<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :`taxus`

31 мая 2017 г.

Оглавление

1 Теория меры и интегралы по мере **2**

§ 1 Системы множеств . . . 2

§ 2 Борелевская сигма-алгебра . . . 2

§ 3 Мера . . . 3

§ 4 Свойства меmы . . . 3

§ 5 Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега . . . 4

§ 6 Измеримые функции . . . 5

§ 7 Интеграл по мере . . . 6

§ 8 Теорема Беппо Лéви . . . 6

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций . . . 6

§ 10 Счётная аддитивность интеграла . . . 7

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла . . . 7

A Обозначения **8**

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 \,..\, n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

§ 2 Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{C}ell_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$*

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{C}ell_n)$.

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

$\langle 4\rangle$ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\F_k\in\mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

$\langle 5\rangle$ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\A_k\in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 3 Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\underbrace{\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)}_{\in\mathcal{A}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ-измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера. [1]

§ 4 Свойства меты

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры)**.** *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.
Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Утверждение 2. *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$.
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность)**.** *Пусть* $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ *и дизъюнктны.*
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры)**.** *Пусть* $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.

Тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

▼
Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k: $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

[1] она считает, не считывает ⌣̈

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу)**.** *Пусть* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$*,* $A_k \in \mathcal{A}$*,* $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$*.* [1]

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху)**.** *Пусть* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$*,* $A_k \in \mathcal{A}$*,* $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$*,* $\mu A_1 < +\infty$*.*

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$

`<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>`

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если

$$\forall \in \mathcal{A}\colon \mu A = 0 \,\forall B \subset A, B \in \mathcal{A} \;::\; \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на $\mathcal{A}$ называется σ-конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty \;::\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \colon A_1 \to [0; +\infty]$, $\mu_2 \colon A_2 \to [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1.

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора)**.** *Пусть* μ *— сигма-конечная мера на* $\mathcal{A}$*. Тогда*

1. *Существуют её полные сигма-конечные продожения*
2. *Среди них есть наименьшее:* $\overline{\mu}$*. Её ещё называют стандартным продолжением.*

`<+идея доказательства+>` Пока надо запомнить, что стандратное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

§ 5 Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1\Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \land b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v\Delta \overset{(\in R^n)}{\equiv} v_n\Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{Cell}_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j. Тогда $vA := \sum_{j=1}^{q} v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. v *— конечно-аддитивен, то есть*

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k \;\Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{p} vA_k$$

Теорема 2. v *— счётно-аддитивен, то есть*

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \;\Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

Определение 2 (Мера Лебега)**.** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

[1] Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Свойства меры Лебега

(1) $\triangleright$ $\lambda\{x\} = 0$

(2) $\triangleright$ $\lambda\big(\{x_k\}_k\big) = 0$

(3) $\triangleright$ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

(4) $\triangleright$ $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теормема.

Теорема 3 (Регулярность меры Лебега)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\exists\, G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} \ :: \ F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

$\square$ куча скучных оценок квадратиками. $\blacksquare$

§ 6 Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Пусть ещё $f \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall\, \Delta \subset \mathbb{R} \ :: \ f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. *Пусть f измеримо относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества*

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} \equiv X[f \leqslant a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} \equiv X[f \geqslant a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то отдного типа, то f измерима.

Теорема 2. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ измеримы относительно $\mathcal{A}$ и $g \colon \mathbb{R}^n \to R$ — непрерывна. Тогда измерима $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$.*

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измеримы.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \dots$ измеримы относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы* $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim$ *Последний, правда, может не существовать.*

$\square$ Следует из непрерывности меры. $\blacksquare$

Определение 2. Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества)**.**

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. f *— простая* $\Rightarrow f = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}$

Теорема 5. *Пусть $f \colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $f \geqslant 0$. Тогда*

$$\exists\, (\varphi_n) \colon 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \dots \ :: \ \varphi_n \nearrow f \ \textit{(поточечно)}$$

§ 7 Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu E_k$$

[2] $f \geqslant 0$.

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu \,\middle|\, g\text{-простая}, 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_-\,\mathrm{d}\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu := \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mu(E_k \cap A)$

Утверждение 1. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$\boxed{\mathrm{A}_1}$ $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда $\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\mathrm{A}_2}$ $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geqslant 0$, измерима. Тогда $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_B f\,\mathrm{d}\mu$

$\boxed{\mathrm{A}_3}$ см теорему 1.8.1.

$\boxed{\mathrm{A}_4}$ $\int\limits_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}mu + \int\limits_X g\,\mathrm{d}mu$

$\boxed{\mathrm{A}_5}$ $\int\limits_X (\lambda g)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f\,\mathrm{d}mu$

§ 8 Теорема Беппо Лéви

Теорема 1. *Пусть (f_n) — измеримы на X, $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots$, $f = \lim_n f_n$. Тогда*

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

$\boxed{\text{B}_1}$ $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$

$\boxed{\text{B}_2}$ $\int\limits_X (f \pm g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \pm \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$

$\boxed{\text{B}_3}$ $\int\limits_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu.$

$\boxed{\text{B}_4}$ $|f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu.$

$\boxed{\text{B}_5}$ $\left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$

$\boxed{\text{B}_6}$ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

$\boxed{\text{B}_7}$ $|f| \leqslant M \leqslant +\infty \Rightarrow \left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu X$

§ 10 Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. *Пусть задана тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, f *— измерима и* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}$. *Пусть к тому же*

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu$$

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Тогда*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\ ::\ \forall\, A \in \mathcal{A}, A \subset X : \mu A < \delta\ ::\ \left|\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — объединение дизъюнктных множеств.

$\mathscr{A}$ Алгебра множеств

Нестандартные обозначения

⚒ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\ddot{\sim}$ — кривоватая формулировка

`:set aflame` — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a\,..\,b$ — $[a;b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ В кванторах, «верно, что»

$\mathscr{A}_\sigma$ Сигма-алгебра множеств