Определения из дифуров

Лектор: В. В. Басов
Записал: `taxus`

3 марта 2017 г.

Глава 1: Дифуры, разрешённые относительно производной

§ 1 Основные определения

Определение 1 (Дифференциальное уравнение)**.** Пусть $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогда диффур — вот такая штука:

$$y' = f(x, y)$$

Определение 2. Решение — функция $y = \varphi(x)$, определённая на $\langle a, b \rangle$:

1. $\varphi(x)$ — дифференцируема
2. $(x, \varphi(x)) \in G$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Определение 3 (Задача Коши и вокруг неё)**.** Основные понятия тут:

1. (x_0, y_0) — начальные данные
2. Решение задачи Коши — *частное* решение дифура + выполнение начальных условий
3. Решение задачи Коши существует, если $\exists\, (a, b) \ni x_0, y = \varphi(x)\colon y_0 = \varphi(x_0)$
4. Решение задачи Коши единственно, если любые 2 решения совпадают в окрестности x_0

Определение 4. $(x_0, y_0) \in G$ — тоска единственности, если решение задачи Коши в ней единственно.

Определение 5. $\widetilde{G} \in G$ — область единственности, если каждая её точка — точка единственности.

Определение 6. Пусть $f \in C(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in G$, $x_0, x \in \langle a, b \rangle$ Тогда интегральным уравнением называется

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(u, y)\, \mathrm{d}s$$

Определение 7. Решение — функция $y = \varphi(x)$, определённая на $\langle a, b \rangle$:

1. $\varphi(x)$ — непрерывна
2. $(x, \varphi(x)) \in G$
3. $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(u, y)\, \mathrm{d}s$

Теорема 1. *Пусть $f \in C(G)$. Тогда $y = \varphi(x)$ — решение 1.1.1 $\Leftrightarrow$ решение 1.1.6.*

Определение 8 (Отрезок Пеано)**.**

$$P_h(x_0, y_0) = \{x\colon |x - x_0| \leqslant h\}$$
$$h = \min\{a, b/M\},\ M = \max_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)|$$
$$\overline{R} = \{(x,y)\colon |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\} \subset G$$

Определение 9. Решение — частное, если всякая его точка — точка единственности.

Определение 10. Решение — особое, если всякая его точка — точка неединственности.

Определение 11 (Общее решение)**.** Пусть G — область единственности. Тогда непрерывная по обеим аргументам функция $y = \varphi(x, C)$ — общее решение дифференциального уравнения в $A \subset G$, если $\forall (x_0, y_0) \in A$:

1. уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ однозначно разрешимо относительно C.
   /Наверное, локальная монотонность нужна/
2. $y = \varphi(x, C_0)$ (C_0 — корень $y_0 = \varphi(x_0, C)$) — решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0

Тут кстати в самом конспекте что-то странное. Почему-то требуется, чтобы $\varphi(x, C_0)$ была решением в окрестности C_0.

Определение 12. Решение дифура, определённое на $\langle a, b\rangle$ продолжимо за точку b, если

$$\exists\, \widetilde{\varphi}(x)\colon \widetilde{\varphi}|_{\langle a,b\rangle} = \varphi \wedge \widetilde{\varphi}'(x) \overset{\langle a,\widetilde{b}\rangle}{\equiv} f(x, \widetilde{\varphi}(x))$$

§ 2 Существование решения задачи Коши

Определение 1 (Ломаная Эйлера)**.**

$$\begin{cases} \forall\, x \in (x_j, x_{j+1}], j \in 0 \,..\, N-1 \\ \forall\, x \in [x_{j-1}, x_j), j \in 1-N \,..\, 0 \end{cases} \quad \psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j)$$

Теорема 1 (Теорема Пеано)**.** *Пусть $f \in C(G)$. Тогда*

$$\forall\,(x_0, y_0), P_h(x)\ \exists\, y = \varphi(x)\colon \begin{cases} \varphi'(x) \overset{P_h}{\equiv} f(x, \varphi(x)) \\ y_0 = \varphi(x_0) \end{cases} \quad \textit{(решение 1.1.3)}$$

Лемма 2 (Лемма Гронуолла)**.** *Пусть $h \in C\big(\langle a; b\rangle\big)$. Тогда*

$$\exists\, \lambda, \mu \geqslant 0\colon \forall\, x_0, x \in \langle a; b\rangle \quad 0 \leqslant h(x) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\, \mathrm{d}s \right| \Rightarrow h(x) \leqslant \lambda e^{\mu|x - x_0|}$$

Глава 2: Диффуры в симметричной форме

Определение 2. Пусть G — область единственности. Тогда $U\colon G \to \mathbb{R}$, $U \in C(G)$ — допустимая функция, если $U(x,y) - U(x_0, y_0)$ задаёт единственную неявную функцию $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.

Определение 3. Допустимая функция называется интегралом уравнения, если неявная функция которую она задаёт — решение ЗК с начальными данными $(x_0; y_0)$.

Теорема 3. *Если допустимая функция постоянна вдоль любого решения в области единственности , то она — интеграл. Обратное тоже верно.*

Определение 4. Гладкая допустимая функция — $U \in C^1(G)\colon (U'_x)^2 + (U'_y)^2 > 0$

Теорема 4. *U — гладкий интеграл в области единственности G $\Leftrightarrow$*

$$N(x, y)U'_x(x, y) - M(x, y)U'_y(x, y) \overset{G}{\equiv} 0.$$

и U — гадкая допустимая функция.

Определение 5. Если U — интеграл, то $U(x, y) = C$ — общий интеграл.

ещё теормемы:

Теорема 5. *Все эти интегралы — существуют.*

$\square$ Ну, это же почти общее решение. $\blacksquare$

Теорема 6. *Пусть U — интеграл, U_1 — допустимая функция. Тогда U_1 — интеграл $\Leftrightarrow$*

$$\exists\, \Phi, A\colon U_1 \overset{A}{\equiv} \Phi(U)$$

Глава 3: Нормальные и не очень системы диффуров

§ 3 Условия Липшица

Лемма 1 (Лемма Адамара)**.** *Пусть $f(x, y)\colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, G — область, выпуклая по y. Пусть также $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y^i} \in C(G)$. Тогда*

$$\exists\, h(x, y_1, y_2)\colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \;\; f(x, y_2) - f(x, y_1) = h(x, y_1, y_2)^T (y_2 - y_1)$$

где $h(x, y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \dfrac{\partial f(x, u(s))}{\partial y}\, \mathrm{d}s$, *а* $u(s) = y_1 + s(y_2 - y_1)$

Лемма 2. *Пусть $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{\mathrm{loc}}(G)$, G — область. Тогда $\forall \overline{H} \subset G \;\; f \in \mathrm{Lip}_y^{\mathrm{gl}}$.*

§ 4 Пикаровские приближения

Определение 1 (Пикаровские приближения)**.**

$$y^{(0)} \equiv y_0$$

$$y^{(k+1)} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s))\, \mathrm{d}s$$

Теорема 1 (Пикара). *Пусть $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{\mathrm{loc}}(G)$ и*

$$\forall\,(x_0,y_0) \in G, k \;\; \exists\,\overline{H} \subset G, y^{(k)}(x)\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n :\; (x, y^{(k)}(x)) \in \overline{H} \wedge y^{(k)}(x) \to y(x)$$

которое уже и является решением задачи Коши с НД (x_0,y_0) на $[a;b]$. Здесь $y^{(k)}$ — пикаровские приближения.

□ В процессе последовательность заменяют рядом $\varphi^{(k)}$, а потом доказывают, что

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)}{k!}$$

■

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathrm{Lip}_y^{\mathrm{loc}}(G)$. Тогда отрезок Пеано покатит в качестве отрезка $[a;b]$ в теореме выше, а компакт можно выбрать так : $\overline{H} = \{(x,y) \mid x \in [a;b], \|y-y_0\| \leqslant b\}$.*

§ 5 Почти линейные системы

Определение 1. Пусть $f(x,y) \in C(G)$, $G = (a;b) \times \mathbb{R}^n$, L, M — непрерывны и неотрицательны. Тогда почти линейная система выглядит так:

$$\forall\,(x,y) \in G \quad \|f(x,y)\| \leqslant L(x) + M(x)\|y\|$$