1. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r}(t)$, $(x,y,z)(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$.

$\dot{\boldsymbol{r}}$: $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\dot x,\dot y,\dot z)(t)$, $\boldsymbol{\tau}\dot s$.

$\ddot{\boldsymbol{r}}$: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\ddot x,\ddot y,\ddot z)(t)$, $\ddot s\boldsymbol{\tau} + \dot s^2 k_1 \boldsymbol{n}$

2. В криволинейных координатах

▷ $\boldsymbol{e}^k\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{kj}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_i a^i b_i$

▷ $\xi_k = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_k = \sum_j \xi^j g_{jk}$,

$\xi^k = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}^k = \sum_j \xi_j g^{jk}$

▷ $\boldsymbol{e}^k = \sum_j g^{jk} e_j$, $\boldsymbol{e}^k = \sum_j g^{jk} e^j$

▷ $\sum_i g^{i\ell} g_{ik} = \delta_{\ell k}$

3. Скорость и ускорение

▷ $\boldsymbol{v} = \sum_k \dot q^k \boldsymbol{e_k}$

▷ $\boldsymbol{w} = \sum_k \ddot q^k \boldsymbol{e}_k + \sum_{k,i} \dot q^k \dot q^i \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}$

▷ $w^j = \ddot q^j + \sum_{k,i} \dot q^k \dot q^i \Gamma^j_{ki}$

▷ $\Gamma_{j,\,ki} = \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}_j$ — I рода

▷ $\Gamma^j_{ki} \;= \dfrac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}^j$ — II рода

▷ $w_\ell = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial}{\partial \dot q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)\right) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}\right)$

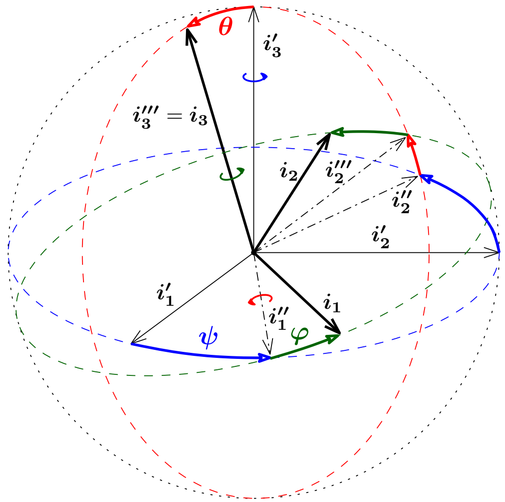
4. Про углы Эйлера

▷ $\boldsymbol{\omega} = \dot\psi\, \boldsymbol{i}'_3 + \dot\theta\, \boldsymbol{i}''_1 + \dot\varphi\, \boldsymbol{i}_3$

▷ $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0(t) + \boldsymbol{r}(t)$

▷ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_r$

▷ $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{w}_r$



5. Динамика точки и систем точек

▷ $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(t, \{c_\ell\})$, $k\in 1\,..\,N$, $\ell \in 1\,..\,6N$

▷ $m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{F}_k$, $m w_\ell = Q_\ell$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q^\ell}\right) - \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q^\ell} = Q_\ell$

▷ $\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\sum_k m_k \boldsymbol{r}_k}{\sum_k m_k}$, $\sum_k m_k = M$

6. Закон сохранения импульса

▷ $\boldsymbol{p} = \sum_k \boldsymbol{p}_k$, $\boldsymbol{p}_k = m_k\boldsymbol{v}_k$

▷ $\boldsymbol{F} = \sum_k \left(\boldsymbol{F}_k^{(e)} + \boldsymbol{F}_k^{(i)}\right)$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{(e)}$. Все сиды взаимодействия вымерли.

7. Момент импульса

▷ $\boldsymbol{\ell} = \sum_k \boldsymbol{\ell}_k$, $\boldsymbol{\ell}_k = \boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{p}_k$

▷ $\boldsymbol{L} = \sum_k \boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(e)} + \sum_k \boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)}$

▷ $\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)} = \lambda(\boldsymbol{r}_{kj})\boldsymbol{r}_{kj} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = \sum_k \boldsymbol{L}_k^{(e)}$.

8. Энергия

▷ $T = \sum_k T_k$, $T_k = \dfrac{m_k(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{v}_k)}{2}$

▷ $\delta A_k = \boldsymbol{F}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$, $A = \int_\Gamma \delta A$, а вообще-т интеграл от формы.

▷ $\mathrm{d}T = \delta A_k^{(e)} + \delta A_k^{(i)}$

▷ $\mathrm{d}E = \mathrm{d}\left(T + \Pi^{(e)} + \Pi^{(i)}\right) = \delta A_{\text{не пот}}$

9. В поле центральной силы¬

▷ $u = 1/\rho$.

▷ Формулы Бине

$$\begin{cases} v^2 = c^2\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right) \\ w_\rho = -c^2u^2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u\right)\end{cases}$$

▷ Невыразимая жжесть

10. ⟨?⟩⟨`:set aflame`⟩Движение твёрдого тела ¬

▷ $\omega = 0$ — поступательное

▷ $\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{w_0} = 0, \omega = \dot\varphi\boldsymbol{i_3}$ — вращение вокруг неподвижной оси

▷ $\boldsymbol{v_0} \upuparrows \boldsymbol{\omega}$ — винт

▷ Как попало вокруг неподвижной точки[1]¬

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{i}_1(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi) + \boldsymbol{i}_2(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi) + \boldsymbol{i}_3(\dot\psi\cos\varphi + \dot\varphi)$$

11. Скорость и ускорение точек твердого тела

▷ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$

▷ $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w_0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

12. Сложение движений ТТ

▷ $\boldsymbol{v_{r_n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k\times\boldsymbol{r}_0$, $O_0 = O$.

▷ $\boldsymbol{V} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)$

▷ $\boldsymbol{\Omega} = \sum_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k \quad\Rightarrow \boldsymbol{v_{r_n}} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_0$

13. Кинематический винт

▷ $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = 0$

14. Плоское движение

▷ $0 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$

▷ $\boldsymbol{r}_* = \left(-\dfrac{v_{0y}}{\omega}, +\dfrac{v_{0x}}{\omega}\right)$ —подвижная центроида

▷ $\boldsymbol{r}'_* = \boldsymbol{r}_* + \boldsymbol{r}_0$ — неподвижная центроида

▷ $\omega = \dfrac{|\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A|}{|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A|}$

▷ $\omega = \dfrac{|\boldsymbol{v}_a\times\boldsymbol{r}_{A*}|}{r^2_{A*}}$ и то же с B.

▷ центр ускорений: ⟨?⟩

15. Динамика вращения ТТ [2]

▷ $M = \int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)$, $\boldsymbol{r}_c = \dfrac{\int_\tau \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\mu(r)}{\int_\tau 1\,\mathrm{d}\mu(r)}$

▷ $\boldsymbol{\ell} = \int_\tau (\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}\mu$, $\boldsymbol{\ell}' = \int_\tau (\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\mu$

▷ $\boldsymbol{\ell}' = \boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{v}_0\,M + \boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{v_0}\,M + \boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)M + \ell$

▷ $T = \dfrac{1}{2}\int_\tau (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\,\mathrm{d}\mu$, $T' = \dfrac{1}{2}\int_\tau \boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\mu$

▷ $T' = T + \dfrac{1}{2}M\boldsymbol{v}_0^2 + M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)$

▷ $\ell_\omega = \omega J_\omega$

▷ $\boldsymbol{\ell} = \widehat{J}\boldsymbol{\omega} = \sum_{j,k} J_{jk}\omega_k\,\boldsymbol{i}_j$,

$J_{ik} = \int_\tau (r^2\delta_{jk} - x_jx_k)\,\mathrm{d}\mu$

▷ $T = \dfrac{J_\omega\omega^2}{2} = \dfrac{\widehat{J}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2}$

▷ $L = \dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$

▷ Динамические уравнения Эйлера ¬

$L_a = J_a\dot\omega_a + (J_c - J_b)\,\omega_c\omega_b$

$L_b = J_b\dot\omega_b + (J_a - J_c)\,\omega_a\omega_c$

$L_c = J_c\dot\omega_c + (J_b - J_a)\,\omega_b\omega_a$

▷ Кинематические уравнения Эйлера ¬

$\omega_a = (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)$

$\omega_b = (\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)$

$\omega_c = (\dot\psi\cos\varphi + \dot\varphi)$

16. Вращение вокруг неподвижной оси¬

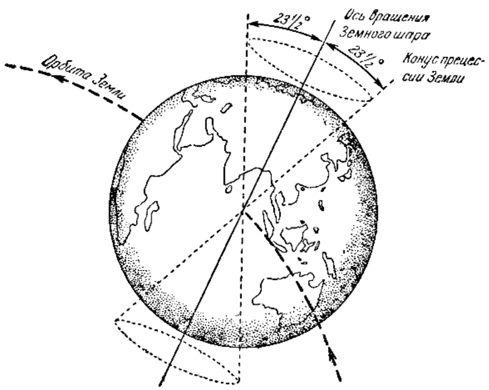
▷ $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_c}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B$, $\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$, $\Rightarrow$

$$m(-\ddot\varphi x_{c_2} + (\dot\varphi)^2 x_{c_1}) = F_1 + N_{A_1} + N_{B_1}$$
$$m(\ddot\varphi x_{c_1} - (\dot\varphi)^2 x_{c_2}) = F_2 + N_{A_2} + N_{B_2}$$
$$0 = F_3 + N_{A_3} + N_{B_3}$$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) \Rightarrow$

$$J_{13}\ddot\varphi - J_{23}(\dot\varphi)^2 = L_1 - r_A N_{A_2} + r_B N_{B_2}$$
$$J_{23}\ddot\varphi + J_{13}(\dot\varphi)^2 = L_2 + r_A N_{A_1} - r_B N_{B_1}$$
$$J_{33}\ddot\varphi = L_3$$

17. $L = 0$



18. Сила всего одна и приложена к центру масс

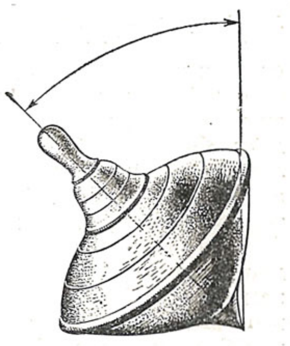
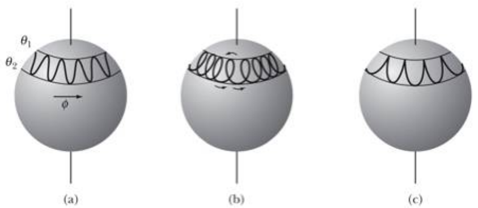


Рис. 10. Волчок.



19. Связи

▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ (или $= 0$)
▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow f(t, \boldsymbol{r}) = 0$ — голономные
▷ $\boldsymbol{R}_i = \Lambda_i \nabla' \varphi_i + \boldsymbol{T}_i$, [3]

$$\Lambda_i = -\frac{m\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + m\nabla\varphi_i \boldsymbol{v} + \nabla'\varphi_i \boldsymbol{F}}{|\nabla'\varphi_i|^2}$$

20. По поверхности

▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda\nabla f + \boldsymbol{T}$
▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
▷ $\boldsymbol{F} = 0$, $v^2 = v_0^2 e^{-\alpha(s)}$

21. По кривой

▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda_1\nabla f_1 + \Lambda_2 \nabla f_2 + \boldsymbol{T}$
▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
▷ катится мир к упадку

22. Принцип Даламбера-Лагранжа: Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю: $(M\ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{Y}) \cdot \delta\boldsymbol{y} = 0$

23. При варьировании с фиксированными концами $\left(\delta t_1 = \delta t_0 = 0,\ \begin{matrix}\delta q^\ell|_{t_1} = 0 \\ \delta q^\ell|_{t_2} = 0\end{matrix}\right)$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

▷ $\delta W = \delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} 2T$, $T = \frac{M}{2}\displaystyle\sum_{j,k} g_{ij}\dot q^j \dot q^k$
▷ $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0}$,
$\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot q^\ell \delta t$ (полная вариация)
▷ Лишь при этом условии работает принцип выше

25. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0$

26. $\begin{cases} \dot q^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot p_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0, \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q^l\, \partial a^p}\right) \neq 0 \\ p_\ell = \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell},\ b_k = \dfrac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k \text{ — const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot q^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot p_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

▷ Ф. объём: $\displaystyle\int_M \rho\, \mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}\Omega =$ “$\displaystyle\prod_i$”$\mathrm{d}q^i\, \mathrm{d}p_i$
▷ Пуанкаре: $\displaystyle\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k$
▷ Пуанкаре-Картане: $\displaystyle\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k - H \mathrm{d}t$

Здесь
M — сечение фазовой трубки,
C — охватывающий её контур.

29. Канонические преобразования

Когда нету зависимости от времени

▷ $p_k = p_k(\widetilde p, \widetilde q)$, $q^k = q^k(\widetilde p, \widetilde q)$,
$\widetilde H(t, \widetilde p, \widetilde q) = H\big(t, p(\widetilde p, \widetilde q), q(\widetilde p, \widetilde q)\big)$

Когда есть порождающая функция V.

0* $\widetilde L = L + \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$

1* $V_1(t, q, \widetilde q) = V$

2* $V_2(t, p, \widetilde q) = V + \displaystyle\sum_k p_k q^k$

3* $V_3(t, \widetilde p, q) = V - \displaystyle\sum_k \widetilde p_k \widetilde q^k$

4* $V_4(t, p, \widetilde p) = V + \displaystyle\sum_k p_k q^k - \sum_k \widetilde p_k \widetilde q^k$

При этом

$\langle 1\rangle$ $\widetilde p_k = +\dfrac{\partial V_1}{\partial \widetilde q^k}$, $p_k = +\dfrac{\partial V_1}{\partial q^k}$, $\widetilde H = H - \dfrac{\partial V_1}{\partial t}$

$\langle 2\rangle$ $\widetilde p_k = +\dfrac{\partial V_2}{\partial \widetilde q^k}$, $q^k = -\dfrac{\partial V_2}{\partial p_k}$, $\widetilde H = H - \dfrac{\partial V_2}{\partial t}$

$\langle 3\rangle$ $\widetilde q^k = -\dfrac{\partial V_3}{\partial \widetilde p_k}$, $p_k = -\dfrac{\partial V_3}{\partial q^k}$, $\widetilde H = H - \dfrac{\partial V_3}{\partial t}$

$\langle 4\rangle$ $\widetilde q^k = -\dfrac{\partial V_4}{\partial \widetilde p_k}$, $q^k = +\dfrac{\partial V_4}{\partial p_k}$, $\widetilde H = H - \dfrac{\partial V_4}{\partial t}$

Выглядит не очень, но бывают вещи и похуже

Заметки

[1] У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь ⟨⍨⟩

[2] Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить

[3] Здесь вообще градиенты, но жирная набла выглядит некрасиво: $\boldsymbol{\nabla}\varphi$