

## § 1 Оценка приращения дифференциального отображения

**Утверждение 1.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ . Тогда формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

не работает.

**Е.г.** Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), b - a = 2\pi$$

**Теорема 2** (об оценке приращения отображения). Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $G$  — выпуклое,  $f$  — дифференцируема,

$$\forall x \in G \quad \|f'(x)\| \leq M$$

Тогда  $\forall a, b \in G \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где

$$\begin{array}{lll} \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что  $F$  — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists c \in [0, 1]: F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим  $\varphi(c)$  за  $x$ ):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leq \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$dL(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1.  $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2.  $\psi(y) = \langle y, \ell \rangle$ ,  $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leq M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

## § 2 Частные производные высших порядков

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , существуют производные  $k$ -го порядка. Тогда

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{k+1} f(x) := \partial_{i_{k+1}} (\partial_{i_1, \dots, i_k}^k f)(x)$$

*Замечание 1.*  $C^p(G)$  — класс функций, определённых в  $G$  с непрерывной производной до  $p$ -го порядка включительно. Функции из  $C^1$  ещё называются гладкими.

**Теорема 1** (Зависимость производных  $p$ -го порядка от перестановки переменных). Пусть  $f \in C^p(G)$ ,  $x \in G$ . При этом

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \partial_i^p f(x) = \partial_j^p f(x)$$

*Замечание 1.* Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

## § 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^p(G)$

$$d^p f(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

**Утверждение 1.** Если частные производные можно переставлять, то

$$d^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

## § 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C^p(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in G$ . Пусть также  $h \in \mathbb{R}^n$ :  $a + h \in G$ . Тогда

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток  $R_p(h)$  можно представить несколькими способами:

1. В форме Пеано:  $R_p(h) = o(\|h\|^p)$
2. В форме Лагранжа:  $R_p(h) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta h, h)$ ,  $\theta \in (0, 1)$

## § 5 Экстремумы

**Определение 1.** Пусть  $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in G$ . Тогда говорят, что  $f$  имеет в  $a$  максимум (нестрогий), если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leq f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколота, то максимум — строгий. Для минимума нужно  $\geq$ .

**Теорема 1** (Необходимое условие экстремума). Пусть  $a$  внутренняя точка  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1(a)$ . Тогда если  $f$  имеет в  $a$  экстремум, то

$$df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad \partial_i f(a) = 0$$

## § 6