

## § 1 ✂ Интеграл от дифференциальной формы по пути

Параграфы со значком «✂» лучше не читать, они недопилены.

**Дифференциальные формы.** Начать лучше с полилинейных форм.

**Определение 1.** Пусть  $L$  — линейное пространство над полем  $K$ . Тогда функция  $A: L^k \rightarrow K$ , линейная по каждому из своих аргументов, называется  $k$ -линейной формой.

Нам тут хватит и 1-форм, так что

**Определение 2.** Дифференциальной 1-формой можно назвать отображение из  $\mathbb{R}^n$  в линейную (по  $h$ ) форму,  $P \in C^0$

$$\omega = \langle P(x), dx(x, h) \rangle$$

Но это как-то не очень (а что такое дифференциал?).

**Гладкие пути.**

**Определение 3.** Пусть  $\gamma: [a; b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\gamma$  называется путём в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

- Путь гладкий, если  $\gamma \in C^1$ ,
- путь регулярный, если  $\text{rk } \gamma' \geq 1$ ,
- путь простой, если  $\gamma$  — биекция.

**Определение 4.** Образ  $\Gamma = \gamma([a; b]) \subset \mathbb{R}^n$  называется *кривой* в  $\mathbb{R}^n$ . Ещё говорят, что  $\Gamma$  — носитель пути  $\gamma$ , а  $\gamma$  — параметризация  $\Gamma$ .

*Замечание.* Путь простой  $\Leftrightarrow$  кривая не имеет самопересечений.

**Определение 5.** Будем говорить, что простые пути имеют одинаковую ориентацию, если

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) \quad \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

и противоположную, если всё наоборот. Тут ещё введу нестандартное обозначение, но так жить проще ☺.

- $\Uparrow$  — одинаковая ориентация
- $\Downarrow$  — противоположная ориентация

*Замечание.* Для биективных параметризаций видимо просто нет другого выбора. С петлями всё будет интереснее.

## Интегралы от форм по пути

**Определение 6.** Просто возьмём и определим интегралы по простому гладкому пути от 1-форм так:

$$I = \int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

**Утверждение 1** (Корректность определения выше). *Интеграл по пути не зависит от параметризации.*

□ Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  — параметризации  $\Gamma$ , одинаково ориентированы. Докажем, что

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = I_2$$

Поскольку  $\gamma_1, \gamma_2$  — биекции,  $\exists \varphi: t_2 = \varphi(t_1)$ , тоже биекция, такого сорта:  $t_1 \xrightarrow{\gamma_1} x \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} t_2$  Тогда

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} \langle P(\gamma_2(t_2)), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle dt_2 = \int_{a_1}^{b_1} \langle P(\underbrace{\gamma_2(\varphi(t_1))}_x), \partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \rangle \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1$$

Покажем, что  $\partial_{t_2} \gamma_2(t_2) \partial_{t_1} \varphi = \partial_{t_1} \gamma_1(t_1)$ . Это просто следует равенства  $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ , если его продифференцировать по  $t_1$ . Так что

$$\int_{a_1}^{b_1} \langle P(x), \partial_{t_1} \gamma_1(t_1) \rangle (\partial_{t_1} \varphi(t_1))^{-1} \partial_{t_1} \varphi(t_1) dt_1 = I_1$$

■

**Замечание 1.** Если  $\gamma_1 \uparrow \downarrow \gamma_2$ , то  $I_2 = -I_1$ .

**Замечание 2.** Если рассматривать только одинаково ориентированные пути, то

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\Gamma} \omega$$

**Замечание 3.** Если  $\Gamma$  разбивается на непересекающиеся  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , то

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$$

## Петли и интегралы по ним

**Определение 7.** Кривая  $\Gamma$  — петля, если для всякой её параметризации  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Петля называется простой, если  $\exists : \gamma|_{[a;b]}$  — биекция.

*Замечание.* Плохие петли можно разбивать на простые.

**Определение 8.** Пусть  $\Gamma$  — простая петля. Тогда

$$I = \oint_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle P, \dot{x}(t) \rangle dt$$

**Утверждение 2.** Определение выше корректно, и не зависит от выбора «начала» петли.



Можно рассмотреть 2 разные параметризации и разбить на 2 куска. Дальше работает определение интеграла по простому пути.



*Замечание.* Чтобы посчитать интегралы по всем остальным путям, их нужно разбивать на простые пути и простые петли

## § 2 ✂ Точные формы

**Определение 1.** 1-форма  $\omega$  называется точной в  $G$ , если  $\exists \Phi : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что  $\omega = d\Phi$ .  $\Phi$  в таком случае называется потенциалом, а сама форма ещё иногда называется потенциальной.

**Е.g.** Работа в физике.

**Теорема 1.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma \subset G$ ,  $\gamma(a) = A$ ,  $\gamma(b) = B$  Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

□  $\langle P, x \rangle = (\Phi \circ \gamma)'(t)$ . Дальше уже тривиально из непрерывности  $\Phi$ . ■

**Теорема 2.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$ ,  $\gamma_{1,2}(a) = A$ ,  $\gamma_{1,2}(b) = B$ . Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

**Теорема 3.** Пусть  $\omega$  — точная форма в  $G$ ,  $\Gamma \subset G$  — петля Тогда

$$\oint_{\Gamma} \omega = 0$$

**Теорема 4.** Пусть  $\omega$  — форма в  $G$ , и  $\int_{\gamma} \omega$  не зависит от пути при фиксированных концах. Тогда  $\omega$  — точна.

□ Надо показать, что  $\partial_i \Phi = P^i$ . В этом месте можно забить на общности и объявить  $n = 2$ . Докажем, что  $\partial_x \Phi = P^1$ . Поскольку от пути ничего не зависит,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left( \int_A^{(x+\Delta x, y)} \omega - \int_A^{(x, y)} \omega \right)$$

А это по сути интеграл по пути, соединяющем  $(x + \Delta x, y)$  и  $(x, y)$ . А здесь уже можно взять приличную кривую (прямую) с правильной параметризацией, и воспользоваться теоремой о среднем.

$$\dots = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Последнее равенство верно по непрерывности. ■

**Теорема 5.**  $\oint \omega = 0 \Rightarrow \omega$  — точна

**Теорема 6.** Пусть  $G$ ,  $\oint \omega = 0$  для любой прямоугольной петли. Тогда  $\omega$  — точна.

□ Аккуратно свести к теореме [0.2.4](#), там всё будет работать и с путями, параллельными осям координат. ■