## § 1 Оценка приращения дифференциального отображения

**Утверждение 1.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. *Тогда формула Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

*не работает.*

**E.g.** Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), b - a = 2\pi$$

**Теорема 2** (об оценке приращения отображения)**.** *Пусть* $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G$ *— выпуклое,* $f$ *— дифференцируема,*

$$\forall\, x \in G \ \ \|f'(x)\| \leqslant M$$

*Тогда* $\forall\, a, b \in G \ \ \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b - a\|$

☐ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell\rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что $F$ — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists\, c \in [0, 1]\colon F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за $x$):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leqslant \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$\mathrm{d}L(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, l\rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leqslant M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell\rangle - \langle f(a), \ell\rangle = \langle \ell, \ell\rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

## § 2 Частные производные высших порядков

**Определение 1.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, существуют производные $k$-го порядка. Тогда

$$\partial^{k+1}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f(x) := \partial_{i_{k+1}}(\partial^k_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f)(x)$$

*Замечание* 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в $G$ с непрерывной производной до $p$-го порядка включительно. Функции из $C^1$ ещё называются гладкими.

**Теорема 1** (Зависимость производных $p$-го порядка от перестановки переменных)**.** *Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом*

$$\begin{aligned} &i = \{i_1, \ldots, i_p \mid i_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &j = \{j_1, \ldots, j_p \mid j_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &j = \pi(i) \end{aligned}$$

*Тогда* $\partial^p_i f(x) = \partial^p_j f(x)$

*Замечание* 1. Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

## § 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

**Определение 1.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$

$$\mathrm{d}^p f(x) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_p}} \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

**Утверждение 1.** *Если частные производные можно переставлять, то*

$$\mathrm{d}^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geqslant 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n} \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

## § 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

**Теорема 1.** *Пусть $f \in C^p(G), G \in \mathbb{R}^n$, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n\colon a + h \in G$. Тогда*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \, \mathrm{d}^k f(a, h) + R_p(h)$$

*Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:*

1. *В форме Пеано:* $R_p(h) = o(\|h\|^p)$
2. *В форме Лагранжа:* $R_p(h) = \dfrac{1}{(p+1)!} \, \mathrm{d}^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0, 1)$

## § 5 Экстремумы

**Определение 1.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что $f$ имеет в $a$ максимум (нестрогий), если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U \;\; f(x) \leqslant f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколотая, то максимум — строгий Для минимума нужно $\geqslant$.

**Теорема 1** (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть a внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если $f$ имеет в a экстремум, то*

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; \partial_i f(a) = 0$$

**Теорема 2** (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть* $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, $a$ *— внутренняя точка,* $f \in C^2(a)$.

1. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) > 0 \Rightarrow f$ *имеет в* $a$ $\min$
2. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) < 0 \Rightarrow f$ *имеет в* $a$ $\max$
3. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \lesseqgtr 0 \Rightarrow$ *ничего нет*
4. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \leqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в* $a$ $\min$
5. $\mathrm{d}f(a) = 0,\ \mathrm{d}^2 f(a) \geqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в* $a$ $\max$

## § 6 Понятие о неявной функции

**Определение 1.** Пусть $F\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Пусть $a = (x_0, y_0)$ удовлетворяет (1), а $U$ — окрестность $a$: $U = U_x \times U_y$. Тогда будем говорить, что уравнение (1) определяет неявную функцию $f$ в $U$, если

$$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q\colon F(x, y) = 0 \qquad (y = f(x))$$

**Теорема 1** (О неявной функции)**.** *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(x_0, y_0)$, *а* $a = (x_0, y_0)$:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

*Тогда* $\exists\, P(x_0), Q(y_0)$: *в* $U = P \times Q$ *уравнение* (1) *задаёт неявную функцию* $f\colon P \to Q$. *При этом*

$$f \in C^1 \wedge f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

□

1. (Доказательство существования)
   Рассмотрим $\varphi(y) = F(x_0, y)$. Пусть НУО $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда

   $$\exists\, U_\varepsilon(x_0, y_0)\colon \forall\, x, y \in U\ \ F'_y(x, y) > 0$$

   Обозначим соответствующие проекции $U$ (шар) на координатные оси за $U_x, U_y$ Получается, что $\varphi \uparrow U_y = (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$. Тогда

   $$\begin{gathered} \exists\, V_1(x_0)\colon \forall\, x \in V_1 F(x, y + \varepsilon) > 0 \\ \exists\, V_2(x_0)\colon \forall\, x \in V_2 F(x, y - \varepsilon) < 0 \\ P = V_1 \cap V_2 \end{gathered}$$

   Тогда из теоремы Больцано-Коши и монотонности $\varphi$

   $$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q = U_y\colon F(x, y) = 0$$

   В итоге получилось определение неявной функции.

2. Непрерывность в $(x_0, y_0)$ вроде очевидна, мы же каждому $x$ из $P$ сопоставили 1 $y$ из $Q$. Принадлежность классу $C$ можно установить проведя аналогичные рассуждения для $x \in P(x_0)$

3. С гладкостью что-то странное. Можно наверное сделать как в Зориче.

4. $F(x, f(x)) \equiv 0 \Rightarrow F'_x \cdot 1 + F'_2 f'(x) = 0$

■

## § 7 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

## § 8 Теорема о сжимающем отображении

**Определение 1.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство. Тогда отображение $T\colon X \to X$ называется сжимающим, если

$$\exists\, C \in (0,1)\colon \forall\, x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leqslant C \cdot \rho(x', x'')$$

**Теорема 1** (Банах). *Пусть $(X, \rho)$ — полное метрическое пространство, а отображение $T\colon X \to X$ — сжимающее. Тогда $\exists!\, x_* \in X : Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).*

*Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:*

$$\forall\, x_0 \in X \;\exists \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x_*$$

## § 9 Метод Ньютона

потом

## § 10 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать $F^{-1}$.

---

Рассмотрим, например, линейное отображение.

$$y = F(x) = Ax \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

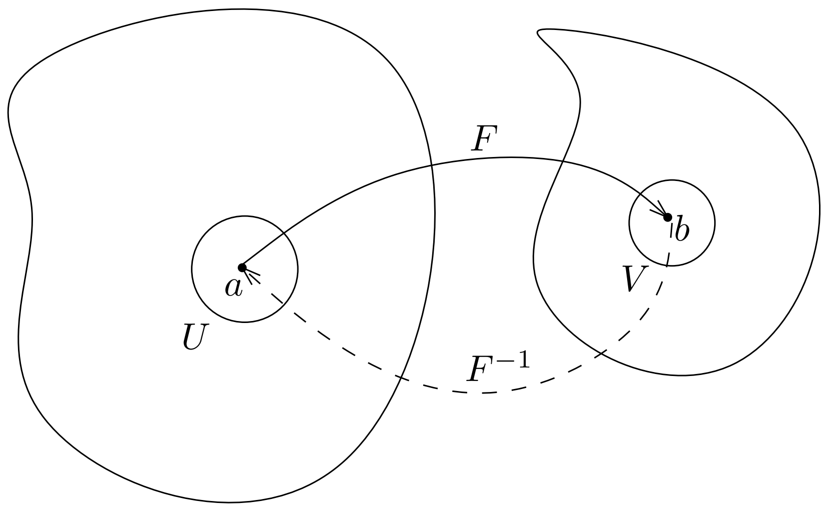
$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

---

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists\, U(a), V(b) :\; F\colon U \leftrightarrow V$$



$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x) - F(a) = y - b = \Delta y && (1) \\ \Delta F &= F'(a)dx + o(dx) && (2) \\ \mathrm{d}F(a) &= \mathrm{d}y(b) && (3) \end{aligned}$$

Условие разрешимости (3) — $\det\big(F'(a)\big) \neq 0$. Утверждается, что (3) $\Rightarrow$ (1)
Соответственно, формулировка

**Теорема 1.** *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $b = F(a)$. *Пусть ещё* $F \in C^1$, $\det(F'(a)) \neq 0$
*Тогда*

$$\begin{aligned} &\exists\, U(a), V(b):\ \ F\colon U \leftrightarrow V \\ &\exists\, F^{-1} V \to U,\ F^{-1} \in C^1 \end{aligned}$$

## § 11 Доказательство теоремы об обратимости

$\square$ (*Теорема об обратимости отображения*) Введём обозначения:

$$\begin{aligned} &F'(a) = \Gamma \\ &\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y) \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $x$ — неподвижная точка $\Phi$ (что $\Leftrightarrow$ $F(x) = y$ ). Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (0.8.1). Тогда отображение в окрестности $a$ будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$.

$$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

   Можно норму оценить

$$\|\Phi'(x)\| = \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|(F'(a) - F'(x))\|$$

   Последний множитель явно $\xrightarrow[x\to a]{} 0$ (так как $F \in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\| \to 0$. А значит найдётся $U_\varepsilon(a)\colon \|\Phi'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

   Тогда по теореме 0.1.2

$$x, x' \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

   Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри $U_\varepsilon$ компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\exists\, \overline{U}\colon \Phi(U) \subset U$$

   Попутно примем $\|y - b\| < \delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - a\| = \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| &\leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x-a) - F(x) + y + b - b\| \\ &\leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \big(\| - \underbrace{(F(x) - F'(a)(x-a) - F(a))}_{\alpha}\| + \|y - b\|\big) \end{aligned}$$

   Выберем произвольный $\varepsilon\colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

   Однако мы ещё можем подкрутить $\varepsilon_1$.

$$\exists\, U_{\varepsilon_1}\colon \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (0.4.1), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда $\varepsilon$, а не $\varepsilon_1$.

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\ldots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x-a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x-a\| \leqslant \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists!\, x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a) \colon \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность $a$ с прообразом $V(b)$ : $U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность:

$$\forall\, U\ \exists\, V_\delta(b) \colon F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

■

## § 12 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

**Теорема 1** (о дифференцируемости $F^{-1}$)**.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F \colon U \leftrightarrow V$. *Пусть также* $F$ *— дифференцируемо в* $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. *Тогда* $F^{-1}$ *дифференцируемо в* $b$.

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцируемости $F$

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha \alpha = o(h)\ (h \to 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists\, A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =\colon \beta = o(k)\ (k \to 0)$

$$\beta \leqslant \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leqslant \frac{\|h\|}{\big|\|Ah\| - \|\alpha\|\big|} = \frac{1}{\left|\frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|}\right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$

■

**Следствие.** $(F^{-1})'(b) = \big(F'(a)\big)^{-1}$

## § 13 Теорема о гладкости обратного отображения

**Теорема 1.** *Пусть* $F\colon U \leftrightarrow V$*, биективна,* $\in C^p$*. Пусть к тому же* $\det F'(x) \neq 0$*. Тогда* $F^{-1} \in C^p$

$\square$ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$
$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \dfrac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$ (здесь $\mathcal{A}$ — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что $b_{ij}$ — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \ldots, a_{kl}, \ldots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}\big(F(x)\big) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \ldots, akl(x), \ldots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = \big(\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)}\big)(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные $F^{-1}$ принадлежат $C^i$. Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бобром мы доберёмся до $C^p$. Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. $\blacksquare$

## § 14 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

**Теорема 1.** *Пусть* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *имеет* $n$ *корней* $(x_j^0)$, $x_j^0 \in \mathbb{R}$*, таких что* $\forall\, i, j\ x_i^0 \neq x_j^0$*. Тогда*

$$x_i = x_i(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

$\square$ Пусть $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$a_0 = (-1)^n x_1 \cdots x_n$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} = (-1) \sum_i x_i$$

Рассмотрим $P$ как отображение $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$.

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\det(F')$. Этот определитель можно рассмотреть как многочлен $\in R[x_1,\dots,x_n]$ Его степень не превосходит $0+1+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что если хоть какая-то пара столбиков равны, то определитель равен нулю. Так что $\det(F')$ делится на всевозможные многочлены вида $x_i-x_j$. А их как раз $\frac{n(n-1)}{2}$ и они неприводимые. Следовательно,

$$\det(F')(x_1,\dots,x_n)=C\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой. [1]

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

## § 15 Теорема о неявном отображении

20:07 2016-10-15

**Определение 1.** Пусть $F\colon \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Рассмотрим уравнение

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

Пусть $x^0\in\mathbb{R}^n$, $y^0\in\mathbb{R}^k$ такие, что $F(x^0,y^0)=0$.

Тогда если $\exists\, P(x^0)\subset\mathbb{R}^n$, $Q(y^0)\subset\mathbb{R}^m$, такие что

$$\forall\, x\in P\ \exists!\, y\in Q\colon F(x,y)=0$$

то говорят, что уравнение (1) задаёт неявную функцию $f\colon P\to Q$.

Сначала всякие комментарии.

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_k(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0\end{cases}$$

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases}\mathrm{d}F_1=0\\ \dots\dots\\ \mathrm{d}F_k=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sum_{j=1}^m\frac{\partial F_1}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j=\sum_{j=1}^m\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{j=1}^m\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j=\sum_{j=1}^m\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j.\end{cases} \tag{2}$$

При этом $\mathrm{d}y_j$ мы хотим выразить через $\mathrm{d}x_j$. Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1. $k=m$
2. $\det\left(\frac{\partial(F_1,\dots,F_k)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right)\neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (2) $\Rightarrow$ (1).

**Теорема 1** (Теорема о неявном отображении)**.** *Пусть* $F\colon G\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $F\in C^p$, $p\geqslant 1$.

$$F(x,y)=0,\quad (x_0,y_0)\in G$$

*1.* $F(x_0,y_0)=0$

*2.* $\det F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

[1]Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

*Тогда* $\exists\, P(x_0), Q(x_0)$, *такие, что* (1) *задаёт неявное отображение* $f\colon P \to Q$. *При этом* $f \in C^p$ *и*

$$f'(x) = -\big(F'_y(x,y)\big)^{-1} \cdot F'_x(x,y)$$

□ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [?, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1. $\Phi\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Работает как-то так:

$$(x,y) \mapsto (u,v), \begin{cases} u = x, & u \in R^n \\ v = F(x,y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

2. $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ такого сорта $x \mapsto (x,0)$

3. $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такого сорта $(x,y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель $\Phi'(x,y)$. Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right) \Rightarrow \det\big(\Phi'(x_0,y_0)\big) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0,y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (0.10.1) $\exists\, \Phi^{-1}(x_0,y_0)$ и ещё окрестности $U(x_0,y_0), V(x_0,0)$. Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \ \wedge \ Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$. Вполне очевидно, что $f \in C^p$. Ну $i, \pi \in C^\infty$, $\Phi^{-1} \in C^p$. К тому же

$$\forall\, x \in P\ x \overset{i}{\mapsto} (x,0) \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} (x,y) \overset{\pi}{\mapsto} y \in Q$$

При этом такой $y$ — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение $f$.

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию $F'_y$ — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x,y))^{-1} \cdot F'_x(x,y)$$

■

## § 16 Функциональная зависимость системы функций

**Определение 1.** Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, $x_0 \in G$. Тогда эти функции называются функционально зависимыми в $V(x_0)$, если

$$\exists\, \varphi\colon U(f(x_0)) \to \mathbb{R}, \varphi \in C^1 \ :\ g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

**Определение 2.** Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально *не*зависимыми, если определение выше не выполняется ни для какой $V \subset G$

*Замечание.* Тут лажа какая-то с определениями, не отрицание же нифига.

`2016-10-16 13:21`

**Теорема 1.** *(о функциональной зависимости) Пусть* $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— гладкие функции. К тому же* $a \in G$, $f = (f_i)_i$, $y = f(x)$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \end{pmatrix} = m$ *в точке* $x \in U(a)$. *Тогда, если* $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \\ g' \end{pmatrix} = m$ *в точке* $x \in U(a)$, *то* $\exists V(a)$ *в которой* $g$ *функционально зависит от* $f_1, \ldots, f_m$.

□ Пусть сразу $n \geqslant m$, иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там m векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x, \ldots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}),\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в $f'(x), x \in U(a)$ существует ненулевой минор порядка $m$. Можно НУО считать, что он соответствует $\bar{x}$. Тогда это равносильно тому, что $\det\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a)\right) \neq 0$.

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей $P, Q$ и

$$\exists\, \varphi\colon P \subset \mathbb{R}^n \to Q \subset \mathbb{R}^m,\ \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$. Заметим, что здесь $y, \bar{\bar{x}}$ — независимые переменные. Так что если $j > m$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x),\ x \in U(a)$$

Нам для того чтобы показать, что $g$ функционально зависит от $f$, необходимо приравнять в окрестности точки $a$ $g$ к функции от $y$. Пусть снова $j > m$, тогда

$$g(x) = g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}})$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g$$

А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности $a$ — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i\right) = 0$$

Из того, что $g, \varphi$ — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 0.16.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

## § 17 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

**Определение 1** (Коразмерность)**.** Пусть $V$ — подпространство $U$. Тогда $\operatorname{codim} V = \dim U - \dim V$.

**Теорема 1.** *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in G$, $b = F(a)$, $\exists V(a)\colon \forall x \in V \quad \operatorname{rk} F'(x) = r$. *Тогда*

1. $\exists U(a)\colon F(U)$ *имеет вид графика* $\bar{\bar{y}} = \varphi(\bar{y})$
2. $\exists U(a) \subset F^{-1}(b)$ *имеет вид графика* $\bar{x} = \psi(\bar{\bar{x}})$

□ Аккуратное следствие 0.16.1 и 0.15.1. ■

*Замечание.* Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

## § 18 Три способа локального задания поверхности