

1.  $\mathbf{r}: \mathbf{r}(t), (x, y, z)(t), \mathbf{r}(s).$

$\dot{\mathbf{r}}: \dot{\mathbf{r}}(t), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})(t), \boldsymbol{\tau} \dot{\mathbf{s}}.$

$\ddot{\mathbf{r}}: \ddot{\mathbf{r}}(t), (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})(t), \ddot{\mathbf{s}}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2 k_1 \mathbf{n}$

2.  $\langle ? \rangle$

3. В криволинейных координатах

$$\triangleright \mathbf{v} = \sum_k \dot{q}^k \mathbf{e}_k$$

$$\triangleright \mathbf{w} = \sum_k \ddot{q}^k \mathbf{e}_k + \sum_{k,i} \dot{q}^k \dot{q}^i \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^i}$$

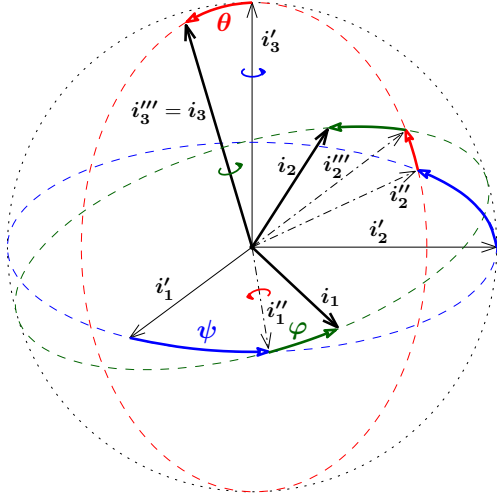
$$\triangleright w^j = \ddot{q}^j + \sum_{k,i} \dot{q}^k \dot{q}^i \Gamma_{ki}^j$$

$$\triangleright \Gamma_{j,ki} = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^i} \cdot \mathbf{e}_j - \text{I рода}$$

$$\triangleright \Gamma_{ki}^j = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^i} \cdot \mathbf{e}^j - \text{II рода}$$

$$\triangleright w_\ell = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\ell} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) \right) - \frac{d}{dq^\ell} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right)$$

4. Про углы Эйлера



$$\triangleright \boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} i'_3 + \dot{\theta} i''_1 + \dot{\varphi} i_3$$

$$\triangleright \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t)$$

$$\triangleright \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$$

$$\triangleright \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{w}_r$$

5. Динамика точки и систем точек

$$\triangleright \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t, \{c_\ell\}), k \in 1 \dots N, \ell \in 1 \dots 6N$$

$$\triangleright m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{F}_k, m w_\ell = Q_\ell$$

$$\triangleright \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\ell} \right) - \frac{dT}{dq^\ell} = Q_\ell$$

$$\triangleright \mathbf{r}_c = \frac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum_k m_k}, \sum_k m_k = M$$

6. Закон сохранения импульса

$$\triangleright \mathbf{p} = \sum_k \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$$

$$\triangleright \mathbf{F} = \sum_k (\mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)})$$

$$\triangleright \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(e)}. \text{ Все силы взаимодействия вымерли.}$$

7. Момент импульса

$$\triangleright \mathbf{l} = \sum_k \mathbf{l}_k, \mathbf{l}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k$$

$$\triangleright \mathbf{L} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{(i)}$$

$$\triangleright \mathbf{F}_{kj}^{(i)} = \lambda(\mathbf{r}_{kj}) \mathbf{r}_{kj} \Rightarrow \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \sum_k \mathbf{L}_k^{(e)}.$$

8. Энергия

$$\triangleright T = \sum_k T_k, T_k = \frac{m_k(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k)}{2}$$

$$\triangleright \delta A_k = \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k, A = \int_\Gamma \delta A, \text{ а вообще-т интеграл от формы.}$$

$$\triangleright dT = \delta A_k^{(e)} + \delta A_k^{(i)}$$

$$\triangleright dE = d(T + \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)}) = \delta A_{\text{не пот}}$$

9. В поле центральной силы

$$\triangleright u = 1/\rho.$$

Формулы Бине

$$\begin{cases} v^2 = c^2 \left( \left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right) \\ w_\rho = -c^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \end{cases}$$

Невыразимая жжесть

10.  $\langle ? \rangle$  Движение твёрдого тела

$\triangleright \omega = 0$  — поступательное

$\triangleright \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0 = 0, \omega = \dot{\varphi} i_3$  — вращение вокруг неподвижной оси

$\triangleright \mathbf{v}_0 \uparrow \uparrow \boldsymbol{\omega}$  — винт

$\triangleright \langle ? \rangle$  Как попало вокруг неподвижной

$$\boldsymbol{\omega} = i_1(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) +$$

$$\text{точки } i_2(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) +$$

$$+ i_3(\dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\varphi})$$

11. Скорость и ускорение точек твёрдого тела

$$\triangleright \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\triangleright \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

12. Сложение движений ТТ

$$\triangleright \mathbf{v}_{r_n} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{O_k O}) + \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_0,$$

$$O_0 = O.$$

$$\triangleright \mathbf{V} = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \overrightarrow{O_k O})$$

$$\triangleright \boldsymbol{\Omega} = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\omega}_k \Rightarrow \mathbf{v}_{r_n} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0$$

13. Кинематический винт

$$\triangleright \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$$

14. Плоское движение

$$\triangleright 0 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c$$

$$\triangleright \mathbf{r}_* = \left( -\frac{v_{0y}}{\omega}, \frac{v_{0x}}{\omega} \right) \text{ — подвижная центроида}$$

$$\triangleright \mathbf{r}'_* = \mathbf{r}_* + \mathbf{r}_0 \text{ — неподвижная центроида}$$

$$\triangleright \omega = \frac{|\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A|}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}$$

$$\triangleright \omega = \frac{|\mathbf{v}_B \times \mathbf{r}_{A*}|}{r_{A*}^2} \text{ и то же с } B.$$

$\triangleright$  центр ускорений:  $\langle ? \rangle$

15. Динамика вращения ТТ

$$\triangleright M = \int_\tau 1 d\mu(r), \mathbf{r}_c = \frac{\int_\tau \mathbf{r} d\mu(r)}{\int_\tau 1 d\mu(r)}$$

$$\triangleright \mathbf{l} = \int_\tau (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) d\mu, \mathbf{l}' = \int_\tau (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) d\mu$$

$$\triangleright \mathbf{l}' = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{v}_0 M + \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_0 M + \mathbf{R}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) M + \mathbf{l}$$

$$\triangleright T = \frac{1}{2} \int_\tau (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 d\mu, T' = \frac{1}{2} \int_\tau \mathbf{v}^2 d\mu$$

$$\triangleright T' = T + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_0^2 + M \mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)$$

$$\triangleright \ell_\omega = \omega J_\omega$$

$$\triangleright \mathbf{l} = \hat{J} \boldsymbol{\omega} = \sum_{j,k} J_{jk} \omega_k \mathbf{i}_j,$$

$$J_{ik} = \int_\tau (r^2 \delta_{ik} - x_j x_k) d\mu$$

$$\triangleright T = \frac{J_\omega \omega^2}{2} = \frac{\hat{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2}$$

$\triangleright$  Динамические уравнения Эйлера

$$L_a = J_a \dot{\omega}_a + (J_c - J_b) \omega_c \omega_b$$

$$L_b = J_b \dot{\omega}_b + (J_a - J_c) \omega_a \omega_c$$

$$L_c = J_c \dot{\omega}_c + (J_b - J_a) \omega_b \omega_a$$

$\triangleright$  Кинематические уравнения Эйлера

$$\omega_a = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)$$

$$\omega_b = (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)$$

$$\omega_c = (\dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\varphi})$$

16. Вращение вокруг неподвижной оси

$\triangleright$  Ну, та скучная системка

$$17. L = 0$$

18. Сила всего одна и приложена к центру масс

19.  $\langle \otimes \rangle$

20.  $\langle \otimes \rangle$

21.  $\langle \otimes \rangle$

22. Принцип Даламбера-Лагранжа:

Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю:

$$(M \ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{Y}) \cdot d\mathbf{y} = 0$$

23. При варьировании с фиксированными концами  $\left( \delta t_1 = \delta t_0 = 0, \begin{matrix} \delta q^\ell|_{t_1} = 0 \\ \delta q^\ell|_{t_2} = 0 \end{matrix} \right)$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

- ▷  $\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T, T = \frac{M}{2} \sum_{j,k} g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k$
- ▷  $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0},$   
 $\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot{q}^\ell \delta t$  (полная вариация)
- ▷ Лишь при этом условии работает принцип выше

25.  $\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q^\ell, \frac{\partial S}{\partial q^\ell}, t \right) = 0$

26.  $\begin{cases} \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q^\ell, \frac{\partial S}{\partial q^\ell}, t \right) = 0, \\ \det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial a^p} \right) \neq 0 \\ p_\ell = \frac{\partial S}{\partial q^\ell}, \quad b_k = \frac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k — \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

- ▷ Фазовый объём
- ▷ Жесть

29.  $\langle \text{✂} \rangle$

## Заметки

<sup>1</sup>У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь  $\langle \smile \rangle$

<sup>2</sup>Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить