

Глава 1: Кинематика точки

§ 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть V — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли, $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь a^k — коэффициенты разложения по \mathbf{e}_k — называются контравариантными координатами.

Пусть V^* — сопряжённое к V , его базисом являются координатные функции $f_k :: f_k(\mathbf{x}) = x^k$. Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм $V \rightarrow V^*$. Нам, правда, потребуется $V^* \rightarrow V$.

Введём ещё одну систему *векторов* в V : $\mathbf{e}^k = f_k^*$, то есть $f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{x}$. Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в V^* . Линейную независимость легко получить из ЛНЗ f_k , а раз их $\dim V$, то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.
- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

Ещё можно определить $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$, и перенести это на соответствующие линейные формы. Обобщая дальше, можно вообще сказать, что $g_i^k = \delta_{ij}$. Тогда g будет задавать действие формы на вектор. Вроде физикам это зачем-то надо.

А после тирады выше уже развлекаться с индексами.

Утверждение 1. $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{kj}$

▼

Следует из определения координатной функции, ведь $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{x} = f_k(\mathbf{x})$

▲

Утверждение 2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a^i b_i$

Утверждение 3. Пусть $\mathbf{r} = \sum_k \xi^k \mathbf{e}_k$ и $u = \sum_k \xi_k \mathbf{e}^k$. Тогда $\xi_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi^j g_{jk}$

▼

Ну, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi_j \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \xi_j \delta_{jk} = \xi_k$. Вроде всё.

▲

Аналогичная ситуация с ξ^k .

Утверждение 4. $\xi^k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}^k = \sum_j \xi_j g^{jk}$.

Утверждение 5.

$$\mathbf{e}^k = \sum_j g^{jk} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_k = \sum_j g_{jk} \mathbf{e}^j$$

▼

Первое домножить на \mathbf{e}^i , второе на \mathbf{e}_i .

▲

Утверждение 6. $\sum_i g^{il} g_{ik} = \delta_{lk}$

▼

$$\sum_i g^{il} g_{ik} = \sum_i g^{il} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}^l \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{lk}$$

▲

Как видно, когда определения безкоординатные, жизнь прекрасна!. ¹

¹ тут не опечатка, а отсылка к известной картинке ;)

Глава А: Обозначения

f — линейная форма.

$\langle \mathrm{f} \rangle$

\boldsymbol{x} — вектор.

$\langle \mathbf{x} \rangle$