1. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r}(t)$, $(x,y,z)(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$.
$\dot{\boldsymbol{r}}$: $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\dot x,\dot y,\dot z)(t)$, $\boldsymbol{\tau}\dot s$.
$\ddot{\boldsymbol{r}}$: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\ddot x,\ddot y,\ddot z)(t)$, $\ddot s\boldsymbol{\tau}+\dot s^2k_1\boldsymbol{n}$

2. ⟨?⟩

3. В криволинейных координатах

▷ $\boldsymbol{v}=\sum_k \dot q^k \boldsymbol{e_k}$

▷ $\boldsymbol{w}=\sum_k \ddot q^k \boldsymbol{e}_k+\sum_{k,i}\dot q^k\dot q^i\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}$

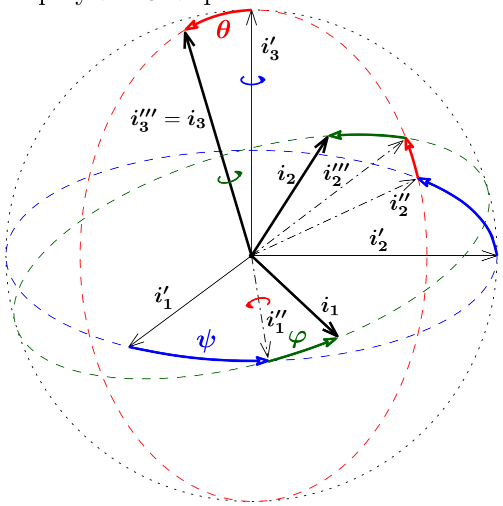
▷ $w^j=\ddot q^j+\sum_{k,i}\dot q^k\dot q^i\,\Gamma^j_{ki}$

▷ $\Gamma_{j,\,ki}=\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}_j$ — I рода

▷ $\Gamma^j_{ki}\ =\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}^j$ — II рода

▷ $w_\ell=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial}{\partial\dot q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)\right)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)$

4. Про углы Эйлера



▷ $\boldsymbol{\omega}=\dot\psi\,\boldsymbol{i}'_3+\dot\theta\,\boldsymbol{i}''_1+\dot\varphi\,\boldsymbol{i}_3$
▷ $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}_0(t)+\boldsymbol{r}(t)$
▷ $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r$
▷ $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{w}_r$

5. Динамика точки и систем точек

▷ $\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k(t,\{c_\ell\})$, $k\in 1\,..\,N$, $\ell\in 1\,..\,6N$
▷ $m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\boldsymbol{F}_k$, $mw_\ell=Q_\ell$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q^\ell}\right)-\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q^\ell}=Q_\ell$

▷ $\boldsymbol{r}_c=\dfrac{\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k}{\sum_k m_k}$, $\sum_k m_k=M$

6. Закон сохранения импульса

▷ $\boldsymbol{p}=\sum_k\boldsymbol{p}_k$, $\boldsymbol{p}_k=m_k\boldsymbol{v}_k$

▷ $\boldsymbol{F}=\sum_k\left(\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\boldsymbol{F}_k^{(i)}\right)$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_k\boldsymbol{F}_k^{(e)}$. Все сиды взаимодействия вымерли.

7. Момент импульса

▷ $\boldsymbol{\ell}=\sum_k\boldsymbol{\ell}_k$, $\boldsymbol{\ell}_k=\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{p}_k$

▷ $\boldsymbol{L}=\sum_k\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\sum_k\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)}$

▷ $\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}=\lambda(\boldsymbol{r}_{kj})\boldsymbol{r}_{kj}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t}=\sum_k\boldsymbol{L}_k^{(e)}$.

8. Энергия

▷ $T=\sum_k T_k$, $T_k=\dfrac{m_k(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{v}_k)}{2}$

▷ $\delta A_k=\boldsymbol{F}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$, $A=\int_\Gamma\delta A$, а вообще-т интеграл от формы.

▷ $\mathrm{d}T=\delta A_k^{(e)}+\delta A_k^{(i)}$

▷ $\mathrm{d}E=\mathrm{d}\left(T+\Pi^{(e)}+\Pi^{(i)}\right)=\delta A_{\text{не пот}}$

9. В поле центральной силы¬

▷ $u=1/\rho$.
▷ Формулы Бине
$$\begin{cases} v^2=c^2\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2+u^2\right)\\ w_\rho=-c^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u\right)\end{cases}$$
▷ Невыразимая жжесть

10. ⟨?⟩⟨`:set aflame`⟩Движение твёрдого тела ¬

▷ $\omega=0$ — поступательное

▷ $\boldsymbol{v_0},\boldsymbol{w_0}=0,\omega=\dot\varphi\boldsymbol{i}_3$ — вращение вокруг неподвижной оси
▷ $\boldsymbol{v_0}\upuparrows\boldsymbol{\omega}$ — винт
▷ ⟨?⟩Как попало вокруг неподвижной точки [1] ¬
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}_1(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)+\\ +\boldsymbol{i}_2(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)+\\ +\boldsymbol{i}_3(\dot\psi\cos\varphi+\dot\varphi)\end{aligned}$$

11. Скорость и ускорение точек твердого тела

▷ $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$
▷ $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w_0}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

12. Сложение движений ТТ

▷ $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{r_n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k\times\boldsymbol{r}_0$, $O_0=O$.

▷ $\boldsymbol{V}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)$

▷ $\boldsymbol{\Omega}=\sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k\quad\Rightarrow\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{r_n}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_0$

13. Кинематический винт

▷ $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=0$

14. Плоское движение

▷ $0=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$
▷ $\boldsymbol{r}_*=\left(-\dfrac{v_{0y}}{\omega},+\dfrac{v_{0x}}{\omega}\right)$ —подвижная центроида
▷ $\boldsymbol{r}'_*=\boldsymbol{r}_*+\boldsymbol{r}_0$ — неподвижная центроида
▷ $\omega=\dfrac{|\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A|}{|\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A|}$
▷ $\omega=\dfrac{|\boldsymbol{v}_a\times\boldsymbol{r}_{A*}|}{r_{A*}^2}$ и то же с B.
▷ центр ускорений: ⟨?⟩

15. Динамика вращения ТТ [2]

▷ $M=\int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)$, $\boldsymbol{r}_c=\dfrac{\int_\tau\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\mu(r)}{\int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)}$

▷ $\boldsymbol{\ell}=\int_\tau(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\mu$, $\boldsymbol{\ell}'=\int_\tau(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\mu$

▷ $\boldsymbol{\ell}'=$ $\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{v}_0\,M+\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{v}_0\,M+\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)M+\boldsymbol{\ell}$
▷ $T=\dfrac12\int_\tau(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\,\mathrm{d}\mu$, $T'=\dfrac12\int_\tau\boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\mu$
▷ $T'=T+\dfrac12 M\boldsymbol{v}_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)$
▷ $\ell_\omega=\omega J_\omega$
▷ $\boldsymbol{\ell}=\widehat{J}\boldsymbol{\omega}=\sum_{j,k}J_{jk}\omega_k\,\boldsymbol{i}_j$,
$J_{ik}=\int_\tau(r^2\delta_{jk}-x_jx_k)\,\mathrm{d}\mu$
▷ $T=\dfrac{J_\omega\omega^2}{2}=\dfrac{\widehat{J}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2}$
▷ $L=\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$
▷ Динамические уравнения Эйлера ¬
$L_a=J_a\dot\omega_a+(J_c-J_b)\,\omega_c\omega_b$
$L_b=J_b\dot\omega_b+(J_a-J_c)\,\omega_a\omega_c$
$L_c=J_c\dot\omega_c+(J_b-J_a)\,\omega_b\omega_a$
▷ Кинематические уравнения Эйлера ¬
$\omega_a=(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)$
$\omega_b=(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)$
$\omega_c=(\dot\psi\cos\varphi+\dot\varphi)$

16. Вращение вокруг неподвижной оси¬

▷ Ну, та скучная системка

17. $L=0$

18. Сила всего одна и приложена к центру масс

19. ⟨⚒⟩

20. ⟨⚒⟩

21. ⟨⚒⟩

22. Принцип Даламбера-Лагранжа: Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю: $(M\ddot{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{Y})\cdot\delta\boldsymbol{y}=0$

23. При варьировании с фиксированными концами $\left(\delta t_1=\delta t_0=0,\ \begin{matrix}\delta q^\ell|_{t_1}=0\\ \delta q^\ell|_{t_2}=0\end{matrix}\right)$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

- ▷ $\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T,\ T = \frac{M}{2} \sum_{j,k} g_{ij} \dot{q}^j \dot{q}^k$
- ▷ $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0}$,
  $\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot{q}^\ell \delta t$ (полная вариация)
- ▷ Лишь при этом условии работает принцип выше

25. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0$

26. $\begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0, \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q^l\, \partial a^p}\right) \neq 0 \\ p_\ell = \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell},\ b_k = \dfrac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k \text{ — const} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

- ▷ Фазовый объём
- ▷ Жесть

29. ⟨⚒⟩

Заметки

[1] У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь ⟨ᵔ̈⟩

[2] Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить