§ 1 Матрицы, основные определения

Определение 1 (Матрицы над K)**.** Пусть K— поле, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M_{m,n}(K) = \left\{ A \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mb} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in K \right\}$$

Определение 2 (Сложение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{mn}$:

$$(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Определение 3 (Умножение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{nk}$:

$$(ab)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$$

§ 2 Кольцо квадратных матриц

Обозначается $M_n(K)$
Ноль:

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Единица:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

§§ 3–4 Определитель

Определение 1. Пусть $A \in M_n(K)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Определение 2. Если обозначать строки $A_1, \ldots, A_n$, а столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, то можно ввести ещё такую функцию:

$$\det(A_1, \ldots, A_n) = \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) := \det A$$

Определение 3 (Элементарные преобразования)**.**

$$\begin{array}{rll} \mathrm{I} & A_i \leftrightarrows A_j & A^{(i)} \leftrightarrows A^{(j)} \\ \mathrm{II} & A_i := A_i + \lambda A_j & A^{(i)} := A^{(i)} + \lambda A^{(j)} \\ \mathrm{III} & A_i := \lambda A_i & A^{(i)} := \lambda A^{(i)} \end{array}$$

Определение 4 (Транспонированная матрица)**.**

$$A^T\colon (a^T)_{ij} = (a)_{ij}$$

Свойства

1. Определитель (в описанном в 0.4.2 смысле) полилинеен и кососимметричен по строкам и столбцам.
2. Если 2 строчки или столбца одинаковые, то определитель равен 0
3. Элементарные преобразования влияют на определитель следующим образом:
$$\begin{array}{c|r} \mathrm{I} & (-1)\det A \\ \mathrm{II} & \det A \\ \mathrm{III} & \lambda \det A \end{array}$$
4. $\det A^T = \det A$

§ 5 Теорема Лапласа

Определение 1 (Минор)**.** Пусть $A \in M_n(K)$, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда определитель подматрицы, собранной из k строк и k столбцов называется *минором* порядка k.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Δ' — дополнительный минор— всё, что осталось. Его ещё иногда (когда минор— один элемент) обозначают как M_{ij}

Определение 2 (Алгебраическое дополнение)**.**

$$A_\Delta = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\Delta'$$

Теорема 1 (Теорема Лапласа)**.** *Пусть $A \in M_n(K)$, $k \in \mathbb{N}$. Выберем из матрицы k строчек. Тогда*

$$\det A = \sum_{\Delta} \Delta \cdot A_{\Delta}$$

где Δ — любой минор, содержащий нужные k строчек.

□ Выберем какой-то один минор, i_k — его строчки, j_ℓ — его столбцы

$$\Delta : \begin{cases} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k \end{cases}$$

Теперь отправим все элементы, попавшие в минор, в левый верхний угол. Сначала сдвинем все строчки:

$$\begin{cases} i_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

Потом все столбцы

$$\begin{cases} j_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ j_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

В итоге, из свойств элементарных преобразований, получим:

$$\det B = (-1)^{i_1 - 1 + \dots + i_k - k + j_1 - 1 + \dots + j_k - k} \det A = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} \det A$$

так как все добавки парные $\Rightarrow$ делится на 2.

С другой стороны, Δ и Δ' никак не поменялись, так как переставляемые чиселки в них не не входят. Также нужно отметить, что $B_\Delta = \Delta'$, по тем же причинам, в общем-то.

Посмотрим, что такое $\Delta \cdot \Delta'$ [1].

$$\Delta \cdot \Delta' = \left(\sum_{\tau \in S_k} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau(1)} \cdots b_{k\tau(k)} \right) \cdot \left(\sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{I(\tau')} b_{k+1\tau'(k+1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right)$$

[1] Вообще, тут маленькая неточность: здесь фактически *действие* группы перестановок на множестве $\{k+1, \dots, n\}$

Пусть теперь $\sigma = \tau \circ \tau'$. Тогда $I(\sigma) = I(\tau) + I(\tau')$ по свойствам перестановок, а σ фактически разбивается на 2 независимых цикла: τ и τ'. В итоге

$$\Delta \cdot \Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

А это вообще-то правильный кусок определителя B. Поймём, что это за кусок определителя A. Числа-то те же самые. А вот на вопрос со знаком мы уже по сути ответили, когда рассуждали про определитель. Слагаемые точно не перемешиваются, так как все перестановки— биекции, так что каждое слагаемое просто умножается на $(-1)^{\cdots}$. Так что

$$\Delta \cdot \Delta' = (-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$A_\Delta = (-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} \Delta'$$

$$\Delta \cdot A_\Delta = \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

где у σ' уже другие независимые циклы: $\binom{i_1, \ldots, i_k}{j_1, \ldots, j_k}$ и всё остальное.
■

Следствие 1.

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + \cdots + a_{in} A_{in}$$

Следствие 2.

$$a_{j1} A_{i1} + \cdots + a_{jn} A_{in} = 0$$

▼
Приравняем i строчку к j-ой, получим матрицу B. Тогда

$$a_{j1} A_{i1} + \cdots + a_{jn} A_{in} = b_{i1} B_{i1} + \cdots + b_{jn} B_{in} = \det B = 0$$

Так как определитель B очевидно равен 0
▲

§ 6 Ступенчатая матрица

Определение 1. $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$ — ступенчатая матрица.

Теорема 1 (Определитель ступенчатой матрицы).

$$\det A = \det A_1 \cdots \det A_n$$

□ По индукции через теорему Лапласа 0.5.1 ■

§ 7 Определитель произведения матриц

Теорема 1. *Пусть* $A, B \in M_n(K)$. *Тогда*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

□ Докажем, что такие матрицы имеют одинаковый определитель:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E_n & B \end{array}\right) \quad \text{и} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} AB & A \\ \hline 0 & -E_n \end{array}\right)$$

Теперь сделаем из куска с B Z_n.

$$D'^{(n+j)} := C^{(n+j)} + b_{1j}C^{(1)} + \cdots + b_{nj}C^{(n)}$$

Внизу получатся нули, а вот сверху:

$$d_{i,n+j} = 0 + b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{nj}a_{in} = (ab)_{ij}$$

Тысяча индексов, это же произведение матриц!

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E_n & 0 \end{array}\right)$$

Мы тут пользовались только преобразованием II, так что определитель не поменялся.

Теперь переставим половинки матрицы. При этом будет совершено n преобразований I. Так что

$$\begin{aligned} \det A \det B = \det C = \det D' = (-1)^n \det D = (-1)^n \det(-E_n) \det(AB) \\ = (-1)^{2n} \det(AB) = \det AB \end{aligned}$$

■

§ 8 Обратимость матриц

Определение 1. Пусть $A = M_n(K)$. Тогда A — невырожденная $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Определение 2 (Взаимная матрица)**.**

$$\widetilde{A} = (a)_{ij}^T$$

Лемма 1.

$$A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot E_n$$

Определение 3. Пусть $A = M_n(K)$. Тогда матрица A^{-1} :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$

(если существует)

Следствие 1. *Если* $\det A \neq 0$, *то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widetilde{A}$$

Следствие 2. A *невырождена* $\Leftrightarrow$ A *— обратима.*

Следствие 3. *Пусть* $A, B \in M_n(K)$. *Тогда*

$$AB = E_n \Rightarrow A, B \text{ — обратимы и } \begin{cases} B = A^{-1} \\ A = B^{-1} \end{cases}$$