1 Волновое уравнение

№ 1 Классификация уравнений второго порядка

Выглядят так

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{i,j} A^{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_i B^i\partial_i u + Cu = 0$$

В зависимости от собственных чисел A классифицируются

эллиптический	$\Rrightarrow$	$\forall\, i \;::\; \Lambda_i > 0$
параболический	$\Rrightarrow$	$\exists\, j : \Lambda_j = 0, \quad \forall\, i \neq j \;::\; \Lambda_i > 0$
гиперболический	$\Rrightarrow$	$\exists\, j : \Lambda_j < 0, \quad \forall\, i \neq j \;::\; \Lambda_i > 0$

И их канонические формы

$$\begin{aligned} \square\, u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{волновое уравнение} \\ \Delta u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение Лапласа} \\ (-\partial_t + a^2\Delta)\, u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение теплопроводности} \end{aligned}$$

№ 2 Характеристические поверхности

Здесь непросто, потому что обычно характеристики определяют для уравнений первого порядка. А тут нужно как-то факторизовать.

Впрочем, можно сказать, что характеристическая поверхность — $(w_x, Aw_x) = 0$ Здесь $\xi = w(x,y)$, и для тех типов уравнений, что мы рассматриваем, верно

- ▷ $\omega \equiv \text{const}$
- ▷ при замене переменных $\xi = \omega(x,y)$ член при $u_{\xi\xi}$ зануляется[1]

№ 3 Волновое уравнение

Уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{aligned}$$

Решение Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

№ 4 Принцип Дюамеля

Основная мысль в том, чтобы научиться получать из решения однородного уравнения решение неоднородного неочевидным способом.

1. $\square\, P = 0$, $P(x,t,t) = 0$, $P_t(x,t,t) = f(x,t)$ (если существует)
2. $w = \displaystyle\int_0^t P(x,t,t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x,t)$

Для волнового уравнения $P = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\xi,t')\,\mathrm{d}\xi$

№ 5 Энергетическое неравенство

<+картиночка+>

1. Ω_t — срез конуса причинности (характеристическая поверхность волнового уравнения).
2. $E[u] = u_t^2 + a^2 u_x^2$

Само энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega_0} E[u]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_t} E[u]\,\mathrm{d}x$$

Отсюда можно заполучить единственность решения волнового уравнения.

№ 6 Формула Кирхгофа ($\mathbb{R}^3$)

$$u(x,t) = t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_1(y)\,\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_0(y)\,\mathrm{d}S\right)$$

Здесь видно, что что возмущения (начальные) влияют на решение только будучи на границе конуса причинности. Получается, что волна не «запоминает» своё прошлое. То есть, возмущение приходит с волновым фронтом и уходит с ним.

Это не принцип Гюйгенса-Френеля (тот про функцию Грина), но тоже принцип Гюйгенса.

№ 7 Формула Пуассона ($\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_0(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Здесь возмущение «чувствуется» даже после прохождения фронта. В каком-то смысле оно «размывается». Видимо, это и есть упомянутая диффузия?

2 Теплопроводность

№ 8 Вывод уравнения

1. Уравнение неразрывности: $u_t = -\operatorname{div}\boldsymbol{F}$
2. Связь потока с текущим веществом $\boldsymbol{F} \propto -\operatorname{grad} u$

$$u_t + a^2\Delta u = 0$$

Характерные множества

параболический цилиндр (Q_T)	$\Rrightarrow$	$\Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
параболическая граница ($\partial' Q_T$)	$\Rrightarrow$	$(\Omega \times \{0\}) \cup \partial\Omega \times [0;T]$

Для удобства $R_T := Q_T(\Omega = \mathbb{R}^n)$.

Разные задачи:

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(0;T) \cap C(\partial' R_T), \quad u(x,0) = \varphi \qquad (1)$$

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(0;T) \cap C(\partial' Q_T), \quad u\big|_{\partial' Q_T} = \varphi \qquad (2)$$

№ 9 Закон сохранения

При довольно мутных условиях (что-то вроде в меру быстрого убывания u к бесконечности)

$$\mathcal{U}(t,R) := \int_{\mathcal{B}_R(0)} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \text{const}$$

№ 10 Ограниченный принцип максимума

$$\inf_{\partial' Q_T} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\partial' Q_T} u(x,t) \quad (\text{в } Q_T)$$

№ 11 Принцип максимума в полупространстве

Пусть u ограничена сверху[2]

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,t)$$

№ 12 Единственность

кажется, это очевидно следует из № 10, № 11.

№ 13 Автомодельные решения

- $\triangleright$ $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$
- $\triangleright$ $v(\xi) = c\displaystyle\int_0^\xi e^{-\xi^2/4a^2}\,\mathrm{d}\xi$

№ 14 Функция источника (одномерье)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

№ 15 Функция источника (многомерье)

$$G(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

№ 16 Свойства функции источника

1. $G(x,t) \in C^\infty$ при $t > 0$, $|x| > 0$
2. $G_t - a^2\,\Delta\, G = 0$, при $t > 0$, $|x| > 0$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$ при $t > 0$
4. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)G(x,t)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

G — функция Грина: $G(x,0) = \delta(x)$

№ 17 Формула Пуассона

Поставлена задача Коши:

$$\begin{gathered}\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u_t - a^2\,\Delta\, u = 0 \qquad (t>0)\\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad (u(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} \varphi(x))\end{gathered}$$

Решение имеет вид

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)G(y,t)\,\mathrm{d}y = \varphi * G$$

№ 18 Принцип Дюамеля

1. $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta\right) P = 0$, $P(x,t,t) = 0$, $P_t(x,t,t) = f(x,t)$
2. $w = \displaystyle\int_0^t P(x,t,t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x,t)$

Для уравнения теплопроводности

$$P(x,t,t') = \int_{\mathbb{R}^n} f(y,t')\,G(x-y,t-t')\,\mathrm{d}y$$

3 Уравнение Лапласа

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \qquad -\Delta\, u = f \quad (\text{в } \mathbb{R}^n)$$ [3]

Разные задачи (по н.у.):

Дирихле $\Rightarrow$ $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$

Неймана $\Rightarrow$ $u_n\big|_{\partial\Omega} = \psi(x)$ $(u_n = (\nabla u, \boldsymbol{n}$ к $\partial\Omega))$

№ 19 Фундаментальное решение

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,|S_1|}\,\dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geqslant 2\\ \frac{1}{2\pi}\,\ln\|x\|, & n = 2\end{cases}$$

Тут $|S_1|$ — мера единичной сферы.

№ 20 Представление функции в виде суммы потенциалов

$$\begin{aligned} u(x) = &-\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_\Omega \frac{\Delta\, u(y)}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y\\ &-\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_{\partial\Omega} u(y)\left(\nabla_y \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}, \boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_{\partial\Omega}\frac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

То есть

$u = -\{$объёмный потенциал$\} - \{$потенциал двойного слоя$\}$
$+ \{$потенциал простого слоя$\}$

№ 21 Интегральное представление гармонической функции

$$u(x) = \frac{-1}{(n-2)\,|S_1|}\left(\int\limits_{\partial\Omega} u(y)\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\,\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\partial\Omega}\frac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s\right)$$

№ 22 Теорема о среднем для гармонических функций

$$u \in C^2(U), \Delta\, u = 0 \Rightarrow \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \ :: \ \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y$$

№ 23 Обратная теорема о среднем

$$u \in C^2(U), \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \ :: \ \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y \Rightarrow \Delta\, u = 0$$

№ 24 Свойства гармонических функций

1. $u \in C^2(U)\cap C(\overline{U})$, $\Delta\, u = 0 \quad \Rightarrow$

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \quad (\text{принцип максимума})$$

2. 1, U связно, $\exists\, x_0 \in U :\ u(x_0) = \max u \quad \Rightarrow$

$$u \underset{U}{\equiv} \text{const} \quad (\text{сильный принцип максимума})$$

Единственность решения задачи Дирихле (почти очевидно).

№ 25 Свойства объёмного потенциала

Примечания

1 У нас было всё наоборот, но так ещё непонятней что происходит

2 в Эвансе $\leqslant Ae^{a|x|^2}$, например

3 здесь "$-$" из-за того, что оператор Лапласа отрицательно определённый