1 Волновое уравнение

1 Классификация уравнений второго порядка

Выглядят так

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{i,j} A^{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_i B^i\partial_i u + Cu = 0$$

В зависимости от собственных чисел A классифицируются

эллиптический	$\Rrightarrow$	$\forall\, i \;::\; \Lambda_i > 0$
параболический	$\Rrightarrow$	$\exists\, j : \Lambda_j = 0, \quad \forall\, i \neq j \;::\; \Lambda_i > 0$
гиперболический	$\Rrightarrow$	$\exists\, j : \Lambda_j < 0, \quad \forall\, i \neq j \;::\; \Lambda_i > 0$

И их канонические формы

$$\begin{aligned} \square\, u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{волновое уравнение} \\ \Delta u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение Лапласа} \\ (-\partial_t + a^2\Delta)\, u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение теплопроводности} \end{aligned}$$

2 Характеристические поверхности

Здесь непросто, потому что обычно характеристики определяют для уравнений первого порядка. А тут нужно как-то факторизовать.

Впрочем, можно сказать, что характеристическая поверхность — $(w_x, Aw_x) = 0$ Здесь $\xi = w(x,y)$, и для тех типов уравнений, что мы рассматриваем, верно

- $\omega \equiv \mathrm{const}$
- при замене переменных $\xi = \omega(x,y)$ член при $u_{\xi\xi}$ зануляется[1]

3 Волновое уравнение

Уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{aligned}$$

Решение Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

4 Принцип Дюамеля

Основная мысль в том, чтобы научиться получать из решения однородного уравнения решение неоднородного неочевидным способом.

1. $\square\, P = 0$, $P(x,t,t) = 0$, $P_t(x,t,t) = f(x,t)$ (если существует)
2. $w = \int_0^t P(x,t,t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x,t)$

Для волнового уравнения $P = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\xi,t')\,\mathrm{d}\xi$

5 Энергетическое неравенство

<+картиночка+>

1. Ω_t — срез конуса причинности (характеристическая поверхность волнового уравнения).
2. $E[u] = u_t^2 + a^2u_x^2$

Само энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega_0} E[u]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_t} E[u]\,\mathrm{d}x$$

Отсюда можно заполучить единственность решения волнового уравнения.

6 Формула Кирхгофа ($\mathbb{R}^3$)

$$u(x,t) = t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_1(y)\,\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_0(y)\,\mathrm{d}S\right)$$

Здесь видно, что что возмущения (начальные) влияют на решение только будучи на границе конуса прчинности. Получается, что волна не «запоминает» своё прошлое. То есть, возмущение приходит с волновым фронтом и уходит с ним.

Это не принцип Гюйгенса-Френеля (тот про функцию Грина), но тоже принцип Гюйгенса.

7 Формула Пуассона ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_0(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Здесь возмущение «чувствуется» даже после прохождения фронта. В каком-то смысле оно «размывается». Видимо, это и есть упомянутая диффузия?

2 Теплопроводность

1 Вывод уравнения

1. Уравение неразрывности: $u_t = -\operatorname{div}\boldsymbol{F}$
2. Связь потока с текущим веществом $\boldsymbol{F} \propto -\operatorname{grad} u$

$$u_t + a^2\Delta u = 0$$

Характерные множества

параболический цилиндр (Q_T)	$\Rrightarrow$	$\Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
параболическая граница $(\partial' Q_T)$	$\Rrightarrow$	$(\Omega \times \{0\}) \cup \partial\Omega \times [0;T]$

Для удобства $R_T := Q_T(\Omega = \mathbb{R}^n)$.

Разные задачи:

$$\begin{aligned} &u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(0;T) \cap C(\partial' R_T), \quad u(x,0) = \varphi \qquad (1) \\ &u \in C^2(\Omega) \cap C^1(0;T) \cap C(\partial' Q_T), \quad u\big|_{\partial' Q_T} = \varphi \qquad (2) \end{aligned}$$

2 Закон сохранения

При довольно мутных условиях (что-то вроде в меру быстрого убывания u к бесконечности)

$$\mathcal{U}(t,R) := \int_{\mathcal{B}_R(0)} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const}$$

3 Ограниченный принцип максимума

$$\inf_{\partial' Q_T} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\partial' Q_T} u(x,t) \quad (\text{в } Q_T)$$

4 Принцип максимума в полупространстве

Пусть u ограничена сверху[2]

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,t)$$

5 Единственность

кажется, это очевидно следует из 3, 4.

6 Автомодельные решения

- $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$
- $v(\xi) = c\displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\xi^2/4a^2}\,\mathrm{d}\xi$

7 Функция источника (одномерье)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

8 Функция источника (многомерье)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\,e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}$$

9 Свойства функции источника

Заметки

1 У нас было всё наоборот, но так ещё непонятней что происходит

2 в Эвансе $\leqslant Ae^{a|x|^2}$, например