусть  $\text{Спек } \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ ,  $n = \dim V$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^m V(\lambda_i)^n \text{ — прямая}$$

□ Воспользуемся тут критерием прямой суммы. Докажем, что  $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$ . Хорошо, пусть это не так. Выберем  $x$  из этого пересечения. Тогда  $x = \sum_{i \neq j} x_j$ , где  $x_j \in W_j$ .

Рассмотрим:

$$f(\varphi) = \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \text{id})^n$$

Тогда

$$\forall j \quad f(\varphi)(x_j) = 0 \Rightarrow f(\varphi)(x) = 0$$

В нём попросту найдётся нужное корневое число.

С другой стороны,

$$g(\varphi)(x) = (\varphi - \lambda_i)^n(x) = 0$$

А поскольку  $f, g$  — взаимно просты, то по лемме 0.21.1  $x = 0$ . ■

А вот тут начинается совсем жестище...

## § 22 Про инвариантность корневых подпространств

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Спес } \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в  $\mathbb{C}$  заберёмся)

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{k_i}$$

Тогда:

$$1. V = \bigoplus_{i=1}^m V(\lambda_i)$$

$$2. V(\lambda_i) - \varphi\text{-inv.}$$

□ Соорудим  $i$  многочленов

$$f_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j}$$

Они все взаимно просты. Тогда есть такое линейное представление  $\text{id}$  :

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_m f_m)(\varphi) = \text{id}$$

посчитаем такую штуку для каждого  $x \in V$ .

Пусть

$$W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$$

Тогда

$$\text{id}(V) = W_1 + \dots + W_m = V$$

а) Докажем, что  $W_i - \varphi\text{-inv.}$  Там многочлены в процессе коммутируют, мы это доказывали в [0.11.4](#)

$$\begin{aligned} \varphi(W_i) &= \varphi(h_i f_i(\varphi)(V)) = (\varphi \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi))(V) \\ &= (h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi))(\varphi(V)) = (h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi))(V) = W_i \end{aligned}$$

б) Докажем, что  $W_i \subset V(\lambda_i)$ . Пусть  $y \in W_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} y &= (h_1(\varphi) f_1(\varphi))(x) \\ (\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i}(y) &= ((\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i} h_1(\varphi) f_1(\varphi))(x) \\ &= h_i(\varphi) \cdot \underbrace{((\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i} f_1(\varphi))}_{\chi_\varphi(\varphi)=0}(x) = 0 \end{aligned}$$

Так как корневые подпространства — подпространства  $V$ , то

$$V \supset \bigoplus_{i=1}^m V(\lambda_i) \Rightarrow \dim V \geq \sum_{i=1}^m \dim V(\lambda_i)$$

С другой стороны,

$$\dim \sum_{i=1}^m W_i \leq \sum_{i=1}^m \dim W_i$$

При этом

$$W_i \subset V(\lambda_i) \Rightarrow \dim W_i \leq \dim V(\lambda_i)$$

Так что

$$\dim V = \dim \sum_{i=1}^m W_i \leq \sum_{i=1}^m \dim W_i \leq \sum_{i=1}^m \dim V(\lambda_i) \leq \dim V$$

■

### § 23 Размерность корневого подпространства

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Спес } \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в  $\mathbb{C}$  заберёмся)

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{k_i}$$

Тогда:

1.  $\dim V(\lambda_i) = k_i$
2.  $\varphi_i = \varphi|_{V(\lambda_i)}$  имеет единственное собственное число  $\lambda_i$ .

□

2 Пусть  $\mu$  — собственное число  $\varphi_i$  не равное  $\lambda_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi - \mu \text{id})(x) &= 0 \\ (\varphi - \lambda_i \text{id})^n(x) &= 0 \\ ((t - \mu), (t - \lambda_i)^n) &= 1 \end{aligned}$$

А по лемме 0.21.1  $x = 0$ . А тут что-то не так.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Собственные числа есть, так как любой характеристический многочлен приводим в  $\mathbb{C}$ . А тогда  $\det(A - \lambda E_n) = 0 \Rightarrow \text{rk}(A - \lambda E_n) < n$ . Тогда и размерность  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id})$  не ноль. Значит, ненулевой вектор там есть.

- 1 Так как мы уже доказали, что пространство — прямая сумма корневых, то его базис разбивается на базисы корневых подпространств.

$$\underbrace{\underbrace{e_1^1, \dots, e_{s_1}^1}_{\text{базис } V(\lambda_1)}, \dots, \underbrace{e_1^n, \dots, e_{s_n}^n}_{\text{базис } V(\lambda_m)}}_{\text{базис } V}$$

мы когда-то (0.12.1) доказали, что матрица  $\varphi$  в таком случае выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(t) &= \det(A - tE_n) = \det(A_1 - tE_{n_1}) \cdots \det(A_m - tE_{n_m}) = \\ &= \chi_{\varphi_1}(t) \cdots \chi_{\varphi_m}(t) \end{aligned}$$

Что может входить в  $\chi_{\varphi_i}$ ?  $(t - \lambda_j), j \neq i$  там точно нет из второго пункта. Но часть  $t - \lambda_i$  в него не входить не может, иначе мы просто не наберём нужную степень в  $\chi_\varphi(t)$ . Так что

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (t - \lambda_i)_i^k$$

Но

$$s_i = \dim V(\lambda_i) = \deg \chi_{\varphi_i}(t) = k_i$$

■

## §§ 24–25 Жорданова нормальная форма

Сначала пара определений

**Определение 1** (Относительная линейная независимость). Пусть  $W$  — подпространство  $V$ ,  $e_1, \dots, e_s \in V$ . Тогда  $\{e_i\}$  ЛНЗ относительно  $W$ , если

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s \in W \Rightarrow \forall \alpha_i = 0$$

Или (эквивалентная формулировка) объединение с базисом подпространства линейно независимо в  $V$ .



**Определение 2** (Относительный базис). Пусть  $W$  — подпространство  $V$ . Тогда дополнение базиса  $W$  до базиса  $V$  называется базисом  $V$  относительно  $W$

Или, что тоже самое, они относительно линейно независимы и их линейная оболочка с  $W$  равна  $V$ .

**Лемма 1.** *Относительно линейно независимую систему можно дополнить до относительного базиса.*

может это 1-ая  
корректность?

Теперь что известно:

- $V$  - линейное пространство над  $K$ ,  $\dim V = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$
- $\text{Спес } \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ .
- $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{k_i}$
- $V = \bigoplus_{i=1}^m V(\lambda_i)$
- $\dim V(\lambda_i) = k_i$
- $A_i$  — матрица  $\varphi|_{V(\lambda_i)}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

**Определение 3** (ЖНФ). Такая форма записи матрицы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

где  $J_i$  — жорданова клетка

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

**Определение 4** (Жорданов базис). Базис, в котором матрица линейного оператора выглядит, как в 0.25.3

Рассмотрим  $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$ . Тогда

$$V_\lambda = \begin{array}{c} \text{Ker } \psi \\ \parallel \\ W_1 \end{array} \supset \begin{array}{c} \text{Ker } \psi^2 \\ \parallel \\ W_1 \end{array} \supset \dots \supset \begin{array}{c} \text{Ker } \psi^\ell \\ \parallel \\ W_\ell \end{array} = V(\lambda)$$

Во всей этой процедуре будем ещё базисы  $W_j$  искать

- $s_\ell$  векторов на первой ступеньке — базис  $W_\ell$  относительно  $W_{\ell-1}$ , то есть что добавилось на последнем шаге.
- Все ступеньки выше  $r - 1$  — базис  $W_\ell$  относительно  $W_{r-1}$
- На каждом шаге считаем  $\psi$  от всего, что было на предыдущей ступеньке и добавляем векторов, чтобы выполнялось предыдущее условие.

**Лемма 2.** На  $r$ -ой ступеньке лежат векторы из  $\text{Ker } \psi^r$ .

▼

По индукции:

**База:** Векторы на  $\ell$ -ой ступеньке из  $\text{Ker } \psi^\ell$ .

**Переход:**  $x \in \text{Ker } \psi^{r+1} \Rightarrow \psi(x) \in \text{Ker } \psi^r$ . А оставшиеся векторы добираются из  $W_r = \text{Ker } \psi^r$

▲

**Лемма 3** (Корректность поиска базиса). После дополнения до базиса относительно  $W_{r-1}$  система будет ЛНЗ относительно  $W_{r-2}$ .

▼

Пусть оно линейно зависимо относительно  $W_{r-2}$ . Тогда

$$\sum_{i=r}^{\ell} \left( \sum_{j=1}^{s_i} \alpha_j^i x_j^i \right) + \sum_{j=1}^{s_r} \beta_j \psi(x_j^r) = w \in W_{r-2} \quad (1)$$

1) не все  $\alpha_j^i = 0$

Пусть  $t$  — наибольший номер этажа на котором есть ненулевые  $\alpha_i^t$ .

Применим  $\psi^{t-1}$  к обеим частям равенства (1).

Второй член уберётся совсем, ведь  $t \geq r$ . Правая часть пропадёт по тем же причинам. А вот от первого слагаемого левой останется кусок (это не весь, ещё штуки вида  $x^{t-k}$  есть, но они пока не нужны):

$$\sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t \psi^{t-1}(x_j^t) = 0 \Rightarrow \psi^{t-1} \left( \sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t \right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t \in W_{t-1}$$

В итоге оно линейно зависимо над  $W_{t-1, t-1} > r-2$  а мы тут неявно предполагали по полной индукции, что нет.

2) все  $\alpha_j^i = 0$  Тогда просто применяем  $\psi^{r-1}$  к (1). Выйдет, что

$$\psi^{r-1} \left( \sum_{i=1}^{s_r} \beta_j x_j^r \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s_r} \beta_j x_j^r \in W_{r-1}$$

Но в таком случае снова проблемы с индукционным предположением.

▲

Теперь рассмотрим циклическое подпространство

$$N_x = \langle x, \psi(x), \dots, \psi^{\ell-1}(x) \rangle$$

Пусть  $B_{N_x}$  — матрица  $\psi|_{N_x}$ . Тогда можно понять, как она выглядит:

[illegible]

Тогда блок жордановой формы выглядит так:

$$J_i = \begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{vmatrix}$$

где  $\lambda_i$  — собственное число.