1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi Q$.

2. Закон Фарадея: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$,

   $\Phi = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$

4. $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$

5. Закон Ампера: $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

6. Уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$

7. Сами уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \\
\operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0 \\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\operatorname{rot}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

2 В среде

1. Поляризация и намагниченность

   $\boldsymbol{P} \;::\; \boldsymbol{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},\ \rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$,

   $\boldsymbol{M} \;::\; \boldsymbol{j}_{\text{m}} = c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$

   $\{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\text{int}} = \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\text{pol}} + \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\text{m}}$

2. В сильнопеременных

   $\rho_{\text{int}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$

   $\boldsymbol{j}_{\text{int}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$

3. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$

4. Уравнения Максвелла в среде:

   $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ex}$

   $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}_{ex} + \boldsymbol{j}_c)$

5. Материальные уравнения (простейшие)

   $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}_c = \sigma\boldsymbol{E}$

6. Дисперсия, варианты

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$$

   f,g — функция отклика.

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\sigma E^2 - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_{ex}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

1. Вид потенциала: $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$

2. Калибровочная инвариантность: $\begin{cases} \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\chi \\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$

3. Калибровка Лоренца: $\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$[1]

4. Уравнения Максвелла примут вид:

   $\Box\,\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$,

   $\Box\,\boldsymbol{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}$, где $\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla, v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

5 Волновые уравнения

$$\Box\,\boldsymbol{E} = 0,\ \Box\,\boldsymbol{B} = 0$$

$$\Box\,\boldsymbol{A} = 0,\ \Box\,\varphi = 0 \qquad (\Box\,\chi = 0)$$

Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ [2]

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

   $u = f(x - vt) + g(x + vt)$

2. Плоская волна: $A = A(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$ [3]

3. Условие поперечности: $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{c}{v}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$

4. $\boldsymbol{S} = v\,w\,\boldsymbol{n}$.

5. Уравнение сферической волны: $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$

6. Его решение: $u(r,t) = \frac{1}{r}\big(f(r - vt) + g(r + vt)\big)$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2}u = 0,\ \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{n} \;\Rightarrow\; u = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{E}_0\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\right)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. $\alpha, \boldsymbol{b}$

   $\alpha \;::\; \boldsymbol{E}_0^2 = |E_0^2|\,e^{-2i\varphi_0}$

   $\boldsymbol{b} \;::\; \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}\,e^{-i\varphi_0},\ \boldsymbol{b}^2 = |E_0^2|,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\,\boldsymbol{b}_2$

2. $b^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{b}_2$

3. $\frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_2)^2}{b_2^2} = 1,\ (\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^3)$.

9 Почти монохроматические волны

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t)\,e^{-i\omega t},\ \langle ? \rangle$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$|\overline{\boldsymbol{S}}| = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}^\dagger \boldsymbol{E}}$

$\rho = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix}$

1. $\det\rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$
2. $\det\rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0$ [4]
3. I^2, V^2, U^2+Q^2 — инварианты [5]
4. $I(\psi,\delta) = \overline{|\boldsymbol{S}|} = \boldsymbol{\ell}_\delta^\dagger\,\rho\,\boldsymbol{\ell}_\delta = \dfrac{1}{2}(I + Q\,\cos 2\psi + U\,\sin 2\psi\,\cos\delta - V\,\sin 2\psi\,\sin\delta)$, $\boldsymbol{\ell}_\delta = (\cos\psi,\ \sin\psi\, e^{-i\delta})^\top$, а вот выводится это неприятно.

11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$$I = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = \overline{|\boldsymbol{S}|}$$
$$Q = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$$
$$U = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Re}\,\overline{E_x^* E_y}$$
$$V = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \frac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Im}\,\overline{E_x^* E_y}$$

1. $Q = U = V = 0$ — белый свет
2. $\det\rho = 0$ — эллиптическая поляризация
   (a) $Q = U = 0$ — круговая поляризация
   (b) $V = 0$ — линейная поляризация

   Ещё всякие величины:
   - $R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, $r_d^2 = Q^2 + U^2$
   - $P = {}^{R_d}/_I$ — степень поляризации
   - $p = {}^{r_d}/_I$ — степень линейной поляризации
   - $p_s = {}^{V}/_I$ — степень круговой поляризации
   - $\mathrm{tg}\,2\alpha = {}^{U}/_D$, α — угол между базисом и осями эллипса.
3. Частичная поляризация:
   - белый свет + эллитическая
   - сумма 2 ортогональных эллиптических

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi},\ \psi \text{ — эйконал}^{6}$$

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\psi)^2 = 0$$

$\psi = -\omega t + \dfrac{\omega}{c}\psi_1$, $(\nabla\psi_1)^2 = n^2(\boldsymbol{r})$ — уравнение эйконала.

$$\frac{\omega}{c}\,\psi_1 - \omega t = \mathrm{const} \text{ — волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые прозводные эйконала.

13 Гадость в неоднородной среде

1. $\varepsilon = \varepsilon(r)$, $\mu = 1$
2. Волновые уравнения поменяются:
$$\Box\,\boldsymbol{E} - \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$$
$$\Box\,\boldsymbol{H} - \nabla(\ln\varepsilon)\times\mathrm{rot}\,H = 0$$
3. Монохроматический случай:
$$[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{E} + \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$$
$$[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{H} + \nabla(\ln\varepsilon)\times\mathrm{rot}\,H = 0$$

14 E,H-волны

$\varepsilon = \varepsilon(z)$

1. $\boldsymbol{E} \upuparrows \mathrm{Oy}$, $E = (0,1,0)\,E(z)e^{i\varkappa x}$ — E-волны
2. $\boldsymbol{H} \upuparrows \mathrm{Oy}$, $H = (0,1,0)\,H(z)e^{i\varkappa x}$ — H-волны

Если переписать волновое уравнение выше:

1. $E''(z) + f(z)\,E(z) = 0$, $f(z) = k^2 - \varkappa^2$
2. $w''(z) + f(z)\,w(z) = 0$, $H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}\,w(z)$, $f(z) = k^2 - \varkappa^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$

15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений: $\dfrac{1}{s^2}u'' + f\,u = 0$, ${}^1/_{s^2}$ — малый параметр.

1. $z = s\,\tau$, $u = e^{is\psi}$
2. В ряд его: $\psi = \psi_0 + \dfrac{i}{s}\,\psi_1 + \cdots$
3. ВКБ-решения (первое приближение)
$$u_{1,2} = f^{-1/4}\,\exp\left(\pm is\int\sqrt{f}\,\mathrm{d}\tau\right)$$
$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$
4. Условия применимости $\langle ? \rangle$:
$$\left|\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}\tau}\right|^2 \gg \frac{1}{s}\left|\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\tau^2}\right| \Leftrightarrow |f| \gg \frac{1}{s}\left|\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{1}{f}}}{\mathrm{d}z}\right| \ll 1$$

Для предыдущего параграфа просто $\lambda = \dfrac{2\pi}{\sqrt{f}}$

16 Диспергирующая среда, частотная и пространственная дисперсия

Если пространство однородно (и по времени):

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$$
$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$$

Для монохроматических можно сказать чуть больше:

- $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon(\omega,\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{r},t)$
- $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ — частотная дисперсия
- $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{k})$ — пространственная дисперсия
- $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega)$, $\omega\to\infty \quad \varepsilon(\omega)\to 0$

17 Что-то про преобразование Фурье

- $\widetilde{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$
- $2\pi\delta(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$

▷ $\widetilde{f*g} = \widetilde{f}\cdot\widetilde{g}$

18 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

▷ $\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{E}(\omega)$

▷ $\boldsymbol{B}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{H}(\omega)$

▷ $\varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$

▷ $\mu \sim 1$

▷ ⟨⚒⟩

19 Энергетические соотношения при дисперсии

$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$
Для монохроматических волн:

▷ $\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu(\omega)\,\boldsymbol{H}$

▷ $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$

▷ $\overline{\operatorname{div}\boldsymbol{S}} = \dfrac{-\omega}{8\pi}\left(\varepsilon_2\overline{|\boldsymbol{E}|^2} + \mu_2\overline{|\boldsymbol{H}|^2}\right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0$ ⟨?⟩[7]

$\{\varepsilon,\mu\}_2 \ll \{\varepsilon,\mu\}_1$ — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$
2. первый член: $\dfrac{1}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}\,\dfrac{\partial\boldsymbol{D}^*}{\partial t} + \boldsymbol{E}^*\,\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$
3. $\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\,\dfrac{\partial\boldsymbol{E}^0}{\partial t}\,e^{-i\omega t}$
4. $\operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\dfrac{\partial w}{\partial t}$
5. $\overline{w} = \dfrac{1}{8\pi}\left(\dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\,\overline{|\boldsymbol{E}^0|^2} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega}\,\overline{|\boldsymbol{H}^0|^2}\right)$

20 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде[8]

Здесь $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}\,\dfrac{\omega}{c} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2$, $\{\varepsilon,\mu\}_2 \ll \{\varepsilon,\mu\}_1$.

$\boldsymbol{k}_1 \not\parallel \boldsymbol{k}_2$ Неоднородная плоская волна:
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\,e^{-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}\,e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$

$\boldsymbol{k}_1 \upuparrows \boldsymbol{k}_2$ Однородная плоская волна:

1. $k = (n + i\varkappa)\,{}^{\omega}\!/\!{}_{c}$ — показатель преломления и затухания,
2. $E(z,t) = E_0\,e^{-\varkappa\omega z/c}\,e^{-i\omega(t-nz//c)}$
3. $\overline{S(z)} = S_0\,e^{-2\varkappa\omega\,z/c} = S_0e^{-\alpha z}$, α — к-т поглощения.

21 Групповая скорость

1. $v_{\text{gr}} = \dfrac{\overline{|\boldsymbol{S}|}}{\overline{w}} = \dfrac{c}{\frac{\mathrm{d}n\omega}{\mathrm{d}\omega}}$
2. $v_{\text{gr}} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}} = \dfrac{c}{\frac{\mathrm{d}n\omega}{\mathrm{d}\omega}}$

Отсюда $v_{\text{gr}} = v_\phi\cdot\dfrac{1}{1+\frac{\omega}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} > 0$ — нормальная дисперсия, $v_{\text{gr}} < v_\phi$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} < 0$ — аномальная дисперсия, $v_{\text{gr}} > v_\phi$

22 Дисперсия на атоме

1. $m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2\boldsymbol{r} + \gamma m\dot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0\,e^{i\omega t} \Rightarrow$
   $\boldsymbol{r} = \dfrac{e}{m}\,\dfrac{\boldsymbol{E}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}$
2. $\boldsymbol{P} = ne\,\boldsymbol{r} \Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$,
   $$\begin{aligned}\varepsilon_1(\omega) &= 1+\frac{\omega_p^2\,(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\\ \varepsilon_2(\omega) &= \frac{\omega_p^2\,\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.\end{aligned}$$
3. $\omega \sim \omega_0$
4. $\omega \gg \omega_0$

23 СТО, событие и интервал

1. Все явления природы одинаковы во всех ИСО
2. $c = \mathrm{const}$

Мировая точка	::	(x, y, z, t)
Событие	::	что-то прозошедшее в мировой точке
Мировая линия	::	траектория точки (в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$)
Интервал	::	$S_{12}^2 = c(t_2-t_1)^2 - (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2$

▷ $S^2 > 0$ — времениподобный интервал (причинная связь)

▷ $S^2 < 0$ — пространственноподобный интервал

▷ $S^2 = 0$ — светоподобный интервал

24 Преобразования Лоренца

▷ Линейны

▷ Сохраняют интервал

▷ одномерные: $\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt)\\ t' &= \gamma(t - \frac{Vx}{c^2}\,x)\end{aligned}$

▷ в общем случае: $\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \gamma t\,\boldsymbol{V} + (\gamma-1)\,\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\,\boldsymbol{V}\\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{c^2}\,x\right)\end{aligned}$

или $\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= \gamma(\boldsymbol{r} - t\boldsymbol{V}) + (\gamma-1)\,\frac{\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{r})}{V^2}\\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{r}}{c^2}\,x\right)\end{aligned}$

$\Delta\tau = \Delta t\cdot\dfrac{1}{\gamma(V)} \leqslant \Delta t$
τ — собственное время, в той СО, где тело неподвижно. Именно в ней $\Delta\boldsymbol{r} = 0$

25 Лоренцево сокращение и сложение скоростей

В собственной СО $\Delta t' = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}_\parallel &= \gamma(\Delta\boldsymbol{r}'_\parallel)\\ \Delta\boldsymbol{r}_\perp &= \Delta\boldsymbol{r}'_\perp\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_0 \mapsto V_0/\gamma$$

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} + (1 - {}^1\!/\!_\gamma)\,\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{v})/V^2}{1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}}$$

1. $\boldsymbol{v} \upuparrows \boldsymbol{V} \Rightarrow v' = \dfrac{v - V}{1 - {}^{vV}\!/\!_{c^2}}$
2. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}\sqrt{1 - {}^{V^2}\!/\!_{c^2}} - \boldsymbol{V}$, $\gamma(v) = \gamma(V)\,\gamma(v')$

26 Инвариантные объекты в СТО и махинации с ними ⟨⚒⟩

Λ — преобразование Лоренца

1. $a = \mathrm{const}$ $\qquad /S^2,\ \mathrm{d}^4 r/$
2. $a^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu a^\mu$ $\qquad /r,\ u,\ \nabla\ \ldots/$
3. $A^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \Lambda^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\alpha}}\,\Lambda^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}}\,A^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\mu}}$ $\qquad /F^{ik},\ g_{ij},\ \ldots/$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma b_1 & -\gamma b_2 & -\gamma b_3 \\ -\gamma b_1 & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_1^2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma b_2 & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_2^2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma b_3 & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_3\beta_1}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\,\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

$a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

27 Скорость и импульс в СТО

- $\triangleright\ u = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \{\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}\}$, $\beta = v/c$
- $\triangleright\ p = m\,u = \{p_0, \boldsymbol{p}\}$

1. $\boldsymbol{p} = m\,\gamma\,\boldsymbol{v}$, $p_0 = m\,\gamma\,c$
2. $p^2 = m\,c^2 \Rightarrow p_0^2 = m^2\,c^2 + p^2$ (закон сохранения энергии-импульса)
3. $\dfrac{\mathrm{d}p_0 c}{\mathrm{d}t} = m\gamma^3(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{v}\cdot\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$
4. $p_0 = \mathcal{E}/c$ $T(p) = p_0\,c - m\,c^2$

28 Сложение скоростей

$$w = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$$

- $\triangleright\ w = \gamma^2\left\{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w})\gamma^2, \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{\beta}\gamma^2\right\}$
- $\triangleright\ w \cdot \beta = 0$ (этакая ортогональность)
- $\triangleright\ w^2 = \gamma^2\big(-\boldsymbol{w}^2 + (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w})^2\big)$

$u_1 = \{\gamma_1 c, \gamma_1 \boldsymbol{v}_1\}$, $u_2 = \{\gamma_2 c, \gamma_2 \boldsymbol{v}_2\}$

1. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_1$
2. $u_1' = \{c, 0\}$, $u_2' = \{\gamma_r c, \gamma_r \boldsymbol{v}_r\}$
3. $\gamma_r = \gamma_1\,\gamma_2\left(1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)}{c^2}\right) = \dfrac{1}{c^2}\,u_1\cdot u_2 = \mathrm{inv}$
4. $\boldsymbol{v}_r = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_r}\left(\boldsymbol{v}_2 - \gamma_2\boldsymbol{v}_2 + (\gamma - 1)\dfrac{\boldsymbol{v}_1\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)}{\boldsymbol{v}_1^2}\right)$
5. тосковатт

29 Импульс фотона

$k = \left\{\dfrac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right\} = \dfrac{\omega}{c}\{1, \boldsymbol{n}\}$ [9], $p_\gamma = \hbar\,\boldsymbol{k}$

1. Эффект Допплера: $\omega' = \omega\gamma(1 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})$
2. Абберация: $\boldsymbol{n}' = \dfrac{\boldsymbol{n} - \gamma\boldsymbol{\beta} + (\gamma - 1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{\beta}/\beta^2}{\gamma(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}$

- $\triangleright\ \sin(\alpha' - \alpha) = \sin\alpha\,\dfrac{\beta - (1 - \gamma^{-1})\,\cos\alpha)}{1 - \beta\,\cos\alpha}$
- $\triangleright\ \cos\alpha' = \dfrac{\cos\alpha - \beta}{1 - \beta\cos\alpha}$
- $\triangleright\ \sin\alpha' = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{\sin\alpha}{1 - \beta\cos\alpha}$

30 4-ток и потенциал

$j\ ::\ \ j = \{c\,\rho, \rho\,\boldsymbol{v}\}$ $\qquad /\nabla j = \partial_t\rho + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0 = \mathrm{inv}/$

$A\ ::\ \ A = \{\varphi, \boldsymbol{A}\}$ $\qquad /\Box\,A = \dfrac{4\pi}{c}\,j/$

31 Тензор электромагнитного поля

$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$

- $\triangleright\ F_{ik} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\triangleright\ F^{ik} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$
- $\triangleright\ F_{ik} = -F_{ki}$
- $\triangleright\ F^{ik}F_{ik} = 2H^2 - 2E^2$
- $\triangleright\ \dfrac{1}{2}\,e^{prst}F_{pr}F_{st} = -4\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$
- $\triangleright\ G^{ik} = \dfrac{1}{2}e^{iklm}F_{lm} = (-\boldsymbol{H}, -\boldsymbol{E})$

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F\gamma\alpha + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\dfrac{4\pi}{c}j^\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\dfrac{4\pi}{c}j^\beta\end{cases}$$

32 Преобразование Лоренца для поля

для $\boldsymbol{\beta} \upuparrows \boldsymbol{i}$ $F' =$

$$\begin{matrix} 0 & F_{0,1} & -\gamma\,(F_{2,1}\beta - F_{0,2}) & \gamma\,(F_{1,3}\beta + F_{0,3}) \\ F_{1,0} & 0 & \gamma\,(F_{0,2}\beta - F_{2,1}) & \gamma\,(F_{0,3}\beta + F_{1,3}) \\ \cdots & \cdots & 0 & -F_{3,2} \\ \cdots & \cdots & F_{3,2} & 0 \end{matrix}$$

(остальное из антисимметричности) или [10]

$$\begin{matrix} 0 & E_1 & \gamma\,(E_2 - \beta H_3) & \gamma\,(\beta H_2 + E_3) \\ -E_1 & 0 & -\gamma\,(H_3 - \beta E_2) & \gamma\,(H_2 + \beta E_3) \\ \cdots & \cdots & 0 & -H_1 \\ \cdots & \cdots & H_1 & 0 \end{matrix}$$

- $\triangleright\ \boldsymbol{E}'_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel$, $\boldsymbol{E}'_\perp = \gamma\,(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H})$
- $\triangleright\ \boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} + \dfrac{\gamma}{c}\,\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H} - (\gamma - 1)\,\dfrac{\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})}{V^2}$
- $\triangleright\ \boldsymbol{H}' = \gamma\boldsymbol{E} - \dfrac{\gamma}{c}\,\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E} - (\gamma - 1)\,\dfrac{\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H})}{V^2}$ [11]

33 Тензор энергии-импульса

▷ $m\,\dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{e}{c}\,F^i_k\,u^k \Rightarrow \mu\,\dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{c}\,F^i_k\,j^k =: f^i_l$

Поле:

$$T^{ik} := \frac{1}{4\pi}\left(-F^{is}\,F^k_s + \frac{1}{4}\,g^{ik}\,F_{ps}F^{ps}\right)$$

$T = (\omega, S/c, \sigma)$ — плотность энергии, плотность потока энергии (импульс для поля) и плотность потока компоненты импульса. Ещё σ — Максвелловский тензор напряжений.

1. $j = \dfrac{c}{4\pi}\,\nabla\cdot F$ (неоднородные из уравнений Максвелла)
2. $f^i = \dfrac{1}{4\pi}F^i_k\,(\nabla\cdot F)^k$
3. $-\partial_k T^{ik} = (\partial_k F^{is})\,F^k_s + F^{is}\,\partial_k F^k_s + 0 = \big(\underbrace{\{\text{антисим}\}}_{=0} + \{\text{сим}\}\big)F^{is} + F^i_s\,\partial_k F^{ks} = f^i$
4. $\sigma_{ik} = \dfrac{1}{4\pi}\left(-E_iE_k - H_iH_k + \dfrac{1}{2}\delta_{ik}\,(E^2+H^2)\right)$
5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -f^0 = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$
6. $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial S^i}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i = -f^i_L$

Частицы: $T^{ik}_{(p)} = \dfrac{\mu}{\gamma}\,u^iu^k$, $\nabla(T_{(p)} + T) = 0 \Longrightarrow$

1. $\dfrac{\partial w_0}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S_0} = 0$
2. $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial S^i_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0)_i = 0$

34 Потенциалы точечного заряда

запаздывающие потенциалы:

$\rho(\boldsymbol{r},t) = e\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t))$ $\quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\,r_0'(t)$

$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \displaystyle\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1,t_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_1,t_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1$

$c\,(t-t_1) = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ — условие запаздывания

35 Вычисление этих потенциалов

$s = R_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}_0 \qquad \boldsymbol{n}_0 = \dfrac{\boldsymbol{R}_0}{R_0}$

$\varphi = \dfrac{e}{s} \qquad \boldsymbol{A} = \dfrac{e\beta}{s}$

$A = \dfrac{e\,u}{u\cdot R}$

Попутно $c^{-1}\,\partial_t\varphi + \nabla\boldsymbol{A} = 0$

36 Напряжённость поля точечного заряда

Хлам, но оказалось полезно:

$\dfrac{\partial\boldsymbol{R}_0}{\partial t_1} = -c\,\boldsymbol{\beta} \qquad \dfrac{\partial R_0}{\partial t_1} = -c\,\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_0$

$\dfrac{\partial t_1}{\partial t} = \dfrac{1}{1-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\beta}} \qquad \dfrac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\beta}$

$\nabla t_1 = -\dfrac{R_0}{cs} \qquad \nabla R_0 = \dfrac{\boldsymbol{R}_0}{s}$

$s' = -c\,\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n}_0 + c\,\beta^2 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}_0$

Напряжённости:

$\boldsymbol{E}_1 = \dfrac{e}{s^3}\,(1-\beta^2)\,(\boldsymbol{R}_0 - R_0\,\boldsymbol{\beta})$

$\boldsymbol{E}_2 = \dfrac{e}{cs^3}\,\boldsymbol{R}_0\times\big((\boldsymbol{R}_0 - R_0\,\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\beta}'\big)$

$\boldsymbol{H}_1 = -\dfrac{e}{s^3}\,(1-\beta^2)\,(\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{\beta})$

$\boldsymbol{H}_2 = -\dfrac{e}{cs^3}\left((\boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{\beta}')\,\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{\beta} + (R_0 - \boldsymbol{R}_0\cdot\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{\beta}'\right)$

$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E}_1, \qquad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{E}_2$

▷ $E_1, H_1 \propto \dfrac{1}{R_0^2}$, $E_2, H_2 \propto \dfrac{1}{R_0}$

▷ $R_0 \gg a$, $R \gg \lambda$ (волновая зона) — $S \sim E_2\,H_2 \propto \dfrac{1}{R_0^2}$ $\Rightarrow \Phi = const$

37 На больших расстояниях

1. $\varphi, \boldsymbol{A}$: $R_0 \to R$, $n_0 \to n$; $\quad c\,(t_1 - T) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x} = t - \dfrac{R}{c}$
2. $\nabla(R^\alpha) \sim R^{\alpha-1} \Rightarrow \nabla = -\dfrac{\boldsymbol{n}}{c}\,\dfrac{\partial}{\partial t}$
3. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2$
4. $\boldsymbol{S} = wc\boldsymbol{n}$

38 Поле медленного заряда

дипольный момент :: $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{x}$

магнитный момент :: $\boldsymbol{m} = \dfrac{e}{2c}\,(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')$

квадрупольный момент :: $Q_{ij} = e\,(3x_ix_j - g_{ij}x_sx^s) \Rightarrow \boldsymbol{Q} = e\,(3\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) - x^2\,\boldsymbol{n})$

▷ $\boldsymbol{A} = \dfrac{1}{Rc}\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{d} + \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n} + \dfrac{1}{6c}\,\boldsymbol{Q}' + \dfrac{e}{3c}\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')\right)$

▷ $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{Rc^2}\left(\boldsymbol{d}''\times\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{m}''\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n} + \dfrac{1}{6c}\,\boldsymbol{Q}''\times\boldsymbol{n}\right)$

▷ $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{Rc^2}\left(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{d}'') + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}'' + \dfrac{1}{6c}\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{Q}'')\right)$

39 Дипольное приближение

$\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{Rc^2}\,\boldsymbol{d}''\times\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{Rc^2}\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{d}'')$

1. $\boldsymbol{S} = \dfrac{\boldsymbol{n}}{4\pi c^3R^2}\left|\boldsymbol{d}''\times\boldsymbol{n}\right|^2 = \mathcal{W}(\theta)\,R^2$
2. $\mathcal{W}(\theta) = \dfrac{e^2}{4\pi c^3}\,(\ddot{x})^2\,\sin^2\theta$ — формула Лармора
3. $I = \displaystyle\int \mathcal{W}(\theta)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}(\ddot{x})^2$

40 Излучение релятивистких

$I := -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t_1}$ — инвариант. В сопутствующей СО работает формула Лармора. Так что

$I = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{c^3}\,(\ddot{x})^2 = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{c^3}\,(-\{0,\ddot{x}\}) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{c^3}(-\ddot{x}\cdot\ddot{x})$[12]

$\{0,\boldsymbol{w}\} = \ddot{x}, \quad I = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{c^3}\,\gamma^6\,\big(w^2 - (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w})^2\big)$

1. $\boldsymbol{F} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma\boldsymbol{v}) = m\gamma\boldsymbol{w} + m\gamma^3\boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w})$
2. $I = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{m^2c^3}\,F^2\begin{cases}1, & \boldsymbol{\beta}\parallel\boldsymbol{w}\\ \gamma^2, & \boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{w}\end{cases}$
3. $\gamma \gg 1 \ \Rightarrow \perp$ эффективнее.

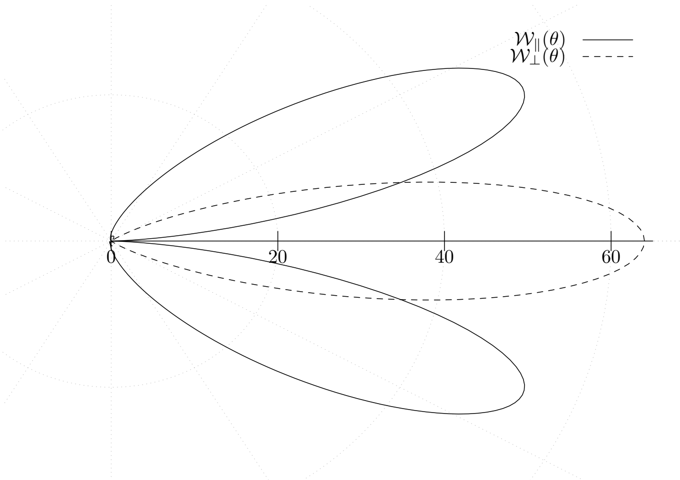
41 Угловое распределение излучения

1. $\boldsymbol{E} = \dfrac{e}{Rc^2}\,\dfrac{\boldsymbol{n}\times\big((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{w}\big)}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}$
2. $P\,\mathrm{d}t_1 = |\boldsymbol{S}|R^2\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t$ [13]
3. $\mathrm{d}t = (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\,\mathrm{d}t_1$
4. $\mathcal{W}(\boldsymbol{n}) = \dfrac{c}{4\pi}\,E^2R^2(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$
5. $\mathcal{W}(\boldsymbol{n}) = \dfrac{e}{4\pi c^3}\cdot\dfrac{\Big(\boldsymbol{n}\times\big((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{w}\big)\Big)^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}$

$\displaystyle\int\mathcal{W}(\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\gamma^6\left(w^2-(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w})^2\right) = I,$

$\displaystyle\int\mathcal{W}(\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{\beta}I$

42 Мгновенное движение по прямой и окружности



1. $\mathcal{W}_\parallel = \dfrac{e^2}{4\pi c^2}\,w^2\,\dfrac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\ \theta_0\approx\dfrac{1}{2\gamma}$
2. $\mathcal{W}_\perp = \dfrac{e^2}{4\pi c^2}\,\dfrac{w^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1-\dfrac{\sin^2\theta\,\cos^2\varphi}{\gamma^2\,(1-\beta\,\cos\theta)^2}\right),$
   $\theta_0 = 0,\ \Delta\theta\approx 1/\gamma$

$\gamma\gg 1\quad I\approx I_\perp$

$\Delta t_1\sim\dfrac{\rho}{c\gamma}\Rightarrow\Delta t\sim\dfrac{\rho}{c\gamma^3}\Rightarrow\omega<\omega_c=\dfrac{c\gamma^3}{\rho}$

43 Спектр и поляризация движения по окружности

⟨⚒⟩ ⟨:set aflame⟩

1. $\boldsymbol{M} := \sqrt{\dfrac{c}{4\pi}},\ \mathcal{W}(\boldsymbol{n},t) = |\boldsymbol{S}|\,R^2 = |\boldsymbol{M}(t)|^2 = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}(t)}{\mathrm{d}t}$
2. $\boldsymbol{M}(\omega) = \dfrac{e}{c}\sqrt{\dfrac{c}{4\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\left(\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)$
3. $t = T + R/c = t_1 - \dfrac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}$
4. $\boldsymbol{M}(\omega) = \dfrac{-i\omega e\,e^{i\omega R}}{c}\sqrt{\dfrac{c}{4\pi}}\times$
   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t_1-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}\,\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})\,\mathrm{d}t_1$
5. В поляризационном базисе и при малых углах
   $\varepsilon(\omega,\theta) = \dfrac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\,|-\boldsymbol{e}_\parallel M_\parallel+\boldsymbol{e}_\perp M_\perp|$
   $\varepsilon(\omega,\theta) = \dfrac{e^2}{3\pi^2c}\left(\dfrac{\omega\rho}{x}\right)^2\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^2\left|\mathcal{K}^2_{2/3}(\xi)+\frac{u^2}{1+u^2}\,\mathcal{K}^2_{1/3}(\xi)\right|$
   $u=\gamma\theta,\quad x=\dfrac{ct}{\rho}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{-1/2}\ \xi=\dfrac{\omega\rho}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{3/2}$
   $w_c = 3\gamma^3\omega_0,\quad\omega_0=\rho/c$

$\displaystyle\int\varepsilon(\omega,\theta)\,\mathrm{d}\omega = \frac{7}{16}\,\frac{e^2}{\rho}\,\frac{\gamma^5}{\left(1+(\gamma\theta)\right)^{5/2}}\left(1+\frac{5u^2}{7\,(1+u^2)}\right)$

$\displaystyle\int\mathrm{d}\Omega\int\varepsilon(\omega,\theta)\,\mathrm{d}\omega = \frac{7\pi e^2\gamma^4}{4\rho}\left(I_2+\frac{5}{7}(I_2-I_3)\right)$

<+возня с асимптотикой ⟨⚒⟩ +>

44 Магнитотормозное излучение

⟨⚒⟩ ⟨:set aflame⟩

$\boldsymbol{E}=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}=e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=0$

Ларморовская частота	::	$\omega_H=\dfrac{eH}{mc\gamma}$
Циклотронная частота	::	$\dfrac{eH}{mc}$
Ларморовский радиус	::	$\rho_H=\dfrac{v_\perp}{\omega_H}=\dfrac{v\,sin\chi}{\omega_H}$

▷ $w=\omega_H v\,\sin\chi$

▷ $\begin{cases}x=x_0+\rho_H\,\sin(\omega_H t+\alpha)\\ y=y_0+\rho_H\,\cos(\omega_H t+\alpha)\ \text{— спиралька}\\ z=z_0+v\,\cos\chi\,t\end{cases}$

▷ $F_\parallel=0\Rightarrow I=\dfrac{2e^4v^2H^2\sin^2\chi}{3m^2c^5}\propto\dfrac{e^4}{m^2}$

▷ $\mathcal{W}_{\text{набл}}=\dfrac{1}{\sin^2\chi}\,\mathcal{W}_{\text{исп}}$

А что такое W я не знаю. И не знаю, узнаю ли. Приятного использования.

1. $\boldsymbol{M}(t)\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{M}_k e^{-i\omega_H kt}$
2. $W_k(\theta)=\dfrac{e^2k^2\omega_H^2}{2\pi c}\left|\boldsymbol{e}_\parallel\beta J_k'(k\beta\cos\theta)+i\boldsymbol{e}_\perp\,\mathrm{tg}\,\theta\,J_k(k\beta\cos\theta)\right|^2$ (формула Шотта)
3. при $\theta=0$ переходит в линейную, при $\theta=\pi/2$ — в круговую.[14]

<+дурацкие частные случаи+>

45 Рассеяние на свободных зарядах

классический радиус электрона	::	$r_e=\dfrac{e^2}{mc^2}$
комптоновская длина волны	::	$\lambda_c=\dfrac{h}{mc}$

▷ $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2)^\top,\ r_e=\dfrac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона

▷ $A=\begin{pmatrix}\mu&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}=\dfrac{r_e}{R}A\,\boldsymbol{E}',\ \rho=\dfrac{r_e^2}{R^2}\,A\rho' A$

▷ $\boldsymbol{I}=\dfrac{r_e^2}{R^2}\,R(\mu)\boldsymbol{I}'$, а $R=\begin{pmatrix}\dfrac{\mu^2+1}{2}&\dfrac{\mu^2-1}{2}&0&0\\ \dfrac{\mu^2-1}{2}&\dfrac{\mu^2+1}{2}&0&0\\ 0&0&\mu&0\\ 0&0&0&\mu\end{pmatrix}$

▷ Для белого света (I') $I = \dfrac{r_e^2}{2R^2}\,(1+\mu^2)I'$

дифференциальное сечение рассеяния :: $\mathrm{d}\sigma = I\,\mathrm{d}\Omega$

сечение рассеяния :: $\sigma_0 = \displaystyle\int \mathrm{d}\sigma$

▷ В классике: $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{r_e^2}{2}\,(1+\mu^2)\,\mathrm{d}\Omega$

▷ $\sigma_0 = \dfrac{8}{3}\pi r_e^2$

▷ В квантах: $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{r_e^2}{2}\left(\dfrac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\dfrac{\omega'}{\Omega} + \dfrac{\omega'}{\Omega} - \sin^2\theta\right)\mathrm{d}\Omega$

46 Влияние излучение на движение

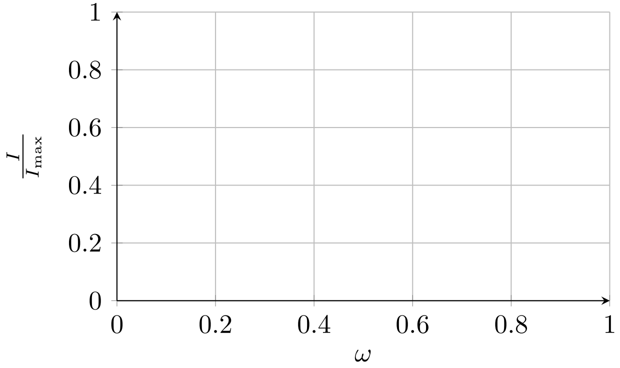
$m(\dot{\boldsymbol{v}} - \tau\ddot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}$ — уравнение Абрагама-Лоренца. Имеет смысл при $\left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{rad}}\right| \ll \left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}\right|$. А всё остальное в этом билете не имеет смысла.

47 Радиационное затухание

▷ $m\tau\omega_0^2\dddot{x} = -\gamma m\dot{x}$, $\gamma = \tau\omega_0^2\,\dfrac{2}{3}\,\dfrac{e^2}{c^3 m}$

▷ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\,e^{-i\omega t}\,e^{-\gamma t/2}$, $1/\gamma$ — характерное время убывания.

▷ $I = \dfrac{\gamma\, I_0/2\pi}{(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2/4}$ — лоренцевский контур линии



48 Рассеяние связанными зарядами

▷ $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{E}_0\,\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\,e^{-i\omega t}$

▷ $\sigma(\omega) = \sigma_0\,\dfrac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$

1. $\omega \sim \omega_0$ профиль как в затухании
2. $\omega \ll \omega_0$ (сильная связь, релеевское рассеяние) $\sigma \approx \sigma_0\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^4$
3. $\omega \gg \omega_0$ (слабая связь) как свободный заряд

Заметки

1 при этом подходят все χ :: $\Box\,\chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.

4 В поляризационной матрице все E можно позаменять на E^0 (фазы всё равно сокращаются), а в предпредыдущем пунке у нас как раз $E_x^0 = b_1\, e^{-i\varphi_0}$, $E_y^0 = ib_2\, e^{-i\varphi_0}$

5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах

6 ψ_1 — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но $\langle ? \rangle$

7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то $\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$.

8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову

9 Для корректности надо доказать инвариантность фазы, а это следует из преобразований F^{ik} монохроматических волн

10 я это не считал, это всё `maxima`

11 Если мы имеем дело с плоской волной, то $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\beta})$, $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, -\boldsymbol{\beta})$ будут образовывать правые тройки. Так что понятно, почему у $\boldsymbol{V}$ поменялся знак

12 Мы здесь всё считаем в момент излучения — t_1. Наблюдатель не нужен

13 А тут про наблюдателя вспомнили

14 Угол между направлением и плоскостью движения, так-то.