Меры и меры по борьбе с ними

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :taxus

6 июня 2017 г.

А эти множества?
Какой для них язык?.. Горé душа летит,
Все необъятное в единый вздох теснится,
И лишь молчание понятно говорит.

Студент на экзамене по теории меры

Оглавление

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

Билет № 1: Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 \mathinner{..} n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра}, \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

Билет № 2: Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a;b) \\ (-\infty;b) \\ [a;+\infty) \\ (-\infty;+\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta^1_k$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$*,* $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$*. Тогда* $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

▼
$\sigma(.)$ от обеих частей.
▲

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$.

□

$\sigma(\mathcal{O}) \supset \mathcal{Cell}$ Покроем открытыми квадратиками.

$\sigma(\mathcal{Cell}) \supset \mathcal{O}$ Для упрощения жизни $\mathcal{O} \supset G \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим классы ячеек

$$\mathcal{C}_k = \left\{ \left[\frac{m}{2}; \frac{m+1}{2^k}\right) \times \left[\frac{n}{2}; \frac{n+1}{2^k}\right) \subset G \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Осталось показать, что любую точку из G покрывает ячейка какого-то класса.

Каждая точка открытого множества входит с какой-то окрестностью, которую можно считать обединением множеств из базы топологии. Короче, есть маленький открытый квадратик, содержащий точку.

Так что теперь можно думать просто про одномерье. Ясно, что

$$\exists\, m, k \;::\; \begin{cases} x - \varepsilon < \frac{m}{2^k} < x \\ x + \varepsilon > \frac{m+1}{2^k} > x \end{cases}$$

Для этого хватит, чтобы $|x - \varepsilon; x| > \frac{1}{2^k}$, например.

■

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1\\G_k\in\mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\F_k\in\mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\A_k\in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

Билет № 3: Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\Bigl(\underbrace{\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in\mathcal{A}}\Bigr) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ-измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k\in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

она считает, не считывает :)

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера.

Билет № 4: Свойства меры

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.*
Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

▼
$B = A \sqcup C$. Дальше очевидно
▲

Утверждение 2. *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$.*
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Мемы A, B конечны, иначе нельзя вычитать.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность). *Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $\bigsqcup_i A_i \subset B$.*
Тогда $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры). *Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B_k$.*

Тогда $\mu A \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

▼
Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k: $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу). *Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $\left(A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{A}$.*

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

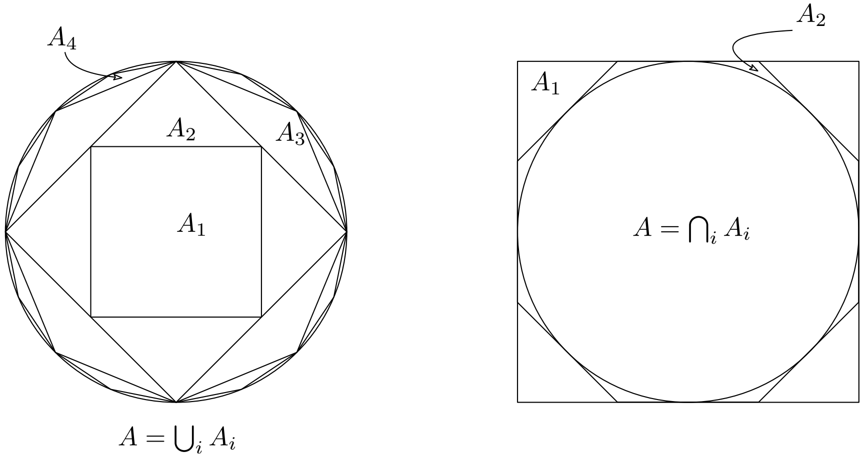


Рис. 1.1: Метод исчерпывания Евдокса

▼

Строим разности $C_k = A_{k+1} \setminus A_k$,$C_0 = A_1$ а $A = \bigsqcup_k C_k$.

Вот ещё картинка: 1.1, для пущей очевидности.

▲

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху)**.** *Пусть* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

▼

Сначала заметим, что все меры сделаны конечными, ведь нужно считать разности мер, а это так себе.

Снова сделаем разности $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k = A_1 \setminus A_{n+1} \Rightarrow \mu(A_{n+1}) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right)$$

Понятно, что

$$\lim_{n\to\infty} \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k \sqcup A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k \sqcup A = A_1$$

Так что

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \mu(A_1) - \mu(B)$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_{n+1}) = \mu B$$

▲

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если

$$\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu A = 0 \ \ \forall\, B \subset A, B \in \mathcal{A} \ :: \ \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на $\mathcal{A}$ называется σ-конечной, если

$$\exists\, X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty \ :: \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \colon \mathcal{A}_1 \to [0; +\infty]$, $\mu_2 \colon \mathcal{A}_2 \to [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1.

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора)**.** *Пусть μ — сигма-конечная мера на $\mathcal{A}$. Тогда*

1. *Существуют её полные сигма-конечные продожения*
2. *Среди них есть наименьшее: $\overline{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.*

Определение 4 (Внешняя мема)**.** Пусть $E \subset X$. Положим

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \,\middle|\, A_k \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

Тогда μ^* — внешняя мема, порождённая μ. Она не мера.

Пример 1. Например, сигма-алгебра из вертикальных полос на квадратике. Аддитивность сломается, если взять 2 непересекающихся горизонтальных «лоскутка» один по другим.

Так, вот про идею доказательства. Внешняя мема — очень привлекательная вещь, но не мера.
Давайте разрешим лишь определённый набор множеств. Назовём их хорошо разбивающими.

Определение 5. Пусть $E \subset A$. Тогда E — хорошо разбивающее, если

$$\forall\, A \in \mathcal{A} \ :: \ \mu A = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

Хорошо разбивающие явно содержат исходную алгебру.
Для тех же вертикальных полос в хорошо разбивающие попадут все множества, проектирующиеся в точку на ось $\perp$ полосками.

Билет № 5: Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1\Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v\Delta \overset{(\in R^n)}{\equiv} v_n\Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{C}ell_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j. Тогда $vA := \sum_{j=1}^{q} v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. *v — конечно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..p} \in \mathcal{C}ell\,, A = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k \quad :: \quad vA = \sum_{k=1}^{p} vA_k$$

□ На клеточки побить. ■

Теорема 2. *v — счётно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..} \in \mathcal{C}ell\,, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad :: \quad vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

Сначала докажем маленькую лемму.

Лемма 3. *Пусть Δ — ограниченная ячейка в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\exists\, \Delta' \in \mathcal{O}, \Delta'' \in \mathcal{F} \;::\; \begin{cases} v\Delta' < v\Delta + \varepsilon \\ v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon \end{cases}$$

▼
Например, для $\Delta = \prod_k [a_k; b_k)$

$$\Delta'_i = \prod_{k=1}^{n} \left(a_k - \frac{1}{i}; b_k \right)$$

$$\Delta''_i = \prod_{k=1}^{n} \left[a_k; b_k - \frac{1}{i} \right]$$

Увеличивая i можно добраться до любого ε.

▲

□ (*Счётной аддитивности объема*) Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. А по-хорошему $\mathcal{Cell}$ содержит и любые конечные объединения ячеек. Утверждается, что там тоже самое, только возни сильно больше.

Пусть $A = \Delta$, $A_k = \Delta_k$, причём они все конечны. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta'_k \supset \Delta \ &:: \ v\Delta'_k < v\Delta_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, \\ \Delta'' \subset \Delta \ &:: \ v\Delta'' > v\Delta - \varepsilon, \end{aligned}$$

штрихи имеют смысл как в лемме.

Тогда

$$\Delta'' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_k$$

По определению компактности,

$$\exists\, (l_k) \ :: \ \Delta' \subset \bigcup_{l=1}^{N} \Delta''_{k_l}$$

Так что из счётной аддитивности

$$v\Delta'' \leqslant v\left(\bigcup_{l=1}^{N} \Delta'_{k_l}\right) = \sum_{l=1}^{N} v\Delta'_{k_l} < \sum_{l=1}^{N} v\Delta_{k_l} + \varepsilon$$

А

$$\sum_{l=1}^{N} v\Delta_{k_l} < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k$$

Так что

$$v\Delta < \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k + 2\varepsilon \Rightarrow v\Delta \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} v\Delta_k$$

В другую сторону не так понятно. Для частных сумм из конечной аддитивности

$$\forall\, N \ :: \ \sum_{k=1}^{N} v\Delta_k \leqslant v\Delta$$

При увеличении N сумма лишь возрастает, но она и ограничена. Значит предел есть. Тогда $\sum_k v\Delta_k \leqslant v\Delta$. ■

Определение 2 (Мера Лебега)**.** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

(1) $\triangleright$ $\lambda\{x\} = 0$

(2) $\triangleright$ $\lambda\big(\{x_k\}_k\big) = 0$

(3) $\triangleright$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Это, кстати, не очевидно. С другой стороны, для них есть покрытие квадратиками.

(4) $\triangleright$ $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теормема.

Теорема 4 (Регулярность меры Лебега)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\exists\, G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} \ :: \ F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

$\square$

(1) Сначала разберёмся с конечными множествами. Из определения инфимума, $\exists\,\{\Delta_k\} \ :: \ \lambda(A) > \sum_k \Delta_k - \frac{\varepsilon}{2}$.
Снова подберём Δ'_k, как в 1.5.2, только $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. В таком случае

$$\lambda(A) > \sum_k \Delta_k - \varepsilon/2 > \sum_k \Delta'_k - \varepsilon$$

(2) $\langle ⚒ \rangle$, но что-то жесть. Обычно доказывают что $\lambda \inf G_k = \lambda A$.

Кажется, победа. Для замкнутых можно доказывать все для $X \setminus A$ сводя к первому пунку. Как-то так

$$(F^c \setminus A^c) = (F^c \cap A) = (A \cap F^c) = A \setminus F$$

$\blacksquare$

Следствие 1. $\forall\, A\, \exists\, D \in G_\delta \ :: \ A = D \cup N$, $\mu(N) = 0$.

Пример 1 (Пример неизмеримого множества (по Лебегу))**.** Пусть $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}$ и всё это лежит на отрезке $I = [0;1]$. Пусть R_k — k-ый смежный класс по $\sim$. Тогда $S = \sqcup_k R_k$.

Выберем $E \colon \forall\, k \ :: \ |E \cap R_k| = 1$. Как видно, $\{E_j\}$ отличаются сдвигом на $r \in \mathbb{Q}$. Будем считать, что сдвиг — это скорее поворот, как бы замыкаем начало и конец отрезка, так что $E_j + r \in I \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}, r \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$.

Тогда $I = \sqcup_k E_k$, $\forall\, j, k \ :: \ \lambda E_j = \lambda E_l$.

Но теперь

$$1 = \lambda I = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda E_k = \sum_{k=1}^{\infty} a$$

А бесконечная сумма вещественных чисел либо 0 либо ∞.

Билет № 6: Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Пусть ещё $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: \ f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. *Пусть f измеримо относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества*

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} \equiv X[f \leqslant a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} \equiv X[f \geqslant a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то отдного типа, то f измерима.

Теорема 2. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ измеримы относительно $\mathcal{A}$ и $g \colon \mathbb{R}^n \to R$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$.*

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \dots$ измеримы относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы* $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$. *Последний, правда, может не существовать.*

$\square$ Следует из непрерывности меры. $\blacksquare$

Определение 2. Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества)**.**

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. *f — простая $\Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}$*

Теорема 5. *Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $f \geqslant 0$. Тогда*

$$\exists\, (\varphi_n) \colon 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots :: \ \varphi_n \nearrow f \ \textit{(поточечно)}$$

Билет № 7: Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu E_k$$

[2] $f \geqslant 0$.

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X g\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; g\text{-простая}, 0 \leqslant g \leqslant f\right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+\,\mathrm{d}\mu - \int_X f_-\,\mathrm{d}\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание 1. $\displaystyle\int_A f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(E_k \cap A)$

Замечание 2. Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость f будет периодически называться «обычными» условиями.

Утверждение 1. $\displaystyle\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

A_1 $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда $\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g\,\mathrm{d}\mu$.

A_2 $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geqslant 0$, измерима. Тогда $\displaystyle\int_A f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f\,\mathrm{d}\mu$

A_3 см теорему 1.8.1.

A_4 $\displaystyle\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}mu + \int_X g\,\mathrm{d}mu$

A_5 $\displaystyle\int_X (\lambda g)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f\,\mathrm{d}mu$

Билет № 8: Теорема Беппо Лéви

Теорема 1. *Пусть* (f_n) *— измеримы на* X, $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots$, $f = \lim_n f_n$. *Тогда*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Билет № 9: Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

B$_1$ $f \leqslant g \Rightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

B$_2$ $\int_X (f \pm g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu \pm \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

B$_3$ $\int_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

B$_4$ $|f| \leqslant g \Rightarrow \left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

B$_5$ $\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

B$_6$ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

B$_7$ $|f| \leqslant M \leqslant +\infty \Rightarrow \left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant M\mu X$

Билет № 10: Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. *Пусть задана тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, f *— измерима и* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}$. *Пусть к тому же*

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu$$

Билет № 11: Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \;::\; \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X : \mu A < \delta \;::\; \left| \int_A f \,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon$$

Билет № 12: Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

Теорема 1. *Пусть $f \in C([a;b])$, λ — мера Лебега на $X = [a;b]$. Тогда*

$$f \in \mathcal{L},\; \int_{[a;b]} f \,\mathrm{d}\mu = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

где F — первообразная f.

Билет № 13: Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

Определение 1 (Интеграл Римана)**.** Пусть $f \in C([a;b])$ $a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a;b]$
- $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го отрезка
- $r = r(\tau) = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \lim_{r(\tau) \to 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

Определение 2 (Интеграл Лебега)**.** см. 1.7.1. В качестве множества X понятное дело, отрезок $[a;b]$.

Пример 1. Пусть $X = [0;1]$. Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

<+картиночка с обоими интегралами+>

Билет № 14: Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}\big([a;b),\lambda\big)$. *Тогда* $\displaystyle\int_{[a;b)} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{\to b} f$.

□ ⟨⚒⟩ Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

Билет № 15: Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \sum_k m_k\delta_{a_k}$, $\{a_k\} \in X$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ *или* $f \in \mathcal{L}(X,\mu)$. *Тогда*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k)\cdot\underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ ⟨⚒⟩ Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

Пример 1. Пусть $\mu A = \#A$. Тогда

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}^2} f(m,n)\,\mathrm{d}\mu$$

здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

Причем условия суммируемости ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[\begin{array}{l}\forall\, m,n\in\mathbb{N} \;::\; a_{m,n}\geqslant 0\\ \displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}}|a_{m,n}|<\infty\end{array}\right.$$

тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

Определение 1. Пусть задана пара (X,μ), $\rho\colon X\to\mathbb{R}$, измерима, $\rho\geqslant 0$. Тогда

- $\nu(E) := \displaystyle\int_E \rho\,\mathrm{d}\mu$ — мера, задаваемая плотностью ρ
- ρ — плотность меры ν относительно меры μ.

Замечание. Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

Теорема 2. *Пусть выполнены «обычные» условия на* f. *Тогда* $\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\nu = \int_X f\rho\,\mathrm{d}\mu$.

Билет № 16: Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

А можно и без. Тогда $\nu([a;b)) = F(b-0) - F(a-0)$, см. ??

Определение 1. Пусть $I\subset\mathbb{R}$, $F\colon I\to\mathbb{R}$, $F\nearrow$, $F(x)=F(x-0)$ (непрерывна слева).. Рассмотрим порождённую полуинтервалами $[a;b)\subset I$ σ-алгебру. Введём «объём» $\nu_F\colon \nu([a;b)) = F(b)-F(a)$.

Тогда мера Лебега-Стилтьеса μ_F — стандартное продолжение ν_F на некоторую σ-алгебру $\mathcal{M}_F$.

Замечание 1. Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать ν, если она — не мера?

Свойства мемы Лебега-Стилтьеса

Утверждение 1. *Пусть* $\Delta = [a; b]$. *Тогда* $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$.

Утверждение 2. *Пусть* $\Delta = \{a\}$. *Тогда* $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$.

Утверждение 3. *Пусть* $\Delta = (a; b)$. *Тогда* $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$.

Лемма 4. *Пусть* $F \in C(I)$, $\Delta \subset I$. *Тогда* $\mu_F(\Delta) = \int_\Delta F'(t)\,\mathrm{d}\lambda$.

Теорема 5. *Пусть* $F \nearrow$, *кусочно-гладка на* $I \subset \mathbb{R}$, *а для* f *выполнены обычные условия* ($X = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_F$). *Промежутки гладкости* F *обозначим за* (c_k, c_{k+1}). *Тогда*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu_F = \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} fF'\,\mathrm{d}\lambda + \sum_k f(c_k)\,\underbrace{\Delta_{c_k}F}_{\text{скачок в } c_k}$$

Определение 2 (Образ мемы)**.** Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мемой, $f\colon X \to Y$. Превратим и Y в пространство с мемой.

1. $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$.

Теорема 6. *Пусть для* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *выполнены обычные условия* ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\mu = \nu$). *Тогда* $\int_Y g\,\mathrm{d}\nu = \int_X (g \circ f)\,\mathrm{d}\mu$.

Определение 3 (Функция распределения)**.** Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда $F(t) := \mu X[f < t]$. Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

Теорема 7. *Пусть задано* (X, μ), $\mu X < +\infty$, *выполнены обычные условия для* f. *Тогда* $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}\mu_F$.

Билет № 17: Интеграл Эйлера-Пуассона

Утверждение 1. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \pi$

Билет № 18: Вероятностный смысл мемы

<+Табличка с соответствием+>

Билет № 19: Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

Определение 1. Пусть задано (X, μ), $P(x)$ — предикат. Говорят, что $P(x) = 1$ почти везде (п.в.), если $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$.

Определение 2. $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ п.в. .

Лемма 1 (Беппо-Леви для рядов). *Пусть заданы (X, μ), $u_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, u_n измеримы, $u_n \geqslant 0$. Тогда*

a) $\displaystyle\int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n \,\mathrm{d}\mu.$

b) Если эти числа конечны, то ряд $\sum_n u_n$ сх п.в.

Лемма 2 (Беппо-Леви «вверх ногами»). *Пусть задано (X, μ), (f_n), измеримы, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$. Пусть ещё $f_1 \in \mathcal{L}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

<+Здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$.

- $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$ — «срез»
- $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \varnothing\}$ — «проекция»

<+картиночка для $\mathbb{R}^2$+>

Теорема 3. *Пусть $E \in \mathcal{M}_{m+n}$, $E_x \in \mathcal{M}_n$ п.в. x, $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$ измерима относительно $\mathcal{M}_m$. Тогда*

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) \,\mathrm{d}\lambda_m$$

<+много букв+>

Определение 4 (График). $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$.

Определение 5 (Подграфик). $\Gamma^f_- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$.

Определение 6 (Надграфик). $\Gamma^f_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geqslant f(x)\}$.

Теорема 4 (Геометрический смысл интеграла). *Пусть $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, измерима, $\geqslant 0$. Тогда*

1. *Γ^f_- измеримо.*
2. *$\lambda_{n+1}\Gamma^f_- = \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n$ измеримо.*

Билет № 20: Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через dx (ну или dy), размерность определяется из размерности x. Еще обозначим d(x, y) через dxdy.

Теорема 1 (Тонелли). *Пусть $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, измерима, $\geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Теорема 2 (Фубини). *Пусть $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, измерима, $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Билет № 21: Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

- Сдвиг: $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.
- Поворот с растяжением: $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, L — линейный император.

Утверждение 1. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 3. *Пусть $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, линейно. Тогда*

$$\exists\, C \geqslant 0 \forall\, E \in \mathcal{M} \;::\; \lambda L(E) = C\lambda E$$

Теорема 4. *C из прошлой теоремы равно $\big|\det[L]\big|$.*

`<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>`

Билет № 22: Мера образа при гладком отображении

Обозначение. $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

Теорема 1. *Пусть $E \in \mathcal{M}$, $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, гладкая биекция. Тогда $F(E) \in \mathcal{M}$ и $\lambda F(E) = \displaystyle\int_E |\det F'(x)|\mathrm{d}x$.*

□ ⟨⍨⟩ ⟨⚒⟩ ■

Билет № 23: Глакая замена переменной в интеграле

Теорема 1. *Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, гладкая биекция. Пусть к тому же $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ с обычными условиями. Тогда*

$$\int_E f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Пример 1 (Полярные координаты)**.** $\langle$⚒$\rangle$ $|J| = r$

Пример 2 (Сферические координаты)**.** $\langle$⚒$\rangle$ $|J| = r^2 \cos\psi$

Билет № 24: Предельный переход под знаком интеграла

Определение 1 (Всякие сходимости)**.** Пусть $(f_n)\colon X \to \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, μ — мера на X.

$$\begin{array}{lcl} f_n \to f & := & \forall\, x \in X \;::\; f_n(x) \to f(x) \\ f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f & := & \sup\limits_X |f_n - f| \to 0 \\ f_n \to f \text{ п.в.} & := & \exists\, N \subset X\colon \mu(N) = 0 \;::\; \forall\, x \in X \setminus N \;::\; f_n(x) \to f(x). \\ f_n \overset{\mu}{\to} f & := & \forall\, \sigma > 0 \;::\; \mu X[|f_n - f| \geqslant \sigma] \to 0 \end{array}$$

Замечание 1. $f \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f \Rightarrow f_n \to f$ п.в. .

Замечание 2. Пусть $\mu X < \infty$, тогда $f_n \to f$ п.в. $\Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$.

Замечание 3 (Теорема Рисса). $f_n \overset{\mu}{\to} f$ п.в. $\Rightarrow \exists\,(n_k) \;::\; f_{n_k} \to f$ п.в. .

Теорема 1. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f, \mu X < \infty \Rightarrow \displaystyle\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_X f$

Теорема 2. *см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.*

Теорема 3 (Фату)**.** *Пусть заданы (X, μ), $f_n \geqslant 0$, измеримы. Тогда*

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Билет № 25: Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 1. *Пусть снова заданы (X,μ), (f_n) измерима, $f_n \to f$ п.в. . К тому же*

$$\exists \varphi \in \mathcal{L} :: \forall n :: |f_n| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L})$ — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 1. *Пусть $f : T \times X \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f_t \xrightarrow[t\to t_0]{} f$ п.в. , и*

$$\exists V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} :: \forall t \in \mathring{V} \cap T :: |f_t| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\int_X f_t \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[t\to t_0]{} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ — условия локальной теормемы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 2. *Непрерывность интеграла по параметру при выполнении $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ и непрерывности f_t.*

§* Интеграл по меме с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию В таких случаях параметр будет записан, как индекс

Определение 1 (Собственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f : X \times T \to \mathbb{R}$, $f_t(x) \in \mathcal{L}([a,b],\mu)\ \forall t \in T$. Тогда,

$$I(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от t, как видно $\mathcal{D}_I = T$.

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. ⟨`:set aflame`⟩У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$. Так что по сути они — просто интегралы по меме.

ну.. Здесь тоже есть непрерывность, дифференциируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально следует из 1.25.1 и 1.20.2.

Билет № 26: Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

Определение 1 (Несобственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}([a, B], \mu)\ \forall\, B < b$. Тогда,

$$I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x := \lim_{B \to b-0} \int_a^B f(x,t)\,\mathrm{d}x = \lim_{B \to b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что $\forall\, t \in T$ интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

Никто же не любит ε-δ-определения?

Определение 2. Говорят, что $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t)$ (сходится равномерно относительно t, $t \in T$), если

$$\sup_{t \in T} \left| \int_B^{\to b} f(x,t) \right| \xrightarrow[B \to b]{} 0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла $\forall\, t \in T$.

Теорема 1 (Признак Больцано-Коши)**.**

$$I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t) \Leftrightarrow \sup_T \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x,t)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow[B_1, B_2 \to b]{} 0$$

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}([a;b)) \ :: \ |f(x,t)| \leqslant \varphi(x)\ \forall\, t$. *Тогда* $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Теорема 3 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t) \cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $f(x,t) \overset{T}{\rightrightarrows} 0$, $f(x,t) \searrow^x$ $(x \to b - 0)$

b) $G(x,t) = \displaystyle\int_a^x g(\xi, t)\,\mathrm{d}\xi$

$$\exists\, M\colon \forall\, x \in [a;b), t \in T \ :: \ |G(x,t)| \leqslant M$$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Теорема 4 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t) \cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $\exists\, M\colon \forall\, t \in T \ :: \ f(x,t) \leqslant M$, $f(x,t) \searrow^x$.

b) $\displaystyle\int_a^B g(x,t)\,\mathrm{d}x \overset{T}{\underset{B \to b}{\rightrightarrows}} \int_a^{\to b} g(x,t)\,\mathrm{d}x$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Билет № 27: Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle ⚒ \rangle$

Это не очень докажется без конечности меры $V(t_0)$,а то интеграл может сходится, а функция не быть суммируемой

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \to f(x,t_0)$ *для п.в.* $x \in [a;b)$ *и* $I^B(t) \overset{V(t^0)}{\rightrightarrows} I(t)$. *Тогда* $I \xrightarrow[t \to t_0]{} I(t_0)$.

Теорема 2. *Пусть для п.в.* $x \,\exists\, f'_t(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,*

a) $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *сходится* $\forall\, t \in T$

b) $\displaystyle\int_a^{\to b} f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда $\exists\, I'(t_0) = \displaystyle\int_a^{\to b} f'_t(x,t_0)\,\mathrm{d}x$

Замечание. Здесь нужна сходимость I, чтобы хоть где-то были конечные значения $I(t)$, нам их разность считать.

Теорема 3. *Пусть для п.в.* $x \,\exists\, f(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,* $I(t) = \displaystyle\int_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда

$$\int_c^d I(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{\to b} \mathrm{d}x \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Билет № 28: Γ-функция Эйлера

Определение 1. $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Свойства

1° Определена для всех $t > 0$.

2° $\Gamma(1) = 1$

3° $\forall\, t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4° $n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n!$

5° Γ-выпукла

6° $\Gamma \sim \frac{1}{t}$ при $t \to 0$

7° $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{t}t^t e^{-t}$ при $t \to \infty$.

8° $\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$. (формула отражения)

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при $\operatorname{Im} z > 0$.

Билет № 29: B-функция

Определение 1. $B(y, z) = \displaystyle\int_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}\,\mathrm{d}x$.

Свойства

1° $B(y, z) = B(z, y)$.

2° $B(y, z) = \dfrac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$.

Билет № 30: Объём n-мерного шара

Теорема 1. *Пусть $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant R\}$ – n-мерный шар. Тогда*

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$$

Глава 2: Дифференциальная геометрия ⟨⚒⟩

Билет № 31: Регулярная кривая и её естественная параметризация

Определение 1 (Кривая, как отображение)**.** Пусть задано гладкое отображение $t \in [a;b] \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^3$, регулярное, то есть $\operatorname{rk} r'(t) \equiv 1$. t — параметр, само отображение ещё можно называть параметризацией.

Определение 2 (Кривая, как класс отображений)**.** Введём отношение эквивалентности отображений:

$$r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \exists\, \delta\colon [a;b] \leftrightarrow [\alpha,\beta] \;::\; \rho(\delta(t)) = r(t)$$

А теперь будем их путать. ⟨`:set aflame`⟩Ещё веселье с многообразиями.

Определение 3 (Естественная параметризация)**.** Пусть $[a;b] = [t_0, t_1]$. Рассмотрим $\widetilde{s}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |r'(t)|\,\mathrm{d}\tau$. Она, как видно, является пройденным путём и неубывает $\Rightarrow$ годится на роль δ.

Так что можно рассматривать s как параметр, это собственно и есть естественная (натуральная) параметризация.

Утверждение 1. *Пусть есть две разных параметризации: $r(t)$ и $r(s)$ одной кривой. Тогда*

$$\dot{r} \equiv \frac{\partial r(s)}{\partial s} = \Big(r'(t) \cdot (s'(t))^{-1}\Big)(t) = \frac{r'}{|r'|}$$

Как видно, натуральная почему-то обозначается точкой.

Билет № 32: Кривизна кривой

Определение 1 (Касательный вектор)**.** $\tau := \dot{r}(s)$.

Определение 2 (Кривизна)**.** $k_1 = |\dot{\tau}|$

Определение 3 (Радиус кривизны)**.** $R = k_1^{-1}$

Лемма 1. *Пусть $v(s) \in \mathbb{R}^n$, $|v| \equiv R \in \mathbb{R}$. Тогда $\dot{v} \perp v$.*

▼
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle v, v\rangle) = 2\langle v, \dot{v}\rangle$. Так что $\langle v\dot{v}\rangle = 0 \Rightarrow v \perp \dot{v}$.
▲

Утверждение 2. $\tau \perp \dot{\tau}$

Теорема 3. *Пусть $r(t)$ — неестественная параметризация кривой. Тогда* $k_1 = \dfrac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$

□

$$k_1 = |\dot{\tau}| = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{r'}{|r'|} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) \frac{1}{|r'|} \right|$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) = \frac{r''|r'| - r'|r'|'}{|r'|^2}, \quad |r'|' = \left(\sqrt{r'^2} \right)' = \frac{\langle r', r'' \rangle}{|r'|}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{r'}{|r'|} \right) = \frac{r''|r'|^2 - r'\langle r', r'' \rangle}{|r'|^3} = \frac{r''\langle r', r' \rangle - r'\langle r', r'' \rangle}{|r'|^3} = \frac{r' \times (r'' \times r')}{|r'|^3} \; (A = C)$$

$r' \perp r' \times r''$, так что

$$k_1 = \left| \frac{r' \times (r'' \times r')}{|r'|^3} \right| \frac{1}{|r'|} = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$$

■

Билет № 33: Кручение и нормаль

Определение 1 (Нормаль)**.** Пусть $k_1 \neq 0$. Тогда $\nu := \frac{\dot{\tau}}{k_1}$.

из геометрии, она лежит в плоскости кривой и направлена в сторону «поворота».

Определение 2 (Бинормаль)**.** $\beta = \tau \times \nu$.

Замечание. (τ, ν, β) — хороший кандидат для репера в какой-нибудь точке P.

Определение 3 (Соприкасающаяся плоскость)**.** Пусть $k_1 > 0$, $P = r(s_0)$, T — плоскость, $T \ni P$, $N \perp T$ — нормаль к ней. Допустим, $\langle \Delta r, N \rangle = h$, $h = o(\Delta s^2)$. Тогда T — соприкасающаяся плоскость.

Утверждение 1. $\tau, \nu \perp N$*;* $(r - r_0, \dot{r}_0, \ddot{r}_0) = 0$ *— её уравнение*

▼

$$\Delta r = \dot{r}\,\mathrm{d}s + \frac{\ddot{r}}{2}\,\mathrm{d}s^2 + o(\Delta s^2) = \tau\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\,k_1\nu\,\mathrm{d}s^2 + o(s^2)$$
$$\langle \Delta r, N \rangle = o(\Delta s^2)$$

Так что скалярные произведения $\langle \tau, N \rangle$, $\langle \nu, N \rangle$ равны нулю.

Вторая часть — из свойств смешанного произведения.

▲

Определение 4 (Абсолютное кручение)**.** $|k_2| := |\dot\beta|$

Теорема 2. $|k_2| = \left|\dfrac{(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{k_1^2}\right|$

□ Взять определение β и посчитать производную.

$$\dot\beta = \dot\tau \times \nu + \tau \times \dot\nu = k_1 \nu \times \nu + \tau \times \dot\nu = \tau \times \dot\nu$$

Производная τ ничем не отличается от 2.32.3, только τ заместо r.

Так что

$$\dot\beta = \tau \times (\dot\tau \times (\ddot\tau \times \dot\tau)) \frac{1}{k_1^3} = \frac{\dot\tau(\tau, \ddot\tau, \dot\tau) - (\ddot\tau \times \dot\tau) \cdot 0}{k_1^3} = -\frac{\nu \cdot (\tau, \dot\tau, \ddot\tau)}{k_1^2}$$

■

Определение 5 (Кручение)**.** $k_2 := \dfrac{-(\dot r, \ddot r, \dddot r)}{k_1^2}$

Билет № 34: Формулы Френе

Теорема 1.

$$\begin{pmatrix} \dot\tau \\ \dot\nu \\ \dot\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

□ Осталось доказать лишь второе, но оно очевидно следует из 1 и 3 и соотношения $\nu = \beta \times \tau$. ■

Теорема 2. *Пусть $r(s)$ — гладкая кривая с заданными k_1 и k_2, $k_1 > 0$. Тогда система (2.1) определит её с точностью до движения.*

□ Система (2.1) вообще линейна. Так что решение задачи Коши у неё — единственно. А положение кривой как раз задается начальными значениями τ, ν, β.

Правда ниоткуда не следует, что кривизна и кручение будет какими надо, но это скучно. Из формул для них докажется.

■

В бумажном конспекте здесь ещё рассуждения, что полученные векторы единичны и ортональны, но это тоже скучно.

Билет № 35: Регулярная поверхность. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма

Определение 1 (Поверхность (двумерная))**.** Пусть задано гладкое отображение

$$\varphi\colon (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Добавим условие регулярности $\operatorname{rk} \varphi' \equiv 2$ и условимся путать отображение и класс оных.

Определение 2.

$$
\begin{aligned}
r_u &:= (x'_u, y'_u, z'_u)\\
r_v &:= (x'_v, y'_v, z'_v)\\
n &:= \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{N}{|N|}
\end{aligned}
$$

Отметим, что условие регулярности не дает векторному произведению обращаться в 0.

Касательную плоскость можно было бы здесь определить через нормаль, но лучше пока ещё подумать. Может, абстракций добавить.

Просто утащил определеньки из № 41

Определение 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Выберем на нем произвольную точку x и рассмотрим $V(x) = V_{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$. Допустим,

$$\exists f \in C^1 \ :: \ V(x) \leftrightarrow^f \mathbb{R}^k \text{ (или } \mathbb{H}^k).$$

Тогда M — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, а f — локальная карта многообразия. Набор всех карт называется атласом. $t \in \mathbb{R}^k$ — локальные координаты в V.

Атлас : $A(M) = \{(\varphi_k, V_k)_k\}$ — все окрестности и карты на них.

Если

$$\exists x \in M \ :: \ V \leftrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 1\},$$

тогда это многообразие с краем. Край обычно обозначается как ∂M.

По идее, в атлас ещё надо включать информацию, карта на $\mathbb{R}^k$ или на $\mathbb{H}^k$. Так что

$$A(M) = \{(\mathbb{H}^k, \varphi_i, V_i)_i\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, V_j)_j\}$$

Определение 4 (Касательное пространство в точке x)**.** Пусть M — гладкое многообразие. Допустим, φ_i — карта в $V(x)$. Тогда

$$T_x M = \Big(\mathrm{d}\varphi_i(x)\Big)(\mathbb{R}^k)$$

Определение 5 (Первая квадратичная форма)**.**

$$
\begin{aligned}
I :&= |\mathrm{d}r|^2 = r_u^2 \,\mathrm{d}u^2 + 2 r_u r_v \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v + r_v^2 \,\mathrm{d}v^2\\
&= E \,\mathrm{d}u^2 + 2F \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v + G \,\mathrm{d}v^2
\end{aligned}
$$

Плохое определение, надо сказать. Сделаем получше.

Определение 6. Первая квадратичная форма поверхности M — единичная квадратичная форма на его касательном пространстве.

Скаляряное произведение на $T_x M$ можно перенести из $\mathbb{R}^m \supset M$.

Утверждение 1. *Пусть $\varphi\colon D \subset M$ — карта на M. Тогда первая квадратичная форма в координатах пространства параметров имеет вид*

$$L^T L, \quad L = \varphi'(x)$$

Мы вроде можем спокойно рассматривать φ' как линейное отображение. Так что по идее первое определение — следствие отсюда, но $\langle ? \rangle$.

Определение 7. $g_{ij} = L^T L$. Хотелось бы сказать, что это метрический тензор, но не стоит.

Билет № 36: Вычисление длин и площадей на поверхности

Теорема 1. *Пусть M — поверхность, $\gamma\colon t \to r \in M$. Тогда*

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I}.\ (\mathrm{d}s = I)$$

$\square$ Пусть $r \in M$, $u \in D$. Тогда $\mathrm{d}s^2 = \langle \mathrm{d}r, \mathrm{d}r\rangle = \mathrm{d}r^T \mathrm{d}r = \mathrm{d}u^T L^T L \mathrm{d}u = I$. А дальше можно параметризовать кривую, так что u, v — функции от t. $\blacksquare$

Некое пояснение к определению.

Здесь можно сказать, что мера на касательном многообразии задаётся как образ лебеговой меры в $\mathbb{R}^k$. Они вроде как имеют одну размерность. Правда его надо как-то повернуть для этого, иначе якобиан не посчитать.

Зафиксируем какие-то базисы в D и $T_x M$. Соорудим вот такое ортогональное преобразование: $O = \left(\sqrt{I}\right)^{-1} L^T$, $O\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, скалярное произведение в них одинаковое.

Здесь неявно сконструировали отображение $I\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ взяв матрицу I.

Тогда пусть $F = O \circ L = \left(\sqrt{I}\right)^{-1} L^T L = \sqrt{I}$. Пользуясь теоремой из теории меры, $\lambda_T = \det F = \det \sqrt{I} = \sqrt{\det I}$.

А теперь можно приближать параллелепипеды на самом многообразии похожими из касательного пространства.

Определение 1. Пусть M — подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lambda_k := \int_D \sqrt{\det g(t)}\, \mathrm{d}t, \quad g(t)_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j}\right)(t)$$

Теорема 2. *Определение выше не зависит от параметризации.*

Теорема 3. *Пусть M — поверхность, $u, v \in D$, $I = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$. Тогда*

$$S(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Определение 2. Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, $\exists\, F\colon M_1 \to M_2$, сохраняющее длины кривых. Тогда они называются изометричными.

Теорема 4. *Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, что существуют их параметризации, при которых $I_1 = I_2$. Тогда они изометричны.*

Билет № 37: Вторая квадратичная форма

Определение 1. Снова рассмотрим поверхность с какой-то параметризацией. Тогда $\mathrm{II} := -\mathrm{d}r\,\mathrm{d}n = L\,\mathrm{d}u^2 + 2N\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + M\,\mathrm{d}v^2$.

Утверждение 1. $\mathrm{II} = n \cdot \mathrm{d}^2 r$

Утверждение 2 (Типы точек на поверхности)**.** *Здесь названия связаны с типом соприкасающегося параболоида. Его можно добыть, рассматривая $\Delta r \cdot n$.*

$\mathrm{II} > 0$**:** *Эллиптический*

$\mathrm{II} < 0$**:** *Он же*

$\mathrm{II} \lesseqgtr 0$**:** *Гиперболический*

$\mathrm{II} \geqslant 0 \vee \mathrm{II} \leqslant 0$**:** *Параболический (вроде цилиндра)*

$\mathrm{II} = 0$**:** *Точка уплощения*

Билет № 38: Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны

Определение 1. Нормальное сечение поверхности — сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности (в точке).

Лемма 1. *Нормальное сечение — кривая.*

Сначала рассмотрим несколько более общий случай

Теорема 2 (Менье)**.** *Пусть γ — кривая $\subset M$, $\gamma \ni P$. Тогда* $k_0 = k_1 \cos(\underbrace{\nu \hat{,} n}_{\theta}) = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$.

Замечание 1. Ещё можно сформулировать так: для всякой кривой на повехности, проходящей через точку в заданном направлении $k_0 = \mathrm{const}$

а теперь сузим обратно.

Определение 2. Нормальная кривизна — кривизна нормального сечения.

Для нормального сечения $\cos\theta = \pm 1$.
Если немного переписать и ввести параметр $t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$

$$k_1(t) = |k_0(t)| = \left|\frac{L + 2Nt + Mt^2}{E + 2Ft + Gt^2}\right|$$

Этот параметр t и задаёт «направление» нормального сечения. Так что $k_0(t)$ и есть та самая «кривизна в данном направлении».

Теперь найдем экстремумы $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(t)$.

Теорема 3. $\exists\, k_{\min}, k_{\max},\ k_{\min} \cdot k_{\max} = \frac{LM - N^2}{EG - F^2}$.

Определение 3. $k_{\min}, k_{\max}$ — главные кривызны.

Билет № 39: Гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса

Определение 1 (Гауссова кривизна)**.** $K = k_{\min} \cdot k_{\max}$.

Определение 2 (Гауссово отображение)**.** Пусть M — поверхность, n — нормаль к ней в точке P, S — единичная сфера. Тогда $G : n \mapsto C \in S$ (C — точка на сфере).

Теорема 1. *Пусть U — окрестность $P \subset M$, M — поверхность, $\mathcal{N}$ — поле нормалей на U. Допустим, что $V = G(\mathcal{N})$, она вроде как окрестность $G(n_P)$.*

Тогда

$$|K| = \lim_{U \to P} \frac{\iint_V |n_u \times n_v|}{\iint_U |r_u \times r_v|}$$

Билет № 40: Геодезическая кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.

Определение 1 (Геодезическая кривизна)**.** Пусть M — поверхность, T — касательная к ней в точке P. Допустим, $\gamma \subset M$ проходит через P. Рассмотрим проекцию γ на T. Тогда $\varkappa := k_\gamma$ — и есть геодезическая кривизна.

Определение 2. Если для кривой $\varkappa(s) \equiv 0$, то она называется геодезической.

Теорема 1 (Гаусса-Бонне)**.** *Пусть M — гладкая поверхность, $P_1, \ldots, P_n$ — вершины криволинейного многоугольника, $P_i, P_{i+1} = \gamma$, α_i — углы при вершинах. Тогда*

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \int_{\gamma_i} \varkappa \, \mathrm{d}s = 2\pi - \iint_P K \, \mathrm{d}s$$

Билет № 41: Ориентация кривой и поверхности

Здесь сначала введём всякие конкретные определения, потом абстрактное, потом конкретные примеры.

Определение 1 (Векторное поле)**.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, V — векторное пространство. Тогда $f : G \to V$ и есть векторное поле.

Пример 1. $V = \mathbb{R}^k$.

$o(\|h\|)$

Замечание 1. Если захотеть гладкого векторного поля, то нужно уметь вводить на V норму. Но как правило имеют дело с $V = \mathbb{R}^n$ где это всё уже есть.

Определение 2. Ориентация на кривой — непрерывное поле $\tau(x(t))$. Они все единичные, так что варианта выбрать $\tau(x)$ всего 2. Соответсвенно, и ориентаций две.

Замечание 1. Регулярность избавит от изломов, а все пересечения разделяются по t.

Замечание 2 (⟨`:set aflame`⟩). В нашем понимании кривая — не многообразие. У многообразия были бы проблемы с окрестностью пересечения. Это можно показать рассмотрев 4 точки в окрестности пересечения и устремив ту, что с самым далёким прообразом к пересечению.

я же тот ещё велосипедостроитель?

Определение 3. Ориентация на кривой — класс эквивалентности параметризаций по отношению $r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \delta' > 0$(всегда).

Утверждение 1. *Определения 2.41.2 и 2.41.3 эквиваленты.*

▼
банан.
▲

Определение 4. Если на кривой вводится ориентация, то она ориентируемая.

Тут нужно отметить, что подход выше совсем ломается, когда дело заходит о поверхностях. Обобщив рассуждения выше на поверхности, мы придём к тому, что лента Мёбиуса окажется ориентируемой. Ну, в самом деле, если привязать нормали к параметрам, а не к координатам пространства содержащего поверхность, то окажется, что нормаль всегда «вращается» непрерывно.

Так что надо сейчас заняться ориентацией многообразий.

Определение 5. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Выберем на нем произвольную точку x и рассмотрим $V(x) = V_{\mathbb{R}^n}(x) \cap M$. Допустим,

$$\exists f \in C^1 \ :: \ V(x) \leftrightarrow^f \mathbb{R}^k \text{ (или } \mathbb{H}^k).$$

Тогда M — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, а f — локальная карта многообразия. Набор всех карт называется атласом. $t \in \mathbb{R}^k$ — локальные координаты в V.

Атлас : $A(M) = \{(\varphi_k, V_k)_k\}$ — все окрестности и карты на них.

Если

$$\exists x \in M \ :: \ V \leftrightarrow \mathbb{H}(\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 1\},$$

тогда это многообразие с краем. Край обычно обозначается как ∂M.

По идее, в атлас ещё надо включать информацию, карта на $\mathbb{R}^k$ или на $\mathbb{H}^k$. Так что

$$A(M) = \{(\mathbb{H}^k, \varphi_i, V_i)_i\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, V_j)_j\}$$

Теперь про ориентацию.

Определение 6. Две карты называются согласованными, если отображение $t_1 \mapsto x \in V_1 \cap V_2 \mapsto t_2$ имеет положительный якобиан.

Определение 7. Если все карты попарно согласованы, то атлас называется ориентирующим. Многообразие тогда называется ориентированным.

Представить все это проще всего на примере города, покрытого точками сотовой связи. Пересечение границы области покрытия одной вышки не приводит к потере связи.

Нетрудно понять, что ориентирующих атласов много. Город может покрывать хорошее количество сотовых операторов.

Определение 8. Атласы эквивалентны, если составленный из них атлас — тоже ориентирующий.

Утверждение 2. *Если многообразие связно, то они линейно связно.*

Утверждение 3. *Классов эквивалентности атласов для связного многообразия — два.*

▼ (⟨?⟩)
Пусть какая-нибудь точка M содержится в пересечении двух карт из разных атласов.

Пусть в её окрестности репараметризация между атласами происходит с положительным якобианом. До любой другой точки можно добраться по цепочке карт из одного атласа (из линейной связности).

Так что в её окрестности переход между атласами происходит с тем же знаком, что и в окрестности исходной точки. От выбора карт по дороге ничего не зависит, так как они из одного атласа.
▲

Определение 9. Пусть на M задан ориентирующий атлас. Тогда сужение этого атласа на край задаёт ориентацию края.

А теперь минутка конкретики.

Определение 10. Поверхность (регулярная) — связное ⟨?⟩подмногообразие $\mathbb{R}^3$ с рангом карт 2.

Утверждение 4. *Ориентация на поверхности задаётся непрерывным векторным полем нормалей. «Сторона» поверхности задаётся им же.*

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

▼
Связка бананов. Бананы тут ни при чём, но они кончились.
▲

Замечание 1. С кривыми наверное тоже стоит иметь дело, как с многообразиями, но вот тут ⟨?⟩. Дальше я так буду делать, но не очень законно.

Билет № 42: Интеграл второго рода

Здесь всюды ds — мера на многообразии.

Определение 1. Интеграл второго рода по кривой Γ от векторного поля F определяется, как

$$\int_\Gamma \langle F, \tau\rangle \,\mathrm{d}s$$

Определение 2. Интеграл второго рода по поверхности M от векторного поля F определяется, как

$$\int_\Gamma \langle F, n\rangle \,\mathrm{d}s$$

Определение 3 (Касательное пространство в точке x)**.** Пусть M — гладкое многообразие. Допустим, φ_i — карта в $V(x)$. Тогда
$$T_xM = \Big(\mathrm{d}\varphi_i(x)\Big)(\mathbb{R}^k)$$
Кокасательное пространство — сопряжённое к нему. Собственно, пространство линейных форм, действующих из T_xM.

Определение 4. Дифференциальная форма p-го порядка на многообразии M в точке x — кососимметрическая линейная функция
$$\omega^p\colon \underbrace{T_xM \times \cdots \times T_xM}_{p} \to \mathbb{R} \in (T_x^*M)^p$$

Умножение векторных пространств тут на самом деле тензорное, как я понял, так что очевидно следущее

Утверждение 1. *ω^p разложится по базису $\bigwedge_{i_k} \mathrm{d}x^{i_k} \in (T_x^*M)^p$*

А ещё $(T_xM)^p$ надо бы обозначать как-то так, подчёркивая, что это внешняя степень: $\Lambda^p(T_xM)$

Пример 1. Поскольку эта ерунда кософкоммутативна, надо думать что засунуть в базис. Вот давайте все для $\mathbb{R}^3$ напишем.

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= a_x\,\mathrm{d}x + a_y\,\mathrm{d}y + a_z\,\mathrm{d}z\\
\omega^2 &= a_{yz}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_{zx}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x a_{xy}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\
\omega^3 &= a_{xyz}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge z
\end{aligned}$$

Ещё одно маленькое

Определение 5 (Внешний дифференциал)**.** Введём линейный император : $(T_x^*M)^p \to (T_x^*M)^{p+1}$:

1. Для функции $f\colon \mathbb{R}^k \to M$ совпадает с обычнм дифференциалом.
2. $\mathrm{d}(\omega^p \wedge \omega^q) = \mathrm{d}\omega^p \wedge \omega^q + (-1)^p\omega^p \wedge \mathrm{d}\omega^q$ Это вместо правила Лейбница.
3. $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

Вообще, можно было бы определить 1, 3 правило и как дифференцировать 1-формы. Тогда 2 правило ясно следует оттуда. Соберём обе формы в одну, здоровую. После того как продифференцировали коэффициент, вылезет ещё какой-то $\mathrm{d}x^{i_l}$. Если он из второй формы, его надо переставить через все первые p дифференциалов. Как раз и вылезет $(-1)^p$.

⟨⚒⟩ `<+понять меры Хаара. Когда-нибудь...+>`

Положим, все формы имеют гладкие коэффициенты. Тогда пока интеграл от гладкой дифференциальной формы на многообразии определим так:

Определение 6. Пусть M — простое n-мерное многообразие (покрывается одной картой $f\colon D \to M$), $u \in D$, а ω^n — дифференциальная форма с коэффициентами $a_{i_1,\ldots,i_n}(x)$. Давайте её поподробней напишем

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_n} a_{i_1,\ldots,i_n}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n}$$

Тогда можно написать такое определение:

$$\int_M \omega^n := \int_D a_{i_1,\ldots,i_n}(x) \bigwedge_{j=1}^{n} \mathrm{d}x^{i_j} := \int_D a_{i_1,\ldots,i_n}\big(f(u)\big)\,\frac{\partial x^{i_1..i_k}}{\partial u^{i_1..i_k}}\,\mathrm{d}\lambda_n(u)$$

Здесь на самом деле обычный интеграл Римана, все функции под интегралом непрерывны.

Замечание 1. Здесь нужно и можно вспомнить, что в интеграле 1 рода был $\sqrt{g(u)} = \left|(\frac{\partial x}{\partial u})^T \frac{\partial x}{\partial u}\right|$. Те есть, корень из суммы квадратов тех миноров, что здесь.

Общее определение требует понимания разбиения единицы, а я пока так не умею.

Теперь минутка конкретики

Утверждение 2. *Пусть $F = (P, Q, R)$, $\omega_F^1 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}y$. Положим, G — кривая (одномерное многообразие). Тогда*

$$\int_\Gamma \langle F, \tau\rangle\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma \omega_F^1$$

▼

Заметим, что $\mathrm{d}s = |r'|\,\mathrm{d}t$, тогда $\tau\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Кажется, всё.

▲

Утверждение 3. *Пусть ω_F^1 точна, то есть $\omega = \mathrm{d}\Phi$. Тогда*

$$\int_\Gamma \omega_F^1 = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Физический смысл этого дела — работа.

Определение 7. Форма ω точна, если $\Gamma \int_\Gamma \omega = 0$

Определение 8. Форма ω замкнута, если $\mathrm{d}\omega = 0$.

Утверждение 4. *Пусть M — 2-мерная гадкая ориентируемая поверхность, $F = (P, Q, R)$, $\omega_F^2 = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Тогда*

$$\int_M \omega_F^2 = \int_M \langle F, n\rangle\,\mathrm{d}s$$

▼

Пусть $N = (A, B, C)$. $\mathrm{d}S$ можно расписать получше.

$$L = \frac{\partial r}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

При умножении на транспонированную воспольземся известной формулой с суммой миноров:

$$g = L^T L = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = A^2 + B^2 + C^2 \Rightarrow \mathrm{d}S = \sqrt{g} = |N|$$

Тогда $F n \,\mathrm{d}S = (PA + QB + RC)\,\mathrm{d}u$. А теперь смотрим на определение 2.42.6 и понимаем что там ровно то же самое.

▲

Билет № 43: Дифференцирование векторных полей

по методичке Лодкина Здесь — основные утверждения

Определение 1. Пусть f — скалярное поле, $F = (P, Q, R)$ — векторное. Тогда

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$\nabla \times F = \operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$
$$\langle \nabla, F \rangle = \operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Утверждение 1. *При обратимом гладком преобразовании координат $\Psi \colon x \mapsto \widetilde{x}$ ротор и дивергенция изменяются следующим образом.*

$$\operatorname{div} \widetilde{F}(\widetilde{r}) = \operatorname{div} F(r)$$
$$\operatorname{rot} \widetilde{F}(\widetilde{r}) = \Psi(\operatorname{rot} F(r))$$

Теорема 2. *Пусть F — гладкое поле. Тогда*

$$\operatorname{rot} F(r) = \operatorname{rot}\Big(\mathrm{d}F_r(h)\Big)$$
$$\operatorname{div} F(r) = \operatorname{div}\Big(\mathrm{d}F_r(h)\Big)$$

□ Ну, если отображение линейно, то его матрица Якоби равна его матрице. А дальше очевидно ■

Теорема 3. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^3$. *Тогда*

$$\begin{array}{llll} F(r) = r & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = 0 & \operatorname{div} F = 3 \\ F(r) = a \times r & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = 2a & \operatorname{div} F = 0 \\ F(r) = \langle a, r\rangle b & \Rightarrow & \operatorname{rot} F = a \times b & \operatorname{div} F = \langle a, b\rangle \end{array}$$

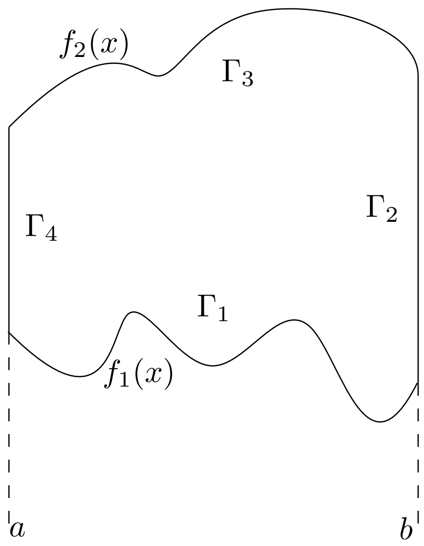
Билет № 44: Формула Грина

Теорема 1. *Пусть D — связное двумерное ориентируемое гладкое компактное подмногообразие $\mathbb{R}^2$ с краем, $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ — гладкая дифференциальная форма. Тогда*

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

□ Здесь почти нигде не пользуются явным определением формы на многообразии. Ну, а зачем, пространство двумерное. Так что можно сразу сказать, что нормаль лишь повлияет на знак $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ и не думать особо про то что x, y не очень совпадает с пространством параметров.

Много пунктов. Сначала разбить на области типа y (с вертикальными краями). И ещё занулить Q, например.



Тогда $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = \int_a^b P(t, f_1(t)) - P(t, f_2(t))\,\mathrm{d}t$

Тем временем, от $\displaystyle\iint_D \cdots$ осталось лишь $\displaystyle(-1) \cdot \int_a^b \mathrm{d}x \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.

Как видно, получилось.

нет

Произвольная область легко режется на области типа y. Склеивать их можно, так как интеграл по вертикальным сторонам 0.

А потом сложить это с областями типа x. ■

Билет № 45: Классическая формула Стокса

Теорема 1. *Пусть M — компактная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$ с краем, F — гладкое векторное поле. Тогда*

$$\iint_M \langle \operatorname{rot} F, n\rangle \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial M} \langle F, \tau\rangle \, \mathrm{d}s$$

□ Поскольку всё еще непонятно, что есть интеграл от формы по непростому многообразию, придётся ограничиться простыми.

Пусть $F = (P, Q, R)$, $N = (A, B, C)$. Здесь можно снова занулить Q, R. Тогда

$$\operatorname{rot} F n = \frac{1}{|N|}\Big\langle (0, P_z, -P_y), N\Big\rangle = \frac{1}{|N|}(P_z B - P_y C)$$

Тперь про вторую половину.

$$\oint_\Gamma \langle F, \tau\rangle \, \mathrm{d}s = \oint_{\widetilde{\Gamma}} P x_u \, \mathrm{d}u + P x_v \, \mathrm{d}v = \oint_{\widetilde{\Gamma}} \widetilde{\omega}$$

Здесь мы довольно коварно перешли от границы многообразия к границе пространства параметров. И ещё одна проблема как будто возникает из-за того, что в определении многообразия с границей граница вроде не замкнута. Да и вообще прямая. Впрочем, это лечится инверсией. А вот что делать бесконечностью — непонятно. Разве что сказать, что одна точка имеет меру ноль.

Ладно, тут пользуемся теоремой 2.44.1, и получим первую половину. ■

Билет № 46: Формула Гаусса-Остроградского

Теорема 1. *Пусть V — компактное тело в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей (гладким подмногообразием $\mathbb{R}^3$). Нормаль выберем «наружу». Тогда*

$$\oiint_M \langle F, n\rangle \, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div} F \, \mathrm{d}V$$

□ Идейно мало чем отличается от теоремы Грина. Тоже разбиваем всё на области с вертикальными гранями, а потом складываем. ■

Все равно все эти теоремы никому не нужны, а лучше пользоваться абстрактной формулой Стокса

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega$$

Билет № 47: Физический смысл дивергенции и ротора

Дивергенция — удельный (по объему) поток через через бесконечно малую поверхность. С ротором — сложно. Можно представить себе как-то так. Выделим контур (в жидкости) и заморизим всё, кроме него. Тогда средняя скорость (усреднённая по площади!) будет чем-то вроде ротора.

См Фейнмановские лекции по физике, том 5 или 6. Который про магнетизм.

Билет № 48: Разные векторные поля

Попробуем в красивые таблички: 2.1

Таблица 2.1: Разные поля

Название	F	ω_F	$\int \omega_F$
Потенциальное	$F = \operatorname{grad} \Phi$	точна, $p = 1$	ноль для любой петли. Следует хоть из Ньютона-Лейбница.
Безвихревое	$\operatorname{rot} F = 0$	замкнута, $p = 1$	ноль для петель, что граница какой-нибудь поверхности. Можно проверить через формулу Стокса (2.45.1)
Соленоидальное	$F = \operatorname{rot} B$	точна, $p = 2$	$\iint_M \omega = 0$, M — замкнута. Проверяется тоже через Стокса, но в другую сторону.
Безвихревое	$\operatorname{div} F = 0$	замкнута, $p = 2$	ноль, для поверхностей, являющихся краем трехмерных многообразий. Проверяется через Гаусса-Остроградского. (2.46.1)

Из нечетных условий следуют чётные. Наоборот работает лишь там, где любая петля стягивается в точку.

Билет № 49: Примеры полей с разными свойствами

вот тут уже точно по методичке Лодкина.

Глава 3: Анализ Фурье ⟨⚒⟩

Билет № 50: Гильбертово пространство. $\mathcal{L}_2$

Определение 1. Пусть H — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Введём на нём (эрмитово) скалярное произведение, связанную с ним норму и метрику. Допустим, оно полно по введённой метрике. Тогда H — гильбертово пространство.

Замечание 1. Если полноты нет, то пространство называется предгильбертовым.

Утверждение 1. *Скалярное произведение — непрерывно.*

Пример 1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}$

$$\widetilde{L} := \left\{ f \;\middle|\; f\colon X \to \mathbb{C},\ \text{измерима},\ \int_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

Скалярное произведение зададим так:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

Введем теперь отношение эквивалентности $f \sim g := f = g$ п.в. . Тогда $\mathcal{L}_2 = \widetilde{L}/\sim$.

Теорема 2. *$\mathcal{L}_2$ полно по мере, введённой выше.*

Билет № 51: Ортогональные системы. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.

Определение 1. $\delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Определение 2. Пусть H — гильбертово. Рассмотрим $f_1, \ldots, f_n \in H$. Допустим, $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда (f_i) — ортогональная система.

Теорема 1 (Пифагора ⟨∴̃⟩)**.** *Пусть (f_i) — ортогональная система. Допустим, $f = \sum_k f_k$. Тогда*

$$\|f\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2$$

Определение 3. Пусть (e_i) — ортогональная система, $f \in H$. Тогда

$$c_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle \text{ — коэффициенты Фурье } f$$
$$f = \sum_k c_k e_k \text{ — ряд Фурье } f$$

Теорема 2 (Неравенсто Бесселя)**.** *Пусть $f \in H$, (e_i) — ортогональная система. Тогда*

$$\sum_n |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Определение 4. Пусть (e_i) — ортогональная система. Допустим

$$\forall f \in \mathcal{L}_2 :: f \sim \sum_n c_n e_n$$

Тогда (e_i) — полная система.

Утверждение 3. *Разложение в ряд Фурье по полной ортогональной системе — единственно.*

Билет № 52: Тригонометрические системы

Определение 1. $\mathcal{L}_2^{2\pi} = \mathcal{L}_2\big((0; 2\pi), \mu\big) \cap \{2\pi\text{-периодичные функции}\}$.

Утверждение 1. $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots$ *— ортогональная система*

Утверждение 2. $1, e^x, e^{2x}, \ldots$ *— ортогональная система*

Теорема 3. *Тригонометрические системы выше — полны.*

$\square$ $\langle ? \rangle$Вообще, тут большой кусок теории. $\blacksquare$

Определение 2. Будем понимать

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n := \mathrm{V.\,p.} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{-N}^{N} a_n$$

Утверждение 4. *Коэффициенты разложения по синусам и косинусам:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x\ (n \geqslant 1)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n \geqslant 1)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\widetilde{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n\,\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} b_n\,\sin nx$$

Утверждение 5. *Коэффициенты разложения по экспонентам:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x$$
$$f(x) \sim \sum_{k=-\times}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Билет № 53: Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега

Определение 1 (Ядро Дирихле)**.** $\mathcal{D}_n(x) := \sum\limits_{-n}^{n} e^{ikx}$

Лемма 1 (Свойства ядра Дирихле)**.**

1. $\mathcal{D}_n(-x) = \mathcal{D}(x)$
2. $\mathcal{D}_n(x) = \dfrac{\sin(n + {}^1\!/_2)x}{\sin\frac{x}{2}}$
3. *всякие следствия отсюда*

Определение 2 (Ядро Фейера)**.** $\mathcal{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_k(x)$

Лемма 2 (Свойства ядра Фейера)**.**

1. $\mathcal{F}_n(-x) = \mathcal{F}(x)$

2. $\mathcal{F}_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}$

3. *всякие следствия отсюда*

Лемма 3 (Римана-Лебега)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx}\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Билет № 54: Теорема Дини о поточечной сходимости

Теорема 1 (Дини)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$. Допустим, f удовлетворяет условию Дини:*

$$\exists\, L \in \mathbb{C}, \delta > 0 \ :: \ u \in \mathcal{L}\big((0;\delta)\big), u(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2L}{t}$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Утверждение 2. *Частные случаи условия Дини:*

1. $\exists$ *конечные* $f(x \pm 0)$, $f'(x \pm 0)$. *При этом* $L = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

2. f *непрерывна в* x, $\exists$ *конечные* $f'(x \pm 0)$. *При этом* $L = f(x)$.

3. f *дифференцируема в* x. *При этом* $L = f(x)$.

Билет № 55: Свойства коэффициентов Фурье

Обозначение. $\widehat{f}(n) := c_n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x$

Утверждение 1. $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \widehat{f}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Утверждение 2. *Пусть* $\exists\, f' \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$

Утверждение 3. *Пусть* $\exists\, f^{(p)} \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \cdot \widehat{f'}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right),\ n \to \infty$

Утверждение 4. *Пусть* $c_n = O\left(\dfrac{1}{n^{p+2}}\right)$. *Тогда* $\exists\, \varphi \in C_{2\pi}^p \ ::\ \varphi \sim f$.

Билет № 56: Сходимость рядов Фурье..

1° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow \forall\, \Delta \subset [-\pi, \pi] \ ::\ \displaystyle\int_\Delta f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_\Delta e^{inx}\, \mathrm{d}x.$

2° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow c_n$ определены.

3° $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \|S_n - f\| \to 0.$

4° $f \in C^{(p)} \Rightarrow c_n$ быстро убывают.

5° c_n быстро убывают $\Rightarrow f \in C^{(p)}$.

6° теорема Дини 3.54.1

7° теорема Фейера 3.56.1

Теорема 1 (Фейера)**.** *Пусть* $f \in C^{2\pi}$. *Тогда* $\sigma_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$, *где* $\sigma_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k$. *(сходимость по Чезаро).*

Билет № 57: Преобразование Фурье

Определение 1. Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx}\, \mathrm{d}x$$

1. $|\widehat{f}(s)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$.
2. $\widehat{f}(s) \in C^0$.

3. $\left(g(x) = x^n f(x) \in \mathcal{L}_1\right) \Rightarrow \widehat{f}(s) \in C^{(n)}$.

4. $\widehat{f}(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$.

5. $\left(f \in C^{(p)}, f^{(p)} \in \mathcal{L}_1\right) \Rightarrow \widehat{f}(s) = o\left(\frac{1}{|s|^p}\right)$.

6. $f \in \mathcal{L}_1, a \in \mathbb{R}, g(x) = f(x-a) \Rightarrow \widehat{g}(s) = e^{-isa}\,\widehat{f}(s)$

7. $f, g \in \mathcal{L}_1$. Тогда
$$\widehat{f * g}(s) = 2\pi\,(\widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s))$$

8. Интегральная формула Фурье 3.57.1

Тут по идее все можно в $\mathbb{C}$

Теорема 1 (формула восстановления Дини)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{C}$. Допустим f удовлетворяет условию Дини в точке x с константой L. Тогда*
$$\check{\hat{f}}(x) = L$$
Для непрерывных функций
$$f(x) = \mathrm{V.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s)\, e^{isx}\,\mathrm{d}x$$

Билет № 58: Решение уравнения теплопроводности

Само уравнение теплопроводности выглядит так:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
Но к нему ещё есть пара начальных условий:
$$u(x, 0) = f(x)$$
$$f \in \mathcal{L} \qquad f \in C_x^2$$

⟨⚒⟩ : `<+решить что-ли..+>`
В итоге получится что-то вроде
$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \cdot f(y)\,\mathrm{d}y$$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — объединение дизъюнктных множеств.

$\mathcal{A}$ — Алгебра множеств

$\overline{A}$ — Замыкание A.

A^c — $X \setminus A$.

Нестандартные обозначения

⟨⚒⟩ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

⟨ᵔ̈⌣⟩ — кривоватая формулировка

⟨`:set aflame`⟩ — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a \mathinner{..} b$ — $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ — В кванторах, «верно, что»

$\mathcal{A}_\sigma$ — Сигма-алгебра множеств

$f : A \leftrightarrow B$ —биекция