

<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин  
Записал :ta~~x~~us

2 июня 2017 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория меры и интегралы по мере</b>	<b>3</b>
§ 1	Системы множеств	3
§ 2	Борелевская сигма-алгебра	3
§ 3	Мера	4
§ 4	Свойства меры	4
§ 5	Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега	5
§ 6	Измеримые функции	6
§ 7	Интеграл по мере	6
§ 8	Теорема Беппо Лёви	7
§ 9	Свойства интеграла от суммируемых функций	7
§ 10	Счётная аддитивность интеграла	7
§ 11	Абсолютная непрерывность интеграла	8
§ 12	Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега	8
§ 13	Сравнение подходов Римана и Лебега	8
§ 14	Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега	8
§ 15	Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью	8
§ 16	Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению	9
§ 17	Интеграл Эйлера-Пуассона	10
§ 18	Вероятностный смысл меры	10
§ 19	Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери	10
§ 20	Сведение кратного интеграла к повторному	10
§ 21	Мера Лебега и аффинные преобразования	11
§ 22	Мера образа при гладком отображении	11
§ 23	Гладкая замена переменной в интеграле	11
§ 24	Предельный переход под знаком интеграла	11
§ 25	Теорема Лебега об ограниченной сходимости	12
§ 26	Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки	12
§ 27	Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle \otimes \rangle$	13
§ 28	$\Gamma$ -функция Эйлера	13
§ 29	$B$ -функция	14
§ 30	Объём $n$ -мерного шара	14
<b>2</b>	<b>Дифференциальная геометрия <math>\langle \otimes \rangle</math></b>	<b>15</b>
§ 1	Регулярная кривая и её естественная параметризация	15
§ 2	Кривизна кривой	15
§ 3	Кручение и нормаль	15
§ 4	Формулы Френе	15
§ 5	Регулярная поверхность. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма	16
§ 6	Вычисление длин и площадей на поверхности	16
§ 7	Вторая квадратичная форма	16
§ 8	Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны	17
§ 9	Гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса	17
§ 10	Геодезическая кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.	17
<b>3</b>	<b>Анализ Фурье <math>\langle \otimes \rangle</math></b>	<b>18</b>
§ 1	Гильбертово пространство. $\mathcal{L}_2$	18
§ 2	Ортогональные системы. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.	18
§ 3	Тригонометрические системы	19
§ 4	Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега	19
§ 5	Теорема Дини о поточечной сходимости	20
§ 6	Свойства коэффициентов Фурье	20
§ 7	Сходимость рядов Фурье..	20

§ 8	Преобразование Фурье . . . . .	21
§ 9	Решение уравнения теплопроводности . . . . .	21
<b>A</b>	<b>Обозначения</b>	<b>22</b>

# Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

## § 1 Системы множеств

**Определение 1.** Пусть здесь (и дальше)  $X$  — произвольное множество. Тогда  $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$  — множество всех подмножеств  $X$ .

**Е.г.**  $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$  (это количество элементов, если что)

**Определение 2** (Алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  — алгебра множеств, если

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $X \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

*Замечание.* Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь  $\infty \notin \mathbb{N}$ .

**Определение 3** ( $\sigma$ -алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, если

1.  $\mathcal{A}$  — алгебра
2.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

**Определение 4.** Пусть  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

## § 2 Борелевская сигма-алгебра

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{O}$  — все открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2** (Ячейка в  $\mathbb{R}^n$ ). Обозначать её будем  $\Delta^n$ , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру  $\mathcal{A} = \text{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

**Теорема 2.**  $\mathcal{B}_n = \sigma(\text{Cell}_n)$ .

**Пример 1.** Все множества ниже — борелевские.

- ⟨1⟩  $\mathcal{O}$ .
- ⟨2⟩  $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$ .
- ⟨3⟩  $\left( A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$ .
- ⟨4⟩  $\left( B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$ .
- ⟨5⟩  $\left( C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$ .

У всех этих множеств со сложными индексами  $\delta$  — пересечение,  $\sigma$  — объединение,  $G$  — операция над открытыми в самом начале,  $F$  — над замкнутыми.

### § 3 Мера

**Определение 1.** Пусть задано  $X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), A_k \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$  — мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2.  $\mu\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in \mathcal{A}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ . Здесь никто не обещает, что будет именно  $\sigma$ -алгебра.

Множества  $A \in \mathcal{A}$  в таком случае называются  $\mu$ -измеримыми.

**Пример 1.**  $a \in X, \mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$  —  $\delta$ -мера Дирака.

**Пример 2.**  $a_k \in x, m_k \geq 0, \mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$  — «молекулярная» мера.

**Пример 3.**  $\mu(A) = \#A$  — считающая мера. <sup>1</sup>

### § 4 Свойства меты

Здесь всюду будем рассматривать тройку  $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

**Утверждение 1** (Монотонность меры). Пусть  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ .  
Тогда  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(B) < +\infty$ .  
Тогда  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

**Утверждение 3** (Усиленная монотонность). Пусть  $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}, A_{1..n} \subset B$  и дизъюнкты.  
Тогда  $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu B$

**Утверждение 4** (Полуаддитивность меры). Пусть  $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$ .  
Тогда  $\mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$ .

▼

Сделать  $B_k$  дизъюнктными:  $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$ . Затем представить  $A$  как дизъюнктное объединение  $D_k$ :  $D_k = C_k \cap A$ . Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$

▲

**Утверждение 5** (Непрерывность меры снизу). Пусть  $A_1 \subset A_2 \subset \dots, A_k \in \mathcal{A}, A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ . <sup>2</sup>

Тогда  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$

**Утверждение 6** (Непрерывность меры сверху). Пусть  $A_1 \supset A_2 \supset \dots, A_k \in \mathcal{A}, A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \mu A_1 < +\infty$ .

Тогда  $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$

<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>

<sup>1</sup>она считает, не считывает ☺

<sup>2</sup>Опять-таки никто не сказал, что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра.

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Тогда  $\mu$  — полная, если

$$\forall A \in \mathcal{A}: \mu A = 0 \Rightarrow \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} :: \mu B = 0$$

**Определение 2.** Мера  $\mu$  на  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty :: \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

**Определение 3.** Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  — сигма-алгебры подмножеств  $X$ ,  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ ,  $\mu_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0; +\infty]$ ,  $\mu_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0; +\infty]$ . Тогда  $\mu_2$  называется продолжением  $\mu_1$ .

**Теорема 7** (Лебега-Каратеодора). Пусть  $\mu$  — сигма-конечная мера на  $\mathcal{A}$ . Тогда

1. Существуют её полные сигма-конечные продолжения
2. Среди них есть наименьшее:  $\bar{\mu}$ . Её ещё называют стандартным продолжением.

<+идея доказательства+> Пока надо запомнить, что стандартное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

## § 5 Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега

**Определение 1.** Пусть  $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ ,  $\Delta_k = [a_k, b_k)$ . Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v \Delta \stackrel{(\in \mathbb{R}^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \dots |\Delta_n|$$

Для всего, что  $\in \mathcal{Cell}_n$ , представим его в виде дизъюнктного объединения  $\Delta_j$ . Тогда  $v A := \sum_{j=1}^q v \Delta_j$ .

*Замечание.* Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

**Теорема 1.**  $v$  — конечно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_1, \dots, A_p \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^p A_k \Rightarrow v A = \sum_{k=1}^p v A_k$$

**Теорема 2.**  $v$  — счётно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_1, \dots \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow v A = \sum_{k=1}^{\infty} v A_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

**Определение 2** (Мера Лебега).  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$ . Тогда  $\lambda_n = \overline{v_n}$ ,  $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$  — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

### Свойства меры Лебега

- (1)  $\lambda\{x\} = 0$
- (2)  $\lambda(\{x_k\}_k) = 0$
- (3)  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$
- (4)  $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теорема.

**Теорема 3** (Регулярность меры Лебега). Пусть  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} :: F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

<+Пример неизмеримого множества на окружности+>

## § 6 Измеримые функции

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ . Пусть ещё  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  называется измеримой относительно  $\mathcal{A}$ , если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f$  измеримо относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества

**1 типа**  $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

**2 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \equiv X[f \leq a]$

**3 типа**  $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

**4 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \equiv X[f \geq a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то  $f$  измерима.

**Теорема 2.** Пусть  $f_1, \dots, f_n$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$  и  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда измерима и  $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

*Замечание.* В частности,  $f_1 + f_2$  измерима.

**Теорема 3.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы  $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$ . Последний, правда, может не существовать.

□ Следует из непрерывности меры. ■

**Определение 2.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

**Определение 3** (Индикатор множества).

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

**Утверждение 4.**  $f$  — простая  $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}$

**Теорема 5.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $f \geq 0$ . Тогда

$$\exists (\varphi_n): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots :: \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

## § 7 Интеграл по мере

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ ,  $f$  — измерима.

[1]  $f$  — простая.

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu E_k$$

[2]  $f \geq 0$ .

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

[3]  $f$  общего вида.

$$\begin{aligned} f_+ &= \max\{f(x), 0\} \\ f_- &= \max\{-f(x), 0\} \end{aligned}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

*Замечание 1.*  $\int_A f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A)$

*Замечание 2.* Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость  $f$  будет периодически называться «обычными» условиями.

**Утверждение 1.**  $\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$ .

**Свойства интеграла от неотрицательных функций** Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$$A_1 \quad 0 \leq f \leq g. \text{ Тогда } \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

$$A_2 \quad A \subset B \subset X, \quad A, B \in \mathcal{A}, \quad f \geq 0, \text{ измерима. Тогда } \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$$

$A_3$  см теорему 1.8.1.

$$A_4 \quad \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

$$A_5 \quad \int_X (\lambda g) \, d\mu = \lambda \int_X g \, d\mu$$

## § 8 Теорема Беппо Лёви

**Теорема 1.** Пусть  $(f_n)$  — измеримы на  $X$ ,  $0 \leq f_1 \leq \dots$ ,  $f = \lim_n f_n$ . Тогда

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu$$

## § 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

**Определение 1.**  $f$  — суммируемая (на  $X, \mu$ ), если  $\int_X f \, d\mu < \infty$ . Весь класс суммируемых (на  $X, \mu$ ) функций обозначается через  $\mathcal{L}(X, \mu)$ .

Здесь всюду функции  $\in \mathcal{L}$

$$B_1 \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

$$B_2 \quad \int_X (f \pm g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu \pm \int_X g \, d\mu.$$

$$B_3 \quad \int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

$$B_4 \quad |f| \leq g \Rightarrow \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X g \, d\mu.$$

$$B_5 \quad \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

$$B_6 \quad f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

$$B_7 \quad |f| \leq M \leq +\infty \Rightarrow \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq M \mu X$$

## § 10 Счётная аддитивность интеграла

**Теорема 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f$  — измерима и  $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}$ . Пусть к тому же

$$A, A_1, \dots \subset X, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$



## § 11 Абсолютная непрерывность интеграла

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :: \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X: \mu A < \delta :: \left| \int_A f d\mu \right| < \varepsilon$$

## § 12 Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C([a; b])$ ,  $\lambda$  — мера Лебега на  $X = [a; b]$ . Тогда

$$f \in \mathcal{L}, \int_{[a; b]} f d\mu = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

где  $F$  — первообразная  $f$ .

## § 13 Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

**Определение 1** (Интеграл Римана). Пусть  $f \in C([a; b])$   $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ,  $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ . Тогда

- $\tau = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  — разбиение отрезка  $[a; b]$
- $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  — оснащение разбиения  $\tau$
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  — длина  $i$ -го отрезка
- $r = r(\tau) = \max_i \{\Delta x_i\}$  — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$  — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int_a^b f dx = \lim_{r(\tau) \rightarrow 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

**Определение 2** (Интеграл Лебега). см. 1.7.1. В качестве множества  $X$  понятное дело, отрезок  $[a; b]$ .

**Пример 1.** Пусть  $X = [0; 1]$ . Тогда  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

<картинка с обоими интегралами>

## § 14 Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

**Теорема 1.** Пусть  $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}([a; b], \lambda)$ . Тогда  $\int_{[a; b]} f d\lambda = \int_a^b f$ .

□ <✂> Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

## § 15 Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

**Теорема 1.** Пусть  $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$ ,  $\{a_k\} \in X$  и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  или  $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ . Тогда

$$\int_X f d\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ <✂> Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

**Пример 1.** Пусть  $\mu A = \#A$ . Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int_{\mathbb{N}^2} f(m,n) d\mu$$

Причем условия суммируемости <sup>1</sup> ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[ \begin{array}{l} \forall m,n \in \mathbb{N} :: a_{m,n} \geq 0 \\ \sum_{m,n \in \mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{array} \right]$$

**Определение 1.** Пусть задана пара <sup>2</sup>  $(X, \mu)$ ,  $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\rho \geq 0$ . Тогда

- $\nu(E) := \int_E \rho d\mu$  — мера, задаваемая плотностью  $\rho$
- $\rho$  — плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

*Замечание.* Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

**Теорема 2.** Пусть выполнены «обычные» условия на  $f$ . Тогда  $\int_X f d\nu = \int_X f \rho d\mu$ .

## § 16 Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

**Определение 1.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \nearrow$ ,  $F(x) = F(x-0)$  (непрерывна слева).<sup>3</sup> Рассмотрим порождённую полуинтервалами  $[a; b) \subset I$   $\sigma$ -алгебру. Введём «объём»  $\nu_F: \nu([a; b)) = F(b) - F(a)$ .

Тогда мера Лебега-Стилтьеса  $\mu_F$  — стандартное продолжение  $\nu_F$  на некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{M}_F$ .

*Замечание 1.* Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать  $\nu$ , если она — не мера?

### Свойства меры Лебега-Стилтьеса

**Утверждение 1.** Пусть  $\Delta = [a; b]$ . Тогда  $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $\Delta = \{a\}$ . Тогда  $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $\Delta = (a; b)$ . Тогда  $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $F \in C(I)$ ,  $\Delta \subset I$ . Тогда  $\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F'(t) dt$ .

**Теорема 5.** Пусть  $F \nearrow$ , кусочно-гладка на  $I \subset \mathbb{R}$ , а для  $f$  выполнены обычные условия ( $X = \mathcal{B}$ ,  $\mu = \mu_F$ ). Промежутки гладкости  $F$  обозначим за  $(c_k, c_{k+1})$ . Тогда

$$\int_X f d\mu_F = \sum_k \int_{c_k}^{c_{k+1}} f F' dt + \sum_k f(c_k) \underbrace{\Delta_{c_k} F}_{\text{скачок в } c_k}$$

**Определение 2** (Образ меры). Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — пространство с мерой,  $f: X \rightarrow Y$ . Превратим и  $Y$  в пространство с мерой.

1.  $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ .
2.  $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$ .

**Теорема 6.** Пусть для  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$  выполнены обычные условия ( $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ ,  $\mu = \nu$ ). Тогда  $\int_Y g d\nu = \int_X (g \circ f) d\mu$ .

**Определение 3** (Функция распределения). Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $\mu X < +\infty$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $F(t) := \mu X[f < t]$ . Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

**Теорема 7.** Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $\mu X < +\infty$ , выполнены обычные условия для  $f$ . Тогда  $\int_X f d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} t d\mu_F$ .

<sup>1</sup> здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

<sup>2</sup>тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

<sup>3</sup>А можно и без. Тогда  $\nu([a; b)) = F(b-0) - F(a-0)$ , см. ??

## § 17 Интеграл Эйлера-Пуассона

**Утверждение 1.**  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d\lambda_2 = \pi$

## § 18 Вероятностный смысл мемы

<+Табличка с соответствием+>

## § 19 Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

**Определение 1.** Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $P(x)$  — предикат. Говорят, что  $P(x) = 1$  почти везде (п.в.), если  $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$ .

**Определение 2.**  $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  п.в. .

**Лемма 1** (Беппо-Леви для рядов). Пусть заданы  $(X, \mu)$ ,  $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  измеримы,  $u_n \geq 0$ . Тогда

$$a) \int_X \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n d\mu.$$

b) Если эти числа конечны, то ряд  $\sum_n u_n$  с.в. п.в.

**Лемма 2** (Беппо-Леви «вверх ногами»). Пусть задано  $(X, \mu)$ ,  $(f_n)$ , измеримы,  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ . Пусть ещё  $f_1 \in \mathcal{L}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$$

<+Здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>

**Определение 3.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$ .

▷  $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$  — «срез»

▷  $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \emptyset\}$  — «проекция»

<+картиночка для  $\mathbb{R}^2$ +>

**Теорема 3.** Пусть  $E \in \mathcal{M}_{m+n}$ ,  $E_x \in \mathcal{M}_n$  п.в.  $x$ ,  $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$  измерима относительно  $\mathcal{M}_m$ . Тогда

$$\lambda_{m+n}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) d\lambda_m$$

<+много букв+>

**Определение 4** (График).  $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$ .

**Определение 5** (Подграфик).  $\Gamma_-^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq t \leq f(x)\}$ .

**Определение 6** (Надграфик).  $\Gamma_+^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geq f(x)\}$ .

**Теорема 4** (Геометрический смысл интеграла). Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\geq 0$ . Тогда

1.  $\Gamma_-^f$  измеримо.

2.  $\lambda_{n+1}\Gamma_-^f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n$  измеримо.

## § 20 Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через  $dx$  (ну или  $dy$ ), размерность определяется из размерности  $x$ . Ещё обозначим  $d(x, y)$  через  $dx dy$ .

**Теорема 1** (Тонелли). Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

**Теорема 2** (Фубини). Пусть  $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$$

## § 21 Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

- Сдвиг:  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Tx = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ .
- Поворот с растяжением:  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L$  — линейный император.

**Утверждение 1.**  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$ .

**Утверждение 2.**  $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , линейно. Тогда

$$\exists C \geq 0 \forall E \in \mathcal{M} :: \lambda L(E) = C \lambda E$$

**Теорема 4.**  $C$  из прошлой теоремы равно  $|\det[L]|$ .

<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>

## § 22 Мера образа при гладком отображении

**Обозначение.**  $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

**Теорема 1.** Пусть  $E \in \mathcal{M}$ ,  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , гладкая биекция. Тогда  $F(E) \in \mathcal{M}$  и  $\lambda F(E) = \int_E |\det F'(x)| dx$ .

□  $\langle \sim \rangle \langle \otimes \rangle$  ■

## § 23 Гладкая замена переменной в интеграле

**Теорема 1.** Пусть  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , гладкая биекция. Пусть к тому же  $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  с обычными условиями.

Тогда

$$\int_E f(y) dy = \int_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)| dx$$

**Пример 1** (Полярные координаты).  $\langle \otimes \rangle |J| = r$

**Пример 2** (Сферические координаты).  $\langle \otimes \rangle |J| = r^2 \cos \psi$

## § 24 Предельный переход под знаком интеграла

**Определение 1** (Всякие сходимости). Пусть  $(f_n): X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu$  — мера на  $X$ .

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f &:: \forall x \in X &:: f_n(x) \rightarrow f(x) \\ f_n &\xrightarrow{X} f &:: \sup_X |f_n - f| &\rightarrow 0 \\ f_n &\rightarrow f \text{ п.в.} &:: \exists N \subset X: \mu(N) = 0 &:: \forall x \in X \setminus N &:: f_n(x) \rightarrow f(x). \\ f_n &\xrightarrow{\mu} f &:: \forall \sigma > 0 &:: \mu X[|f_n - f| \geq \sigma] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Замечание 1.**  $f \xrightarrow{X} f \Rightarrow f_n \rightarrow f \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ п.в.}$

**Замечание 2.** Пусть  $\mu X < \infty$ , тогда  $f_n \rightarrow f \text{ п.в.} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f$ .

**Замечание 3** (Теорема Рисса).  $f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ п.в.} \Rightarrow \exists (n_k) :: f_{n_k} \rightarrow f \text{ п.в.}$

**Теорема 1.**  $f_n \xrightarrow{X} f, \mu X < \infty \Rightarrow \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$

**Теорема 2.** см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.

**Теорема 3** (Фату). Пусть заданы  $(X, \mu)$ ,  $f_n \geq 0$ , измеримы. Тогда

$$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$

## § 25 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

**Теорема 1.** Пусть снова заданы  $(X, \mu)$ ,  $(f_n)$  измерима,  $f_n \rightarrow f$  п.в. . К тому же

$$\exists \varphi \in \mathcal{L} :: \forall n :: |f_n| \leq |\varphi|$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

**Обозначение.**  $(\mathcal{L})$  — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

**Следствие 1.** Пусть  $f: T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T \subset \mathbb{R}^k$ ,  $f_t \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} f$  п.в. , и

$$\exists V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} :: \forall t \in \overset{\circ}{V} \cap T :: |f_t| \leq |\varphi|$$

Тогда

$$\int_X f_t d\mu \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \int_X f d\mu$$

**Обозначение.**  $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$  — условия локальной теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

**Следствие 2.** Непрерывность интеграла по параметру при выполнении  $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$  и непрерывности  $f_t$ .

## §\* Интеграл по мере с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию. В таких случаях параметр будет записан, как индекс

**Определение 1** (Собственный интеграл с параметром). Пусть  $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_t(x) \in \mathcal{L}([a, b], \mu) \forall t \in T$ . Тогда,

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от  $t$ , как видно  $\mathcal{D}_I = T$ .

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. `<:set aflame>` У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается  $(\mathcal{L}_{\text{loc}})$ . Так что по сути они — просто интегралы по мере.

Здесь тоже есть непрерывность, дифференцируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально<sup>1</sup> следует из 1.25.1 и 1.20.2.

## § 26 Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

**Определение 1** (Несобственный интеграл с параметром). Пусть  $f: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{L}([a, B], \mu) \forall B < b$ . Тогда,

$$I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx := \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f(x, t) dx = \lim_{B \rightarrow b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что  $\forall t \in T$  интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

**Определение 2.** Говорят, что  $I^B(t) \xrightarrow{T} I(t)$  (сходится равномерно относительно  $t, t \in T$ ), если <sup>2</sup>

$$\sup_{t \in T} \left| \int_B^{\rightarrow b} f(x, t) dx \right| \xrightarrow[B \rightarrow b]{} 0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла  $\forall t \in T$ .

**Теорема 1** (Признак Больцано-Коши).

$$I^B(t) \xrightarrow{T} I(t) \Leftrightarrow \sup_T \left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, t) dx \right| \xrightarrow[B_1, B_2 \rightarrow b]{} 0$$

<sup>1</sup>ну..

<sup>2</sup>Никто же не любит  $\varepsilon$ - $\delta$ -определения?

**Теорема 2** (Признак Вейерштрасса). Пусть  $\exists \varphi \in \mathcal{L}([a; b]) :: |f(x, t)| \leq \varphi(x) \forall t$ . Тогда  $I^B(t) \xrightarrow{T} I(T)$ .

**Теорема 3** (Признак Дирихле). Пусть  $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) \cdot g(x, t) dx$  и

$$a) f(x, t) \xrightarrow{T} 0, f(x, t) \searrow^x (x \rightarrow b - 0)$$

$$b) G(x, t) = \int_a^x g(\xi, t) d\xi$$

$$\exists M: \forall x \in [a; b], t \in T :: |G(x, t)| \leq M$$

Тогда  $I^B(t) \xrightarrow{T} I(T)$ .

**Теорема 4** (Признак Абеля). Пусть  $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) \cdot g(x, t) dx$  и

$$a) \exists M: \forall t \in T :: f(x, t) \leq M, f(x, t) \searrow^x.$$

$$b) \int_a^B g(x, t) dx \xrightarrow[B \rightarrow b]{T} \int_a^{\rightarrow b} g(x, t) dx$$

Тогда  $I^B(t) \xrightarrow{T} I(T)$ .

## § 27 Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром $\langle \otimes \rangle$

**Теорема 1.** Пусть  $f(x, t) \rightarrow f(x, t_0)$  для п.в.  $x \in [a; b]$  и  $I^B(t) \xrightarrow{V(t^0)} I(t)$ .<sup>1</sup> Тогда  $I \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} I(t_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть для п.в.  $x \exists f'_t(x, t)$ , непрерывна на  $[a; b] \times \underbrace{[c; d]}_T$ . Допустим,

$$a) I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx \text{ сходится } \forall t \in T$$

$$b) \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t) dx \text{ равномерно сходится относительно } t \in T$$

$$\text{Тогда } \exists I'(t_0) = \int_a^{\rightarrow b} f'_t(x, t_0) dx$$

*Замечание.* Здесь нужна сходимости  $I$ , чтобы хоть где-то были конечные значения  $I(t)$ , нам их разность считать.

**Теорема 3.** Пусть для п.в.  $x \exists f(x, t)$ , непрерывна на  $[a; b] \times \underbrace{[c; d]}_T$ . Допустим,  $I(t) = \int_a^{\rightarrow b} f(x, t) dx$  равномерно

сходится относительно  $t \in T$

Тогда

$$\int_c^d I(t) dt = \int_a^{\rightarrow b} dx \int_c^d f(x, t) dt$$

## § 28 Г-функция Эйлера

**Определение 1.**  $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$

<sup>1</sup>Это не очень докажется без конечности меры  $V(t_0)$ , а то интеграл может сходиться, а функция не быть суммируемой

### Свойства

1° Определена для всех  $t > 0$ .

2°  $\Gamma(1) = 1$

3°  $\forall t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4°  $n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!$

5°  $\Gamma$ -выпукла

6°  $\Gamma \sim \frac{1}{t}$  при  $t \rightarrow 0$

7°  $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi} \sqrt{t} t^t e^{-t}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

8°  $\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$ . (формула отражения)

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при  $\operatorname{Im} z > 0$ .

### § 29 В-функция

**Определение 1.**  $B(y, z) = \int_0^1 x^{y-1} (1-x)^{z-1} dx$ .

### Свойства

1°  $B(y, z) = B(z, y)$ .

2°  $B(y, z) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$ .

### § 30 Объём $n$ -мерного шара

**Теорема 1.** Пусть  $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$  —  $n$ -мерный шар. Тогда

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$$

## Глава 2: Дифференциальная геометрия $\langle \otimes \rangle$

### § 1 Регулярная кривая и её естественная параметризация

**Определение 1** (Кривая, как отображение). Пусть задано гладкое отображение  $t \in [a; b] \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^3$ , регулярное, то есть  $rk r'(t) \equiv 1$ .  $t$  — параметр, само отображение ещё можно называть параметризацией.

**Определение 2** (Кривая, как класс отображений). Введём отношение эквивалентности отображений:

$$r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \exists \delta: [a; b] \leftrightarrow [\alpha, \beta] :: \rho(\delta(t)) = r(t)$$

А теперь будем их путать.  $\langle : \text{set aflame} \rangle$

**Определение 3** (Естественная параметризация). Пусть  $[a; b] = [t_0, t_1]$ . Рассмотрим  $\tilde{s}(t) = \int_{t_0}^t |r'(\tau)| d\tau$ . Она, как видно, является пройденным путём и неубывает  $\Rightarrow$  годится на роль  $\delta$ .

Так что можно рассматривать  $s$  как параметр, это собственно и есть естественная (натуральная) параметризация.

**Утверждение 1.** Пусть есть две разных параметризации:  $r(t)$  и  $r(s)$  одной кривой. Тогда

$$\dot{r} \equiv \frac{\partial r(s)}{\partial s} = \left( r'(t) \cdot (s'(t))^{-1} \right)(t) = \frac{r'}{|r'|}$$

Как видно, натуральная почему-то обозначается точкой.

### § 2 Кривизна кривой

**Определение 1** (Касательный вектор).  $\tau := \dot{r}(s)$ .

**Определение 2** (Кривизна).  $k_1 = |\dot{\tau}|$

**Определение 3** (Радиус кривизны).  $R = k_1^{-1}$

**Утверждение 1.**  $\tau \perp \dot{\tau}$

**Теорема 2.**  $k_1 = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$

### § 3 Кручение и нормаль

**Определение 1** (Нормаль). Пусть  $k_1 \neq 0$ . Тогда  $\nu := \frac{\dot{\tau}}{k_1}$ .

**Определение 2** (Бинормаль).  $\beta = \tau \times \nu$ .

*Замечание.*  $(\tau, \nu, \beta)$  — хороший кандидат для репера в какой-нибудь точке  $P$ .

**Определение 3** (Соприкасающаяся плоскость). Пусть  $k_1 > 0$ ,  $P = r(s_0)$ ,  $T$  — плоскость,  $T \ni P$ ,  $N \perp T$  — нормаль к ней. Допустим,  $r(s + \Delta s) \cdot N = h$ ,  $h = o(\Delta s^2)$ . Тогда  $T$  — соприкасающаяся плоскость.

**Утверждение 1.**  $\tau, \nu \perp N$ ;  $(r - r_0, \dot{r}_0, \ddot{r}_0) = 0$  — её уравнение

**Определение 4** (Абсолютное кручение).  $|k_2| := |\dot{\beta}|$

**Теорема 2.**  $|k_2| = \left| \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{k_1^2} \right|$

**Определение 5** (Кручение).  $k_2 := \frac{-(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{k_1^2}$

### § 4 Формулы Френе

**Теорема 1.**

$$\begin{pmatrix} \dot{\tau} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

**Теорема 2.** Пусть  $r(s)$  — гладкая кривая с заданными  $k_1$  и  $k_2$ ,  $k_1 > 0$ . Тогда система (2.1) определит её с точностью до движения.



## § 5 Регулярная поверхность. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма

**Определение 1** (Поверхность (двумерная)). Пусть задано гладкое отображение

$$\varphi: (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Добавим условие регулярности  $\text{rk } \varphi' \equiv 2$  и условимся путать отображение и класс оных.

**Определение 2.**

$$\begin{aligned} r_u &:= (x'_u, y'_u, z'_u) \\ r_v &:= (x'_v, y'_v, z'_v) \\ n &:= \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{N}{|N|} \end{aligned}$$

Отметим, что условие регулярности не дает векторному произведению обращаться в 0.

Касательную плоскость можно было бы здесь определить через нормаль, но лучше пока ещё подумать. Может, абстракций добавить.

**Определение 3** (Первая квадратичная форма).

$$\begin{aligned} I &:= |dr|^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2 \\ &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \end{aligned}$$

## § 6 Вычисление длин и площадей на поверхности

**Теорема 1.** Пусть  $M$  — поверхность,  $\gamma: t \rightarrow r \in M$ . Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I}. (ds = I)$$

**Теорема 2.** Пусть  $M$  — поверхность,  $u, v \in D$ ,  $I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ . Тогда

$$S(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

*<?>+вкусный абстрактный кусок про меру на многообразии+>*

**Определение 1.** Пусть  $M$  — подмногообразие  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\lambda_k := \int_D \sqrt{\det g(t)} dt, \quad g(t)_{ij} = \left( \frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j} \right) (t)$$

*Замечание 1.* Как видно, в  $\mathbb{R}^2$ ,  $g$  очень похож на матрицу 1ой квадратичной формы

**Определение 2.** Пусть  $M_1, M_2$  — пара поверхностей. Допустим,  $\exists F: M_1 \rightarrow M_2$ , сохраняющее длины кривых. Тогда они называются изометричными.

**Теорема 3.** Пусть  $M_1, M_2$  — пара поверхностей. Допустим, что существуют их параметризации, при которых  $I_1 = I_2$ . Тогда они изометричны.

## § 7 Вторая квадратичная форма

**Определение 1.** Снова рассмотрим поверхность с какой-то параметризацией. Тогда  $\Pi := -dr dn = L du^2 + 2N du dv + M dv^2$ .

**Утверждение 1.**  $\Pi = n \cdot d^2 r$

**Утверждение 2** (Типы точек на поверхности). Здесь названия связаны с типом соприкасающегося параболоида. Его можно добыть, рассматривая  $\Delta r \cdot n$ .

$\Pi > 0$ : Эллиптический

$\Pi < 0$ : Он же

$\Pi \leq 0$ : Гиперболический

$\Pi \geq 0 \vee \Pi \leq 0$ : Параболический (вроде цилиндра)

$\Pi = 0$ : Точка уплощения

## § 8 Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны

**Определение 1.** Нормальное сечение поверхности — сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности (в точке).

**Лемма 1.** Нормальное сечение — кривая.

Сначала рассмотрим несколько более общий случай

**Теорема 2** (Менье). Пусть  $\gamma$  — кривая  $\subset M$ ,  $\gamma \ni P$ . Тогда  $k_0 = k_1 \cos(\underbrace{\nu \hat{=} n}_{\theta}) = \frac{\Pi}{I}$ .

*Замечание 1.* Ещё можно сформулировать так: для всякой кривой на поверхности, проходящей через точку в заданном направлении  $k_0 = \text{const}$

а теперь сузим обратно.

**Определение 2.** Нормальная кривизна — кривизна нормального сечения.

Для нормального сечения  $\cos \theta = \pm 1$ .

Если немного переписать и ввести параметр  $t = dv/du$

$$k_1(t) = |k_0(t)| = \left| \frac{L + 2Nt + Mt^2}{E + 2Ft + Gt^2} \right|$$

Этот параметр  $t$  и задаёт «направление» нормального сечения. Так что  $k_0(t)$  и есть та самая «кривизна в данном направлении».

Теперь найдем экстремумы  $\frac{\Pi}{I}(t)$ .

**Теорема 3.**  $\exists k_{\min}, k_{\max}, k_{\min} \cdot k_{\max} = \frac{LM - N^2}{EG - F^2}$ .

**Определение 3.**  $k_{\min}, k_{\max}$  — главные кривизны.

## § 9 Гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса

**Определение 1** (Гауссова кривизна).  $K = k_{\min} \cdot k_{\max}$ .

**Определение 2** (Гауссово отображение). Пусть  $M$  — поверхность,  $n$  — нормаль к ней в точке  $P$ ,  $S$  — единичная сфера. Тогда  $G : n \mapsto C \in S$  ( $C$  — точка на сфере).

**Теорема 1.** Пусть  $U$  — окрестность  $P \subset M$ ,  $M$  — поверхность,  $\mathcal{N}$  — поле нормалей на  $U$ . Допустим, что  $V = G(\mathcal{N})$ , она вроде как окрестность  $G(n_P)$ .

Тогда

$$|K| = \lim_{U \rightarrow P} \frac{\iint_V |n_u \times n_v|}{\iint_U |r_u \times r_v|}$$

## § 10 Геодезическая кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.

**Определение 1** (Геодезическая кривизна). Пусть  $M$  — поверхность,  $T$  — касательная к ней в точке  $P$ . Допустим,  $\gamma \subset M$  проходит через  $P$ . Рассмотрим проекцию  $\gamma$  на  $T$ . Тогда  $\kappa := k_\gamma$  — и есть геодезическая кривизна.

**Определение 2.** Если для кривой  $\kappa(s) \equiv 0$ , то она называется геодезической.

**Теорема 1** (Гаусса-Бонне). Пусть  $M$  — гладкая поверхность,  $P_1, \dots, P_n$  — вершины криволинейного многоугольника,  $P_i, P_{i+1} = \gamma$ ,  $\alpha_i$  — углы при вершинах. Тогда

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa \, ds = 2\pi - \iint_P K \, ds$$

## Глава 3: Анализ Фурье $\langle \times \rangle$

### § 1 Гильбертово пространство. $\mathcal{L}_2$

**Определение 1.** Пусть  $H$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{C}$ . Введём на нём (эрмитово) скалярное произведение, связанную с ним норму и метрику. Допустим, оно полно по введённой метрике. Тогда  $H$  — гильбертово пространство.

*Замечание 1.* Если полноты нет, то пространство называется предгильбертовым.

**Утверждение 1.** Скалярное произведение — непрерывно.

**Пример 1.** Пусть  $(X, \mu)$  — пространство с мерой. Рассмотрим пространство  $\tilde{L}$

$$\tilde{L} := \left\{ f \mid f: X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ измерима, } \int_X |f|^2 d\mu < \infty \right\}$$

Скалярное произведение зададим так:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g} d\mu$$

Введем теперь отношение эквивалентности  $f \sim g := f = g$  п.в. . Тогда  $\mathcal{L}_2 = \tilde{L} / \sim$ .

**Теорема 2.**  $\mathcal{L}_2$  полно по мере, введённой выше.

### § 2 Ортогональные системы. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.

**Определение 1.**  $\delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

**Определение 2.** Пусть  $H$  — гильбертово. Рассмотрим  $f_1, \dots, f_n \in H$ . Допустим,  $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ . Тогда  $(f_i)$  — ортогональная система.

**Теорема 1** (Пифагора  $\langle \sim \rangle$ ). Пусть  $(f_i)$  — ортогональная система. Допустим,  $f = \sum_k f_k$ . Тогда

$$\|f\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2$$

**Определение 3.** Пусть  $(e_i)$  — ортогональная система,  $f \in H$ . Тогда

$$c_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle \text{ — коэффициенты Фурье } f$$
$$f = \sum_k c_k e_k \text{ — ряд Фурье } f$$

**Теорема 2** (Неравенство Бесселя). Пусть  $f \in H$ ,  $(e_i)$  — ортогональная система. Тогда

$$\sum_n |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

**Определение 4.** Пусть  $(e_i)$  — ортогональная система. Допустим

$$\forall f \in \mathcal{L}_2 :: f \sim \sum_n c_n e_n$$

Тогда  $(e_i)$  — полная система.

**Утверждение 3.** Разложение в ряд Фурье по полной ортогональной системе — единственно.

### § 3 Тригонометрические системы

**Определение 1.**  $\mathcal{L}_2^{2\pi} = \mathcal{L}_2((0; 2\pi), \mu) \cap \{2\pi\text{-периодичные функции}\}.$

**Утверждение 1.**  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots$  — ортогональная система

**Утверждение 2.**  $1, e^x, e^{2x}, \dots$  — ортогональная система

**Теорема 3.** Тригонометрические системы выше — полны.

□ (?) Вообще, тут большой кусок теории. ■

**Определение 2.** Будем понимать

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n := \text{V. p.} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N a_n$$

**Утверждение 4.** Коэффициенты разложения по синусам и косинусам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 2a_0$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

**Утверждение 5.** Коэффициенты разложения по экспонентам:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

### § 4 Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега

**Определение 1** (Ядро Дирихле).  $\mathcal{D}_n(x) := \sum_{-n}^n e^{ikx}$

**Лемма 1** (Свойства ядра Дирихле).

$$1. \mathcal{D}_n(-x) = \mathcal{D}_n(x)$$

$$2. \mathcal{D}_n(x) = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

3. всякие следствия отсюда

**Определение 2** (Ядро Фейера).  $\mathcal{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_k(x)$

**Лемма 2** (Свойства ядра Фейера).

$$1. \mathcal{F}_n(-x) = \mathcal{F}_n(x)$$

$$2. \mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{nx}{2} \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

3. всякие следствия отсюда

**Лемма 3** (Римана-Лебега). Пусть  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin nx \, x &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx \, x &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx} \, x &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

## § 5 Теорема Дини о поточечной сходимости

**Теорема 1** (Дини). Пусть  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Допустим,  $f$  удовлетворяет условию Дини:

$$\exists L \in \mathbb{C}, \delta > 0 :: u \in \mathcal{L}((0; \delta)), u(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2L}{t}$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

**Утверждение 2.** Частные случаи условия Дини:

1.  $\exists$  конечные  $f(x \pm 0)$ ,  $f'(x \pm 0)$ . При этом  $L = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ .
2.  $f$  непрерывна в  $x$ ,  $\exists$  конечные  $f'(x \pm 0)$ . При этом  $L = f(x)$ .
3.  $f$  дифференцируема в  $x$ . При этом  $L = f(x)$ .

## § 6 Свойства коэффициентов Фурье

**Обозначение.**  $\widehat{f}(n) := c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$

**Утверждение 1.**  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \widehat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Утверждение 2.** Пусть  $\exists f' \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ . Тогда

- $\widehat{f'}(n) = in \widehat{f}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$

**Утверждение 3.** Пусть  $\exists f^{(p)} \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ . Тогда

- $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \cdot \widehat{f}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$

**Утверждение 4.** Пусть  $c_n = O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$ . Тогда  $\exists \varphi \in C_{2\pi}^p :: \varphi \sim f$ .

## § 7 Сходимость рядов Фурье..

$$1^\circ f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow \forall \Delta \subset [-\pi, \pi] :: \int_{\Delta} f(x) \, dx = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_{\Delta} e^{inx} \, dx.$$

$$2^\circ f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow c_n \text{ определены.}$$

$$3^\circ f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \|S_n - f\| \rightarrow 0.$$

$$4^\circ f \in C^{(p)} \Rightarrow c_n \text{ быстро убывают.}$$

5°  $c_n$  быстро убывают  $\Rightarrow f \in C^{(p)}$ .

6° теорема Дини 3.5.1

7° теорема Фейера 3.7.1

**Теорема 1** (Фейера). Пусть  $f \in C^{2\pi}$ . Тогда  $\sigma_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f$ , где  $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$ . (сходимость по Чезаро).

## § 8 Преобразование Фурье

**Определение 1.** Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ . Тогда

$$\widehat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx$$

$$1. |\widehat{f}(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

$$2. \widehat{f}(s) \in C^0.$$

$$3. (g(x) = x^n f(x) \in \mathcal{L}_1) \Rightarrow \widehat{f}(s) \in C^{(n)}.$$

$$4. \widehat{f}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

$$5. (f \in C^{(p)}, f^{(p)} \in \mathcal{L}_1) \Rightarrow \widehat{f}(s) = o\left(\frac{1}{|s|^p}\right).$$

$$6. f \in \mathcal{L}_1, a \in \mathbb{R}, g(x) = f(x - a) \Rightarrow \widehat{g}(s) = e^{-isa} \widehat{f}(s)$$

$$7. f, g \in \mathcal{L}_1. \text{ Тогда}$$

$$\widehat{f * g}(s) = 2\pi (\widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s))$$

$$8. \text{ Интегральная формула Фурье 3.8.1}$$

**Теорема 1** (формула восстановления Дини). Пусть  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $L \in \mathbb{C}$ <sup>1</sup>. Допустим  $f$  удовлетворяет условию Дини в точке  $x$  с константой  $L$ . Тогда

$$\check{f}(x) = L$$

Для непрерывных функций

$$f(x) = \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} dx$$

## § 9 Решение уравнения теплопроводности

Само уравнение теплопроводности выглядит так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Но к нему ещё есть пара начальных условий:

$$u(x, 0) = f(x) \\ f \in \mathcal{L} \quad f \in C_x^2$$

⟨✂⟩: <+решить что-ли...+>

В итоге получится что-то вроде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \cdot f(y) dy$$

<sup>1</sup>Тут по идее все можно в  $\mathbb{C}$

# Глава А: Обозначения

## Обозначения с лекции

$a := b$  — определение  $a$ .

$\bigsqcup_k A_k$  — объединение дизъюнктивных множеств.

$\mathcal{A}$  Алгебра множеств

## Нестандартные обозначения

$\langle \text{✂} \rangle$  — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$  — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$  — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\langle \text{~} \rangle$  — кривоватая формулировка

$\langle \text{:set aflame} \rangle$  — набирающему зело не нравится билет

$\langle \text{+что-то+} \rangle$  — тут будет что-то, но попозже

$a .. b$  —  $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$  — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$  В кванторах, «верно, что»

$\mathcal{A}_\sigma$  Сигма-алгебра множеств