< матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :taxus

2 июня 2017 г.

Оглавление

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 .. n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

§ 2 Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{C}ell_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$. Тогда $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$*

Теорема 2. *$\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{C}ell_n)$.*

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1\\ G_k\in\mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\ F_k\in\mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1\\ A_k\in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 3 Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu\underbrace{\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)}_{\in\mathcal{A}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ-измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

она считает, не считывает ◡̈ **Пример 3.** $\mu(A) = \#A$ — считающая мера.

§ 4 Свойства меты

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.
Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

Утверждение 2. *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$.
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Утверждение 3 (Усиленная монотонность)**.** *Пусть $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ и дизъюнктны.*

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры)**.** *Пусть $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.*

Тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

▼

Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение $D_k\colon D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу)**.** *Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху)**.** *Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.*

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$

`<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>`

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если

$$\forall \in \mathcal{A}\colon \mu A = 0 \; \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} \;::\; \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на $\mathcal{A}$ называется σ-конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty \;::\; \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1\colon A_1 \to [0; +\infty]$, $\mu_2\colon A_2 \to [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1.

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора)**.** *Пусть μ — сигма-конечная мера на $\mathcal{A}$. Тогда*

1. *Существуют её полные сигма-конечные продожения*
2. *Среди них есть наименьшее: $\overline{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.*

`<+идея доказательства+>` Пока надо запомнить, что стандратное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

§ 5 Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1\Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v\Delta \overset{(\in R^n)}{\equiv} v_n\Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{Cell}_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j. Тогда $vA := \sum_{j=1}^{q} v\Delta_j$.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. *v — конечно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}\,, A = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k \;\Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{p} vA_k$$

Теорема 2. *v — счётно-аддитивен, то есть*

$$\forall\, A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}\,, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \;\Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

Определение 2 (Мера Лебега)**.** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

(1) ▷ $\lambda\{x\} = 0$

(2) ▷ $\lambda\big(\{x_k\}_k\big) = 0$

(3) ▷ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

(4) ▷ $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теормема.

Теорема 3 (Регулярность меры Лебега)**.** *Пусть $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\exists\, G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} \;::\; F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

`<+Пример неизмеримого множества на окружности+>`

§ 6 Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Пусть ещё $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} \,::\, f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. *Пусть f измеримо относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества*

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} \equiv X[f \leqslant a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} \equiv X[f \geqslant a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то отдного типа, то f измерима.

Теорема 2. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ измеримы относительно $\mathcal{A}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to R$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$.*

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \ldots$ измеримы относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsup f_n, \lim f_n$. Последний, правда, может не существовать.*

□ Следует из непрерывности меры. ■

Определение 2. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества)**.**

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. *f — простая $\Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}$*

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $f \geqslant 0$. Тогда*

$$\exists\, (\varphi_n)\colon 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \,::\, \varphi_n \nearrow f \text{ (поточечно)}$$

§ 7 Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu E_k$$

[2] $f \geqslant 0$.

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; g\text{-простая}, 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_-\,\mathrm{d}\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание 1. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu := \sum\limits_{k=1}^{p} c_k\mu(E_k \cap A)$

Замечание 2. Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость f будет периодически называться «обычными» условиями.

Утверждение 1. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

A_1 $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда $\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$

A_2 $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geqslant 0$, измерима. Тогда $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_B f\,\mathrm{d}\mu$

A_3 см теорему 1.8.1.

A_4 $\int\limits_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}mu + \int\limits_X g\,\mathrm{d}mu$

A_5 $\int\limits_X (\lambda g)\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f\,\mathrm{d}mu$

§ 8 Теорема Беппо Лéви

Теорема 1. *Пусть* (f_n) *— измеримы на* X, $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots$, $f = \lim_n f_n$. *Тогда*

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

B_1 $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$

B_2 $\int\limits_X (f \pm g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu \pm \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$

B_3 $\int\limits_X \lambda f\,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu.$

B_4 $|f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu.$

B_5 $\left|\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$

B_6 $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

B_7 $|f| \leqslant M \leqslant +\infty \Rightarrow \left|\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu X$

§ 10 Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. *Пусть задана тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, f *— измерима и* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}$. *Пусть к тому же*

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,\mathrm{d}\mu$$

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 \;::\; \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X : \mu A < \delta \;::\; \left|\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$$

§ 12 Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \in C([a;b])$, λ *— мера Лебега на* $X = [a;b]$. *Тогда*

$$f \in \mathcal{L},\; \int\limits_{[a;b]} f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_a^b f = F(b) - F(a),$$

где F *— первообразная* f.

§ 13 Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

Определение 1 (Интеграл Римана)**.** Пусть $f \in C([a;b])$ $a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a;b]$
- $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го отрезка
- $r = r(\tau) = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}x = \lim_{r(\tau) \to 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

Определение 2 (Интеграл Лебега)**.** см. 1.7.1. В качестве множества X понятное дело, отрезок $[a;b]$.

Пример 1. Пусть $X = [0;1]$. Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

<+картиночка с обоими интегралами+>

§ 14 Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}\big([a;b), \lambda\big)$. *Тогда* $\int\limits_{[a;b)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int\limits_a^{\to b} f$.

□ ⟨⚒⟩ Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

§ 15 Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$, $\{a_k\} \in X$ *и* $f \colon X \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ *или* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. *Тогда*

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ ⟨⚒⟩ Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

Пример 1. Пусть $\mu A = \# A$. Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int\limits_{\mathbb{N}^2} f(m,n) \, \mathrm{d}\mu$$

здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

Причем условия суммируемости ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[\begin{aligned} &\forall\, m, n \in \mathbb{N} \ :: \ a_{m,n} \geqslant 0 \\ &\sum_{m,n \in \mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{aligned} \right.$$

тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

Определение 1. Пусть задана пара (X, μ), $\rho \colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $\rho \geqslant 0$. Тогда

- $\nu(E) := \int\limits_E \rho \, \mathrm{d}\mu$ — мера, задаваемая плотностью ρ
- ρ — плотность меры ν относительно меры μ.

Замечание. Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

Теорема 2. *Пусть выполнены «обычные» условия на f. Тогда* $\int\limits_X f \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X f \rho \, \mathrm{d}\mu$.

§ 16 Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

А можно и без. Тогда $\nu([a;b)) = F(b-0) - F(a-0)$, см. **??**

Определение 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $F \colon I \to \mathbb{R}$, $F \nearrow$, $F(x) = F(x-0)$ (непрерывна слева).. Рассмотрим порождённую полуинтервалами $[a;b) \subset I$ σ-алгебру. Введём «объём» $\nu_F \colon \nu([a;b)) = F(b) - F(a)$.

Тогда мера Лебега-Стилтьеса μ_F — стандартное продолжение ν_F на некоторую σ-алгебру $\mathcal{M}_F$.

Замечание 1. Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать ν, если она — не мера?

Свойства мемы Лебега-Стилтьеса

Утверждение 1. *Пусть $\Delta = [a;b]$. Тогда $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$.*

Утверждение 2. *Пусть $\Delta = \{a\}$. Тогда $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$.*

Утверждение 3. *Пусть $\Delta = (a;b)$. Тогда $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$.*

Лемма 4. *Пусть $F \in C(I)$, $\Delta \subset I$. Тогда* $\mu_F(\Delta) = \int\limits_\Delta F'(t) \, \mathrm{d}\lambda$.

Теорема 5. *Пусть $F \nearrow$, кусочно-гладка на $I \subset \mathbb{R}$, а для f выполнены обычные условия ($X = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_F$). Промежутки гладкости F обозначим за (c_k, c_{k+1}). Тогда*

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu_F = \sum_k \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f F' \, \mathrm{d}\lambda + \sum_k f(c_k) \underbrace{\Delta_{c_k} F}_{\text{скачок в } c_k}$$

Определение 2 (Образ мемы)**.** Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мемой, $f \colon X \to Y$. Превратим и Y в пространство с мемой.

1. $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$.

Теорема 6. *Пусть для $g \colon Y \to \mathbb{R}$ выполнены обычные условия ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\mu = \nu$). Тогда* $\int\limits_Y g \, \mathrm{d}\nu = \int\limits_X (g \circ f) \, \mathrm{d}\mu$.

Определение 3 (Функция распределения)**.** Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, $f \colon X \to \mathbb{R}$. Тогда $F(t) := \mu X[f < t]$. Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

Теорема 7. *Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, выполнены обычные условия для f. Тогда* $\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \, \mathrm{d}\mu_F$.

§ 17 Интеграл Эйлера-Пуассона

Утверждение 1. $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \pi$

§ 18 Вероятностный смысл мемы

`<+Табличка с соответствием+>`

§ 19 Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

Определение 1. Пусть задано (X, μ), $P(x)$ — предикат. Говорят, что $P(x) = 1$ почти везде (п.в.), если $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$.

Определение 2. $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ п.в. .

Лемма 1 (Беппо-Леви для рядов)**.** *Пусть заданы (X, μ), $u_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, u_n измеримы, $u_n \geqslant 0$. Тогда*

a) $\int\limits_X \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n\,\mathrm{d}\mu.$

b) Если эти числа конечны, то ряд $\sum_n u_n$ сх п.в.

Лемма 2 (Беппо-Леви «вверх ногами»)**.** *Пусть задано (X, μ), (f_n), измеримы, $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \dots \geqslant 0$. Пусть ещё $f_1 \in \mathcal{L}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu$$

`<+Здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>`

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$.

▷ $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$ — «срез»

▷ $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \varnothing\}$ — «проекция»

<+картиночка для $\mathbb{R}^2$+>

Теорема 3. *Пусть $E \in \mathcal{M}_{m+n}$, $E_x \in \mathcal{M}_n$ п.в. x, $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$ измерима относительно $\mathcal{M}_m$. Тогда*

$$\lambda_{m+n}(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x)\,\mathrm{d}\lambda_m$$

`<+много букв+>`

Определение 4 (График)**.** $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$.

Определение 5 (Подграфик)**.** $\Gamma^f_- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$.

Определение 6 (Надграфик)**.** $\Gamma^f_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geqslant f(x)\}$.

Теорема 4 (Геометрический смысл интеграла)**.** *Пусть $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, измерима, $\geqslant 0$. Тогда*

1. *Γ^f_- измеримо.*
2. *$\lambda_{n+1}\Gamma^f_- = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda_n$ измеримо.*

§ 20 Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через dx (ну или dy), размерность определяется из размерности x. Еще обозначим d(x, y) через dxdy.

Теорема 1 (Тонелли)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, *измерима*, $\geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Теорема 2 (Фубини)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, *измерима*, $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

§ 21 Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

- Сдвиг: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.
- Поворот с растяжением: $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, L — линейный император.

Утверждение 1. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 3. *Пусть* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *линейно. Тогда*

$$\exists C \geqslant 0 \forall E \in \mathcal{M} \ :: \ \lambda L(E) = C\lambda E$$

Теорема 4. *C из прошлой теоремы равно* $\left|\det[L]\right|$.

`<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>`

§ 22 Мера образа при гладком отображении

Обозначение. $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

Теорема 1. *Пусть* $E \in \mathcal{M}$, $F : G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, *гладкая биекция. Тогда* $F(E) \in \mathcal{M}$ *и* $\lambda F(E) = \int\limits_E |\det F'(x)|\mathrm{d}x$.

$\square$ ⟨⍨⟩ ⟨⚒⟩ $\blacksquare$

§ 23 Глакая замена переменной в интеграле

Теорема 1. *Пусть* $F : G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, *гладкая биекция. Пусть к тому же* $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$, $f : E \to \mathbb{R}$ *с обычными условиями. Тогда*

$$\int\limits_E f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Пример 1 (Полярные координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r$

Пример 2 (Сферические координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r^2 \cos\psi$

§ 24 Предельный переход под знаком интеграла

Определение 1 (Всякие сходимости)**.** Пусть $(f_n)\colon X \to \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, μ — мера на X.

$$
\begin{array}{lll}
f_n \to f & := & \forall\, x \in X \ :: \ f_n(x) \to f(x) \\
f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f & := & \sup\limits_X |f_n - f| \to 0 \\
f_n \to f \text{ п.в.} & := & \exists\, N \subset X\colon \mu(N) = 0 \ :: \ \forall\, x \in X \setminus N \ :: \ f_n(x) \to f(x). \\
f_n \overset{\mu}{\to} f & := & \forall\, \sigma > 0 \ :: \ \mu X[|f_n - f| \geqslant \sigma] \to 0
\end{array}
$$

Замечание 1. $f \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f \Rightarrow f_n \to f$ п.в. .

Замечание 2. Пусть $\mu X < \infty$, тогда $f_n \to f$ п.в. $\Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$.

Замечание 3 (Теорема Рисса). $f_n \overset{\mu}{\to} f$ п.в. $\Rightarrow \exists\,(n_k) \ :: \ f_{n_k} \to f$ п.в. .

Теорема 1. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f, \mu X < \infty \Rightarrow \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_X f$

Теорема 2. *см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.*

Теорема 3 (Фату)**.** *Пусть заданы* (X, μ), $f_n \geqslant 0$, *измеримы. Тогда*

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

§ 25 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 1. *Пусть снова заданы* (X, μ), (f_n) *измерима,* $f_n \to f$ *п.в. . К тому же*

$$\exists\, \varphi \in \mathcal{L} \ :: \ \forall\, n \ :: \ |f_n| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L})$ — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 1. *Пусть* $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f_t \xrightarrow[t \to t_0]{} f$ *п.в. , и*

$$\exists\, V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} \ :: \ \forall\, t \in \overset{\circ}{V} \cap T \ :: \ |f_t| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\int\limits_X f_t \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[t \to t_0]{} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ — условия локальной теормемы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 2. *Непрерывность интеграла по параметру при выполнении* $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ *и непрерывности* f_t.

§* Интеграл по меме с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию В таких случаях параметр будет записан, как индекс

Определение 1 (Собственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$, $f_t(x) \in \mathcal{L}([a, b], \mu)\ \forall\, t \in T$. Тогда,

$$I(t) = \int\limits_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от t, как видно $\mathcal{D}_I = T$.

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. ⟨`:set aflame`⟩У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается ($\mathcal{L}_{\text{loc}}$). Так что по сути они — просто интегралы по меме.

ну..

Здесь тоже есть непрерывность, дифференциируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально следует из 1.25.1 и 1.20.2.

§ 26 Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

Определение 1 (Несобственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}([a, B], \mu)\ \forall\, B < b$. Тогда,

$$I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x, t)\, \mathrm{d}x := \lim_{B \to b-0} \int\limits_a^{B} f(x, t)\, \mathrm{d}x = \lim_{B \to b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что $\forall\, t \in T$ интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

Никто же не любит ε-δ-определения?

Определение 2. Говорят, что $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t)$ (сходится равномерно относительно t, $t \in T$), если

$$\sup_{t \in T} \left| \int\limits_B^{\to b} f(x, t) \right| \xrightarrow[B \to b]{} 0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла $\forall\, t \in T$.

Теорема 1 (Признак Больцано-Коши)**.**

$$I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t) \Leftrightarrow \sup_T \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x, t)\, \mathrm{d}x \right| \xrightarrow[B_1, B_2 \to b]{} 0$$

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}([a; b))\ ::\ |f(x, t)| \leqslant \varphi(x)\ \forall\, t$*. Тогда* $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$*.*

Теорема 3 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $I(t) = \displaystyle\int\limits_a^{\to b} f(x, t) \cdot g(x, t)\, \mathrm{d}x$ *и*

a) $f(x, t) \overset{T}{\rightrightarrows} 0$, $f(x, t) \searrow^x\ (x \to b - 0)$

b) $G(x,t) = \int\limits_a^x g(\xi, t)\,\mathrm{d}\xi$

$$\exists\, M\colon \forall\, x \in [a;b),\, t \in T \;::\; |G(x,t)| \leqslant M$$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

Теорема 4 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t) \cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $\exists\, M\colon \forall\, t \in T \;::\; f(x,t) \leqslant M$, $f(x,t) \searrow^{x}$.

b) $\int\limits_a^B g(x,t)\,\mathrm{d}x \underset{B\to b}{\overset{T}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^{\to b} g(x,t)\,\mathrm{d}x$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$.

§ 27 Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром ⟨⚒⟩

Это не очень докажется без конечности меры $V(t_0)$,а то интеграл может сходится, а функция не быть суммируемой

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \to f(x,t_0)$ *для п.в.*$x \in [a;b)$ *и* $I^B(t) \overset{V(t^0)}{\rightrightarrows} I(t)$. *Тогда* $I \xrightarrow[t\to t_0]{} I(t_0)$.

Теорема 2. *Пусть для п.в.* $x\ \exists\, f'_t(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,*

a) $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *сходится* $\forall\, t \in T$

b) $\int\limits_a^{\to b} f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда $\exists\, I'(t_0) = \int\limits_a^{\to b} f'_t(x,t_0)\,\mathrm{d}x$

Замечание. Здесь нужна сходимость I, чтобы хоть где-то были конечные значения $I(t)$, нам их разность считать.

Теорема 3. *Пусть для п.в.* $x\ \exists\, f(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,* $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда

$$\int\limits_c^d I(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^{\to b} \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

§ 28 Г-функция Эйлера

Определение 1. $\Gamma(t) = \int\limits_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$

Свойства

1° Определена для всех $t > 0$.

2° $\Gamma(1) = 1$

3° $\forall\, t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4° $n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n!$

5° Г-выпукла

6° $\Gamma \sim \frac{1}{t}$ при $t \to 0$

7° $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{t} t^t e^{-t}$ при $t \to \infty$.

8° $\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$. (формула отражения)

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при $\operatorname{Im} z > 0$.

§ 29 B-функция

Определение 1. $B(y,z) = \int\limits_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}\, \mathrm{d}x$.

Свойства

1° $B(y,z) = B(z,y)$.

2° $B(y,z) = \dfrac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$.

§ 30 Объём n-мерного шара

Теорема 1. *Пусть $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant R\}$ – n-мерный шар. Тогда*

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$$

Глава 2: Дифференциальная геометрия ⟨⚒⟩

§1 Регулярная кривая и её естественная параметризация

Определение 1 (Кривая, как отображение)**.** Пусть задано гладкое отображение $t \in [a;b] \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^3$, регулярное, то есть $rkr'(t) \equiv 1$. t — параметр, само отображение ещё можно называть параметризацией.

Определение 2 (Кривая, как класс отображений)**.** Введём отношение эквивалентности отображений:

$$r(t) \sim \rho(\tau) \Leftrightarrow \exists\,\delta\colon [a;b] \leftrightarrow [\alpha,\beta] \ :: \ \rho(\delta(t)) = r(t)$$

А теперь будем их путать. ⟨`:set aflame`⟩

Определение 3 (Естественная параметризация)**.** Пусть $[a;b] = [t_0, t_1]$. Рассмотрим $\widetilde{s}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} |r'(t)|\,\mathrm{d}\tau$. Она, как видно, является пройденным путём и неубывает $\Rightarrow$ годится на роль δ.

Так что можно рассматривать s как параметр, это собственно и есть естественная (натуральная) параметризация.

Утверждение 1. *Пусть есть две разных параметризации: $r(t)$ и $r(s)$ одной кривой. Тогда*

$$\dot{r} \equiv \frac{\partial r(s)}{\partial s} = \Big(r'(t) \cdot (s'(t))^{-1}\Big)(t) = \frac{r'}{|r'|}$$

Как видно, натуральная почему-то обозначается точкой.

§2 Кривизна кривой

Определение 1 (Касательный вектор)**.** $\tau := \dot{r}(s)$.

Определение 2 (Кривизна)**.** $k_1 = |\dot{\tau}|$

Определение 3 (Радиус кривизны)**.** $R = k_1^{-1}$

Утверждение 1. $\tau \perp \dot{\tau}$

Теорема 2. $k_1 = \dfrac{|r' \times r''|}{|r'|^3}$

§3 Кручение и нормаль

Определение 1 (Нормаль)**.** Пусть $k_1 \neq 0$. Тогда $\nu := \frac{\dot{\tau}}{k_1}$.

Определение 2 (Бинормаль)**.** $\beta = \tau \times \nu$.

Замечание. (τ, ν, β) — хороший кандидат для репера в какой-нибудь точке P.

Определение 3 (Соприкасающаяся плоскость)**.** Пусть $k_1 > 0$, $P = r(s_0)$, T — плоскость, $T \ni P$, $N \perp T$ — нормаль к ней. Допустим, $r(s+\Delta s)\cdot N = h$, $h = o(\Delta s^2)$. Тогда T — соприкасающаяся плоскость.

Утверждение 1. *$\tau, \nu \perp N$; $(r - r_0, \dot{r}_0, \ddot{r}_0) = 0$ — её уравнение*

Определение 4 (Абсолютное кручение)**.** $|k_2| := |\dot{\beta}|$

Теорема 2. $|k_2| = \left|\dfrac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{k_1^2}\right|$

Определение 5 (Кручение)**.** $k_2 := \dfrac{-(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{k_1^2}$

§ 4 Формулы Френе

Теорема 1.

$$\begin{pmatrix} \dot{\tau} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Пусть $r(s)$ — гладкая кривая с заданными k_1 и k_2, $k_1 > 0$. Тогда система (2.1) определит её с точностью до движения.*

§ 5 Регулярная поверхность. Касательная плоскость. Первая квадратичная форма

Определение 1 (Поверзность (двумерная))**.** Пусть задано гладкое отображение

$$\varphi\colon (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto r = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Добавим условие регулярности $\operatorname{rk}\varphi' \equiv 2$ и условимся путать отображение и класс оных.

Определение 2.

$$\begin{aligned} r_u &:= (x'_u, y'_u, z'_u) \\ r_v &:= (x'_v, y'_v, z'_v) \\ n &:= \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} = \frac{N}{|N|} \end{aligned}$$

Отметим, что условие регулярности не дает векторному произведению обращаться в 0.

Касательную плоскость можно было бы здесь определить через нормаль, но лучше пока ещё подумать. Может, абстракций добавить.

Определение 3 (Первая квадратичная форма)**.**

$$\begin{aligned} I :&= |\mathrm{d}r|^2 = r_u^2 \,\mathrm{d}u^2 + 2r_u r_v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + r_v^2 \,\mathrm{d}v^2 \\ &= E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2 \end{aligned}$$

§ 6 Вычисление длин и площадей на поверхности

Теорема 1. *Пусть M — поверхность, $\gamma\colon t \to r \in M$. Тогда*

$$\ell(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{I}. \ (\mathrm{d}s = I)$$

Теорема 2. *Пусть M — поверхность, $u, v \in D$, $I = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2$. Тогда*

$$S(M) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

⟨?⟩<+вкусный абстрактный кусок про меру на многообразии+>

Определение 1. Пусть M — подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lambda_k := \int\limits_D \sqrt{\det g(t)}\,\mathrm{d}t, \quad g(t)_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_j}\right)(t)$$

Замечание 1. Как видно, в $\mathbb{R}^2$, g очень похож на матрицу 1ой квадратичной формы

Определение 2. Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, $\exists F\colon M_1 \to M_2$, сохраняющее длины кривых. Тогда они называются изометричными.

Теорема 3. *Пусть M_1, M_2 — пара поверхностей. Допустим, что существуют их параметризации, при которых $I_1 = I_2$. Тогда они изометричны.*

§ 7 Вторая квадратичная форма

Определение 1. Снова рассмотрим поверхность с какой-то параметризацией. Тогда $\mathrm{II} := -\mathrm{d}r\,\mathrm{d}n = L\,\mathrm{d}u^2 + 2N\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + M\,\mathrm{d}v^2$.

Утверждение 1. $\mathrm{II} = n \cdot \mathrm{d}^2 r$

Утверждение 2 (Типы точек на поверхности)**.** *Здесь названия связаны с типом соприкасающегося параболоида. Его можно добыть, рассматривая $\Delta r \cdot n$.*

$\mathrm{II} > 0$**:** *Эллиптический*

$\mathrm{II} < 0$**:** *Он же*

$\mathrm{II} \lessgtr 0$**:** *Гиперболический*

$\mathrm{II} \geqslant 0 \vee \mathrm{II} \leqslant 0$**:** *Параболический (вроде цилиндра)*

$\mathrm{II} = 0$**:** *Точка уплощения*

§ 8 Нормальная кривизна в данном направлении. Главные кривизны

Определение 1. Нормальное сечение поверхности — сечение плоскостью, содержащей нормаль к поверхности (в точке).

Лемма 1. *Нормальное сечение — кривая.*

Сначала рассмотрим несколько более общий случай

Теорема 2 (Менье)**.** *Пусть γ — кривая $\subset M$, $\gamma \ni P$. Тогда $k_0 = k_1 \cos(\underbrace{\nu \hat{,} n}_{\theta}) = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$.*

Замечание 1. Ещё можно сформулировать так: для всякой кривой на повехности, проходящей через точку в заданном направлении $k_0 = \mathrm{const}$

а теперь сузим обратно.

Определение 2. Нормальная кривизна — кривизна нормального сечения.

Для нормального сечения $\cos\theta = \pm 1$.

Если немного переписать и ввести параметр $t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$

$$k_1(t) = |k_0(t)| = \left|\frac{L + 2Nt + Mt^2}{E + 2Ft + Gt^2}\right|$$

Этот параметр t и задаёт «направление» нормального сечения. Так что $k_0(t)$ и есть та самая «кривизна в данном направлении».

Теперь найдем экстремумы $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(t)$.

Теорема 3. $\exists\, k_{\min}, k_{\max}$, $k_{\min} \cdot k_{\max} = \frac{LM - N^2}{EG - F^2}$.

Определение 3. $k_{\min}, k_{\max}$ — главные кривызны.

§ 9 Гауссова кривизна поверхности. Теорема Гаусса

Определение 1 (Гауссова кривизна)**.** $K = k_{\min} \cdot k_{\max}$.

Определение 2 (Гауссово отображение)**.** Пусть M — поверхность, n — нормаль к ней в точке P, S — единичная сфера. Тогда $G : n \mapsto C \in S$ (C — точка на сфере).

Теорема 1. *Пусть U — окрестность $P \subset M$, M — поверхность, $\mathcal{N}$ — поле нормалей на U. Допустим, что $V = G(\mathcal{N})$, она вроде как окрестность $G(n_P)$.*

Тогда

$$|K| = \lim_{U \to P} \frac{\iint_V |n_u \times n_v|}{\iint_U |r_u \times r_v|}$$

§ 10 Геодезическая кривизна. Теорема Гаусса-Бонне.

Определение 1 (Геодезическая кривизна)**.** Пусть M — поверхность, T — касательная к ней в точке P. Допустим, $\gamma \subset M$ проходит через P. Рассмотрим проекцию γ на T. Тогда $\varkappa := k_\gamma$ — и есть геодезическая кривизна.

Определение 2. Если для кривой $\varkappa(s) \equiv 0$, то она называется геодезической.

Теорема 1 (Гаусса-Бонне)**.** *Пусть M — гладкая поверхность, $P_1, \ldots, P_n$ — вершины криволинейного многоугольника, $P_i, P_{i+1} = \gamma$, α_i — углы при вершинах. Тогда*

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa \,\mathrm{d}s = 2\pi - \iint_P K \,\mathrm{d}s$$

Глава 3: Анализ Фурье ⟨⚒⟩

§ 1 Гильбертово пространство. $\mathcal{L}_2$

Определение 1. Пусть H — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Введём на нём (эрмитово) скалярное произведение, связанную с ним норму и метрику. Допустим, оно полно по введённой метрике. Тогда H — гильбертово пространство.

Замечание 1. Если полноты нет, то пространство называется предгильбертовым.

Утверждение 1. *Скалярное произведение — непрерывно.*

Пример 1. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\widetilde{L}$

$$\widetilde{L} := \left\{ f \;\middle|\; f : X \to \mathbb{C},\ \text{измерима}, \int\limits_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

Скалярное произведение зададим так:

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_X f \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

Введем теперь отношение эквивалентности $f \sim g := f = g$ п.в. . Тогда $\mathcal{L}_2 = \widetilde{L}/_{\sim}$.

Теорема 2. *$\mathcal{L}_2$ полно по мере, введённой выше.*

§ 2 Ортогональные системы. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.

Определение 1. $\delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Определение 2. Пусть H — гильбертово. Рассмотрим $f_1, \ldots, f_n \in H$. Допустим, $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Тогда (f_i) — ортогональная система.

Теорема 1 (Пифагора ⟨⩫⟩)**.** *Пусть (f_i) — ортогональная система. Допустим, $f = \sum_k f_k$. Тогда*

$$\|f\|^2 = \sum_k \|f_k\|^2$$

Определение 3. Пусть (e_i) — ортогональная система, $f \in H$. Тогда

$$c_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle \text{ — коэффициенты Фурье } f$$

$$f = \sum_k c_k e_k \text{ — ряд Фурье } f$$

Теорема 2 (Неравенсто Бесселя)**.** *Пусть $f \in H$, (e_i) — ортогональная система. Тогда*

$$\sum_n |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$$

Определение 4. Пусть (e_i) — ортогональная система. Допустим

$$\forall f \in \mathcal{L}_2 \ :: \ f \sim \sum_n c_n e_n$$

Тогда (e_i) — полная система.

Утверждение 3. *Разложение в ряд Фурье по полной ортогональной системе — единственно.*

§ 3 Тригонометрические системы

Определение 1. $\mathcal{L}_2^{2\pi} = \mathcal{L}_2\big((0; 2\pi), \mu\big) \cap \{2\pi\text{-периодичные функции}\}$.

Утверждение 1. $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \ldots$ — *ортогональная система*

Утверждение 2. $1, e^x, e^{2x}, \ldots$ — *ортогональная система*

Теорема 3. *Тригонометрические системы выше — полны.*

□ ⟨?⟩Вообще, тут большой кусок теории. ■

Определение 2. Будем понимать

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n := \mathrm{V.\,p.} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{-N}^{N} a_n$$

Утверждение 4. *Коэффициенты разложения по синусам и косинусам:*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \, \cos nx \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \, \sin nx \, \mathrm{d}x \ (n \geqslant 1)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\widetilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = 2a_0$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Утверждение 5. *Коэффициенты разложения по экспонентам:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \, e^{-inx} \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\times}^{\infty} c_n e^{inx}$$

§ 4 Ядро Дирихле. Лемма Римана-Лебега

Определение 1 (Ядро Дирихле). $\mathcal{D}_n(x) := \sum\limits_{-n}^{n} e^{ikx}$

Лемма 1 (Свойства ядра Дирихле).

1. $\mathcal{D}_n(-x) = \mathcal{D}(x)$
2. $\mathcal{D}_n(x) = \dfrac{\sin(n + 1/2)x}{\sin\frac{x}{2}}$
3. *всякие следствия отсюда*

Определение 2 (Ядро Фейера). $\mathcal{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_k(x)$

Лемма 2 (Свойства ядра Фейера).

1. $\mathcal{F}_n(-x) = \mathcal{F}(x)$
2. $\mathcal{F}_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}$
3. *всякие следствия отсюда*

Лемма 3 (Римана-Лебега). *Пусть $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos nx\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-inx}\, x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

§ 5 Теорема Дини о поточечной сходимости

Теорема 1 (Дини). *Пусть $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$. Допустим, f удовлетворяет условию Дини:*

$$\exists\, L \in \mathbb{C}, \delta > 0 \;::\; u \in \mathcal{L}\big((0;\delta)\big), u(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2L}{t}$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{ikx} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Утверждение 2. *Частные случаи условия Дини:*

1. $\exists$ *конечные* $f(x\pm 0)$, $f'(x\pm 0)$. *При этом* $L = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.
2. f *непрерывна в* x, $\exists$ *конечные* $f'(x\pm 0)$. *При этом* $L = f(x)$.
3. f *дифференцируема в* x. *При этом* $L = f(x)$.

§ 6 Свойства коэффициентов Фурье

Обозначение. $\widehat{f}(n) := c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\,\mathrm{d}x$

Утверждение 1. $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \widehat{f}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Утверждение 2. *Пусть* $\exists\, f' \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\to\infty$

Утверждение 3. *Пусть* $\exists\, f^{(p)} \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$. *Тогда*

- $\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \cdot \widehat{f'}(n)$
- $\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $n\to\infty$

Утверждение 4. *Пусть* $c_n = O\left(\dfrac{1}{n^{p+2}}\right)$. *Тогда* $\exists\, \varphi \in C_{2\pi}^p \;::\; \varphi \sim f$.

§ 7 Сходимость рядов Фурье..

1° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow \forall\, \Delta \subset [-\pi,\pi] \;::\; \displaystyle\int\limits_{\Delta} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int\limits_{\Delta} e^{inx}\,\mathrm{d}x$.

2° $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi} \Rightarrow c_n$ определены.

3° $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi} \Rightarrow \|S_n - f\| \to 0$.

4° $f \in C^{(p)} \Rightarrow c_n$ быстро убывают.

5° c_n быстро убывают $\Rightarrow f \in C^{(p)}$.

6° теорема Дини 3.5.1

7° теорема Фейера 3.7.1

Теорема 1 (Фейера)**.** *Пусть* $f \in C^{2\pi}$. *Тогда* $\sigma_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f$, *где* $\sigma_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_k$. *(сходимость по Чезаро).*

§ 8 Преобразование Фурье

Определение 1. Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(s) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx}\, \mathrm{d}x$$

1. $|\widehat{f}(s)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$.
2. $\widehat{f}(s) \in C^0$.
3. $\left(g(x) = x^n f(x) \in \mathcal{L}_1\right) \Rightarrow \widehat{f}(s) \in C^{(n)}$.
4. $\widehat{f}(s) \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$.
5. $\left(f \in C^{(p)}, f^{(p)} \in \mathcal{L}_1\right) \Rightarrow \widehat{f}(s) = o\left(\frac{1}{|s|^p}\right)$.
6. $f \in \mathcal{L}_1, a \in \mathbb{R}, g(x) = f(x-a) \Rightarrow \widehat{g}(s) = e^{-isa}\,\widehat{f}(s)$
7. $f, g \in \mathcal{L}_1$. Тогда
$$\widehat{f * g}(s) = 2\pi\,(\widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s))$$
8. Интегральная формула Фурье 3.8.1

Тут по идее все можно в $\mathbb{C}$

Теорема 1 (формула восстановления Дини)**.** *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{C}$. Допустим f удовлетворяет условию Дини в точке x с константой L. Тогда*

$$\check{\widehat{f}}(x) = L$$

Для непрерывных функций

$$f(x) = \mathrm{V.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s)\, e^{isx}\, \mathrm{d}x$$

§ 9 Решение уравнения теплопроводности

Само уравнение теплопроводности выглядит так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Но к нему ещё есть пара начальных условий:

$$u(x, 0) = f(x)$$
$$f \in \mathcal{L} \qquad f \in C^2_x$$

⟨⚒⟩ : <+решить что-ли..+>
В итоге получится что-то вроде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \cdot f(y)\, \mathrm{d}y$$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — объединение дизъюнктных множеств.

$\mathscr{A}$ Алгебра множеств

Нестандартные обозначения

⟨⚒⟩ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

⟨⍨⟩ — кривоватая формулировка

⟨`:set aflame`⟩ — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a \mathinner{..} b$ — $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ В кванторах, «верно, что»

$\mathscr{A}_\sigma$ Сигма-алгебра множеств