§ 1 ⚒Интеграл от комплексной дифференциальной формы

здесь надо сильно больше определений

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z-a|<\varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0<|z-a|<\varepsilon\}$. Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в $\mathbb{R}^2$. Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Определение 2. Пусть $G\subset\mathbb{C}$ — область, $f\colon G\to C$, непрерывна, $f=f_1+if_2$, $\omega(z,\mathrm{d}z)=f(z)\mathrm{d}z$ — комплексная дифференциальная форма. Пусть $\Gamma\subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$

Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t := \int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t)-f_2(\gamma(t))\gamma_2)\mathrm{d}t+\int\limits_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t)+f_2(\gamma(t))\gamma_1)\mathrm{d}t$$

Свойства:

Утверждение 1. *см* **??**

Утверждение 2. *Пусть* $\{t_i\}$ *— разбиение отрезка* $[a;b]$, $z_i=\gamma(t_i)$, $\Delta z_i=z_{i+1}-zi$, $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$, $\xi_i=\gamma(\tau_i)$. *Пусть ещё*

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta z_i$$
$$r=\max|\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{r\to 0}\sigma$$

▼

Следует из вещественной теоремы Римана

▲

Следствие 1. *Пусть* $|f(z)|\leqslant M\ \ \forall z\in\Gamma$

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right|\leqslant M\cdot\ell(\Gamma)$$

▼

$$|\sigma|\leqslant\sum_i|f(\xi_i)|\cdot|\Delta z_i|\leqslant M\cdot\sum_i|\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.

▲

. . . .
{censored by galactic vimperor}
. . . .

§ 42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

§ 46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a.

Теорема 1. *Пусть a — полюс первого порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z\to a} f(z)$$

Теорема 2. *Пусть a — ноль первого порядка для ψ, $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. *Пусть a — полюс p-го порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!}\left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}_{z=a}$$

§ 47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I⟩ Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции g $\sin / \cos$ заменены на $\frac{1}{2}\left(z \pm z^{-1}\right)$

II⟩ Интеграл от рациональной функции на $\mathbb{R}$

Пусть $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P,Q\in\mathbb{R}[x]$, $\deg P\leqslant\deg Q-2$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

III⟩ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = I$

Пусть $f(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на $\mathbb{R}$. Тогда

$$I = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res}_{a_k} f(z)e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана)**.** *Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z)\xrightarrow[z\to\infty]{}0$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

§ 55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение $f\colon G\to H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f\colon G\to G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. *Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу* $\operatorname{Aut} G$*.*

▼

Пусть $f,g,h\in\operatorname{Aut} G$. Тогда $f\circ g\colon G\to G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $\big(f\circ(g\circ h)\big)(x)=f(g(h(x)))=\big((f\circ g)\circ h\big)(x)$
- $\forall f\ \exists f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, $\Rightarrow$ конформно и однолистно.
- $\mathrm{id}\colon G\to G$ — конформно и однолистно.

▲

Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$
2. $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть область* $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. *Тогда* $G \cong$ *одной из классических областей*

1. $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2. $G = \overline{\mathbb{C}}\ \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3. $G = \overline{\mathbb{C}}\ U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}$, $|U| > 1$

§ 56 Лемма Шварца

§ 57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \operatorname{Aut} G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall\, z_1, z_2 \in G \;\; \exists\, f \in \Gamma\colon\; f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. *Пусть область* $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, Γ — *транзитивна. Пусть к тому же* $\exists\, z_0\colon \operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma$. *Тогда* $\Gamma = \operatorname{Aut} G$.

▼
Выберем произвольный $f \in \operatorname{Aut} G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности $G\ \exists \gamma \in \Gamma\colon \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma \circ f \in \operatorname{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$. Но тогда

$$\forall\, f \in \operatorname{Aut} G \;\; f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in\Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in\Gamma} \in \Gamma$$

▲

§ 58 Автоморфизмы классических областей

Теорема 1. $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}} = \{f\}$