

Элементы линейной алгебры

Михаил Пирогов, **taxus**

22.06.2016

Аннотация

Сей труд не стоит рассматривать как исчерпывающий конспект лекций. Скорее он представляет субъективно выбранный мною материал, показавшийся или наиболее важным, или наиболее непонятым, или ещё не знаю каким. Надеюсь, он хоть кому-нибудь принесёт немного пользы.

Оглавление

6	Линейные пространства	2
§ 1	Определения	2
§ 2	Линейная независимость системы векторов	3
§ 3	Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис	4
§ 4	Базис в конечномерных пространствах	4
§ 5	Сумма и пересечение ЛП	5
§ 6	Внутренняя прямая сумма	5
§ 7	Размерность прямой суммы конечного числа ЛП	6
§ 8	Аффинные подпространства	7
§ 9	Факторпространство	7
7	Матрицы	8
	Использованная литература	8

Глава 6: Линейные пространства

§ 1 Определения

Определение 1. Пусть K — поле. Рассмотрим множество V с двумя операциями

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ \cdot : K \times V &\rightarrow V \end{aligned}$$

Тогда V — линейное пространство над K , если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, \alpha_i \in K$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. $\exists \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\exists (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x}$
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
8. $(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1(\alpha_2\mathbf{x})$

Определение 2. Пусть U, V — линейные пространства над K , $U \subset V$. Тогда U — подпространство V .

Определение 3. Пусть V — линейное пространства над K , $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ — линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Лемма 1. Пусть U, V — линейные пространства над K , $U \subset V$. Тогда если U замкнуто относительно $+$, \cdot из V , то U — подпространство V .

▼

Формулировка леммы аналогична тому, что всякая линейная комбинация элементов U лежит в нём же. Нужная дистрибутивность, ассоциативность и т.д. унаследуются от соответствующих операций в надпространстве, так как их свойства заданы на всём множестве V , а значит

и на подмножестве U . Однако в некоторых свойствах требовалось существование в множестве чего-нибудь. Покажем, что все эти требования равносильны существованию линейной комбинации.

$$3. \exists \mathbf{0} \in U \Leftarrow \exists 0 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in U$$

$$4. \exists -\mathbf{x} \in U \Leftarrow \exists (-1) \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in U$$

▲

Определение 4. Пусть V — линейное пространства над K , $M \subset V$

$$\langle M \rangle = \left\{ \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \left| \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in M \end{array} \right. \right\}$$

$\langle M \rangle$ — линейная оболочка M .

Лемма 2. Верны утверждения:

1. $\langle M \rangle$ — подпространство V
2. $\langle M \rangle = \bigcap_i W_i$, $W_i \supset M$, W_i — подпространство V

▼

Доказательства очень похожи на соответствующие в теории групп.

▲

Определение 5. Пусть V — линейное пространство. Тогда $M \subset V$ — порождающая система, если $\langle M \rangle = V$

§ 2 Линейная независимость системы векторов

Определение 1. Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда если

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow \forall i \alpha_i = 0$$

то система векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независима. В противном случае система линейно зависима.

Свойства

1. Подсистема линейно независимой системы линейно независима.
2. В ЛНЗ системе ни один вектор не выражается через другие

§ 3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис

Лемма 1 (Линейная зависимость линейных комбинаций). Пусть $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ — ЛНЗ, а $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ — линейные комбинации векторов из M . Тогда если $m > n$, то U — линейно зависимы.

▼

Там получается ОСЛУ, в которой уравнений больше, чем неизвестных. Решение найдётся.

▲

Определение 1. Базис — линейно независимая (6.2.1), порождающая (6.1.5) система векторов.

Определение 2. Размерность (\dim) линейного пространства — число векторов в базисе.

Лемма 2 (Корректность определения размерности). Пусть $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $\{v_i\}_{1 \leq i \leq m}$ — базисы V . Тогда $m = n$.

▼

Иначе одна система выражается через другую и по 6.3.1 она ЛЗ, что странно.

▲

§ 4 Базис в конечномерных пространствах

Во всех следующих теоремах действие происходит в конечномерных пространствах.

Теорема 1. Из всякой порождающей системы можно выделить базис

Следствие 1. Базис — минимальная порождающая система векторов

Теорема 2. Из всякой линейно независимой системы можно выделить базис.

Следствие 1. Базис — максимальная линейно независимая система

§ 5 Сумма и пересечение ЛП

Определение 1. Пусть $\forall i \in I \ U_i \subset V$. Тогда

$$\sum_{i \in I} U_i := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i\}$$

То есть совокупность всевозможных сумм

Определение 2.

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \{u \mid \forall i \ u \in U_i\}$$

Замечание. Пересечение—подпространство.

Теорема 1. Пусть U_1, U_2 —подпространства V . Тогда

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

□ Пусть $\dim(U_1 \cap U_2) = k$, $\dim U_1 = k + l$, $\dim U_2 = k + n$. Тут мы просто дополняем базис пересечения до базиса пространства, умеем же по 6.4.2.

1. Сначала доказываем, что $k + l + n$ нужных векторов вообще хватит, чтобы породить всё $U_1 + U_2$
2. Потом доказываем, что построенный таким образом базис линейно независим

■

§ 6 Внутренняя прямая сумма

Определение 1. Пусть $\{U_i\}_{i \in I} \subset 2^V$, $U = \sum_I U_i$. Тогда

$$\left(\sum_{\substack{i \in I \\ u_i \in U_i}} u_i = 0 \Rightarrow \forall i \ u_i = 0 \right) \Leftrightarrow U = \bigoplus_{i \in I} U_i$$

Лемма 1. Элемент из прямой суммы единственным образом представляется суммой $u_i \in U_i$.

Теорема 2 (Критерий \oplus). Пусть

$$U = \sum_{i \in I} U_i$$

$$W_i = \sum_{j \in I, j \neq i} U_j$$

Тогда U —прямая сумма \Leftrightarrow

$$\forall i \ U_i \cap W_i = \{0\}$$

□ Более-менее ясно из определения прямой суммы. И вообще, похоже на свойства ЛНЗ системы векторов. ■

§ 7 Размерность прямой суммы конечного числа ЛП

Теорема 1.

$$\dim \underbrace{\bigoplus_{i \in I} U_i}_V = \sum_{i \in I} \dim U_i$$

□ (По мотивам [1, стр. 195]).

Сначала заметим, что объединение базисов — точно порождающая система в V . Теперь докажем, что она линейно независима. Пусть для начала e_{ij} — базис U_i . Тогда

$$V \ni v = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}$$

Сгруппируем

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_j \alpha_{ij} e_{ij} \\ v = 0 &\Leftrightarrow \sum_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \ u_i = 0 \end{aligned}$$

Ну а ноль в подпространствах представляется единственным образом

$$u_i = 0 \Rightarrow \forall j \ \alpha_{ij} = 0$$

■

Утверждение 2 (Непонятно зачем нужное утверждение). Пусть

$$V_{k+1} = \bigoplus_{i=1}^{k+1} U_i, \quad V_k = \sum_{i=1}^k U_i$$

Тогда

$$V_k = \bigoplus_{i=1}^k U_i$$

§ 8 Аффинные подпространства

Определение 1. Пусть U — подпространство V , $a \in V$. Тогда $W = U + a = \{x + a \mid x \in U\}$ — аффинное подпространство.

Лемма 1. Пусть U — подпространство V . Тогда

$$U + a = U + b \Leftrightarrow a - b \in U$$

Лемма 2. Пусть V — линейное пространство над K , $W \subset V$, $a \in V$. Тогда если:

$$1. \forall \alpha \in K, x \in W \quad \alpha(x - a) + a \in W$$

$$2. \forall x_1, x_2 \in W \quad x_1 + x_2 - a \in W$$

то W — аффинное подпространство

§ 9 Факторпространство

Определение 1. Пусть U — подпространство линейного пространства V над полем K . Тогда такая структура называется факторпространством:

$$V/U := \{U + a \mid a \in V\}$$

$$\bar{a} := U + a$$

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$$

$$\alpha \cdot \bar{a} := \overline{\alpha \cdot a}$$

Утверждение 1. Определение 6.9.1 корректно

Утверждение 2. Структура которую описали в 6.9.1 — векторное пространство.

Теорема 3.

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

Определение 2. Дополнение базиса U до базиса V называется базисом V относительно U (относительным базисом).

Глава 7: Матрицы

Литература

- [1] **Винберг Э. Б.**
Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. —
592 с.: ил.