

Конспект по анализу за 3 семестр

Лектор: А. А. Лодкин

Записал :taxus

8 января 2017 г.

Оглавление

1	Анализ в \mathbb{R}^n	2
§ 1	Оценка приращения дифференциального отображения	2
§ 2	Частные производные высших порядков	3
§ 3	Обобщение бинома	4
§ 4	«Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных	4
§ 5	Понятие экстремума, необходимое условие	5
§ 6	Про квадратичные формы	6
§ 7	Достаточное условие экстремума	7
§ 8	Полнота пространства \mathbb{R}^n	7
§ 9	Теорема о сжимающем отображении	8
§ 10	Метод Ньютона	9
§ 11	Теорема об обратном отображении(формулировка)	10
§ 12	Доказательство теоремы об обратимости	10
§ 13	Теорема о дифференцируемости обратного отображения	12
§ 14	Теорема о гладкости обратного отображения	12
§ 15	Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов	13
§ 16	Теорема о неявном отображении	13
§ 17	Функциональная зависимость системы функций	15
§ 18	Геометрический смысл ранга матрицы Якоби	16
§ 19	Три способа локального задания поверхности	16
§ 20	Условный экстремум(нестрого)	17
§ 21	Доказательство теоремы об условном экстремуме	18
2	Криволинейные интегралы	19
§ 1	✂Интеграл от дифференциальной формы по пути	19
§ 2	Точные формы	21
§ 3	Замкнутые формы	22
§ 4	Первообразная замкнутой формы вдоль пути	22
§ 5	✂Гомотопия путей	23
3	Комплексный анализ	24
§ 1	✂Интеграл от комплексной дифференциальной формы	24
§ 42	Классификация изолированных особых точек	25
§ 46	Вычисление вычетов в полюсах	25
§ 47	Вычисление интегралов с помощью вычетов	25
§ 55	Классические односвязные области. Теорема Римана	26
§ 56	Лемма Шварца	27
§ 57	Лемма о подгруппе группы автоморфизмов	27
§ 58	Аutomорфизмы классических областей	27
	Использованная литература	28

Глава 1: Анализ в \mathbb{R}^n

§ 1 Оценка приращения дифференциального отображения

Утверждение 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Тогда формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

не работает.

Е.г. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), \quad b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения). Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, G — выпуклое, f — дифференцируема,

$$\forall x \in G \quad \|f'(x)\| \leq M$$

Тогда $\forall a, b \in G \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где ²

$$\begin{array}{lll} \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists c \in [0, 1]: F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leq \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$dL(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, \ell \rangle, \|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leq M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

²Вот тут как раз нужна выпуклость, иначе отрезок $[a; b]$ может и не лежать в G

§ 2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in G \exists \partial_{i_1, \dots, i_k}^k f(x)$. Тогда

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{k+1} f(x) := \partial_{i_{k+1}} (\partial_{i_1, \dots, i_k}^k f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p -го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p -го порядка от перестановки переменных). Пусть $f \in C^p(G), x \in G$. При этом

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

Тогда $\partial_i^p f(x) = \partial_j^p f(x)$

□ Сначала докажем всё для $p = 2, n = 2$, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Пусть $(x, y) \in G, (x_0 + \Delta x, y) \in G, (x, y + \Delta y) \in G, (x + \Delta x, y + \Delta y) \in G$ Введём ещё 2 функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t, y + \Delta y) - f(t, y) \\ \psi(t) &= f(x + \Delta x, t) - f(x, t) \end{aligned}$$

Тогда $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(c_1) \Delta x = W, c_1 \in [x, x + \Delta x]$. При этом

$$W = \varphi'(x) \Delta x \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \Delta x \Delta y, c_2 \in [y, y + \Delta y]$$

Аналогично

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) \Delta x \Delta y, c_4 \in [y, y + \Delta y], c_3 \in [x, x + \Delta x]$$

По непрерывности второй производной f ($f \in C^2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) &\xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) &\xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned}$$

По теореме о предельном переходе в равенствах \smile смешанные производные равны.

Теперь поймём, что делать в случае произвольных p, n .

Представим подстановку π как произведение транспозиций соседних элементов. Будем дальше разбираться с такими транспозициями.

Пусть $\tau_k = (j, j + 1)$. Сначала посчитаем производные по $x_1, \dots, x_{j-1} = i'$. А теперь обозначим $\tilde{f} = \partial_{i'} f$. По доказанному утверждению для двух переменных, $\partial_{j,j+1} \tilde{f} = \partial_{j+1,j} \tilde{f}$. А теперь продифференцируем это равенство по оставшимся переменным.

Таким образом, для произвольной транспозиции $\tau_k = (j, j + 1)$ верно утверждение теоремы. А значит, и для произвольной подстановки $\pi = \prod_k \tau_k$ теорема верна. ■

Замечание 1. Тут важно, что $f \in C^p(G)$. Одной точки бы не хватило, мы ведь рассматриваем маленький параллелепипед в $U(x)$ и используем одномерную теорему Лагранжа внутри него. А для неё нужна дифференцируемость на интервале.

§ 3 Обобщение бинома

«Обычный» бином Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Его нетрудно обобщить до полинома Ньютона

$$(a_1 + \dots + a_n)^p = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n a_{i_1} \dots a_{i_p} = \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0, \dots, p\} \\ \sum \alpha_i = p}} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \cdot C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

Введём обозначения:

- $a = (a_1, \dots, a_n)$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, по сути вектор индексов, для которого вводится своя куча обозначений, дабы упростить жизнь
 1. $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i=1}^n$
 2. $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
 3. $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
- $a^\alpha = \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$
- $\partial_\alpha = \partial_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n = \frac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}}$
- $C_\alpha = C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

Утверждение 1. $C_\alpha = \frac{p!}{\alpha!}$

▼

Ну, это просто число перестановок с повторениями. Нужно взять по множителю из p скобок, причём перестановки одинаковых множителей входят в одно слагаемое. В итоге нужно делить общее число перестановок на число перестановок одинаковых множителей. А дальше можно сказать, что в каждое слагаемое входит каждый множитель, просто некоторые в нулевой степени.

▲

§ 4 «Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$. Тогда

$$d^p f(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

Или ещё можно вот так записать

$$\left(\sum_i dx_i \partial_i \right)^p f(x)$$

Утверждение 1. Если частные производные можно переставлять, то

$$d^p f(x) = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_i \leq p \\ |\alpha| = p}} \frac{p!}{\alpha!} \partial_\alpha f(x) dx^\alpha$$

Теорема 2. Пусть $f \in C^{p+1}(G)$, $G \in \mathbb{R}^n$, G — выпуклая, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n$: $a+h \in G$. Тогда

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. В форме Пеано: $R_p(h) = o(\|h\|^p)$

2. В форме Лагранжа: $R_p(h) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0, 1)$

□ Рассмотрим $\varphi(t) = a + th$, $t \in [0, 1]$, $F(t) = f(\varphi(t))$, $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. По одномерной теореме Тейлора

$$F(1) = F(0) + 1 \cdot F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) 1^2 + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) \cdot 1^p + R_p$$

Докажем, что $F^{(k)}(0) = d^k f(a, h)$. Проще всего по индукции, давайте ещё такое нестандартное обозначение введём: $(k) = (1, \dots, k)$, и будем понимать под $i_{(k)}$ вектор индексов, а под $h_{i_{(k)}}$ — произведение соответствующих h .

база: $F(0) = f(a)$

переход: Пусть $F^{(k-1)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n} \partial_{i_{(k-1)}} f(a + th) h_{i_{(k-1)}}$. При дифференцировании по t

всякие h_{i_j} в каждом слагаемом вынесутся за знак производной, а частная производная от f даст $\sum_{i_k} \partial_{i_{(k)}} f(a + th) h_{i_k}$. Если скомпоновать все суммы и подставить $t = 0$, как раз получается $d^k f(a, h)$

Теперь разберёмся с остатком

$$R_p = \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta) \cdot 1^{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} d^{(p+1)} f(a + \theta h, h)$$

Поскольку $\forall i \ |h_i| \leq \|h\|$

$$d^{(p+1)} f(a + \theta h, h) = O(\|h\|^{p+1}) = o(\|h\|^p)$$

Следовательно, $R_p = o(\|h\|^p)$ ■

§ 5 Понятие экстремума, необходимое условие

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что f имеет в a максимум (нестрогий), если

$$\exists U(a): \forall x \in U \ f(x) \leq f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколота, то максимум — строгий. Для минимума нужно \geq .

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). Пусть a — внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если f имеет в a экстремум, то

$$df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \ \partial_i f(a) = 0$$

□ Рассмотрим $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Тогда у такой функции есть экстремум в a_i . А тогда, из одномерной теоремы Ферма $d\varphi_i(t) = 0$. А значит $\partial_i f = 0$ ■

§ 6 Про квадратичные формы

Определение 1. ¹ Функция $A: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, где V — векторное пространство, называется *билинейной формой*, если она линейна по обоим своим аргументам.

Определение 2. Билинейная форма A называется *симметрической*, если $\forall x, y \quad A(x, y) = A(y, x)$.

Определение 3. Пусть A — билинейная форма, e_1, \dots, e_n — базис в векторном пространстве. Тогда

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n A(e_i, e_j) x^i y^j$$

и матрица A , элементы которой $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы.

Определение 4. Пусть A — симметрическая билинейная форма. Тогда $A(x) = A(x, x)$ — *квадратичная форма*. При этом $A(x, y)$ называется *полярной формой* по отношению к $A(x)$.

Определение 5. Матрица квадратичной формы — матрица соответствующей полярной формы.

Определение 6 («Определённость» формы). Если что-то верно, то про форму $A(x, y)$ говорят:

- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) > 0$ — положительно определена
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) < 0$ — отрицательно определена
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) \geq 0$ — полуопределена в положительном смысле
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) \leq 0$ — полуопределена в отрицательном смысле

Е.г. Скалярное произведение — положительно определённая билинейная форма.

Теорема 1. Пусть в некотором базисе f_1, \dots, f_n квадратичная форма A имеет матрицу (a_{ij}) . Пусть к тому же все «северо-западные» миноры Δ_i отличны от нуля. Тогда существует базис e_1, \dots, e_n , в котором матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

□ По сути, нам нужно построить ортогональный базис, только вместо скалярного произведения используется билинейная форма A (причём не обязательно положительно определённая). За подробностями см. [4]. ■

Теорема 2 (Правило Сильвестра). Квадратичная форма положительно определена, если все миноры из теоремы 1.6.1 положительны, и отрицательно определена, если их знаки чередуются, начиная с «-».

□ Следствие предыдущей теоремы. Определённость формы не зависит от выбора базиса. ■

¹тут изложение больше по [4]

§ 7 Достаточное условие экстремума

Теорема 1 (Достаточное условие экстремума). Пусть $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка, $f \in C^2(a)$.

1. $df(a) = 0$, $d^2f(a, h) > 0 \Rightarrow f$ имеет в a \min
2. $df(a) = 0$, $d^2f(a, h) < 0 \Rightarrow f$ имеет в a \max
3. $df(a) = 0$, $d^2f(a, h) \leq 0 \Rightarrow$ ничего нет
4. $df(a) = 0$, $d^2f(a, h) \leq 0 \Rightarrow f$ не имеет в a \min
5. $df(a) = 0$, $d^2f(a, h) \geq 0 \Rightarrow f$ не имеет в a \max

□ Поскольку $df(a) = 0$, $\Delta f(a) = \frac{1}{2}(d^2f(a) + \alpha)$, где $\alpha = o(\|h\|)$. Для упрощения жизни примем $t = \frac{h}{\|h\|}$. Тогда приращение функции можно переписать в виде

$$\Delta f = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \sum b_{ij} t_i t_j + \frac{\alpha}{\|h\|^2} \right)$$

Поскольку $\frac{\alpha}{\|h\|^2} \rightarrow 0$, существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ в которой знак приращения определяется лишь первым слагаемым. Нетрудно заметить, что все значения t лежат на единичной сфере, которая компакт. Причём значения t покрывают всю сферу, ведь направление h можно выбирать в окрестности a произвольно. Так что можно просто сделать второе слагаемое меньшим минимума квадратичной формы на единичной сфере.

Таким способом можно расправиться с пунктами 1–2.

Для пункта 3 отыщем $h_1: d^2(a, h_1) > 0$, $h_2: d^2(a, h_1) < 0$. Заметим, что если A — квадратичная форма, то $A(h) > 0 \Rightarrow \forall s \ A(sh) = s^2 A(h) > 0$. По сути, мы считаем значение формы вдоль прямой, проходящей через a . Если, как и выше, записать приращение в виде

$$\Delta f = s^2 \left(\frac{1}{2} d^2(a, h_{1|2}) + \frac{\alpha}{s^2} \right)$$

то видно, что можно получить в окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ всё, что угодно, просто $s \rightarrow 0$.

4–5 легко доказываются от противного. ■

§ 8 Полнота пространства \mathbb{R}^n

Определение 1. Последовательность (x_n) называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall m, n > N \ \rho(x_n - x_m) < \varepsilon$$

Определение 2. Метрическое пространство (X, ρ) — полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится

Е.г. $\mathbb{R} \setminus 0$ — не полное метрическое пространство, $x_n = 1/n$ тому пример.

Замечание 1. Если (X, ρ) — полно, то X вообще-то замкнуто. Хорошо видно на примере выше.

Замечание 2. Если (X, ρ) — полно, $Y \subset X$ — замкнуто. Тогда и Y — полно.

Утверждение 1. \mathbb{R}^n — полное метрическое пространство.

▼

◁ произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho(x_n - x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \rho(x_m^i e_i - x_n^i e_i) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad |x_m^i - x_n^i| < \varepsilon$$

Таким образом $(x_n^i) \in \mathbb{R}$ — фундаментальная. А в \mathbb{R} по теореме из первого семестра фундаментальные последовательности сходятся. Тогда $\forall x_n^i \rightarrow a^i$. Значит и $x_n \rightarrow a$.

▲

Кусок дальше не шибко нужен

Давайте введём метрику на пространстве непрерывных функций

Определение 3. Пусть $f, g, h \in C([a; b])$. Тогда

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$$

Здесь супремум можно заменить на максимум по теореме Вейерштрасса.

Докажем что это правда расстояние:

- $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ — очевидно
- $\rho(f, g) \geq 0$ — тоже очевидно
- $\rho(f, g) = \rho(f, h) + \rho(h, g)$ — не так очевидно

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)| &= |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \\ &\leq \max_{x \in [a; b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a; b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f, h) + \rho(h, g) \end{aligned}$$

Утверждение 2. Пространство $C([a; b])$ с указанной выше метрикой полно.

▼

Поточечная сходимость очевидна из полноты \mathbb{R} . А равномерную можно получить, устремив m к ∞ , зафиксировав n . А из равномерной сходимости следует непрерывность предельной функции.

▲

Замечание. Если взять в качестве метрики $\int_a^b |f - g|$, то полнота ломается. Пополнение будет пространством суммируемых функций.

§ 9 Теорема о сжимающем отображении

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда отображение $T: X \rightarrow X$ называется сжимающим, если

$$\exists C \in (0, 1): \forall x', x'' \quad \rho(T(x'), T(x'')) \leq C \cdot \rho(x', x'')$$

Теорема 1 (Банах). Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а отображение $T: X \rightarrow X$ — сжимающее. Тогда $\exists! x_* \in X: Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x_*$$

□ ▷ $x_n = T^n x_0$, где $x_0 \in X$ — произвольное. Докажем, что

1. $x_n \rightarrow x_*$
2. $Tx_* = x_*$
3. других таких x_* нет.

Поехали

1. (x_n) сходится в себе, ведь $C \in (0, 1)$.

$$\rho(x_m, x_{m+p}) \leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \dots + \rho(x_{m+p-1}, x_{m+p}) \leq \rho(x_0, x_1) C^m (1 + \dots + C^{p-1}) < \rho(x_0, x_1) \frac{C^m}{1-C} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

раз пространство полное, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

2. отображение T непрерывно $\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_*$. Но по теореме о подпоследовательности и единственности предела $Tx_* = x_*$.

3. Пусть x_{**} — другая неподвижная точка. Но тогда

$$\rho(x_{**}, x_*) = \rho(Tx_{**}, Tx_*) \leq C \rho(x_{**}, x_*) \Rightarrow (C - 1) \rho(x_{**}, x_*) \geq 0 \xRightarrow{C < 1} \rho(x_{**}, x_*) = 0$$

■

§ 10 Метод Ньютона

Пусть $f \in C([a; b])$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$. Сам метод выглядит как-то так: Проводится касательная к графику в текущей точке, ищется её пересечение с осью x , отсюда восстанавливается перпендикуляр, пересечение которого с графиком — новая точка.

$$x - Tx = \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Докажем, что это вообще работает.

Теорема 1. Пусть $f \in C^2([a; b])$, $x_* \in [a; b]$:

$$a) f(x_*) = 0$$

$$b) f'(x_*) \neq 0$$

Тогда $\exists U(x_*) : \forall x_0 \in U$, такая что $T^n x_0 \rightarrow x_*$ и $x_{n+1} - x_* = O((x_n - x_*)^2)$

□ Сначала оценим T' .

$$T'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(f \in C^2)} \frac{f(x_*)f''(x_*)}{f'(x_*)^2} = 0$$

Так что $\exists U(x_*) : c \in \bar{U} \Rightarrow |T'(c)| \leq 1/2$.

Теперь покажем, что $T(\bar{U}) \subset \bar{U}$. Из вышесказанного

$$|Tx - Tx_*| \leq \frac{1}{2}|x - x_*| \quad (1.1)$$

Поскольку $Tx_* = x_* - 0 = x_*$, то (1.1) равносильно

$$|Tx - x_*| \leq \frac{1}{2}|x - x_*|$$

А это как раз то, что надо. Значит T как раз сжимающее отображение, и по теореме 1.9.1 такой $x_* : f(x_*) = 0$ единственный.

Вторая часть тривиально получается из разложения f в ряд Тейлора в окрестности x_n . ■

§ 11 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать F^{-1} . Рассмотрим, например, линейное отображение.

[illegible]

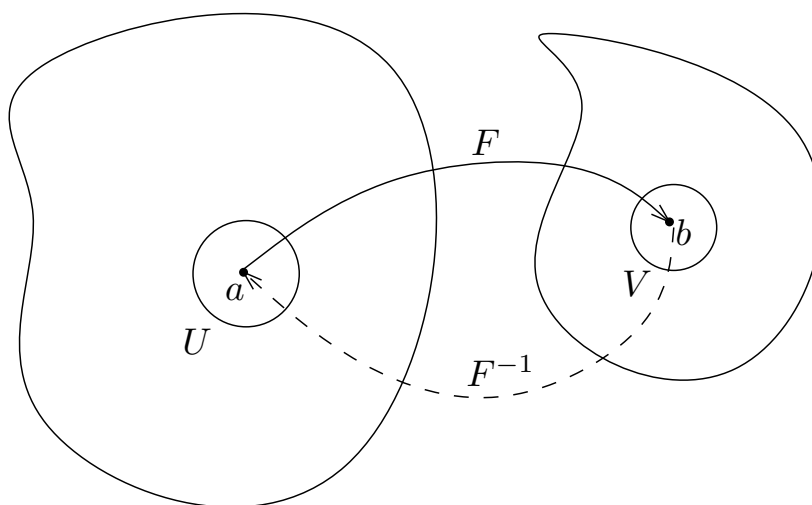
Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists U(a), V(b) : F : U \leftrightarrow V$$



$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \quad (1.1)$$

$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \quad (1.2)$$

$$\mathrm{d}F(a) = \mathrm{d}y(b) \tag{1.3}$$

Условие разрешимости (1.3) — $\det(F'(a)) \neq 0$. Утверждается, что у (1.1) условие разрешимости такое же.

Соответственно, формулировка

Теорема 1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $b = F(a)$. Пусть ещё F дифференцируема в a , $\det(F'(a)) \neq 0$

Tогда

$$\exists U(a), V(b) : F : U \leftrightarrow V$$

$$\exists F^{-1}: V \rightarrow U, F^{-1} \in C^0$$

§ 12 Доказательство теоремы об обратимости

□ (Теорема об обратимости отображения) Введём обозначения:

$$F'(a) = \Gamma$$

$$\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y)$$

Нетрудно заметить, что x — неподвижная точка $\Phi \Leftrightarrow F(x) = y$. Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (1.9.1). Тогда отображение в окрестности a будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$.¹ Попутно примем $\|y - b\| < \delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

$$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

$$\|\Phi'(x)\| \leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|(F'(a) - F'(x))\|$$

Последний множитель явно $\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (так как $F \in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\| \rightarrow 0$. А значит найдётся $U_{\varepsilon_0}(a)$: $\|\Phi'(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

Тогда по теореме 1.1.2

$$x, x' \in U_{\varepsilon_0}(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри U_{ε_0} компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\exists \overline{U}: \Phi(\overline{U}) \subset \overline{U}$$

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - a\| &= \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\| \\ &\leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot (\underbrace{\|-(F(x) - F'(a)(x - a) - F(a))\|}_{\alpha} + \|y - b\|) \end{aligned}$$

Выберем произвольный ε : $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Однако мы ещё можем подкрутить ε_1 .

$$\exists U_{\varepsilon_1}: \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (1.4.2), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда ε , а не ε_1 .

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\dots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x - a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x - a\| \leq \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_{\varepsilon}}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_{\varepsilon}(a) \subset \overline{U_{\varepsilon}}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists! x_0 \in \overline{U_{\varepsilon}}(a): \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность a с прообразом $V(b): U = F^{-1}(V) \cap U_{\varepsilon}(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность, за счёт произвольно выбранного ε :

$$\forall U_{\varepsilon} \exists V_{\delta}(b): F^{-1}(V_{\delta}) \subset U_{\varepsilon}$$

■

¹Тут y фиксируется и от x не зависит. Так что $y' = 0$

§ 13 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

Теорема 1 (о дифференцируемости F^{-1}). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F: U \leftrightarrow V$. Пусть также F дифференцируема в $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. Тогда F^{-1} дифференцируемо в b .

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцируемости F

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha, \quad \alpha = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k)$ ($k \rightarrow 0$)

$$A\beta \leq \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leq \frac{\|h\|}{\left| \|Ah\| - \|\alpha\| \right|} = \frac{1}{\left| \frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|} \right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$

■

Следствие. $(F^{-1})'(b) = (F'(a))^{-1}$

§ 14 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 1. Пусть $F: U \leftrightarrow V$, биективна, $\in C^p$. Пусть к тому же $\det F'(x) \neq 0$. Тогда $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$

$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \frac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$ (здесь \mathcal{A} — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что b_{ij} — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \dots, a_{kl}, \dots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(F(x)) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \dots, a_{kl}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = (\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)})(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные F^{-1} принадлежат C^i . Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бо́бром мы доберёмся до C^p . Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. ■

§ 15 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

Теорема 1. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет n корней (x_j^0) , $x_j^0 \in \mathbb{R}$, таких что $\forall i, j \ x_i^0 \neq x_j^0$. Пусть ещё старший коэффициент $= 1$. Тогда

$$x_i = x_i(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n x_1 \cdots x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= (-1) \sum_i x_i \end{aligned}$$

Рассмотрим P как отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$.

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\det(F')$. Этот определитель можно рассмотреть как многочлен $\in R[x_1, \dots, x_n]$. Его степень не превосходит $0+1+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что если хоть какая-то пара столбцов равны, то определитель равен нулю. Так что $\det(F')$ делится на всевозможные многочлены вида $x_i - x_j$. А их как раз $\frac{n(n-1)}{2}$ и они неприводимые. Следовательно, ¹

$$\det(F')(x_1, \dots, x_n) = C \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой.

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

§ 16 Теорема о неявном отображении

Определение 1. Пусть $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ². Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$ такие, что $F(x^0, y^0) = 0$.

Тогда если $\exists P(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, $Q(y^0) \subset \mathbb{R}^m$, такие что

$$\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0$$

то говорят, что уравнение (1.1) задаёт неявную функцию $f: P \rightarrow Q$.

Сначала всякие комментарии.

[illegible]

¹Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

²В доказательстве потом весело пользуются, что функция действует в пространство той же размерности, что и y

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases} dF_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ dF_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j} dy_j = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_j} dx_j. \end{cases} \quad (1.2)$$

При этом dy_j мы хотим выразить через dx_j . Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1. $k = m$
2. $\det \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right) \neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (1.2) \Rightarrow (1.1).

Теорема 1 (Теорема о неявном отображении). Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F \in C^p$, $p \geq 1$.

$$F(x, y) = 0, \quad (x_0, y_0) \in G$$

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists P(x_0), Q(x_0)$, такие, что (1.1) задаёт неявное отображение $f: P \rightarrow Q$. При этом $f \in C^p$ и

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

□ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [1, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1. $\Phi: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Работает как-то так:

$$(x, y) \mapsto (u, v), \quad \begin{cases} u = x, & u \in \mathbb{R}^n \\ v = F(x, y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

2. $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ такого сорта $x \mapsto (x, 0)$
3. $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ такого сорта $(x, y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель $\Phi'(x, y)$. Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right) \Rightarrow \det(\Phi'(x_0, y_0)) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (1.11.1) $\exists \Phi^{-1}(x_0, y_0)$ и ещё окрестности $U(x_0, y_0), V(x_0, 0)$. Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \cap Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$. Вполне очевидно, что $f \in C^p$. Ну $i, \pi \in C^\infty$, $\Phi^{-1} \in C^p$. К тому же

$$\forall x \in P \quad x \xrightarrow{i} (x, 0) \xrightarrow{\Phi^{-1}} (x, y) \xrightarrow{\pi} y \in Q$$

При этом такой y — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение f .

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию F'_y — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

■

§ 17 Функциональная зависимость системы функций

Определение 1. Пусть $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, $x_0 \in G$. Тогда g называется функционально зависимой от f_1, \dots, f_m в $V(x_0)$, если

$$\exists \varphi: U(f(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^1 : g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

Определение 2. Пусть $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально независимыми, если определение выше не выполняется ни для какой $V \subset G$ ни для какой из функций из набора.

Теорема 1. (о функциональной зависимости) Пусть $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции. К тому же $a \in G$, $f = (f_i)_i$, $y = f(x)$, $\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix} = m$ в точке $x \in U(a)$. Тогда, если

$$\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \\ g' \end{pmatrix} = m \text{ в точке } a, \text{ }^1 \text{ то } \exists V(a) \text{ в которой } g \text{ функционально зависит от } f_1, \dots, f_m.$$

□ Пусть сразу $n \geq m$, иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там m векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в $f'(x)$, $x \in U(a)$ существует ненулевой минор порядка m . Можно НУО считать, что он соответствует \bar{x} . Тогда это равносильно тому, что $\det \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a) \right) \neq 0$.

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей P, Q и

$$\exists \varphi: P \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^m, \quad \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$. Заметим, что здесь $y, \bar{\bar{x}}$ — независимые переменные. Так что если $j > m$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^m \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x), \quad x \in U(a)$$

Нам для того чтобы показать, что g функционально зависит от f , необходимо приравнять в окрестности точки a g к функции от y . Пусть снова $j > m$, тогда

$$g(x) = g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g$$

¹тут тонкость. Если ранг равен m , то определитель не 0 и в некой окрестности a по непрерывности. А вот со вторым так не прокатит, там наоборот нужно равенство 0

А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности a — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \right) = 0$$

Из того, что g, φ — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 1.17.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

§ 18 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

Определение 1 (Коразмерность). Пусть V — подпространство U . Тогда $\text{codim } V = \dim U - \dim V$.

Теорема 1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in G$, $b = F(a)$, $\exists V(a): \forall x \in V \text{ rk } F'(x) = r$. Тогда

1. $\exists U(a): F(U)$ имеет вид графика $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$
2. $\exists U(a) \subset F^{-1}(b)$ имеет вид графика $\bar{x} = \psi(\bar{x})$

□ Аккуратное следствие 1.17.1 и 1.16.1. Единственное нетривиальное место — во второй половине, где нужно показать, почему из m уравнений вида $F_i(x) = b_i$, можно оставить лишь r . Здесь можно сказать, что последние уравнения не накладывают дополнительных ограничений на $\{x_i\}$, ведь там по сути написано, что-то такое: $\varphi(\bar{b}) = \bar{b}$. А эти уравнения точно верны из 1 пункта. ■

Замечание. Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

Есть кстати шансы, что в этой теореме попутно определили размерность образа при отображении, но неточно. Собственно, график $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$ можно считать заданным на $y \in \mathbb{R}^m$, которое уже «прямое», а дальше размерностью объявить $\dim\{\bar{y}\}$.

§ 19 Три способа локального задания поверхности

1. Параметрическое

$$f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n : \text{rk } f' = k \forall x \in D (\geq k)$$

Тогда $M = f(D)$ — поверхность размерности k .

Условие на ранг означает, что нигде нету изломов, параметр же по сути — скорость.

2. Задание графиком

$$D \subset \mathbb{R}^k, f: D \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ — гладкое}$$

Тогда $M = \{(t, f(t)) \mid t \in D\} = \Gamma_f$.

Определение 1 (Поверхность(нестрога)). Множество $S \subset \mathbb{R}^m$ можно называть k -мерной гладкой поверхностью, если в окрестности любой своей точки оно задаётся графиком гладкого отображения $f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

3. Неявное

Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, $\text{rk } F = n - k$. Тогда

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

По сути уравнения связи.

Теорема 1. Если в некой окрестности $a \in \mathbb{R}^n$ k -мерная поверхность может быть задана один из 3 способов, то она может быть задана и всеми остальными.

□

1 → 2 см 1.18.1 (1)

2 → 3 $F(t, y) = f(t) - y$, $F' = (f'_t \mid -E) \Rightarrow \text{rk } F' = n - k$

3 → 2 см 1.18.1 (2)

2 → 1 $(x, y) \mapsto (x(t), f(x(t)))$, где $t = x$. С рангами очевидно проблем нет, единичная матрица же.

■

§ 20 Условный экстремум(нестрого)

Определение 1 (Безусловный экстремум). Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in G$ — внутренняя точка. Тогда в точке a \max / \min если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Определение 2 (Экстремум на подмножестве). Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ — k -мерная поверхность, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка. Тогда в точке a \max / \min относительно M , если

$$\exists U(a): \forall x \in U \cap M \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Чаще всего M задают неявно — «накладывают условия» на значения f .

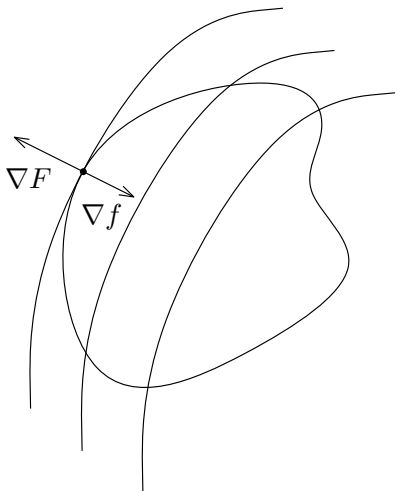
Определение 3 (Условный экстремум). Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1, \dots, F_m: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка, $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$. Тогда в точке a *условный* \max / \min если

$$\exists U(a): \forall x \in U, F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0 \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Теорема 1. Пусть $f, F_1, \dots, F_m \in C^1(G)$, $a \in G$.

Тогда если f имеет в a экстремум при условии $F(a) = 0$, то $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — линейно зависимы.

Е.г. Можно двумерный случай рассмотреть.



$$\nabla f = \lambda \nabla F$$

Следствие 1 (Правило Лагранжа). f имеет в a экстремум при условии $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$, то

1. либо $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ ЛЗ

2. либо $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i(a)$

§ 21 Доказательство теоремы об условном экстремуме

□

1. Пусть $m = n - 1$. Будем доказывать от противного. Пусть в a условный тах, но $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ.

Рассмотрим $\Phi(x) = (f(x), F_1(x), \dots, F_m(x))$. Тогда такое $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Из линейной независимости градиентов

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix}, \det \Phi'(a) \neq 0$$

Пусть $b = \Phi(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$. Тогда по теореме об обратном отображении (1.14.1)

$$\exists U(a), V(b) : \Phi: U \rightarrow V \text{ — диффеоморфизм}$$

Пусть $V \supset B_\varepsilon(b)$, $y = (f(a) + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in V$, тогда $\exists! x \in U: \Phi(x) = y$. Получается, что $f(x) > f(a)$, $\forall i F_i(x) = 0$, что немного противоречит тому, что в a условный тах.

2. Теперь рассмотрим случай $m < n - 1$ (всё остальное неинтересно, точно будет ЛЗ). Будем доказывать от противного. Пусть в a условный тах, но $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ. Тогда $\text{rk } \Phi'(a) = m + 1 < n$. Добавим ещё функций F_{m+1}, \dots, F_{n-1} таких, что $F_i(x) = x_{i+1} - ai + 1$.

Введём ещё стандартное обозначение

$$x = (\underbrace{x, \dots, x_{m+1}}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+2}, \dots, x_n}_{\bar{x}})$$

И не совсем стандартное

$$A = \frac{\partial(f_1, F_1, \dots, F_m)}{\partial x_1, \dots, x_{m+1}}(a)$$

Обычно такой «дробью» обозначают якобиан, но, пожалуй, сохраним обозначения с лекции.

Итак

$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & E_{n-m-1} \end{array} \right) \Rightarrow \text{rk } \Phi'(a) = n$$

А теперь можно подвести всё к первому пункту. Рассмотрим $\widetilde{M} = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$ (а $M = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$). Поскольку $\widetilde{M} \subset M$, f будет иметь в a максимум и относительно M .

Аналогично 1 пункту получаем бред какой-то.

■

Замечание 1. Такая теорема может найти лишь точки, «подозрительные» на экстремум. Надо ещё отдельно думать. Например, вдруг там на компакте всё определено.

Замечание 2. Можно рассматривать функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x) = f(x, \lambda) - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x)$$

Тогда если в a условный экстремум, то в (a, λ) стационарная точка ($\mathcal{L}'(a) = 0$) функции Лагранжа.

Глава 2: Криволинейные интегралы

§ 1 ✂ Интеграл от дифференциальной формы по пути

Параграфы со значком «✂» лучше не читать, они недопилены.

Дифференциальные формы. Начать лучше с полилинейных форм.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем K . Тогда функция $A: L^k \rightarrow K$, линейная по каждому из своих аргументов, называется k -линейной формой.

23

Нам тут хватит и 1-форм, так что

Определение 2. Дифференциальной 1-формой можно назвать отображение из \mathbb{R}^n в линейную (по h) форму, $P \in C^0$

$$\omega = \langle P(x), dx(x, h) \rangle$$

Но это как-то не очень (а что такое дифференциал?).

Гладкие пути.

Определение 3. Пусть $\gamma: [a; b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда γ называется путём в пространстве \mathbb{R}^n .

- Путь гладкий, если $\gamma \in C^1$,
- путь регулярный, если $\text{rk } \gamma' \geq 1$,
- путь простой, если γ — биекция.

Определение 4. Образ $\Gamma = \gamma([a; b]) \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой* в \mathbb{R}^n . Ещё говорят, что Γ — носитель пути γ , а γ — параметризация Γ .⁴

Замечание. Путь простой \Leftrightarrow кривая не имеет самопересечений.

Определение 5. Будем говорить, что простые пути имеют одинаковую ориентацию, если

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) \quad \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

и противоположную, если всё наоборот. Тут ещё введу нестандартное обозначение, но так жить проще ☺.

- \Uparrow — одинаковая ориентация
- \Downarrow — противоположная ориентация

Замечание. Для биективных параметризаций видимо просто нет другого выбора. С петлями всё будет интереснее.

²<ну его>

³<потом лучше напишу>

⁴здесь ещё можно как в [5] определять кривую как класс эквивалентности путей, так вроде проще

Интегралы от форм по пути

Определение 6. Просто возьмём и определим интегралы по простому гладкому пути от 1-форм так:

$$I = \int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

Утверждение 1 (Корректность определения выше). *Интеграл по пути не зависит от параметризации.*

□ Пусть γ_1, γ_2 — параметризации Γ , одинаково ориентированы. Докажем, что

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = I_2$$

Поскольку γ_1, γ_2 — биекции, $\exists \varphi: t_2 = \varphi(t_1)$, тоже биекция, такого сорта: $t_1 \xrightarrow{\gamma_1} x \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} t_2$ Тогда

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} \langle P(\gamma_2(t_2)), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle dt_2 = \int_{a_1}^{b_1} \langle P(\underbrace{\gamma_2(\varphi(t_1))}_x), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1$$

Покажем, что $\partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \partial_{t_1} \varphi = \partial_{t_1} \gamma_1(t_1)$. Это просто следует равенства $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, если его продифференцировать по t_1 . Так что

$$\int_{a_1}^{b_1} \langle P(x), \partial_{t_1} \gamma_1(t_1) \rangle (\partial_{t_1} \varphi(t_1))^{-1} \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1 = I_1$$

■

Замечание 1. Если $\gamma_1 \uparrow \downarrow \gamma_2$, то $I_2 = -I_1$.

Замечание 2. Если рассматривать только одинаково ориентированные пути, то

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Gamma} \omega$$

Замечание 3. Если Γ разбивается на непересекающиеся Γ_1, Γ_2 , то

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$$

Петли и интегралы по ним

Определение 7. Кривая Γ — петля, если для всякой её параметризации $\gamma(a) = \gamma(b)$. Петля называется простой, если $\exists: \gamma|_{[a,b]}$ — биекция.

Замечание. Плохие петли можно разбивать на простые.

Определение 8. Пусть Γ — простая петля. Тогда

$$I = \oint_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

Утверждение 2. *Определение выше корректно, и не зависит от выбора «начала» петли.*

▼

Можно рассмотреть 2 разные параметризации и разбить на 2 куса. Дальше работает определение интеграла по простому пути.

▲

Замечание. Чтобы посчитать интегралы по всем остальным путям, их нужно разбивать на простые пути и простые петли

§ 2 Точные формы

Определение 1. 1-форма ω называется точной в G , если $\exists \Phi: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\omega = d\Phi$. Φ в таком случае называется потенциалом, а сама форма ещё иногда называется потенциальной.

Е.г. Работа в физике.

Теорема 1. Пусть ω — точная форма в G , $\Gamma \subset G$, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$ Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

□ $\langle P, x \rangle = (\Phi \circ \gamma)'(t)$. Дальше уже тривиально из непрерывности Φ . ■

Теорема 2. Пусть ω — точная форма в G , $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, $\gamma_{1,2}(a) = A$, $\gamma_{1,2}(b) = B$. Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

Теорема 3. Пусть ω — точная форма в G , $\Gamma \subset G$ — петля Тогда

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

Теорема 4. Пусть ω — форма в G , и $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от пути при фиксированных концах. Тогда ω — точна.

□ Надо показать, что $\partial_i \Phi = P^i$. В этом месте можно забыть на общности и объявить $n = 2$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P^1$. Поскольку от пути ничего не зависит,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_A^{(x+\Delta x, y)} \omega - \int_A^{(x, y)} \omega \right)$$

А это по сути интеграл по пути, соединяющем $(x + \Delta x, y)$ и (x, y) . А здесь уже можно взять приличную кривую (прямую) с правильной параметризацией, и воспользоваться теоремой о среднем.

$$\dots = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Последнее равенство верно по непрерывности. ■

Теорема 5. $\oint \omega = 0 \Rightarrow \omega$ — точна

Теорема 6. Пусть G , $\oint \omega = 0$ для любой прямоугольной петли. Тогда ω — точна.

□ Аккуратно свести к теореме 2.2.4, там всё будет работать и с путями, параллельными осям координат. ■

§ 3 Замкнутые формы

Здесь уже окончательно забиваем на все $n \geq 2$. Там, в целом, понятно как обобщать. Тут всюду $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Определение 1. Форма ω замкнута в G , если

$$\forall A \in G \exists U(A): \exists \Phi_U: U \rightarrow R \quad \omega = d\Phi_U$$

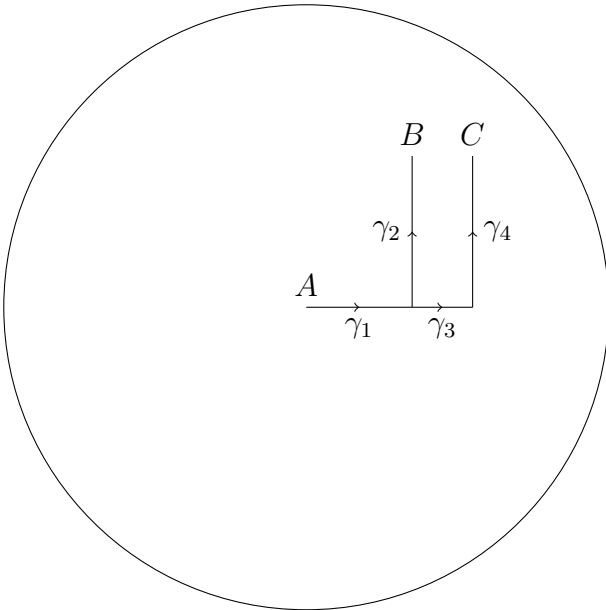
короче, локально точна.

Теорема 1. Пусть ω — гладкая форма в G . Тогда если ω замкнута, $\partial_y P = \partial_x Q$ в G .

□ Очевидно следует из «локальной точности». ■

Теорема 2. Пусть ω — гладкая форма в G . Тогда если $\partial_y P = \partial_x Q$ в G , то ω замкнута.

□ Выберем произвольную A , тогда $U_\varepsilon(A) \subset G$. Надо попробовать построить потенциал. Например так $\Phi(B) = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P$, $\partial_y \Phi = Q$.



$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(C) - \Phi(B) = \int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_{y_A}^y Q(x + \Delta x, t) dt - \int_{y_A}^y Q(x, t) dt + \int_x^{x+\Delta x} P(t, y_A) dt \end{aligned}$$

Последний сходится к $P(x, y_0)dx$, а первые два надо немного преобразовать

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \right) = \int_{y_0}^y \left(\frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x} \right) dt$$

Подынтегральную функцию можно представить как последовательность $f_n \Rightarrow Q'$.

$$\left| \frac{Q(x + 1/n) - Q(x)}{1/n} - Q'(x) \right| = |Q'(\xi) - Q'(x)| < \varepsilon$$

а функция Q' равномерно непрерывна на $[x, x + \Delta x]$, ибо он отрезок. Так что можно поменять местами предел и интеграл.

$$\dots = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dt = \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \Delta P$$

Если сложить с оставшимся куском, то как раз и выйдет P . С равенством Q вроде все попроще, там нужно считать приращение всего лишь по одному пути. ■

Замечание 1. Бывают замкнутые, но не точные формы. Например $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$. Она замкнута, а вот $\oint_\gamma \omega$ по окружности вокруг 0 не 0.

§ 4 Первообразная замкнутой формы вдоль пути

Сначала можно отметить, что $\Gamma = \gamma([a; b])$ — компакт. Так что вроде можно пользоваться теоремой о конечном подпокрытии.

Лемма 1. Пусть G — область, ω — гладкая точная форма в G , а Φ, Ψ — две её первообразные в G . Тогда $\Phi - \Psi \equiv C \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. Пусть ω замкнута в G , $\Gamma = \gamma([a; b])$. Тогда существует первообразная вдоль пути γ и $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$.

□ Поскольку кривая компактна, в любом её покрытии можно выделить конечное подпокрытие. Собственно, будем рассматривать покрытие открытыми кругами $U(p_i)$. Пусть Φ_i — произвольная первообразная в U_i . Заменяем Φ_i $\tilde{\Phi}_i$, так что $\tilde{\Phi}_{i+1} = \tilde{\Phi}_i$ на $U_{i+1} \cap U_i$, $\tilde{U}_0 = U_0$.

Выберем параметризацию, тогда p_i соответствуют $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$. Теперь выберем $f(\gamma(t)) = \tilde{\Phi}_k(\gamma(t))$, $\gamma(t) \in U_k$. Здесь вроде можно прожить и без простоты пути.¹

Теперь ещё выберем $q_i \in U_{i+1} \cap U_i$, $\{\gamma_j\}$ = пути от p_i до q_i и пути от q_i до p_{i+1} . Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_j \int_{\gamma_j} \omega = \tilde{\Phi}(p_n) - \tilde{\Phi}(p_0) = f(b) - f(a)$$

■

§ 5 Хомотопия путей

Определение 1. Непрерывным семейством путей называется непрерывная функция $g: [0; 1] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Часто обозначается так: $\gamma_s(t) = g(s, t)$.²

Определение 2 (\simeq). Пусть $\gamma_1, \gamma_2: [a; b] \rightarrow G$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда утверждается, что пути гомотопны, если существует семейство $\gamma_s(t): \gamma_{s_1} = \gamma_1, \gamma_{s_2} = \gamma_2$.

Замечание. Таки отношение эквивалентности.

Теорема 1. Пусть ω — замкнутая форма в области G , $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Тогда

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Теорема 2. Пусть ω — замкнутая форма в области G , $\gamma_1 \sim \gamma_2$ — гомотопные петли. Тогда

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$

Замечание. Доказывать я это пока не буду, иначе это будет выглядеть как-то так:



¹вообще первообразную вдоль пути нигде не определяли, так что можно считать конструкцию, построенную выше, определением

²По-хорошему там должны быть топологические пространства, но не сегодня и не сейчас.

Следствие 1. Пусть γ — петля в G и $\gamma \stackrel{G}{\sim} \bullet$. Тогда $\oint_{\gamma} w = 0$.

Определение 3. Область в G называется односвязной, если в ней всякая петля стягивается в точку.

Теорема 3. В односвязной области все замкнутые формы точны.

Е.г. Далёкая, далёкая галактика — не односвязная область.

Глава 3: Комплексный анализ

§ 1 ✕ Интеграл от комплексной дифференциальной формы

2

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z - a| < \varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0 < |z - a| < \varepsilon\}$. Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в \mathbb{R}^2 . Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывна, $f = f_1 + if_2$, $\omega(z, dz) = f(z)dz$ — комплексная дифференциальная форма.³ Пусть $\Gamma \subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int_{\gamma} := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2(t)) dt + \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1(t)) dt$$

Свойства:

Утверждение 1. см § 1

Утверждение 2. Пусть $\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$, $z_i = \gamma(t_i)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\xi_i = \gamma(\tau_i)$. Пусть ещё

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta z_i$$

$$r = \max |\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

Следствие 1. Пусть $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\Gamma)$$

²здесь надо сильно больше определений

³Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

▼

$$|\sigma| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leq M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

.....
 {censored by galactic vimperor}

§ 42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

§ 46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a .

Теорема 1. Пусть a — полюс первого порядка функции f . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

Теорема 2. Пусть a — ноль первого порядка для ψ , $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. Пусть a — полюс p -го порядка функции f . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \left((z-a)^p f(z) \right)_{z=a}^{(p-1)}$$

§ 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I) Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции $g \sin / \cos$ заменены на $\frac{1}{2}(z \pm z^{-1})$

II) Интеграл от рациональной функции на \mathbb{R}

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leq \deg Q - 2$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

$$\text{III)} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\lambda z} dz = I$$

Пусть $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на \mathbb{R} . Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_k > 0} \text{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана). Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$. Тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

§ 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение ¹ $f: G \rightarrow H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f: G \rightarrow G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу $\text{Aut } G$.

▼

Пусть $f, g, h \in \text{Aut } G$. Тогда $f \circ g: G \rightarrow G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- $\forall f \exists f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, \Rightarrow конформно и однолистно.
- $\text{id}: G \rightarrow G$ — конформно и однолистно.

▲

Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$
2. \mathbb{C}
3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана). Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $G \cong$ одной из классических областей

1. $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}, |U| > 1$

¹Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

§ 56 Лемма Шварца

§ 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \text{Aut } G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall z_1, z_2 \in G \exists f \in \Gamma: f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, Γ — транзитивна. Пусть к тому же $\exists z_0: \text{Stab}(z_0) < \Gamma$. Тогда $\Gamma = \text{Aut } G$.

▼

Выберем произвольный $f \in \text{Aut } G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности $G \exists \gamma \in \Gamma: \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma \circ f \in \text{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\text{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$. Но тогда

$$\forall f \in \text{Aut } G \quad f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in \Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in \Gamma} \in \Gamma$$

▲

§ 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь всё константы по умолчанию $\in \mathbb{C}$.

Теорема 1. $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0\}$

□ Пусть

$$\Gamma = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}\}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для \mathbb{C} хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен $\text{Stab } \infty$. Нам нужно чтобы $\infty \mapsto \infty$. А значит $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Но из теоремы 3.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что $\text{Stab } \infty < \Gamma$. А тогда по лемме 3.57.1 $\Gamma = \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$ ■

Теорема 2. $\text{Aut } \mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

□ Пусть $A = U(\infty)$. Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть ∞ — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого $f(A)$ всюду плотно в \mathbb{C} . А значит в $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$ есть точка из $f(A)$ — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть ∞ — устранимая особая точка. Но тогда в кольце $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots + c_0$$

Но $f \in \text{Aut } G \Rightarrow f$ голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в ∞ — полюс. Но тогда $f(z)$ — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени n имеет в \mathbb{C} ровно n корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. ¹ ■

¹Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев $f(1/z)$ в $U(0)$

Теорема 3. $\text{Aut } \mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

□ Опять рассмотрим Γ как в условии и покажем, что $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$. Надо сначала показать хотя бы, что $\Gamma < \text{Aut } \mathbb{D}$.

$$\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1)$$

Так что при $|z| < 1 \wedge |a| < 1$ это верно.

Дальше легко найти обратное к $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1} \frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta} a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$f_1(z) = \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}$$

$$f_2(z) = \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$

$$a = \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}}$$

$$|a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1$$

$$f_2(f_1(z)) = e^{i\theta_2} \frac{e^{i\theta} z - e^{i\theta} a_2 - a_1 + a_1 \bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}$$

Осталось показать оба условия из леммы [3.57.1](#)

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Будем строить так: $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \quad f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \quad f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на $f \in \text{Stab } 0$. По лемме Шварца $\forall z \in D \quad |f(z)| \leq |z|$. Поскольку $\text{Stab } 0$ — группа, $\exists f^{-1}$ и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

А тогда по второму пункту леммы Шварца $f(z) = cz$, $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$. Следовательно, $\text{Stab } 0 < \Gamma$. Тогда по уже упомянутой лемме $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$

■

Литература

- [1] Зорич В. А., Математический анализ. Часть I — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [2] Зорич В. А., Математический анализ. Часть II — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трёх томах. Том II. — СПб.: Издательство «Лань», 1997. — 800 с.
- [4] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре — 5 изд., испр. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. I — 2 изд. — М.: Наука, 1976. — 320 с.