

< матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин

Записал :taxus

31 мая 2017 г.

# Оглавление

1	Теория меры и интегралы по мере	2
§ 1	Системы множеств	2
§ 2	Борелевская сигма-алгебра	3
§ 3	Мера	4
§ 4	Свойства меры	4
§ 5	Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега	6
§ 6	Измеримые функции	7
§ 7	Интеграл по мере	8
§ 8	Теорема Беппо Лёви	9
§ 9	Свойства интеграла от суммируемых функций	9
§ 10	Счётная аддитивность интеграла	10
§ 11	Абсолютная непрерывность интеграла	10
A	Обозначения	11

# Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

## §1 Системы множеств

**Определение 1.** Пусть здесь (и дальше)  $X$  — произвольное множество. Тогда  $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$  — множество всех подмножеств  $X$ .

**Е.г.**  $X = \{1 \dots n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$  (это количество элементов, если что)

**Определение 2** (Алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  — алгебра множеств, если

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $X \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

*Замечание.* Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь  $\infty \notin \mathbb{N}$ .

**Определение 3** ( $\sigma$ -алгебра). Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра, если

1.  $\mathcal{A}$  — алгебра
2.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

**Определение 4.** Пусть  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ . Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E} \}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

## §2 Борелевская сигма-алгебра

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{O}$  — все открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2** (Ячейка в  $\mathbb{R}^n$ ). Обозначать её будем  $\Delta^n$ , по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \quad \forall n \quad \Delta = \prod_{k=1}^n \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру  $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n = \{A \mid A = \bigcup_{k=1}^p \Delta_k\}$

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$ . Тогда  $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

**Теорема 2.**  $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Cell}_n)$ .

**Пример 1.** Все множества ниже — борелевские.

⟨1⟩  $\mathcal{O}$ .

⟨2⟩  $\mathcal{F} = \{A \mid \bar{A} \in \mathcal{O}\}$ .

⟨3⟩  $\left( A = \bigcap_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k \right) \in G_{\delta}$ .

⟨4⟩  $\left( B = \bigcup_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k \right) \in F_{\sigma}$ .

⟨5⟩  $\left( C = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_{\delta}}}^{\infty} A_k \right) \in G_{\delta\sigma}$ .

У всех этих множеств со сложными индексами  $\delta$  — пересечение,  $\sigma$  — объединение,  $G$  — операция над открытыми в самом начале,  $F$  — над замкнутыми.

### § 3 Мера

**Определение 1.** Пусть задано  $X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), A_k \in \mathcal{A}$ . Тогда  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0; +\infty]$  — мера, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$

2.  $\mu\left(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\in \mathcal{A}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ . Здесь никто не обещает, что будет именно  $\sigma$ -алгебра.

Множества  $A \in \mathcal{A}$  в таком случае называются  $\mu$ -измеримыми.

**Пример 1.**  $a \in X, \mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$  —  $\delta$ -мера Дирака.

**Пример 2.**  $a_k \in X, m_k \geq 0, \mu(a) := \sum_{k: a_k \in a} m_k$  — «молекулярная» мера.

она считает, не считывает 😊

**Пример 3.**  $\mu(A) = \#A$  — считающая мера.

### § 4 Свойства меры

Здесь всюду будем рассматривать тройку  $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

**Утверждение 1** (Монотонность меры). Пусть  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ .  
Тогда  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(B) < +\infty$ .  
Тогда  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .

**Утверждение 3** (Усиленная монотонность). Пусть  $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}, A_{1..n} \subset B$  и дизъюнкты.

Тогда  $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu B$

**Утверждение 4** (Полуаддитивность меры). Пусть  $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^n B_k$ .

Тогда  $\mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu(B_k)$ .



Сделать  $B_k$  дизъюнктивными:  $C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j$ . Затем представить  $A$  как дизъюнктное объединение  $D_k$ :  $D_k = C_k \cap A$ . Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^n B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leq \sum_k \mu C_k \leq \sum_k \mu B_k$$



Опять-таки никто не сказал, что  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра.

**Утверждение 5** (Непрерывность меры снизу). Пусть  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ .

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

**Утверждение 6** (Непрерывность меры сверху). Пусть  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $A_k \in \mathcal{A}$ ,  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ ,  $\mu A_1 < +\infty$ .

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$$

<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Тогда  $\mu$  — полная, если

$$\forall \in \mathcal{A}: \mu A = 0 \quad \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} :: \mu B = 0$$

**Определение 2.** Мера  $\mu$  на  $\mathcal{A}$  называется  $\sigma$ -конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty :: \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

**Определение 3.** Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  — сигма-алгебры подмножеств  $X$ ,  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ ,  $\mu_1: \mathcal{A}_1 \rightarrow [0; +\infty]$ ,  $\mu_2: \mathcal{A}_2 \rightarrow [0; +\infty]$ . Тогда  $\mu_2$  называется продолжением  $\mu_1$ .

**Теорема 7** (Лебега-Каратеодора). Пусть  $\mu$  — сигма-конечная мера на  $\mathcal{A}$ . Тогда

1. Существуют её полные сигма-конечные продолжения
2. Среди них есть наименьшее:  $\bar{\mu}$ . Её ещё называют стандартным продолжением.

<+идея доказательства+> Пока надо запомнить, что стандартное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

## § 5 Объём в $\mathbb{R}^n$ . Мера Лебега

**Определение 1.** Пусть  $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ ,  $\Delta_k = [a_k, b_k)$ . Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v \Delta \stackrel{(\in \mathbb{R}^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что  $\in \mathcal{Cell}_n$ , представим его в виде дизъюнктного объединения  $\Delta_j$ . Тогда  $vA := \sum_{j=1}^q v\Delta_j$ .

*Замечание.* Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

**Теорема 1.**  $v$  — конечно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^p A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^p vA_k$$

**Теорема 2.**  $v$  — счётно-аддитивен, то есть

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

**Определение 2** (Мера Лебега).  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$ . Тогда  $\lambda_n = \overline{v_n}$ ,  $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$  — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

### Свойства меры Лебега

$$(1) \triangleright \lambda\{x\} = 0$$

$$(2) \triangleright \lambda(\{x_k\}_k) = 0$$

$$(3) \triangleright \mathcal{B} \subset \mathcal{M}$$

$$(4) \triangleright L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$$

А это уже целая теорема.

**Теорема 3** (Регулярность меры Лебега). Пусть  $A \in \mathcal{M}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} :: F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратами. ■

## § 6 Измеримые функции

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ . Пусть ещё  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда  $f$  называется измеримой относительно  $\mathcal{A}$ , если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} :: f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f$  измеримо относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества

**1 типа**  $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

**2 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \equiv X[f \leq a]$

**3 типа**  $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

**4 типа**  $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \equiv X[f \geq a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то одного типа, то  $f$  измерима.

**Теорема 2.** Пусть  $f_1, \dots, f_n$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$  и  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Тогда измерима и  $\varphi(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

*Замечание.* В частности,  $f_1 + f_2$  измерима.

**Теорема 3.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  измеримы относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда измеримы  $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$ . Последний, правда, может не существовать.

□ Следует из непрерывности меры. ■

**Определение 2.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

**Определение 3** (Индикатор множества).

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

**Утверждение 4.**  $f$  — простая  $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{E_k}$

**Теорема 5.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , измерима,  $f \geq 0$ . Тогда

$$\exists (\varphi_n): 0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots :: \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$



## § 7 Интеграл по мере

**Определение 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$ ,  $f$  — измерима.

[1]  $f$  — простая.

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu E_k$$

[2]  $f \geq 0$ .

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \mid g \text{ — простая, } 0 \leq g \leq f \right\}$$

[3]  $f$  общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$

$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание.  $\int_A f \, d\mu := \sum_{k=1}^p c_k \mu(E_k \cap A)$

**Утверждение 1.**  $\int_A f \, d\mu = \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$ .

**Свойства интеграла от неотрицательных функций** Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$\boxed{A_1}$   $0 \leq f \leq g$ . Тогда  $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ .

$\boxed{A_2}$   $A \subset B \subset X$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $f \geq 0$ , измерима. Тогда  $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

$\boxed{A_3}$  см теорему [1.8.1](#).

$$\boxed{A_4} \quad \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$$\boxed{A_5} \quad \int_X (\lambda g) d\mu = \lambda \int_X f d\mu$$

## § 8 Теорема Беппо Лёви

**Теорема 1.** Пусть  $(f_n)$  — измеримы на  $X$ ,  $0 \leq f_1 \leq \dots$ ,  $f = \lim_n f_n$ . Тогда

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

## § 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

**Определение 1.**  $f$  — суммируемая (на  $X, \mu$ ), если  $\int_X f d\mu < \infty$ . Весь класс суммируемых (на  $X, \mu$ ) функций обозначается через  $\mathcal{L}(X, \mu)$ .

Здесь всюду функции  $\in \mathcal{L}$

$$\boxed{B_1} \quad f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_2} \quad \int_X (f \pm g) d\mu = \int_X f d\mu \pm \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_3} \quad \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu.$$

$$\boxed{B_4} \quad |f| \leq g \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X g d\mu.$$

$$\boxed{B_5} \quad \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

$$\boxed{B_6} \quad f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$$

$$\boxed{B_7} \quad |f| \leq M \leq +\infty \Rightarrow \left| \int_X f \, d\mu \right| \leq M \mu X$$

## § 10 Счётная аддитивность интеграла

**Теорема 1.** Пусть задана тройка  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $f$  — измерима и  $f \geq 0 \vee f \in \mathcal{L}$ . Пусть к тому же

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$$

## § 11 Абсолютная непрерывность интеграла

**Теорема 1.** Пусть  $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :: \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X: \mu A < \delta :: \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon$$

# Глава А: Обозначения

## Обозначения с лекции

$a := b$  — определение  $a$ .

$\bigsqcup_k A_k$  — объединение дизъюнктивных множеств.

$\mathcal{A}$  Алгебра множеств

## Нестандартные обозначения

✂ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

□...■ — начало и конец доказательства теоремы

▼...▲ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

⋈ — кривоватая формулировка

:set aflame — набирающему зело не нравится билет

<что-то> — тут будет что-то, но попозже

$a..b$  —  $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$  — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

:: В кванторах, «верно, что»

$\mathcal{A}_\sigma$  Сигма-алгебра множеств