# Глава 1: Кинематика точки

## § 2 Косоугольные координаты

Здесь можно немного добавить строгости, а то ничерта не понятно. Пусть $V$ — евклидово пространство (линейное со скалярным произведением). Как нам определяли, $g_{ik} = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_k}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{ij} a^i b^j g_{ij}$$

Здесь $a^k$ — коэффициенты разложения по $\mathbf{e_k}$ — называются контравариантными координатами.

Пусть $V^*$ — сопряжённое к $V$, его базисом являются координатные функции $\mathrm{f_k} :: \mathrm{f_k}(\mathbf{x}) = x^k$. Поскольку задано скалярное произведение, задан канонический изоморфизм $V \to V^*$. Нам, правда, потребуется $V^* \to V$.

Введём ещё одну систему *векторов* в $V$ : $\mathbf{e^k} = \mathrm{f_k^*}$, то есть $\mathrm{f_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{e^k} \cdot \mathbf{x}$. Она и называется взаимным базисом, коэффициенты разложения по ней — ковариантные координаты. Из линейности скалярного произведения, ровно такие же координаты будут у соответствующей формы в $V^*$. Линейную независимость легко получить из ЛНЗ $\mathrm{f_k}$, а раз их $\dim V$, то полученные векторы являются базисом.

Так что можно сформулировать правило:

- Контравариантные координаты — коэффициенты разложения по базису линейного пространства.
- Ковариантные координаты — коэффициенты разложения по базису пространства линейных форм.

А вот теперь можно уже развлекаться с индексами.

**Утверждение 1.** $\mathbf{e^k} \cdot \mathbf{e_j} = \delta_{kj}$

**Утверждение 2.** *Пусть* $\mathbf{r} = \xi^k \mathbf{e_k}$ *и* $= \xi^k \mathbf{e_k}$. *Тогда* $\xi_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e_k}$