

# Конспект по анализу за 3 семестр

Лектор: А. А. Лодкин

Записал :taxus

9 января 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Анализ в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>2</b>
§ 1	Оценка приращения дифференцируемого отображения . . . . .	2
§ 2	Частные производные высших порядков . . . . .	3
§ 3	Обобщение бинома . . . . .	4
§ 4	«Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных . . . . .	4
§ 5	Понятие экстремума, необходимое условие . . . . .	5
§ 6	Про квадратичные формы . . . . .	6
§ 7	Достаточное условие экстремума . . . . .	7
§ 8	Полнота пространства $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
§ 9	Теорема о сжимающем отображении . . . . .	8
§ 10	Метод Ньютона . . . . .	9
§ 11	Теорема об обратном отображении(формулировка) . . . . .	10
§ 12	Доказательство теоремы об обратимости . . . . .	11
§ 13	Теорема о дифференцируемости обратного отображения . . . . .	12
§ 14	Теорема о гладкости обратного отображения . . . . .	12
§ 15	Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов . . . . .	13
§ 16	Теорема о неявном отображении . . . . .	13
§ 17	Функциональная зависимость системы функций . . . . .	15
§ 18	Геометрический смысл ранга матрицы Якоби . . . . .	16
§ 19	Три способа локального задания поверхности . . . . .	16
§ 20	Условный экстремум(нестрого) . . . . .	17
§ 21	Доказательство теоремы об условном экстремуме . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>19</b>
§ 22	✂Интеграл от дифференциальной формы по пути . . . . .	19
§ 23	Точные формы . . . . .	21
§ 24	Замкнутые формы . . . . .	22
§ 25	Первообразная замкнутой формы вдоль пути . . . . .	23
§ 26	✂Гомотопия путей . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Комплексный анализ</b>	<b>24</b>
§ 27	✂Интеграл от комплексной дифференциальной формы . . . . .	24
§ 30	Свойства дробно-линейного отображения . . . . .	25
§ 42	Классификация изолированных особых точек . . . . .	26
§ 46	Вычисление вычетов в полюсах . . . . .	27
§ 47	Вычисление интегралов с помощью вычетов . . . . .	27
§ 55	Классические односвязные области. Теорема Римана . . . . .	28
§ 56	Лемма Шварца . . . . .	28
§ 57	Лемма о подгруппе группы автоморфизмов . . . . .	28
§ 58	Автоморфизмы классических областей . . . . .	29
	Использованная литература . . . . .	30

# Глава 1: Анализ в $\mathbb{R}^n$

## § 1 Оценка приращения дифференцируемого отображения

**Утверждение 1.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ . Тогда формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

не работает.

**Е.г.** Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), \quad b - a = 2\pi$$

**Теорема 2** (об оценке приращения отображения). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G$  — выпуклое,  $f$  — дифференцируема,

$$\forall x \in G \quad \|f'(x)\| \leq M$$

Тогда  $\forall a, b \in G \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где <sup>1</sup>

$$\begin{array}{lll} \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что  $F$  — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists c \in [0, 1]: F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим  $\varphi(c)$  за  $x$ ):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leq \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$dL(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1.  $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2.  $\psi(y) = \langle y, \ell \rangle, \|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leq M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

---

<sup>1</sup>Вот тут как раз нужна выпуклость, иначе отрезок  $[a; b]$  может и не лежать в  $G$

## § 2 Частные производные высших порядков

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \forall x \in G \exists \partial_{i_1, \dots, i_k}^k f(x)$ . Тогда

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{k+1} f(x) := \partial_{i_{k+1}} (\partial_{i_1, \dots, i_k}^k f)(x)$$

*Замечание 1.*  $C^p(G)$  — класс функций, определённых в  $G$  с непрерывной производной до  $p$ -го порядка включительно. Функции из  $C^1$  ещё называются гладкими.

**Теорема 1** (Зависимость производных  $p$ -го порядка от перестановки переменных). Пусть  $f \in C^p(G), x \in G$ . При этом

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \partial_i^p f(x) = \partial_j^p f(x)$$

□ Сначала докажем всё для  $p = 2, n = 2$ , т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Пусть  $(x, y) \in G, (x_0 + \Delta x, y) \in G, (x, y + \Delta y) \in G, (x + \Delta x, y + \Delta y) \in G$  Введём ещё 2 функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t, y + \Delta y) - f(t, y) \\ \psi(t) &= f(x + \Delta x, t) - f(x, t) \end{aligned}$$

Тогда  $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(c_1)\Delta x = W, c_1 \in [x, x + \Delta x]$ . При этом

$$W = \varphi'(x)\Delta x\Delta y \left( \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \Delta x \Delta y, c_2 \in [y, y + \Delta y]$$

Аналогично

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) \Delta x \Delta y, c_4 \in [y, y + \Delta y], c_3 \in [x, x + \Delta x]$$

По непрерывности второй производной  $f$  ( $f \in C^2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) &\xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) &\xrightarrow[\Delta y \rightarrow 0]{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \end{aligned}$$

По теореме о предельном переходе в равенствах  $\smile$  смешанные производные равны.

Теперь поймём, что делать в случае произвольных  $p, n$ .

Представим подстановку  $\pi$  как произведение транспозиций соседних элементов. Будем дальше разбираться с такими транспозициями.

Пусть  $\tau_k = (j, j + 1)$ . Сначала посчитаем производные по  $x_1, \dots, x_{j-1} = i'$ . А теперь обозначим  $\tilde{f} = \partial_{i'} f$ . По доказанному утверждению для двух переменных,  $\partial_{j, j+1} \tilde{f} = \partial_{j+1, j} \tilde{f}$ . А теперь продифференцируем это равенство по оставшимся переменным.

Таким образом, для произвольной транспозиции  $\tau_k = (j, j + 1)$  верно утверждение теоремы. А значит, и для произвольной подстановки  $\pi = \prod_k \tau_k$  теорема верна. ■

*Замечание 1.* Тут важно, что  $f \in C^p(G)$ . Одной точки бы не хватило, мы ведь рассматриваем маленький параллелепипед в  $U(x)$  и используем одномерную теорему Лагранжа внутри него. А для неё нужна дифференцируемость на интервале.

### § 3 Обобщение бинома

«Обычный» бином Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Его нетрудно обобщить до полинома Ньютона

$$(a_1 + \dots + a_n)^p = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n a_{i_1} \dots a_{i_p} = \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0, \dots, p\} \\ \sum \alpha_i = p}} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \cdot C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

Введём обозначения:

- $a = (a_1, \dots, a_n)$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — мультииндекс, по сути вектор индексов, для которого вводится своя куча обозначений, дабы упростить жизнь
  1.  $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i=1}^n$
  2.  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
  3.  $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
- $a^\alpha = \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$
- $\partial_\alpha = \partial_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^n = \frac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}}$
- $C_\alpha = C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$

**Утверждение 1.**  $C_\alpha = \frac{p!}{\alpha!}$

▼

Ну, это просто число перестановок с повторениями. Нужно взять по множителю из  $p$  скобок, причём перестановки одинаковых множителей входят в одно слагаемое. В итоге нужно делить общее число перестановок на число перестановок одинаковых множителей. А дальше можно сказать, что в каждое слагаемое входит каждый множитель, просто некоторые в нулевой степени.

▲

### § 4 «Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^p(G)$ . Тогда

$$d^p f(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

Или ещё можно вот так записать

$$\left( \sum_i dx_i \partial_i \right)^p f(x)$$

**Утверждение 1.** Если частные производные можно переставлять, то

$$d^p f(x) = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_i \leq p \\ |\alpha| = p}} \frac{p!}{\alpha!} \partial_\alpha f(x) dx^\alpha$$

**Теорема 2.** Пусть  $f \in C^{p+1}(G)$ ,  $G \in \mathbb{R}^n$ ,  $G$  — выпуклая,  $a \in G$ . Пусть также  $h \in \mathbb{R}^n$ :  $a+h \in G$ . Тогда

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток  $R_p(h)$  можно представить несколькими способами:

1. В форме Пеано:  $R_p(h) = o(\|h\|^p)$

2. В форме Лагранжа:  $R_p(h) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta h, h)$ ,  $\theta \in (0, 1)$

□ Рассмотрим  $\varphi(t) = a + th$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $F(t) = f(\varphi(t))$ ,  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . По одномерной теореме Тейлора

$$F(1) = F(0) + 1 \cdot F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) 1^2 + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) \cdot 1^p + R_p$$

Докажем, что  $F^{(k)}(0) = d^k f(a, h)$ . Проще всего по индукции, давайте ещё такое нестандартное обозначение введём:  $(k) = (1, \dots, k)$ , и будем понимать под  $i_{(k)}$  вектор индексов, а под  $h_{i_{(k)}}$  — произведение соответствующих  $h$ .

**база:**  $F(0) = f(a)$

**переход:** Пусть  $F^{(k-1)}(t) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n} \partial_{i_{(k-1)}} f(a + th) h_{i_{(k-1)}}$ . При дифференцировании по  $t$

всякие  $h_{i_j}$  в каждом слагаемом вынесутся за знак производной, а частная производная от  $f$  даст  $\sum_{i_k} \partial_{i_{(k)}} f(a + th) h_{i_k}$ . Если скомпоновать все суммы и подставить  $t = 0$ , как раз получается  $d^k f(a, h)$

Теперь разберёмся с остатком

$$R_p = \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta) \cdot 1^{p+1} = \frac{1}{(p+1)!} d^{(p+1)} f(a + \theta h, h)$$

Поскольку  $\forall i \ |h_i| \leq \|h\|$

$$d^{(p+1)} f(a + \theta h, h) = O(\|h\|^{p+1}) = o(\|h\|^p)$$

Следовательно,  $R_p = o(\|h\|^p)$  ■

## § 5 Понятие экстремума, необходимое условие

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G$ . Тогда говорят, что  $f$  имеет в  $a$  максимум (нестрогий), если

$$\exists U(a): \forall x \in U \ f(x) \leq f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколота, то максимум — строгий. Для минимума нужно  $\geq$ .

**Теорема 1** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $a$  — внутренняя точка  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(a)$ . Тогда если  $f$  имеет в  $a$  экстремум, то

$$df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \ \partial_i f(a) = 0$$

□ Рассмотрим  $\varphi_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ . Тогда у такой функции есть экстремум в  $a_i$ . А тогда, из одномерной теоремы Ферма  $d\varphi_i(t) = 0$ . А значит  $\partial_i f = 0$  ■

## § 6 Про квадратичные формы

**Определение 1.** <sup>1</sup> Функция  $A: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $V$  — векторное пространство, называется *билинейной формой*, если она линейна по обоим своим аргументам.

**Определение 2.** Билинейная форма  $A$  называется *симметрической*, если  $\forall x, y \quad A(x, y) = A(y, x)$ .

**Определение 3.** Пусть  $A$  — билинейная форма,  $e_1, \dots, e_n$  — базис в векторном пространстве. Тогда

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^n A(e_i, e_j) x^i y^j$$

и матрица  $A$ , элементы которой  $a_{ij} = A(e_i, e_j)$  называется матрицей билинейной формы.

**Определение 4.** Пусть  $A$  — симметрическая билинейная форма. Тогда  $A(x) = A(x, x)$  — *квадратичная форма*. При этом  $A(x, y)$  называется *полярной формой* по отношению к  $A(x)$ .

**Определение 5.** Матрица квадратичной формы — матрица соответствующей полярной формы.

**Определение 6** («Определённость» формы). Если что-то верно, то про форму  $A(x, y)$  говорят:

- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) > 0$  — положительно определена
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) < 0$  — отрицательно определена
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) \geq 0$  — полуопределена в положительном смысле
- $\forall x, y \neq 0 \quad A(x, y) \leq 0$  — полуопределена в отрицательном смысле

**Е.г.** Скалярное произведение — положительно определённая билинейная форма.

**Теорема 1.** Пусть в некотором базисе  $f_1, \dots, f_n$  квадратичная форма  $A$  имеет матрицу  $(a_{ij})$ . Пусть к тому же все «северо-западные» миноры  $\Delta_i$  отличны от нуля. Тогда существует базис  $e_1, \dots, e_n$ , в котором матрица  $A$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

□ По сути, нам нужно построить ортогональный базис, только вместо скалярного произведения используется билинейная форма  $A$  (причём не обязательно положительно определённая). За подробностями см. [4]. ■

**Теорема 2** (Правило Сильвестра). Квадратичная форма положительно определена, если все миноры из теоремы 1.6.1 положительны, и отрицательно определена, если их знаки чередуются, начиная с «-».

□ Следствие предыдущей теоремы. Определённость формы не зависит от выбора базиса. ■

---

<sup>1</sup>тут изложение больше по [4]

## § 7 Достаточное условие экстремума

**Теорема 1** (Достаточное условие экстремума). Пусть  $a \in G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a$  — внутренняя точка,  $f \in C^2(a)$ .

1.  $df(a) = 0$ ,  $d^2f(a, h) > 0 \Rightarrow f$  имеет в  $a$   $\min$
2.  $df(a) = 0$ ,  $d^2f(a, h) < 0 \Rightarrow f$  имеет в  $a$   $\max$
3.  $df(a) = 0$ ,  $d^2f(a, h) \leq 0 \Rightarrow$  ничего нет
4.  $df(a) = 0$ ,  $d^2f(a, h) \leq 0 \Rightarrow f$  не имеет в  $a$   $\min$
5.  $df(a) = 0$ ,  $d^2f(a, h) \geq 0 \Rightarrow f$  не имеет в  $a$   $\max$

□ Поскольку  $df(a) = 0$ ,  $\Delta f(a) = \frac{1}{2}(d^2f(a) + \alpha)$ , где  $\alpha = o(\|h\|)$ . Для упрощения жизни примем  $t = \frac{h}{\|h\|}$ . Тогда приращение функции можно переписать в виде

$$\Delta f = \|h\|^2 \left( \frac{1}{2} \sum b_{ij} t_i t_j + \frac{\alpha}{\|h\|^2} \right)$$

Поскольку  $\frac{\alpha}{\|h\|^2} \rightarrow 0$ , существует  $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$  в которой знак приращения определяется лишь первым слагаемым. Нетрудно заметить, что все значения  $t$  лежат на единичной сфере, которая компакт. Причём значения  $t$  покрывают всю сферу, ведь направление  $h$  можно выбирать в окрестности  $a$  произвольно. Так что можно просто сделать второе слагаемое меньшим минимума квадратичной формы на единичной сфере.

Таким способом можно расправиться с пунктами 1–2.

Для пункта 3 отыщем  $h_1: d^2(a, h_1) > 0$ ,  $h_2: d^2(a, h_1) < 0$ . Заметим, что если  $A$  — квадратичная форма, то  $A(h) > 0 \Rightarrow \forall s \ A(sh) = s^2 A(h) > 0$ . По сути, мы считаем значение формы вдоль прямой, проходящей через  $a$ . Если, как и выше, записать приращение в виде

$$\Delta f = s^2 \left( \frac{1}{2} d^2(a, h_{1|2}) + \frac{\alpha}{s^2} \right)$$

то видно, что можно получить в окрестности  $\overset{\circ}{U}(a)$  всё, что угодно, просто  $s \rightarrow 0$ .

4–5 легко доказываются от противного. ■

## § 8 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.** Последовательность  $(x_n)$  называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall m, n > N \ \rho(x_n - x_m) < \varepsilon$$

**Определение 2.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  — полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится

**Е.г.**  $\mathbb{R} \setminus 0$  — не полное метрическое пространство,  $x_n = 1/n$  тому пример.

*Замечание 1.* Если  $(X, \rho)$  — полно, то  $X$  вообще-то замкнуто. Хорошо видно на примере выше.

*Замечание 2.* Если  $(X, \rho)$  — полно,  $Y \subset X$  — замкнуто. Тогда и  $Y$  — полно.

**Утверждение 1.**  $\mathbb{R}^n$  — полное метрическое пространство.



▼

◁ произвольный  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\rho(x_n - x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \rho(x_m^i e_i - x_n^i e_i) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad |x_m^i - x_n^i| < \varepsilon$$

Таким образом  $(x_n^i) \in \mathbb{R}$  — фундаментальная. А в  $\mathbb{R}$  по теореме из первого семестра фундаментальные последовательности сходятся. Тогда  $\forall x_n^i \rightarrow a^i$ . Значит и  $x_n \rightarrow a$ .

▲

Кусок дальше не шибко нужен

Давайте введём метрику на пространстве непрерывных функций

**Определение 3.** Пусть  $f, g, h \in C([a; b])$ . Тогда

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$$

Здесь супремум можно заменить на максимум по теореме Вейерштрасса.

Докажем что это правда расстояние:

- $\rho(f, g) = \rho(g, f)$  — очевидно
- $\rho(f, g) \geq 0$  — тоже очевидно
- $\rho(f, g) = \rho(f, h) + \rho(h, g)$  — не так очевидно

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)| &= |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \\ &\leq \max_{x \in [a; b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a; b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f, h) + \rho(h, g) \end{aligned}$$

**Утверждение 2.** Пространство  $C([a; b])$  с указанной выше метрикой полно.

▼

Поточечная сходимость очевидна из полноты  $\mathbb{R}$ . А равномерную можно получить, устремив  $m$  к  $\infty$ , зафиксировав  $n$ . А из равномерной сходимости следует непрерывность предельной функции.

▲

*Замечание.* Если взять в качестве метрики  $\int_a^b |f - g|$ , то полнота ломается. Пополнение будет пространством суммируемых функций.

## § 9 Теорема о сжимающем отображении

**Определение 1.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда отображение  $T: X \rightarrow X$  называется сжимающим, если

$$\exists C \in (0, 1): \forall x', x'' \quad \rho(T(x'), T(x'')) \leq C \cdot \rho(x', x'')$$

**Теорема 1 (Банах).** Пусть  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство, а отображение  $T: X \rightarrow X$  — сжимающее. Тогда  $\exists! x_* \in X: Tx_* = x_*$  (неподвижная точка).

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x_*$$

□ ▷  $x_n = T^n x_0$ , где  $x_0 \in X$  — произвольное. Докажем, что

1.  $x_n \rightarrow x_*$
2.  $Tx_* = x_*$
3. других таких  $x_*$  нет.

Поехали

1.  $(x_n)$  сходится в себе, ведь  $C \in (0, 1)$ .

$$\rho(x_m, x_{m+p}) \leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \dots + \rho(x_{m+p-1}, x_{m+p}) \leq \rho(x_0, x_1) C^m (1 + \dots + C^{p-1}) < \rho(x_0, x_1) \frac{C^m}{1-C} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

раз пространство полное,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

2. отображение  $T$  непрерывно  $\Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx_*$ . Но по теореме о подпоследовательности и единственности предела  $Tx_* = x_*$ .

3. Пусть  $x_{**}$  — другая неподвижная точка. Но тогда

$$\rho(x_{**}, x_*) = \rho(Tx_{**}, Tx_*) \leq C \rho(x_{**}, x_*) \Rightarrow (C - 1) \rho(x_{**}, x_*) \geq 0 \xRightarrow{C < 1} \rho(x_{**}, x_*) = 0$$

■

## § 10 Метод Ньютона

Пусть  $f \in C([a; b])$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,  $f(x_*) = 0$ ,  $f'(x_*) \neq 0$ . Сам метод выглядит как-то так: Проводится касательная к графику в текущей точке, ищется её пересечение с осью  $x$ , отсюда восстанавливается перпендикуляр, пересечение которого с графиком — новая точка.

$$x - Tx = \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Докажем, что это вообще работает.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^2([a; b])$ ,  $x_* \in [a; b]$ :

$$a) f(x_*) = 0$$

$$b) f'(x_*) \neq 0$$

Тогда  $\exists U(x_*) : \forall x_0 \in U$ , такая что  $T^n x_0 \rightarrow x_*$  и  $x_{n+1} - x_* = O((x_n - x_*)^2)$

□ Сначала оценим  $T'$ .

$$T'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(f \in C^2)} \frac{f(x_*)f''(x_*)}{f'(x_*)^2} = 0$$

Так что  $\exists U(x_*) : c \in \bar{U} \Rightarrow |T'(c)| \leq 1/2$ .

Теперь покажем, что  $T(\bar{U}) \subset \bar{U}$ . Из вышесказанного

$$|Tx - Tx_*| \leq \frac{1}{2}|x - x_*| \quad (1.1)$$

Поскольку  $Tx_* = x_* - 0 = x_*$ , то (1.1) равносильно

$$|Tx - x_*| \leq \frac{1}{2}|x - x_*|$$

А это как раз то, что надо. Значит  $T$  как раз сжимающее отображение, и по теореме 1.9.1 такой  $x_* : f(x_*) = 0$  единственный.

Вторая часть тривиально получается из разложения  $f$  в ряд Тейлора в окрестности  $x_n$ . ■

## § 11 Теорема об обратном отображении (формулировка)

Пусть  $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать  $F^{-1}$ . Рассмотрим, например, линейное отображение.

[illegible]

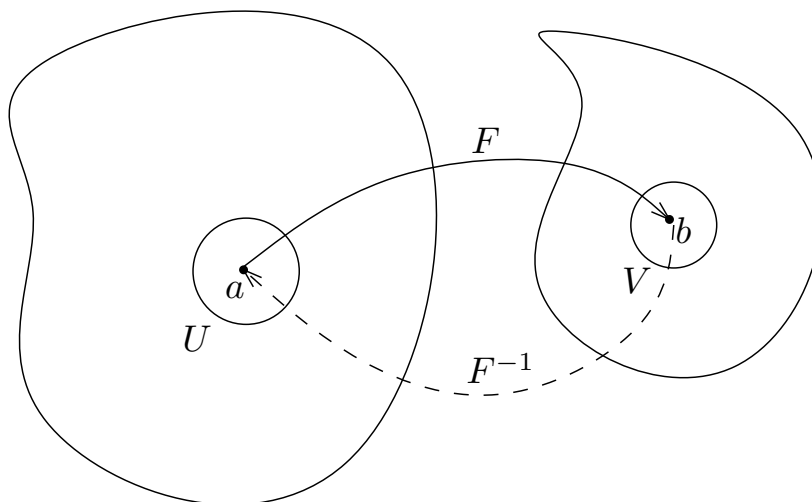
Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть  $a \in G$ ,  $b = F(a)$

$$(?)\exists U(a), V(b) : F: U \leftrightarrow V$$



$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \quad (1.1)$$

$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \quad (1.2)$$

$$\mathrm{d}F(a) = \mathrm{d}y(b) \tag{1.3}$$

Условие разрешимости (1.3) —  $\det(F'(a)) \neq 0$ . Утверждается, что у (1.1) условие разрешимости такое же.

Соответственно, формулировка

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $a \in G$ ,  $b = F(a)$ . Пусть ещё  $F$  дифференцируема в  $a$ ,  $\det(F'(a)) \neq 0$

Тогда

$$\exists U(a), V(b) : F : U \leftrightarrow V$$

$$\exists F^{-1}: V \rightarrow U, F^{-1} \in C^0$$

## § 12 Доказательство теоремы об обратимости

□ (Теорема об обратимости отображения) Введём обозначения:

$$\begin{aligned} F'(a) &= \Gamma \\ \Phi(x) &= x - \Gamma^{-1}(F(x) - y) \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что  $x$  — неподвижная точка  $\Phi \Leftrightarrow F(x) = y$ . Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (1.9.1). Тогда отображение в окрестности  $a$  будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим  $\|\Phi'\|$ .<sup>1</sup> Попутно примем  $\|y - b\| < \delta$ , это потом поможет доказать непрерывность.

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x)) \\ \|\Phi'(x)\| &\leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|F'(a) - F'(x)\| \end{aligned}$$

Последний множитель явно  $\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$  (так как  $F \in C^1$ ) Тогда и  $\|\Phi'(x)\| \rightarrow 0$ . А значит найдётся  $U_{\varepsilon_0}(a)$ :  $\|\Phi'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ .

Тогда по теореме 1.1.2

$$x, x' \in U_{\varepsilon_0}(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри  $U_{\varepsilon_0}$  компакт  $\overline{U_{\varepsilon_1}}$  (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\begin{aligned} \exists \overline{U}: \Phi(\overline{U}) &\subset \overline{U} \\ \|\Phi(x) - a\| &= \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\| \\ &\leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot (\underbrace{\| - (F(x) - F'(a)(x - a) - F(a)) \|}_{\alpha} + \|y - b\|) \end{aligned}$$

Выберем произвольный  $\varepsilon$ :  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ .

Однако мы ещё можем подкрутить  $\varepsilon_1$ .

$$\exists U_{\varepsilon_1}: \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (1.4.2), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем  $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$ . Там правда  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon_1$ .

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\dots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x - a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим  $\|x - a\| \leq \varepsilon$  (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_{\varepsilon}}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_{\varepsilon}(a) \subset \overline{U_{\varepsilon}}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists! x_0 \in \overline{U_{\varepsilon}}(a): \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность  $a$  с прообразом  $V(b): U = F^{-1}(V) \cap U_{\varepsilon}(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность, за счёт произвольно выбранного  $\varepsilon$ :

$$\forall U_{\varepsilon} \exists V_{\delta}(b): F^{-1}(V_{\delta}) \subset U_{\varepsilon}$$

■

<sup>1</sup>Тут  $y$  фиксируется и от  $x$  не зависит. Так что  $y' = 0$

### § 13 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

**Теорема 1** (о дифференцируемости  $F^{-1}$ ). Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F: U \leftrightarrow V$ . Пусть также  $F$  дифференцируема в  $a \in U$ ,  $F(a) = b$ ,  $\det F'(a) \neq 0$ . Тогда  $F^{-1}$  дифференцируемо в  $b$ .

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть  $y = F(x)$ . Обозначим:  $h = x - a$ ,  $k = y - b$ . Отображение биективно, значит  $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ . Из дифференцируемости  $F$

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha, \quad \alpha = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$ , следовательно  $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что  $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k)$  ( $k \rightarrow 0$ )

$$A\beta \leq \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leq \frac{\|h\|}{\left| \|Ah\| - \|\alpha\| \right|} = \frac{1}{\left| \frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|} \right|}$$

А последнее выражение ограничено при  $\|h\| < \delta$

■

**Следствие.**  $(F^{-1})'(b) = (F'(a))^{-1}$

### § 14 Теорема о гладкости обратного отображения

**Теорема 1.** Пусть  $F: U \leftrightarrow V$ , биективна,  $\in C^p$ . Пусть к тому же  $\det F'(x) \neq 0$ . Тогда  $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$

$$(F^{-1})'(y) = \left( \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что  $B = A^{-1}$ . Из алгебры  $b_{ij} = \frac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$  (здесь  $\mathcal{A}$  — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что  $b_{ij}$  — рациональная функция от  $\{a_{lk}\}$ . Следовательно,  $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \dots, a_{kl}, \dots, a_{nn}) \in C^\infty$ . С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(F(x)) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что  $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$ .

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \dots, a_{kl}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая  $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$ . Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = (\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)})(y)$$

Раньше доказали, что  $F^{-1} \in C^0$ . Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные  $F^{-1}$  принадлежат  $C^i$ . Тогда сама  $F^{-1} \in C^{i+1}$ . Таким бо́бром мы доберёмся до  $C^p$ . Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости  $\overline{b_{ij}}$ . ■

## § 15 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

**Теорема 1.** Пусть  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  имеет  $n$  корней  $(x_j^0)$ ,  $x_j^0 \in \mathbb{R}$ , таких что  $\forall i, j \ x_i^0 \neq x_j^0$ . Пусть ещё старший коэффициент  $= 1$ . Тогда

$$x_i = x_i(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть  $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ . Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n x_1 \cdots x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= (-1) \sum_i x_i \end{aligned}$$

Рассмотрим  $P$  как отображение  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем  $\det(F')$ . Этот определитель можно рассмотреть как многочлен  $\in R[x_1, \dots, x_n]$ . Его степень не превосходит  $0+1+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ . Заметим, что если хоть какая-то пара столбцов равны, то определитель равен нулю. Так что  $\det(F')$  делится на всевозможные многочлены вида  $x_i - x_j$ . А их как раз  $\frac{n(n-1)}{2}$  и они неприводимые. Следовательно, <sup>1</sup>

$$\det(F')(x_1, \dots, x_n) = C \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой.

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

## § 16 Теорема о неявном отображении

**Определение 1.** Пусть  $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ <sup>2</sup>. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Пусть  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y^0 \in \mathbb{R}^m$  такие, что  $F(x^0, y^0) = 0$ .

Тогда если  $\exists P(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Q(y^0) \subset \mathbb{R}^m$ , такие что

$$\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0$$

то говорят, что уравнение (1.1) задаёт неявную функцию  $f: P \rightarrow Q$ .

Сначала всякие комментарии.

[illegible]

<sup>1</sup>Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

<sup>2</sup>В доказательстве потом весело пользоваться, что функция действует в пространство той же размерности, что и  $y$

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases} dF_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ dF_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j} dy_j = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j} dy_j = - \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_j} dx_j. \end{cases} \quad (1.2)$$

При этом  $dy_j$  мы хотим выразить через  $dx_j$ . Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1.  $k = m$
2.  $\det \left( \frac{\partial(F_1, \dots, F_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \right) \neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (1.2)  $\Rightarrow$  (1.1).

**Теорема 1** (Теорема о неявном отображении). Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in C^p$ ,  $p \geq 1$ .

$$F(x, y) = 0, \quad (x_0, y_0) \in G$$

1.  $F(x_0, y_0) = 0$
2.  $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда  $\exists P(x_0), Q(x_0)$ , такие, что (1.1) задаёт неявное отображение  $f: P \rightarrow Q$ . При этом  $f \in C^p$  и

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

□ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [1, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1.  $\Phi: G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Работает как-то так:

$$(x, y) \mapsto (u, v), \quad \begin{cases} u = x, & u \in \mathbb{R}^n \\ v = F(x, y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

2.  $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  такого сорта  $x \mapsto (x, 0)$
3.  $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  такого сорта  $(x, y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель  $\Phi'(x, y)$ . Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x, y) = \left( \begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array} \right) \Rightarrow \det(\Phi'(x_0, y_0)) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (1.11.1)  $\exists \Phi^{-1}(x_0, y_0)$  и ещё окрестности  $U(x_0, y_0), V(x_0, 0)$ . Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \cap Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях  $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$ . Вполне очевидно, что  $f \in C^p$ . Ну  $i, \pi \in C^\infty$ ,  $\Phi^{-1} \in C^p$ . К тому же

$$\forall x \in P \quad x \xrightarrow{i} (x, 0) \xrightarrow{\Phi^{-1}} (x, y) \xrightarrow{\pi} y \in Q$$

При этом такой  $y$  — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение  $f$ .

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию  $F'_y$  — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x, y))^{-1} \cdot F'_x(x, y)$$

■

## § 17 Функциональная зависимость системы функций

**Определение 1.** Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции,  $x_0 \in G$ . Тогда  $g$  называется функционально зависимой от  $f_1, \dots, f_m$  в  $V(x_0)$ , если

$$\exists \varphi: U(f(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C^1 : g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

**Определение 2.** Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально независимыми, если определение выше не выполняется ни для какой  $V \subset G$  ни для какой из функций из набора.

**Теорема 1.** (о функциональной зависимости) Пусть  $f_1, \dots, f_m, g: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкие функции. К тому же  $a \in G$ ,  $f = (f_i)_i$ ,  $y = f(x)$ ,  $\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \end{pmatrix} = m$  в точке  $x \in U(a)$ . Тогда, если

$$\text{rk} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_m \\ g' \end{pmatrix} = m \text{ в точке } a, \text{ }^1 \text{ то } \exists V(a) \text{ в которой } g \text{ функционально зависит от } f_1, \dots, f_m.$$

□ Пусть сразу  $n \geq m$ , иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там  $m$  векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}), \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в  $f'(x)$ ,  $x \in U(a)$  существует ненулевой минор порядка  $m$ . Можно НУО считать, что он соответствует  $\bar{x}$ . Тогда это равносильно тому, что  $\det \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a) \right) \neq 0$ .

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей  $P, Q$  и

$$\exists \varphi: P \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Q \subset \mathbb{R}^m, \quad \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях  $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$ . Заметим, что здесь  $y, \bar{\bar{x}}$  — независимые переменные. Так что если  $j > m$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^m \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x), \quad x \in U(a)$$

Нам для того чтобы показать, что  $g$  функционально зависит от  $f$ , необходимо приравнять в окрестности точки  $a$   $g$  к функции от  $y$ . Пусть снова  $j > m$ , тогда

$$g(x) = g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}})$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g$$

<sup>1</sup>тут тонкость. Если ранг равен  $m$ , то определитель не 0 и в некой окрестности  $a$  по непрерывности. А вот со вторым так не прокатит, там наоборот нужно равенство 0



А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности  $a$  — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( \partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \right) = 0$$

Из того, что  $g, \varphi$  — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 1.17.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

## § 18 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

**Определение 1** (Коразмерность). Пусть  $V$  — подпространство  $U$ . Тогда  $\text{codim } V = \dim U - \dim V$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in G$ ,  $b = F(a)$ ,  $\exists V(a): \forall x \in V \text{ rk } F'(x) = r$ . Тогда

1.  $\exists U(a): F(U)$  имеет вид графика  $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$
2.  $\exists U(a) \subset F^{-1}(b)$  имеет вид графика  $\bar{x} = \psi(\bar{x})$

□ Аккуратное следствие 1.17.1 и 1.16.1. Единственное нетривиальное место — во второй половине, где нужно показать, почему из  $m$  уравнений вида  $F_i(x) = b_i$ , можно оставить лишь  $r$ . Здесь можно сказать, что последние уравнения не накладывают дополнительных ограничений на  $\{x_i\}$ , ведь там по сути написано, что-то такое:  $\varphi(\bar{b}) = \bar{b}$ . А эти уравнения точно верны из 1 пункта. ■

*Замечание.* Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

Есть кстати шансы, что в этой теореме попутно определили размерность образа при отображении, но неточно. Собственно, график  $\bar{y} = \varphi(\bar{y})$  можно считать заданным на  $y \in \mathbb{R}^m$ , которое уже «прямое», а дальше размерностью объявить  $\dim\{\bar{y}\}$ .

## § 19 Три способа локального задания поверхности

1. Параметрическое

$$f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n : \text{rk } f' = k \forall x \in D (\geq k)$$

Тогда  $M = f(D)$  — поверхность размерности  $k$ .

Условие на ранг означает, что нигде нету изломов, параметр же по сути — скорость.

2. Задание графиком

$$D \subset \mathbb{R}^k, f: D \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \text{ — гладкое}$$

Тогда  $M = \{(t, f(t)) \mid t \in D\} = \Gamma_f$ .

**Определение 1** (Поверхность(нестрога)). Множество  $S \subset \mathbb{R}^m$  можно называть  $k$ -мерной гладкой поверхностью, если в окрестности любой своей точки оно задаётся графиком гладкого отображения  $f: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ .

3. Неявное

Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\text{rk } F = n - k$ . Тогда

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

По сути уравнения связи.

**Теорема 1.** Если в некой окрестности  $a \in \mathbb{R}^n$   $k$ -мерная поверхность может быть задана один из 3 способов, то она может быть задана и всеми остальными.

□

1 → 2 см 1.18.1 (1)

2 → 3  $F(t, y) = f(t) - y$ ,  $F' = (f'_t \mid -E) \Rightarrow \text{rk } F' = n - k$

3 → 2 см 1.18.1 (2)

2 → 1  $(x, y) \mapsto (x(t), f(x(t)))$ , где  $t = x$ . С рангами очевидно проблем нет, единичная матрица же.

■

## § 20 Условный экстремум(нестрого)

**Определение 1** (Безусловный экстремум). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G$  — внутренняя точка. Тогда в точке  $a$   $\max / \min$  если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

**Определение 2** (Экстремум на подмножестве). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  —  $k$ -мерная поверхность,  $a \in G \cap M$  — внутренняя точка. Тогда в точке  $a$   $\max / \min$  относительно  $M$ , если

$$\exists U(a): \forall x \in U \cap M \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Чаще всего  $M$  задают неявно — «накладывают условия» на значения  $f$ .

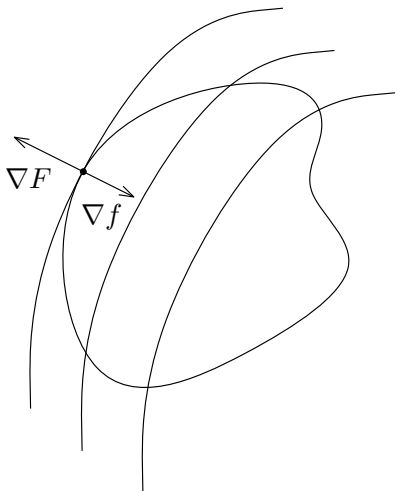
**Определение 3** (Условный экстремум). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1, \dots, F_m: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G \cap M$  — внутренняя точка,  $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$ . Тогда в точке  $a$  *условный*  $\max / \min$  если

$$\exists U(a): \forall x \in U, F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0 \quad f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

**Теорема 1.** Пусть  $f, F_1, \dots, F_m \in C^1(G)$ ,  $a \in G$ .

Тогда если  $f$  имеет в  $a$  экстремум при условии  $F(a) = 0$ , то  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — линейно зависимы.

**Е.г.** Можно двумерный случай рассмотреть.



$$\nabla f = \lambda \nabla F$$

**Следствие 1** (Правило Лагранжа).  $f$  имеет в  $a$  экстремум при условии  $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$ , то

1. либо  $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  ЛЗ

2. либо  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}: \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i(a)$

## § 21 Доказательство теоремы об условном экстремуме

□

1. Пусть  $m = n - 1$ . Будем доказывать от противного. Пусть в  $a$  условный тах, но  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — ЛНЗ.

Рассмотрим  $\Phi(x) = (f(x), F_1(x), \dots, F_m(x))$ . Тогда такое  $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Из линейной независимости градиентов

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix}, \det \Phi'(a) \neq 0$$

Пусть  $b = \Phi(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$ . Тогда по теореме об обратном отображении (1.14.1)

$$\exists U(a), V(b) : \Phi: U \rightarrow V \text{ — диффеоморфизм}$$

Пусть  $V \supset B_\varepsilon(b)$ ,  $y = (f(a) + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in V$ , тогда  $\exists! x \in U: \Phi(x) = y$ . Получается, что  $f(x) > f(a)$ ,  $\forall i F_i(x) = 0$ , что немного противоречит тому, что в  $a$  условный тах.

2. Теперь рассмотрим случай  $m < n - 1$  (всё остальное неинтересно, точно будет ЛЗ). Будем доказывать от противного. Пусть в  $a$  условный тах, но  $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$  — ЛНЗ. Тогда  $\text{rk } \Phi'(a) = m + 1 < n$ . Добавим ещё функций  $F_{m+1}, \dots, F_{n-1}$  таких, что  $F_i(x) = x_{i+1} - ai + 1$ .

Введём ещё стандартное обозначение

$$x = (\underbrace{x, \dots, x_{m+1}}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+2}, \dots, x_n}_{\bar{x}})$$

И не совсем стандартное

$$A = \frac{\partial(f_1, F_1, \dots, F_m)}{\partial x_1, \dots, x_{m+1}}(a)$$

Обычно такой «дробью» обозначают якобиан, но, пожалуй, сохраним обозначения с лекции.

Итак

$$\Phi'(a) = \left( \begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & E_{n-m-1} \end{array} \right) \Rightarrow \text{rk } \Phi'(a) = n$$

А теперь можно подвести всё к первому пункту. Рассмотрим  $\widetilde{M} = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$  (а  $M = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$ ). Поскольку  $\widetilde{M} \subset M$ ,  $f$  будет иметь в  $a$  максимум и относительно  $\widetilde{M}$ .

Аналогично 1 пункту получаем бред какой-то.

■

*Замечание 1.* Такая теорема может найти лишь точки, «подозрительные» на экстремум. Надо ещё отдельно думать. Например, вдруг там на компакте всё определено.

*Замечание 2.* Можно рассматривать функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x) = f(x, \lambda) - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x)$$

Тогда если в  $a$  условный экстремум, то в  $(a, \lambda)$  стационарная точка ( $\mathcal{L}'(a) = 0$ ) функции Лагранжа.

## Глава 2: Криволинейные интегралы

### § 22 ✂ Интеграл от дифференциальной формы по пути

Параграфы со значком «✂» лучше не читать, они недопилены.

**Дифференциальные формы.** Начать лучше с полилинейных форм.

**Определение 1.** Пусть  $L$  — линейное пространство над полем  $K$ . Тогда функция  $A: L^k \rightarrow K$ , линейная по каждому из своих аргументов, называется  $k$ -линейной формой.

12

Нам тут хватит и 1-форм, так что

**Определение 2.** Дифференциальной 1-формой можно назвать отображение из  $\mathbb{R}^n$  в линейную (по  $h$ ) форму,  $P \in C^0$

$$\omega = \langle P(x), dx(x, h) \rangle$$

Но это как-то не очень (а что такое дифференциал?).

**Гладкие пути.**

**Определение 3.** Пусть  $\gamma: [a; b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\gamma$  называется путём в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

- Путь гладкий, если  $\gamma \in C^1$ ,
- путь регулярный, если  $\text{rk } \gamma' \geq 1$ ,
- путь простой, если  $\gamma$  — биекция.

**Определение 4.** Образ  $\Gamma = \gamma([a; b]) \subset \mathbb{R}^n$  называется *кривой* в  $\mathbb{R}^n$ . Ещё говорят, что  $\Gamma$  — носитель пути  $\gamma$ , а  $\gamma$  — параметризация  $\Gamma$ .<sup>3</sup>

*Замечание.* Путь простой  $\Leftrightarrow$  кривая не имеет самопересечений.

**Определение 5.** Будем говорить, что простые пути имеют одинаковую ориентацию, если

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) \quad \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

и противоположную, если всё наоборот. Тут ещё введу нестандартное обозначение, но так жить проще ☺.

- $\Uparrow$  — одинаковая ориентация
- $\Downarrow$  — противоположная ориентация

*Замечание.* Для биективных параметризаций видимо просто нет другого выбора. С петлями всё будет интереснее.

---

<sup>1</sup><ну его>

<sup>2</sup><потом лучше напишу>

<sup>3</sup>здесь ещё можно как в [5] определять кривую как класс эквивалентности путей, так вроде проще

## Интегралы от форм по пути

**Определение 6.** Просто возьмём и определим интегралы по простому гладкому пути от 1-форм так:

$$I = \int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

**Утверждение 1** (Корректность определения выше). *Интеграл по пути не зависит от параметризации.*

□ Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  — параметризации  $\Gamma$ , одинаково ориентированы. Докажем, что

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = I_2$$

Поскольку  $\gamma_1, \gamma_2$  — биекции,  $\exists \varphi: t_2 = \varphi(t_1)$ , тоже биекция, такого сорта:  $t_1 \xrightarrow{\gamma_1} x \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} t_2$  Тогда

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} \langle P(\gamma_2(t_2)), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle dt_2 = \int_{a_1}^{b_1} \langle P(\underbrace{\gamma_2(\varphi(t_1))}_x), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1$$

Покажем, что  $\partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \partial_{t_1} \varphi = \partial_{t_1} \gamma_1(t_1)$ . Это просто следует равенства  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ , если его продифференцировать по  $t_1$ . Так что

$$\int_{a_1}^{b_1} \langle P(x), \partial_{t_1} \gamma_1(t_1) \rangle (\partial_{t_1} \varphi(t_1))^{-1} \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1 = I_1$$

■

*Замечание 1.* Если  $\gamma_1 \uparrow \downarrow \gamma_2$ , то  $I_2 = -I_1$ .

*Замечание 2.* Если рассматривать только одинаково ориентированные пути, то

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Gamma} \omega$$

*Замечание 3.* Если  $\Gamma$  разбивается на непересекающиеся  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , то

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$$

## Петли и интегралы по ним

**Определение 7.** Кривая  $\Gamma$  — петля, если для всякой её параметризации  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Петля называется простой, если  $\exists: \gamma|_{[a;b]}$  — биекция.

*Замечание.* Плохие петли можно разбивать на простые.

**Определение 8.** Пусть  $\Gamma$  — простая петля. Тогда

$$I = \oint_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

**Утверждение 2.** *Определение выше корректно, и не зависит от выбора «начала» петли.*

▼

Можно рассмотреть 2 разные параметризации и разбить на 2 куска. Дальше работает определение интеграла по простому пути.

▲

*Замечание.* Чтобы посчитать интегралы по всем остальным путям, их нужно разбивать на простые пути и простые петли

## § 23 Точные формы

**Определение 1.** 1-форма  $\omega$  называется точной в  $G$ , если  $\exists \Phi: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $\omega = d\Phi$ .  $\Phi$  в таком случае называется потенциалом, а сама форма ещё иногда называется потенциальной.

**Е.г.** Работа в физике.

**Теорема 1.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma \subset G$ ,  $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$  Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

□  $\langle P, x \rangle = (\Phi \circ \gamma)'(t)$ . Дальше уже тривиально из непрерывности  $\Phi$ . ■

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$ ,  $\gamma_{1,2}(a) = A$ ,  $\gamma_{1,2}(b) = B$ . Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma \subset G$  — петля Тогда

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

**Теорема 4.** Пусть  $\omega$  — форма в  $G$ , и  $\int_{\gamma} \omega$  не зависит от пути при фиксированных концах. Тогда  $\omega$  — точна.

□ Надо показать, что  $\partial_i \Phi = P^i$ . В этом месте можно забыть на общности и объявить  $n = 2$ . Докажем, что  $\partial_x \Phi = P^1$ . Поскольку от пути ничего не зависит,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \int_A^{(x+\Delta x, y)} \omega - \int_A^{(x, y)} \omega \right)$$

А это по сути интеграл по пути, соединяющем  $(x + \Delta x, y)$  и  $(x, y)$ . А здесь уже можно взять приличную кривую (прямую) с правильной параметризацией, и воспользоваться теоремой о среднем.

$$\dots = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Последнее равенство верно по непрерывности. ■

**Теорема 5.**  $\oint \omega = 0 \Rightarrow \omega$  — точна

**Теорема 6.** Пусть  $G$ ,  $\oint \omega = 0$  для любой прямоугольной петли. Тогда  $\omega$  — точна.

□ Аккуратно свести к теореме 2.23.4, там всё будет работать и с путями, параллельными осям координат. ■

## § 24 Замкнутые формы

Здесь уже окончательно забиваем на все  $n \geq 2$ . Там, в целом, понятно как обобщать. Тут всюду  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

**Определение 1.** Форма  $\omega$  замкнута в  $G$ , если

$$\forall A \in G \exists U(A): \exists \Phi_U: U \rightarrow R \quad \omega = d\Phi_U$$

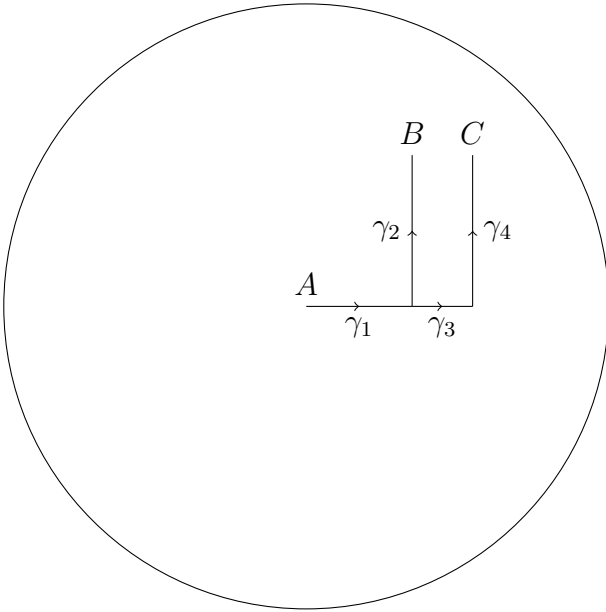
короче, локально точна.

**Теорема 1.** Пусть  $\omega$  — гладкая форма в  $G$ . Тогда если  $\omega$  замкнута,  $\partial_y P = \partial_x Q$  в  $G$ .

□ Очевидно следует из «локальной точности». ■

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  — гладкая форма в  $G$ . Тогда если  $\partial_y P = \partial_x Q$  в  $G$ , то  $\omega$  замкнута.

□ Выберем произвольную  $A$ , тогда  $U_\varepsilon(A) \subset G$ . Надо попробовать построить потенциал. Например так  $\Phi(B) = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega$ . Докажем, что  $\partial_x \Phi = P$ ,  $\partial_y \Phi = Q$ .



$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(C) - \Phi(B) = \int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega \\ &= \int_{y_A}^y Q(x + \Delta x, t) dt - \int_{y_A}^y Q(x, t) dt + \int_x^{x+\Delta x} P(t, y_A) dt \end{aligned}$$

Последний сходится к  $P(x, y_0)dx$ , а первые два надо немного преобразовать

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \int_{\gamma_4} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \right) = \int_{y_0}^y \left( \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x} \right) dt$$

Подинтегральную функцию можно представить как последовательность  $f_n \Rightarrow Q'$ .

$$\left| \frac{Q(x + \frac{1}{n}) - Q(x)}{\frac{1}{n}} - Q'(x) \right| = |Q'(\xi) - Q'(x)| < \varepsilon$$

а функция  $Q'$  равномерно непрерывна на  $[x, x + \Delta x]$ , ибо он отрезок. Так что можно поменять местами предел и интеграл.

$$\dots = \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dt = \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dt = \Delta P$$

Если сложить с оставшимся куском, то как раз и выйдет  $P$ . С равенством  $Q$  вроде все попроще, там нужно считать приращение всего лишь по одному пути. ■

**Замечание 1.** Бывают замкнутые, но не точные формы. Например  $\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ . Она замкнута, а вот  $\oint_\gamma \omega$  по окружности вокруг 0 не 0.

## § 25 Первообразная замкнутой формы вдоль пути

Сначала можно отметить, что  $\Gamma = \gamma([a; b])$  — компакт. Так что вроде можно пользоваться теоремой о конечном подпокрытии.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — область,  $\omega$  — гладкая точная форма в  $G$ , а  $\Phi, \Psi$  — две её первообразные в  $G$ . Тогда  $\Phi - \Psi \equiv C \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  замкнута в  $G$ ,  $\Gamma = \gamma([a; b])$ . Тогда существует первообразная вдоль пути  $\gamma$  и  $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$ .

□ Поскольку кривая компактна, в любом её покрытии можно выделить конечное подпокрытие. Собственно, будем рассматривать покрытие открытыми кругами  $U(p_i)$ . Пусть  $\Phi_i$  — произвольная первообразная в  $U_i$ . Заменяем  $\Phi_i$   $\tilde{\Phi}_i$ , так что  $\tilde{\Phi}_{i+1} = \tilde{\Phi}_i$  на  $U_{i+1} \cap U_i$ ,  $\tilde{U}_0 = U_0$ .

Выберем параметризацию, тогда  $p_i$  соответствуют  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ . Теперь выберем  $f(\gamma(t)) = \tilde{\Phi}_k(\gamma(t))$ ,  $\gamma(t) \in U_k$ . Здесь вроде можно прожить и без простоты пути.<sup>1</sup>

Теперь ещё выберем  $q_i \in U_{i+1} \cap U_i$ ,  $\{\gamma_j\}$  — пути от  $p_i$  до  $q_i$  и пути от  $q_i$  до  $p_{i+1}$ . Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_j \int_{\gamma_j} \omega = \tilde{\Phi}(p_n) - \tilde{\Phi}(p_0) = f(b) - f(a)$$

■

## § 26 Гомотопия путей

**Определение 1.** Непрерывным семейством путей называется непрерывная функция  $g: [0; 1] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Часто обозначается так:  $\gamma_s(t) = g(s, t)$ .<sup>2</sup>

**Определение 2** ( $\simeq$ ). Пусть  $\gamma_1, \gamma_2: [a; b] \rightarrow G$ ,  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . Тогда утверждается, что пути гомотопны, если существует семейство  $\gamma_s(t): \gamma_{s_1} = \gamma_1, \gamma_{s_2} = \gamma_2$ .

*Замечание.* Таки отношение эквивалентности.

**Теорема 1.** Пусть  $\omega$  — замкнутая форма в области  $G$ ,  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ . Тогда

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  — замкнутая форма в области  $G$ ,  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  — гомотопные петли. Тогда

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$

*Замечание.* Доказывать я это пока не буду, иначе это будет выглядеть как-то так:

<sup>1</sup>вообще первообразную вдоль пути нигде не определяли, так что можно считать конструкцию, построенную выше, определением

<sup>2</sup>По-хорошему там должны быть топологические пространства, но не сегодня и не сейчас.





**Следствие 1.** Пусть  $\gamma$  — петля в  $G$  и  $\gamma \stackrel{G}{\sim} \bullet$ . Тогда  $\oint_{\gamma} w = 0$ .

**Определение 3.** Область в  $G$  называется односвязной, если в ней всякая петля стягивается в точку.

**Теорема 3.** В односвязной области все замкнутые формы точны.

**Е.g.** Далёкая, далёкая галактика — не односвязная область.

## Глава 3: Комплексный анализ

### § 27 ✂ Интеграл от комплексной дифференциальной формы

1

**Определение 1.** Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как  $\{z \mid |z - a| < \varepsilon\}$ , проколотую окрестность как  $\{z \mid 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ . Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в  $\mathbb{R}^2$ . Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

**Определение 2.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}$  — область,  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , непрерывна,  $f = f_1 + if_2$ ,  $\omega(z, dz) = f(z)dz$  — комплексная дифференциальная форма.<sup>2</sup> Пусть  $\Gamma \subset G$  — кривая,  $\gamma$  — её параметризация,  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int_{\gamma} := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2(t)) dt + \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1(t)) dt$$

<sup>1</sup>здесь надо сильно больше определений

<sup>2</sup>Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

### Свойства:

**Утверждение 1.** см § 22

**Утверждение 2.** Пусть  $\{t_i\}$  — разбиение отрезка  $[a; b]$ ,  $z_i = \gamma(t_i)$ ,  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ ,  $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $\xi_i = \gamma(\tau_i)$ . Пусть ещё

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta z_i$$
$$r = \max |\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

**Следствие 1.** Пусть  $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leq M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

.....

{censored by galactic vimperor}

.....

### § 30 Свойства дробно-линейного отображения

**Определение 1** (Дробно-линейное отображение).  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad \neq bc$  В  $\infty$  определим её как  $a/c$ , а в  $-d/c$  как  $\infty$ .

**Утверждение 1.** Дробно-линейное отображение — гомеоморфизм  $\overline{\mathbb{C}}$  в  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Определение 2.** Углом между двумя путями на бесконечности называется угол между образами этих путей при отображении  $z \mapsto \frac{1}{z}$

*Замечание.* Геометрическая мотивировка связана с углами между путями через северный полюс сферы Римана.

**Утверждение 2.** Дробно-линейное отображение конформно во всех точках  $\overline{\mathbb{C}}$

**Утверждение 3.** Дробно-линейные отображения образуют группу.

**Утверждение 4.** Дробно-линейные отображения переводят обобщённые окружности (прямые или окружности) в обобщённые окружности.

▼

Дробно-линейное — композиция линейного и инверсии (с отражением относительно вещественной оси). С линейными всё ясно, а с инверсией надо доказывать. Окружность можно записать уравнением

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

А прямую

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = (z - b)(\bar{z} - \bar{b}) \Leftrightarrow \overline{(a - b)}z + (a - b)\bar{z} + |b|^2 - |a|^2 = 0$$

Посмотрим, прообразом чего она является

$$(w^{-1} - a)(\bar{w}^{-1} - \bar{a}) = \frac{(1 - aw)(1 - \bar{a}\bar{w})}{|w|^2} = R^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)|w|^2 - a\bar{w} - \bar{a}w + 1 = 0$$

Дальше есть два случая:

$|a| = 1$ : Это уравнение прямой с  $|b| \neq |a|$ . А такие прямые не проходят через 0. Ну, точки на одной окружности равноудалены от её центра. А центр у неё в 0.

$|a| \neq 1$  Поделим на  $|a|^2 - 1$ .

$$\left(w - \frac{a}{|a|^2 - 1}\right) \overline{\left(w - \frac{a}{|a|^2 - 1}\right)} = \frac{|a|^2}{|a|^2 - 1} - 1 = \frac{1}{|a|^2 - 1}$$

а сие есть уравнение окружности.

Ну, оставшиеся случаи разбираются аналогично. Разве что прямая через начало координат проще задаётся как

$$(e^{-ia} - e^{-ib})z + (e^{ia} - e^{ib})\bar{z} = 0$$

Ну и видно что не будет членов с  $|w|^2$  — выйдет прямая.

▲

**Утверждение 5.** *Дробно-линейное отображение сохраняет ангармоническое отношение:*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} / \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$$

**Утверждение 6.** *Дробно-линейное отображение однозначно задаётся 3 точками и их образами.*

.....

{censored by galactic vimperor}

.....

## § 42 Классификация изолированных особых точек

**Определение 1.** Особой точкой функции  $f$  называется точка, где  $f$  не голоморфна или не определена.

**Определение 2.** Изолированной особой точкой функции  $f$  называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

## § 46 Вычисление вычетов в полюсах

**Определение 1.** Пусть  $f$  имеет в  $a$  полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении  $f$  в ряд Лорана в кольце с центром в  $a$ .

**Теорема 1.** Пусть  $a$  — полюс первого порядка функции  $f$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

**Теорема 2.** Пусть  $a$  — ноль первого порядка для  $\psi$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ ,  $\varphi, \psi$  голоморфны в  $U(a)$ ,  $f = \frac{\varphi}{\psi}$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

**Теорема 3.** Пусть  $a$  — полюс  $p$ -го порядка функции  $f$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \left( (z-a)^p f(z) \right)_{z=a}^{(p-1)}$$

## § 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I) Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где  $a_k$  — вычеты функции  $g(z)$ , внутри единичной окружности. В функции  $g \sin / \cos$  заменены на  $\frac{1}{2}(z \pm z^{-1})$

II) Интеграл от рациональной функции на  $\mathbb{R}$

Пусть  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\deg P \leq \deg Q - 2$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

$$\text{III)} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\lambda z} dz = I$$

Пусть  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ , голоморфна всюду кроме  $\{a_k\}$ , нету особых точек на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

**Лемма 1 (Жордана).** Пусть  $f$  голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек,  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ . Тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

## § 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

**Определение 1.** Комплексным изоморфизмом областей  $G$  и  $H$  называется однолистное конформное отображение <sup>1</sup>  $f: G \rightarrow H$ . Область  $G$  и  $H$  тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

*Замечание.*  $f: G \rightarrow G$  при условиях выше — автоморфизм.

**Утверждение 1.** Все автоморфизмы области  $G$  с операцией композиции образуют группу  $\text{Aut } G$ .

▼

Пусть  $f, g, h \in \text{Aut } G$ . Тогда  $f \circ g: G \rightarrow G$ , композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- $\forall f \exists f^{-1}$ , обратное — голоморфно и биекция,  $\Rightarrow$  конформно и однолистно.
- $\text{id}: G \rightarrow G$  — конформно и однолистно.

▲

### Классические области

1.  $\overline{\mathbb{C}}$
2.  $\mathbb{C}$
3.  $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

**Теорема 2** (Римана). Пусть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ . Тогда  $G \cong$  одной из классических областей

1.  $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2.  $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3.  $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}, |U| > 1$

## § 56 Лемма Шварца

## § 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

**Определение 1.** Пусть  $\Gamma < \text{Aut } G$ . Тогда говорят, что  $\Gamma$  — транзитивна, если

$$\forall z_1, z_2 \in G \exists f \in \Gamma: f(z_1) = z_2$$

*Замечание.* Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на  $G$  транзитивно.

**Лемма 1.** Пусть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ,  $\Gamma$  — транзитивна. Пусть к тому же  $\exists z_0: \text{Stab}(z_0) < \Gamma$ . Тогда  $\Gamma = \text{Aut } G$ .

▼

Выберем произвольный  $f \in \text{Aut } G$ , пусть  $z_1 = f(z_0)$ . Из транзитивности  $G \exists \gamma \in \Gamma: \gamma(z_1) = z_0$ . Тогда  $h = \gamma \circ f \in \text{Stab}(z_0)$ . Но из второго условия  $\text{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$ . Но тогда

$$\forall f \in \text{Aut } G \quad f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in \Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in \Gamma} \in \Gamma$$

▲

---

<sup>1</sup>Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

## § 58 Автоморфизмы классических областей

Здесь все константы по умолчанию  $\in \mathbb{C}$ .

**Теорема 1.**  $\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0\}$

□ Пусть

$$\Gamma = \{f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}\}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для  $\mathbb{C}$  хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен  $\text{Stab } \infty$ . Нам нужно чтобы  $\infty \mapsto \infty$ . А значит  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ . Но из теоремы 3.58.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что  $\text{Stab } \infty < \Gamma$ . А тогда по лемме 3.57.1  $\Gamma = \text{Aut } \overline{\mathbb{C}}$  ■

**Теорема 2.**  $\text{Aut } \mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az+b, a \neq 0\}$

□ Пусть  $A = U(\infty)$ . Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть  $\infty$  — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого  $f(A)$  всюду плотно в  $\mathbb{C}$ . А значит в  $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$  есть точка из  $f(A)$  — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть  $\infty$  — устранимая особая точка. Но тогда в кольце  $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots + c_0$$

Но  $f \in \text{Aut } G \Rightarrow f$  голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в  $\infty$  — полюс. Но тогда  $f(z)$  — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени  $n$  имеет в  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. <sup>1</sup> ■

**Теорема 3.**  $\text{Aut } \mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

□ Опять рассмотрим  $\Gamma$  как в условии и покажем, что  $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$ . Надо сначала показать хотя бы, что  $\Gamma < \text{Aut } \mathbb{D}$ .

$$\left| e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1)$$

Так что при  $|z| < 1 \wedge |a| < 1$  это верно.

Дальше легко найти обратное к  $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1} \frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta} a \in \mathbb{D})$$

<sup>1</sup>Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев  $f(1/z)$  в  $U(0)$

С композицией тоже несложно разобраться

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \\
 f_2(z) &= \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z} \\
 a &= \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1 \bar{a}_2 e^{-i\theta}} & |a| &= |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1 \\
 f_2(f_1(z)) &= e^{i\theta_2} \frac{e^{i\theta} z - e^{i\theta} a_2 - a_1 + a_1 \bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}
 \end{aligned}$$

Осталось показать оба условия из леммы 3.57.1

1. Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Будем строить так:  $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \quad f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \quad f = f_2 \circ f_1$$

2. Посмотрим на  $f \in \text{Stab } 0$ . По лемме Шварца  $\forall z \in D \quad |f(z)| \leq |z|$ . Поскольку  $\text{Stab } 0$  — группа,  $\exists f^{-1}$  и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

А тогда по второму пункту леммы Шварца  $f(z) = cz$ ,  $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$ . Следовательно,  $\text{Stab } 0 < \Gamma$ . Тогда по уже упомянутой лемме  $\Gamma = \text{Aut } \mathbb{D}$

■

## Литература

- [1] Зорич В. А., Математический анализ. Часть I — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [2] Зорич В. А., Математический анализ. Часть II — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012
- [3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трёх томах. Том II. — СПб.: Издательство «Лань», 1997. — 800 с.
- [4] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре — 5 изд., испр. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. I — 2 изд. — М.: Наука, 1976. — 320 с.