Элементы линейной алгебры

Михаил Пирогов, `taxus`

22.06.2016

Аннотация

Сей труд не стоит рассматривать как исчерпывающий конспект лекций. Скорее он представляет субъективно выбранный мною материал, показавшийся или наиболее важным, или наиболее непонятым, или ещё не знаю каким. Надеюсь, он хоть кому-нибудь принесёт немного пользы.

Оглавление

Глава 6: Линейные пространства

§ 1 Определения

Определение 1. Пусть K — поле. Рассмотрим множество V с двумя операциями

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$

Тогда V — линейное пространство над K, если $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \alpha_i \in K$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\exists\, (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x}$
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

8. $(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1(\alpha_2\mathbf{x})$

Определение 2. Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда U — подпространство V.

Определение 3. Пусть V — линейное пространства над K, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Лемма 1. *Пусть U, V — линейные пространства над K, $U \subset V$. Тогда если U замкнуто относительно $+, \cdot$ из V, то U — подпространство V.*

▼

Формулировка леммы аналогична тому, что всякая линейная комбинация элементов U лежит в нем же. Нужная дистрибутивность, ассоциативность и т.д. унаследуется от соответствующих операций в надпространстве, так как их свойства заданы на всём множестве V, а значит и на подмножестве U. Однако в некоторых свойствах требовалось существование в множестве чего-нибудь. Покажем, что все эти требования равносильны существованию линейной комбинации.

3. $\exists\, \mathbf{0} \in U \Leftarrow \exists\, 0 \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

4. $\exists\, {-\mathbf{x}} \in U \Leftarrow \exists\, (-1) \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

▲

Определение 4. Пусть V — линейное пространства над K, $M \subset V$

$$\langle M \rangle = \left\{ \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in M \end{array} \right. \right\}$$

$\langle M \rangle$ — линейная оболочка M.

Лемма 2. *Верны утверждения:*

1. *$\langle M \rangle$ — подпространство V*

2. *$\langle M \rangle = \bigcap\limits_i W_i$, $W_i \supset M$, W_i — подпространство V*

▼

Доказательства очень похожи на соответствующие в теории групп.

▲

§ 2 Линейная независимость системы векторов

Определение 1. Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда если

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0 \Leftrightarrow \forall\, i\ \alpha_i = 0$$

то система векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независима.

Глава 7: Матрицы

Литература