ГЛАВА III
Нормальные системы ОДУ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

1^0. Виды систем.

В общем виде система из n обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными выглядит следующим образом

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n)}) = 0. \end{cases} \quad (3.1^*)$$

Решением системы будем называть n функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, определенных на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ таких, что подстановка их в систему (3.1^*) обращает ее в n тождеств на $\langle a, b\rangle$.

Система (3.1^*) называется системой, не разрешенной относительно старших производных функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$.

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \dots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \quad (3.1^{**})$$

Система (3.1^{**}), естественно, называется системой, разрешенной относительно старших производных.

Система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \dots, y_n), \end{cases} \quad (3.1)$$

называется нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad (3.2)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением порядка m, разрешенным относительно старшей производной.

Уравнение

--- ---

2^0. Решение нормальной системы.

В дальнейшем будет рассматриваться нормальная система (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \dots, y_n), \end{cases}$$

в которой вещественные функции $f_1, \dots, f_n \in C(G)$, т. е. непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ пространстве переменных $x, y_1, \dots, y_n$.

Df. *Решением нормальной системы (3.1) называются n непрерывных на промежутке $\langle a, b\rangle$ функций $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, для всякого $x \in \langle a, b\rangle$ удовлетворяющих следующим трем условиям:*

1) функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ дифференцируемые,

2) точка $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \in G$,

3) $\varphi_i{}'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ $(i = \overline{1, n})$.

Теорема (о существовании решения). *Пусть в нормальной системе (3.1) функции $f_1, \dots, f_n \in C(G)$, тогда через каждую точку области G проходит по крайней мере одно решение системы (3.1), определенное на каком-либо отрезке Пеано.*

3^0. Геометрическая интерпретация решений.

Пусть $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ это решение системы (3.1), определенное на интервале (a, b).

Df. *Кривая, образуемая множеством точек $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, где $x \in (a, b)$, называется дугой интегральной кривой. Максимальная дуга интегральной кривой называется интегральной кривой.*

геометрическое определение интегральной кривой.

Df. *Интегральная кривая это любая гладкая кривая, лежащая в области G, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.*

Df. *Решение задачи Коши с начальными данными $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ существует, если можно указать такой интервал (α, β), содержащий точку x_0, что на нем определено решение $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ системы (3.1) и $y_1^0 = \varphi_1(x_0), \dots, y_n^0 = \varphi_n(x_0)$.*

Df. *Решение задачи Коши с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ *единственно для системы (3.1), если для любых двух решений* $y_1 = \widetilde{\varphi}_1(x), \dots, y_n = \widetilde{\varphi}_n(x)$ *и* $y_1 = \widehat{\varphi}_1(x), \dots, y_n = \widehat{\varphi}_n(x)$ *этой задачи Коши можно указать такой интервал* (α, β), *содержащий точку* x_0, *на котором оба эти решения определены и тождественно совпадают, т. е.* $\widetilde{\varphi}_i(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \widehat{\varphi}_i(x) \quad (i = \overline{1, n})$.

Df. *Точка* $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in G$ *называется точкой единственности для системы (3.1), если единственно решение задачи Коши с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$.

Df. *Область* $\widetilde{G} \subset G$ *называется областью единственности, если каждая ее точка является точкой единственности.*

Df. *Набор из* n *непрерывных функций* $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$ $(i = \overline{1, n})$ *называется общим решением системы (3.1) в области единственности* $\widetilde{G}$, *если для любой точки* $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \widetilde{G}$ *существует и единственно решение* $C_1^0, \dots, C_n^0$ *алгебраической системы* $y_1^0 = \varphi_1(x_0, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n^0 = \varphi_n(x_0, C_1, \dots, C_n)$ *такое, что функции* $y_i = \varphi_i(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ *есть решения задачи Коши системы (3.1) с начальными данными* $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$.

Df. *Множество точек* $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ *фазового пространства при* $t \in (a, b)$ *называется траекторией движения.*

Df. *Если в системе* (3.1_m) *функции* $f_1, \dots, f_n$ *определены и непрерывны для* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *и есть решение* $x_1(t) = x_1^0, \dots, x_n(t) = x_n^0$, *определенное для всякого вещественного* t, *то это решение называется состоянием (положением) равновесия, или точкой покоя, или особой точкой системы* (3.1_m).

6^0. Системы в симметричной форме.

Df. Систему дифференциальных уравнений порядка n

$$\frac{d\,x_1}{X_1(x_1, \dots, x_{n+1})} = \dots = \frac{d\,x_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})}, \tag{3.6}$$

где $X_1, \dots, X_{n+1}$ определены и непрерывны в области G пространства $(x_1, \dots, x_{n+1})$, называют системой в симметричной форме.

Df. *Точка* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$ *из области* G *называется особой для системы (3.6), если* $X_i(x^0) = 0$ *для всякого* $i = \overline{1, n+1}$. *В противном случае точка называется обыкновенной.*

Теорема (о связи системы в симметричной форме и нормальной системы). *Для любой обыкновенной точки $x^0 \in G$ существует окрестность $V(x^0)$, в которой система в симметричной форме (3.6) эквивалентна нормальной системе (3.1) порядка n.*

7^0. Векторная запись нормальных систем.

В отличие от геометрии, где обычно используется евклидова норма вектора или норма ℓ_2 : $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, в дифференциальных уравнениях удобно использовать норму ℓ_∞ :

$$\|a\| = \max_{j=1,\ldots,n} |a_j|.$$

Df. Последовательность векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots$ сходится к предельному вектору a, если $\|a^{(k)} - a\| \to 0$ при $k \to +\infty$.

$$\int_a^b y(x)dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)dx \\ \ldots \\ \int_a^b y_n(x)dx \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, легко проверить, что $\left\| \int_a^b y(x)\,dx \right\| \le \left| \int_a^b \|y(x)\|\,dx \right|$.

Положим $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \ldots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$, тогда система (3.1) примет вид

$$y' = f(x, y).$$

§ 2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ, УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА

1^0. Лемма Адамара.

$u(s) = \tilde{y} + s(\hat{y} - \tilde{y})$, где $s \in [0,1]$В результате получаем формулу конечных приращений для скалярной функции векторного аргумента

$$f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\, ds \cdot (\hat{y}_j - \tilde{y}_j). \qquad (3.7)$$

Лемма Адамара. *Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной по y в выпуклой по y области G, то для любых $(x,\tilde{y}), (x,\hat{y}) \in G$ существуют непрерывные вектор-функции $h^{(1)}(x,\tilde{y},\hat{y}), \ldots, h^{(m)}(x,\tilde{y},\hat{y})$ такие, что*

$$f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{m} h^{(j)}(x,\tilde{y},\hat{y}) \cdot (\hat{y}_j - \tilde{y}_j).$$

Действительно, $h^{(j)}(x,\tilde{y},\hat{y}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\, ds.$

2^0. Локальное и глобальное условия Липшица.

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица глобально по y на множестве D или $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, если найдется такая константа $L = L_D > 0$, что*

$$\forall\, (x,\tilde{y}), (x,\hat{y}) \in D \;\Rightarrow\; \|f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y})\| \le L\|\hat{y} - \tilde{y}\|. \qquad (3.8)$$

Df. *Функция* $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица локально *по* y *в области* G *или* $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *если для любой точки* (x_0, y^0) *из* G *существуют окрестность* $V(x_0, y^0)$, *лежащая в* G, *и* константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \tilde{y}), (x, \hat{y})$ из $V(x_0, y^0)$ выполняется неравенство (3.8).

Лемма (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица). *Если* $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *то для любого компакта* $\overline{H}$ *из* G *следует, что* $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.

3^0. Связь между дифференцируемостью и условием Липшица.

Лемма (о достаточном условии для локальной липшицевости). *Если вектор-функция* $f(x, y)$ *непрерывна вместе со своей частной производной по* y *в области* G, *то она удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в* G.

§3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПИКАРА

1^0. Теорема Пикара.

Теорема Пикара. *Пусть в системе (3.1)* $f(x, y) \in C(G)$, $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$ *и пусть для любой точки* (x_0, y^0) *из области* G *последовательные приближения Пикара* $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *с начальными данными* x_0, y^0 *определены на некотором отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем существует такой компакт* $\overline{H} \subset G$, *что для любых* $k \geq 0$ *и* $x \in [\alpha, \beta]$ *точка* $(x, y^{(k)}(x)) \in \overline{H}$. *Тогда функции* $y^{(k)}(x)$ *равномерно относительно* $[\alpha, \beta]$ *стремятся при* $k \to \infty$ *к предельной функции* $y(x)$, *которая является решением задачи Коши системы (3.1) с начальными данными* x_0, y^0 *на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

2^0. Существование и единственность решения системы.

Теорема (о существовании и единственности). *Пусть в системе (3.1)* $f(x, y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y^0) \in G$ *существует и единственно решение задачи Коши с начальными данными* x_0, y^0, *определенное на некотором отрезке Пеано* $P_h(x_0, y^0)$.

§4. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

1^0. Условия продолжения за границу интервала.

Лемма (о продолжении решения за интервал). *Пусть* $y = \varphi(x)$ *— решение системы (3.1), определенное на интервале* (a, b)*. Для того чтобы оно могло быть продолжено вправо за точку* b*, необходимо и достаточно, чтобы 1)* $\exists\ \eta = \lim\limits_{x \to b-} \varphi(x)$*, 2)* $(b, \eta) \in G$*. Аналогичны условия продолжимости влево за точку* a*).*

Df. *Интервал* (α, β) *называется максимальным интервалом существования решения* $y = \varphi(x)$ *системы (3.1), если это решение определено на* (α, β) *и не может быть продолжено ни на какой промежуток, содержащий* (α, β) *внутри себя.*

Df. *Интегральной кривой системы (3.1) называется график любого ее решения* $y = \varphi(x)$*, определенного на максимальном интервале существования* (α, β)*.*

2^0. Поведение решений вблизи границ максимального интервала существования.

Теорема (о поведении интегральной кривой при стремлении аргумента решения к границе максимального интервала существования). *Пусть в системе (3.1)* $f(x, y) \in C(G)$*, тогда при стремлении аргумента любого решения к границе своего максимального интервала существования интегральная кривая стремится к границе области* G*, т. е. покидает любой компакт* $\overline{H} \subset G$ *и никогда в него не возвращается.*

Следствие. *Пусть* $G = (a, b) \times D$*, где* D *— область фазового пространства* $\mathbb{R}^n$*. Тогда либо решение* $y = \varphi(x)$ *системы (3.1) определено на всем интервале* (a, b)*, либо при стремлении аргумента* x *к границе максимального интервала существования его интегральная кривая покидает любой компакт* $\overline{D}_1 \subset D$ *и никогда в него не возвращается.*

--- ---

§6. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

1^0. Непрерывность решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим нормальную систему (3.1), зависящую от параметра $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, изменяющегося в окрестности расчетной точки μ^0

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{3.15}$$

где функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна в области $F = G \times \mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, область изменения параметров $\mathfrak{M} = \{\mu \,|\, \|\mu - \mu^0\| < c\}$.

Теорема (об интегральной непрерывности). *Пусть в системе (3.15) функция* $f(x, y, \mu)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* $F = G \times \mathfrak{M}$ *пространства точек* (x, y, μ). *И пусть* $y = \varphi(x) = \varphi(x, \mu_0)$ *есть решение системы* (3.15_0), *определенное на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для системы (3.15) существуют число* $\delta > 0$ *и область начальных данных* $U_\delta = \{(x_0, y^0, \mu) \,|\, a < x_0 < b,\ \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta,\ \|\mu - \mu^0\| < \delta\}$ *такие, что для любой точки* $(x_0, y^0, \mu) \in U_\delta$ *решение* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *определено для* $\forall x \in [a, b]$ *и является непрерывной функцией по совокупности своих аргументов в области* $V_\delta = (a, b) \times U_\delta$ (эту теорему называют также теоремой о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров).

2^0. Дифференцируемость решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Теорема (о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам). *Пусть в системе (3.15) функция* $f(x, y, \mu)$ *определена, непрерывна и имеет непрерывные* f'_y, f'_μ *в области* F *пространства точек* (x, y, μ), *т. е.* $f \in C^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$. *Тогда решение системы (3.15)* $y = y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,1,1,1}_{x,x_0,y^0,\mu}(D) = C^1(D)$, *где* $D = \{(x, x_0, y^0, \mu) \,|\, (x_0, y^0, \mu) \in F,\ x \in I_{max}\}$, I_{max} *— максимальный интервал существования решения* $y(x, x_0, y^0, \mu)$, *причем*

1) для $\forall\, j = \overline{1, m}$ *вектор функция* $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j$ *является решением задачи Коши линейной неоднородной системы*

$$v' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, v + \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j} \qquad (3.17)$$

с начальными данными $x_0, \partial y^0(\mu)/\partial \mu_j$;

2) для $\forall\, i = \overline{1, n}$ *вектор функция* $\varphi^{(i)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial y^0_i$ *является решением задачи Коши линейной однородной системы*

$$u' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, u \qquad (3.18)$$

с начальными данными $x_0, e^{(i)}$, *где* $e^{(i)} = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$;

3) вектор функция $\varphi^{(0)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial x_0$ *является решением задачи Коши той же самой линейной однородной системы в вариациях* (3.17), *но с начальными данным* $x_0, -f(x_0, y^0, \mu)$.

Df. *Линейные системы (3.17) и (3.18) называются системами в вариациях вдоль решения* $y(x, x_0, y^0, \mu)$.

Теорема (о существовании у решения производных высших порядков). *Пусть в системе (3.15) функция* $f(x, y, \mu) \in C^{0,k,k}_{x,y,\mu}(F)$, *тогда решение системы (3.15)* $y = y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$.

3^0. Аналитичность решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.

Теорема Ляпунова–Пуанкаре (о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметров). *Пусть в системе (3.15) выполнены предположения, сделанные выше для* $f(x, y, \mu)$, *и пусть система* (3.15_0) $y' = f(x, y, \mu^0)$ *имеет решение* $y = \varphi(x, \mu^0)$, *определенное на отрезке* $[a, b]$. *Тогда* $\exists\, \rho > 0$ *такое, что решение системы (3.15)* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *определено и непрерывно на множестве* $[a, b] \times [a, b] \times K_\rho(\varphi(x_0), \mu^0)$ *и для любых* $x, x_0 \in [a, b]$ *является вещественно-аналитической функцией переменных* y^0, μ *в поликруге* $K_\rho(\varphi(x_0), \mu^0) = \{(y^0, \mu) \mid \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \rho,\ \|\mu - \mu^0\| < \rho\}$, *т. е.* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *раскладывается в сходящийся степенной ряд:*

$$y(x, x_0, y^0, \mu) = \sum\nolimits_{p,q=0}^{\infty} y^{(p,q)}(x, x_0)(y^0 - \varphi(x_0))^p (\mu - \mu^0)^q,$$

где коэффициенты $y^{(p,q)}(x, x_0)$ *непрерывны по* $x, x_0 \in [a, b]$.

4^0. Аналитичность решений нормальной системы по независимой переменной.

Теорема Коши (об аналитичности решения задачи Коши аналитической системы). *Пусть в системе (3.1)* $f(x, y)$ *является аналитической функцией* x, y *в области* G, *т. е. для любой точки* $(x_0, y^0) \in G$ *функция* f *раскладывается в этой точке в сходящийся степенной ряд:* $f(x, y) = \sum_{k,p=0}^{\infty} f^{(k,p)}(x - x_0)^k (y - y^0)^p$, *где* $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{Z}_+$, *с радиусом сходимости* $r = r(x_0, y^0) > 0$. *Тогда решение системы* $y = y(x, x_0, y^0)$ *раскладывается в точке* x_0 *в сходящийся степенной ряд:*

$$y(x, x_0, y^0) = \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} a^{(m)}(x - x_0)^m,$$

в котором $a^{(0)} = y^0$ *и радиус сходимости которого* $\rho = \rho(x_0)$ *вне зависимости от величины* r *может быть достаточно мал.*

3^0. Продолжимость решений почти линейных систем.

Df. *Система (3.1) называется почти линейной, если функция $f(x,y) \in C(G)$, где область $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, и существуют непрерывные и неотрицательные на (a,b) функции $L(x), M(x)$ такие, что $\|f(x,y)\| \leq L(x) + M(x)\|y\|$ для $\forall\,(x,y) \in G$.*

Теорема (о продолжимости решений почти линейных систем). *Любое решение почти линейной системы продолжимо на (a,b).*

§5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ВВЕДЕНИЕ

1^0. Существование и единственность решений.

Df. *Система (3.1) называется линейной, если она имеет вид*

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \vdots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x),$$

где матрица $P(x) = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, вектор $q(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x))$, функции $p_{ij}(x)$ и $q_i(x)$ непрерывны на (a,b).

Таким образом, система (3.1) линейная, если $f = P(x)y + q(x)$, а область $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Df. *Линейная система (3.14) называется однородной (ЛОС), если в ней $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, в противном случае линейная система неоднородная (ЛНС). Функция $q(x)$ неоднородность системы (3.14).*

Очевидно, что ЛОС всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Df. *Линейная система (3.14) называется вещественной, если все функции $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ принимают только вещественные значения.*

Теорема (о существовании и единственности решений линейных систем). *Для любой точки $x_0 \in (a,b)$ и для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^n$ существует и единственно решение задачи Коши линейной системы (3.14) с начальными данными x_0, y^0, определенное на некотором отрезке Пеано $P_h(x_0, y^0)$.*

2^0. Продолжимость решений линейных систем.

Теорема (о продолжимости решений линейных систем). *Любое решение линейной системы (3.14) продолжимо на (a,b).*

3^0. Комплексные линейные системы.

решение линейной системы (3.14) с непрерывными на (a, b) комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал (a, b).