

<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :**taхus**

26 марта 2017 г.

Оглавление

1	Теория меры и интегралы по мере	2
§ 1	Системы множеств	2
§ 2	Мера	3
§ 3	Объём в \mathbb{R}^n	4
A	Обозначения	5

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X .

Е.г. $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — алгебра множеств, если

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ -алгебра). Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда \mathcal{A} — σ -алгебра, если

1. \mathcal{A} — алгебра
2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

Определение 5. Пусть \mathcal{O} — все открытые множества в \mathbb{R}^n . Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ -алгебра в \mathbb{R}^n .

Определение 6 (Ячейка в \mathbb{R}^n). Обозначать её будем Δ^n , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$.

Пример 1. Все множества ниже — борелевские.

⟨1⟩ \mathcal{O} .

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \bar{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 2 Мера

Определение 1. Пусть задано X , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu \left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\substack{\in \mathcal{A} \\ \text{алгебра}}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ -

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ -мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geq 0$, $\mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера. ¹

Свойства меты: Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$. Тогда $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Утверждение 2. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$. Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

¹она считает, не считывает ☺

Утверждение 3 (Усиленная монотонность). Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ и дизъюнкты.

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu B$$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры). Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$.

$$\text{Тогда } \mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k).$$

▼

Сделать B_k дизъюнкты: $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k : $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$

▲

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу). Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.^1$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_k \in \mathcal{A}$,

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \mu A_1 < +\infty.$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>

§ 3 Объём в \mathbb{R}^n

¹Опять-таки никто не сказал, что \mathcal{A} — σ -алгебра.

Глава А: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a .

$\bigsqcup_k A_k$ — дизъюнктное объединение множеств.

Нестандартные обозначения

✂ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

□...■ — начало и конец доказательства теоремы

▼...▲ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

⋈ — кривоватая формулировка

:set aflame — набирающему зело не нравится билет

<что-то> — тут будет что-то, но попозже

$a .. b$ — для $a, b \in \mathbb{Z}$ это просто $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

≡ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.