

1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q.$
2. Закон Фарадея: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$
 $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3}$
4. $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
5. Закон Ампера: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$
6. Уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:
 $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho$
 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
 $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

2 В среде

1. Поляризация и намагниченность
 $\mathbf{P} :: \mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \mathbf{P},$
 $\mathbf{M} :: \mathbf{j}_{\text{m}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$
 $\{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{int}} = \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{pol}} + \{\rho, \mathbf{j}\}_{\text{m}}$
2. В сильнопеременных
 $\rho_{\text{int}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$
 $\mathbf{j}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}$
3. $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$
4. Уравнения Максвелла в среде:
 $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ex}}$
 $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_{\text{ex}} + \mathbf{j}_{\text{c}})$

5. Материальные уравнения (простейшие)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{j}_{\text{c}} = \sigma \mathbf{E}$$

6. Дисперсия, варианты

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dV$$

f, g — функция отклика.

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$
$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\sigma E^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{ex}}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

$$1. \text{ Вид потенциала: } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$2. \text{ Калибровочная инвариантность: } \begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi \\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

$$3. \text{ Калибровка Лоренца: } \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0^1$$

4. Уравнения Максвелла примут вид:

$$\square \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}, \text{ где } \square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

5 Волновые уравнения

$$\square \mathbf{E} = 0, \square \mathbf{B} = 0$$

$$\square \mathbf{A} = 0, \square \varphi = 0 \quad (\square \chi = 0)$$

Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ ²

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)$$

2. Плоская волна: $A = A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt)^3$

3. Условие поперечности: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{c}{v} \mathbf{n} \times \mathbf{E}$

4. $\mathbf{S} = v w \mathbf{n}.$

5. Уравнение сферической волны: $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$

6. Его решение: $u(r, t) = \frac{1}{r} (f(r - vt) + g(r + vt))$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2} u = 0, \mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{n} \Rightarrow u = \operatorname{Re} \left(E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. α, \mathbf{b}

$$\alpha :: E_0^2 = |E_0|^2 e^{-2i\varphi_0}$$

$$\mathbf{b} :: E_0 = \mathbf{b} e^{-i\varphi_0}, \mathbf{b}^2 = |E_0|^2, \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i \mathbf{b}_2$$

2. $\mathbf{b}^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$

$$3. \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_2)^2}{b_2^2} = 1, (\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3).$$

9 Почти монохроматические волны

$$\mathbf{E} = E_0(t) e^{-i\omega t}, \langle ? \rangle$$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$$|\overline{\mathbf{S}}| = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E}^\dagger \mathbf{E}}$$

$$\rho = \frac{\varepsilon v}{8\pi} \overline{\mathbf{E} \mathbf{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}$$

1. $\det \rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$
2. $\det \rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0$ ⁴
3. $I^2, V^2, U^2 + Q^2$ — инварианты ⁵

4. $I(\psi, \delta) = |\overline{\mathbf{S}}| = \ell_\delta^\dagger \rho \ell_\delta = \frac{1}{2}(I + Q \cos 2\psi + U \sin 2\psi \cos \delta - V \sin 2\psi \sin \delta)$,
 $\ell_\delta = (\cos \psi, \sin \psi e^{-i\delta})^\top$, а вот выводится это неприятно.

11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$$I = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = |\overline{\mathbf{S}}|$$

$$Q = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$$

$$U = \frac{\varepsilon v}{8\pi} (\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Re} \overline{E_x^* E_y}$$

$$V = \frac{\varepsilon v}{8\pi} i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi} 2 \operatorname{Im} \overline{E_x^* E_y}$$

1. $Q = U = V = 0$ — белый свет
2. $\det \rho = 0$ — эллиптическая поляризация
 - (a) $Q = U = 0$ — круговая поляризация
 - (b) $V = 0$ — линейная поляризация

Ещё всякие величины:

- ▷ $R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, $r_d^2 = Q^2 + U^2$
- ▷ $P = R_d/I$ — степень поляризации
- ▷ $p = r_d/I$ — степень линейной поляризации
- ▷ $p_s = V/I$ — степень круговой поляризации
- ▷ $\operatorname{tg} 2\alpha = U/D$, α — угол между базисом и осями эллипса.

3. Частичная поляризация:

- ▷ белый свет + эллиптическая
- ▷ сумма 2 ортогональных эллиптических

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi}, \quad \psi — \text{эйконал}^6$$

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 = 0$$

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi_1, \quad (\nabla \psi_1)^2 = n^2(\mathbf{r}) — \text{уравнение эйконала.}$$

$$\frac{\omega}{c} \psi_1 - \omega t = \text{const} — \text{волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые производные эйконала.

13 Гадость в неоднородной среде

1. $\varepsilon = \varepsilon(r)$, $\mu = 1$
2. Волновые уравнения поменяются:
$$\square \mathbf{E} - \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$\square \mathbf{H} - \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$
3. Монохроматический случай:
$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{E} + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla (\ln \varepsilon)) = 0$$

$$[\Delta + k^2(r)] \mathbf{H} + \nabla (\ln \varepsilon) \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

14 Е,Н-волны

$$\varepsilon = \varepsilon(z)$$

1. $\mathbf{E} \uparrow \uparrow \text{Oy}$, $E = (0, 1, 0) E(z) e^{i\kappa x}$ — Е-волны
2. $\mathbf{H} \uparrow \uparrow \text{Oy}$, $H = (0, 1, 0) H(z) e^{i\kappa x}$ — Н-волны

Если переписать волновое уравнение выше:

1. $E''(z) + f(z) E(z) = 0$, $f(z) = k^2 - \kappa^2$
2. $w''(z) + f(z) w(z) = 0$, $H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)} w(z)$,
 $f(z) = k^2 - \kappa^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2$

15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений: $\frac{1}{s^2} u'' + f u = 0$, $1/s^2$ — малый параметр.

1. $z = s \tau$, $u = e^{is\psi}$
2. В ряд его: $\psi = \psi_0 + \frac{i}{s} \psi_1 + \dots$
3. ВКБ-решения (первое приближение)
$$u_{1,2} = f^{-1/4} \exp \left(\pm is \int \sqrt{f} d\tau \right)$$

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$
4. Условия применимости $\langle ? \rangle$:

$$\left| \frac{d\psi_0}{d\tau} \right|^2 \gg \frac{1}{s} \left| \frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} \right| \Leftrightarrow |f| \gg \frac{1}{s} \left| \frac{f'}{2\sqrt{f}} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{d\sqrt{\frac{1}{f}}}{dz} \right| \ll 1$$

Для предыдущего параграфа просто $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$

16 Диспергирующая среда, частотная и пространственная дисперсия

Если пространство однородно (и по времени):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t f(t' - t, \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Delta V} g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') dV$$

Для монохроматических можно сказать чуть больше:

- ▷ $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$
- ▷ $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ — частотная дисперсия
- ▷ $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k})$ — пространственная дисперсия
- ▷ $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega)$,
 $\omega \rightarrow \infty \quad \varepsilon(\omega) \rightarrow 0$

17 Что-то про преобразование Фурье

- ▷ $\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$
- ▷ $2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$

$$\triangleright \widetilde{f * g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$$

18 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

$$\triangleright \mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

$$\triangleright \mathbf{B}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{H}(\omega)$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$$

$$\triangleright \mu \sim 1$$

⟨✕⟩

▷

19 Энергетические соотношения при дисперсии

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Для монохроматических волн:

$$\triangleright \mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}$$

$$\triangleright \varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$$

$$\triangleright \overline{\operatorname{div} \mathbf{S}} = \frac{-\omega}{8\pi} \left(\varepsilon_2 \overline{|\mathbf{E}|^2} + \mu_2 \overline{|\mathbf{H}|^2} \right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0 \langle ? \rangle^7$$

$\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$ — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить $\operatorname{div} \mathbf{S}$

$$2. \text{ первый член: } \frac{1}{16\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$3. \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}^0}{\partial t} e^{-i\omega t}$$

$$4. \operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$5. \bar{w} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \overline{|\mathbf{E}^0|^2} + \frac{d(\omega \mu)}{d\omega} \overline{|\mathbf{H}^0|^2} \right)$$

20 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде⁸

Здесь $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} \frac{\omega}{c} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2$, $\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$.

$\mathbf{k}_1 \nparallel \mathbf{k}_2$ Неоднородная плоская волна:
 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

$\mathbf{k}_1 \uparrow \mathbf{k}_2$ Однородная плоская волна:

1. $k = (n + i\kappa)\omega/c$ — показатель преломления и затухания,
2. $E(z, t) = E_0 e^{-\kappa\omega z/c} e^{-i\omega(t - n z/c)}$
3. $\overline{S(z)} = S_0 e^{-2\kappa\omega z/c} = S_0 e^{-\alpha z}$, α — к-т поглощения.

21 Групповая скорость

$$1. v_{\text{gr}} = \frac{|\overline{\mathbf{S}}|}{\overline{w}} = \frac{c}{\frac{dn\omega}{d\omega}}$$

$$2. v_{\text{gr}} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{dn\omega}{d\omega}}$$

$$\text{Отсюда } v_{\text{gr}} = v_\phi \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} > 0 \text{ — нормальная дисперсия, } v_{\text{gr}} < v_\phi$$

$$\triangleright \frac{dn}{d\omega} < 0 \text{ — аномальная дисперсия, } v_{\text{gr}} > v_\phi$$

22 Дисперсия на атоме

$$1. m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2 \mathbf{r} + \gamma m \dot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

$$2. \mathbf{P} = ne \mathbf{r} \Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}},$$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

$$3. \omega \ll \omega_0$$

$$4. \omega \gg \omega_0$$

23 СТО, событие и интервал

1. Все явления природы одинаковы во всех ИСО

2. $c = \text{const}$

Мировая :: (x, y, z, t)

точка

Событие :: что-то произошедшее в мировой точке

Мировая :: траектория точки (в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$)
 линия

$$\text{Интервал} :: S_{12}^2 = c(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2$$

▷ $S^2 > 0$ — времениподобный интервал (причинная связь)

▷ $S^2 < 0$ — пространственноподобный интервал

▷ $S^2 = 0$ — светоподобный интервал

24 Преобразования Лоренца

▷ Линейны

▷ Сохраняют интервал

$$x' = \gamma(x - Vt)$$

$$\triangleright \text{одномерные: } t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma t \mathbf{V} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}$$

▷ в общем случае:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right)$$

$$\mathbf{r}' = \gamma(\mathbf{r} - t\mathbf{V}) + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{r})}{V^2}$$

или

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right)$$

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \frac{1}{\gamma(V)} \leq \Delta t$$

τ — собственное время, в той СО, где тело неподвижно. Именно в ней $\Delta\mathbf{r} = 0$

25 Лоренцево сокращение и сложение скоростей

В собственной СО $\Delta t' = 0$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{r}_{\parallel} &= \gamma(\Delta \mathbf{r}'_{\parallel}) \\ \Delta \mathbf{r}_{\perp} &= \Delta \mathbf{r}'_{\perp} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_0 \mapsto V_0/\gamma$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} + (1 - 1/\gamma) \mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v})/V^2}{1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}$$

$$1. \mathbf{v} \uparrow \uparrow \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V}}{1 - vV/c^2}$$

$$2. \mathbf{v} \perp \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} \sqrt{1 - V^2/c^2} - \mathbf{V}, \gamma(v) = \gamma(V) \gamma(v')$$

26 Инвариантные объекты в СТО и махинации с ними $\langle \otimes \rangle$

Λ — преобразование Лоренца

$$1. a = \text{const} \quad /S^2, d^4r/$$

$$2. a^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha a^\mu \quad /r, u, \nabla \dots/$$

$$3. A_\alpha^\beta = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\nu^\beta A_\mu^\nu \quad /F^{ik}, g_{ij}, \dots/$$

$$\triangleright \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle \\ \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle \\ \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle \\ \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle & \langle \otimes \rangle \end{pmatrix}$$

$$\triangleright a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

27 Скорость и импульс в СТО

$$\triangleright u = \frac{dr}{d\tau} = \{\gamma c, \gamma \mathbf{v}\}, \beta = v/c$$

$$\triangleright p = m u = \{p_0, \mathbf{p}\}$$

$$1. \mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}, p_0 = m \gamma c$$

$$2. p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow p_0^2 = m^2 c^2 + p^2 \text{ (закон сохранения энергии-импульса)}$$

$$3. \frac{dp_0 c}{dt} = m \gamma^3 (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{\mathbf{F}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$$4. p_0 = \mathcal{E}/c \quad T(p) = p_0 c - m c^2$$

28 Сложение скоростей

$$w = \frac{du}{d\tau}$$

$$\triangleright w = \gamma^2 \{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \gamma^2, \mathbf{w} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{w}) \boldsymbol{\beta} \gamma^2\}$$

$$\triangleright \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \text{ (этакая ортогональность)}$$

$$\triangleright w^2 = \gamma^2 (-\mathbf{w}^2 + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{w})^2)$$

$$u_1 = \{\gamma_1 c, \gamma_1 \mathbf{v}_1\}, u_2 = \{\gamma_2 c, \gamma_2 \mathbf{v}_2\}$$

$$1. \mathbf{V} = \mathbf{v}_1$$

$$2. u'_1 = \{c, 0\}, u'_2 = \{\gamma_r c, \gamma_r \mathbf{v}_r\}$$

$$3. \gamma_r = \gamma_1 \gamma_2 \left(1 - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)}{c^2}\right) = \frac{1}{c^2} u_1 \cdot u_2 = \text{inv}$$

$$4. \mathbf{v}_r = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left(\mathbf{v}_2 - \gamma_2 \mathbf{v}_2 + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)}{v_1^2} \right)$$

$$5. \text{тосковать}$$

Заметки

1 при этом подходят все $\chi :: \square \chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.

4 В поляризационной матрице все E можно позаменять на E^0 (фазы всё равно сокращаются), а в предыдущем пункте у нас как раз $E_x^0 = b_1 e^{-i\varphi_0}$, $E_y^0 = ib_2 e^{-i\varphi_0}$

5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах

6 ψ_1 — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но $\langle ? \rangle$

7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то $\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$.

8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову