§ 1 Матрицы, основные определения

Определение 1 (Матрицы над K)**.** Пусть K— поле, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M_{m,n}(K) = \left\{ A \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mb} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in K \right\}$$

Определение 2 (Сложение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{mn}$:

$$(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Определение 3 (Умножение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{nk}$:

$$(ab)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$$

§ 2 Кольцо квадратных матриц

Обозначается $M_n(K)$
Ноль:

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Единица:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

§§ 3–4 Определитель

Определение 1. Пусть $A \in M_n(K)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Определение 2. Если обозначать строки $A_1, \ldots, A_n$, а столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, то можно ввести ещё такую функцию:

$$\det(A_1, \ldots, A_n) = \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) := \det A$$

Определение 3 (Элементарные преобразования).

$$
\begin{array}{rll}
\mathrm{I} & A_i \leftrightarrows A_j & A^{(i)} \leftrightarrows A^{(j)} \\
\mathrm{II} & A_i := A_i + \lambda A_j & A^{(i)} := A^{(i)} + \lambda A^{(j)} \\
\mathrm{III} & A_i := \lambda A_i & A^{(i)} := \lambda A^{(i)}
\end{array}
$$

Определение 4 (Транспонированная матрица).

$$A^T \colon (a^T)_{ij} = (a)_{ij}$$

Свойства

1. Определитель (в описанном в 0.4.2 смысле) полилинеен и кососимметричен по строкам и столбцам.
2. Если 2 строчки или столбца одинаковые, то определитель равен 0
3. Элементарные преобразования влияют на определитель следующим образом:
$$
\begin{array}{c|r}
\mathrm{I} & (-1)\det A \\
\mathrm{II} & \det A \\
\mathrm{III} & \lambda \det A
\end{array}
$$
4. $\det A^T = \det A$

§ 5 Теорема Лапласа

Определение 1 (Минор). Пусть $A \in M_n(K)$, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда определитель подматрицы, собранной из k строк и k столбцов называется *минором* порядка k.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Δ' — дополнительный минор— всё, что осталось. Его ещё иногда (когда минор— один элемент) обозначают как M_{ij}

Определение 2 (Алгебраическое дополнение).

$$A_\Delta = (-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\Delta'$$

Теорема 1 (Теорема Лапласа)**.** *Пусть $A \in M_n(K)$, $k \in \mathbb{N}$. Выберем из матрицы k строчек. Тогда*

$$\det A = \sum_{\Delta} \Delta \cdot A_{\Delta}$$

где Δ — любой минор, содержащий нужные k строчек.

$\square$ Выберем какой-то один минор, i_k — его строчки, j_ℓ — его столбцы

$$\Delta : \begin{cases} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{cases}$$

Теперь отправим все элементы, попавшие в минор, в левый верхний угол. Сначала сдвинем все строчки:

$$\begin{cases} i_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

Потом все столбцы

$$\begin{cases} j_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

В итоге, из свойств элементарных преобразований, получим:

$$\det B = (-1)^{i_1 - 1 + \cdots + i_k - k + j_1 - 1 + \cdots + j_k - k} \det A = (-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} \det A$$

так как все добавки парные $\Rightarrow$ делится на 2.

С другой стороны, Δ и Δ' никак не поменялись, так как переставляемые чиселки в них не не входят. Также нужно отметить, что $B_\Delta = \Delta'$, по тем же причинам, в общем-то.

Посмотрим, что такое $\Delta \cdot \Delta'$ [1].

$$\Delta \cdot \Delta' = \left(\sum_{\tau \in S_k} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau(1)} \cdots b_{k\tau(k)} \right) \cdot \left(\sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{I(\tau')} b_{k+1\tau'(k+1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right)$$

[1] Вообще, тут маленькая неточность: здесь фактически *действие* группы перестановок на множестве $\{k+1, \ldots, n\}$

Пусть теперь $\sigma = \tau \circ \tau'$. Тогда $I(\sigma) = I(\tau) + I(\tau')$ по свойствам перестановок, а σ фактически разбивается на 2 независимых: τ и τ'. В итоге

$$\Delta \cdot \Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

А это вообще-то правильный кусок определителя B. Поймём, что это за кусок определителя A. Числа-то те же самые. А вот на вопрос со знаком мы уже по сути ответили, когда рассуждали про определитель. Слагаемые точно не перемешиваются, так как все перестановки— биекции, так что каждое слагаемое просто умножается на $(-1)\cdots$. Так что

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot \Delta' &= (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)} \\
A_\Delta &= (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \Delta' \\
\Delta \cdot A_\Delta &= \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)}
\end{aligned}$$

где у σ' уже другие независимые циклы: $\binom{i_1,\dots,i_k}{j_1,\dots,j_k}$ и всё остальное.
■

Следствие 1.

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Следствие 2.

$$a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0$$

▼
Приравняем i строчку к j-ой, получим матрицу B. Тогда

$$a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in} = b_{i1}B_{i1} + \cdots + b_{jn}B_{in} = \det B = 0$$

Так как определитель B очевидно равен 0
▲

§ 6 Ступенчатая матрица

Определение 1. $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ — ступенчатая матрица.[1]

[1]вообще-то, она квазитреугольная, а не ступенчатая

Теорема 1 (Определитель ступенчатой матрицы)**.**

$$\det A = \det A_1 \cdots \det A_n$$

$\square$ По индукции через теорему Лапласа 0.5.1 $\blacksquare$

§ 7 Определитель произведения матриц

Теорема 1. *Пусть* $A, B \in M_n(K)$*. Тогда*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$\square$ Докажем, что такие матрицы имеют одинаковый определитель:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E_n & B \end{array}\right) \quad \text{и} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} AB & A \\ \hline 0 & -E_n \end{array}\right)$$

Теперь сделаем из куска с B Z_n.

$$D'^{(n+j)} := C^{(n+j)} + b_{1j}C^{(1)} + \cdots + b_{nj}C^{(n)}$$

Внизу получатся нули, а вот сверху:

$$d_{i,n+j} = 0 + b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{nj}a_{in} = (ab)_{ij}$$

Тысяча индексов, это же произведение матриц!

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E_n & 0 \end{array}\right)$$

Мы тут пользовались только преобразованием II, так что определитель не поменялся.

Теперь переставим половинки матрицы. При этом будет совершено n преобразований I. Так что

$$\begin{aligned} \det A \det B = \det C = \det D' = (-1)^n \det D = (-1)^n \det(-E_n) \det(AB) \\ = (-1)^{2n} \det(AB) = \det AB \end{aligned}$$

$\blacksquare$

§ 8 Обратимость матриц

Определение 1. Пусть $A = M_n(K)$. Тогда A — невырожденная $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Определение 2 (Взаимная матрица)**.**

$$\widetilde{A} = (a)_{ij}^T$$

Лемма 1.

$$A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot E_n$$

Определение 3. Пусть $A = M_n(K)$. Тогда матрица A^{-1} :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$

(если существует)

Следствие 1. *Если* $\det A \neq 0$*, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$$

Следствие 2. *A невырождена $\Leftrightarrow$ A— обратима.*

Следствие 3. *Пусть $A, B \in M_n(K)$. Тогда*

$$AB = E_n \Rightarrow A, B \text{ — обратимы и } \begin{cases} B = A^{-1} \\ A = B^{-1} \end{cases}$$

§§ 9–10 Ранг, строчный и столбцовый

Определение 1 (Строчный ранг)**.** Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда

$$\mathrm{rk}_s(A) = \dim\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$$

Определение 2 (Столбцовый ранг)**.** Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда

$$\mathrm{rk}^{(s)}(A) = \dim\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}\rangle$$

Лемма 1. *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

▼

Пусть $B_1, \dots, B_m$ получены из $A_1, \dots, A_m$ элементарными преобразованиями строк. Эти преобразования— линейные.[1]. Так что линейная оболочка никак не изменится.

$$\langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle B_1, \dots, B_m \rangle$$

А значит, и ранги совпадают.

▲

Транспонирование даст аналогичное рассуждение для столбцов

Лемма 2. *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

▼

Пусть $\mathrm{rk}^{(s)}(A) = r$. Будем по одному убирать из линейной оболочки столбцов линейно выражающиеся векторы

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \rightsquigarrow \langle A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)} \rangle$$

Пусть после линейных преобразований образы этих векторов стали линейно зависимы, $A \rightsquigarrow B$. Перепишем:

$$\beta_1 B^{(i_1)} + \dots + \beta_n B^{(i_r)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_{1i_1}\beta_1 + \dots + b_{1i_r}\beta_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{mi_1}\beta_1 + \dots + b_{mi_r}\beta_n = 0 \end{cases} \quad (\exists\, \beta_i \neq 0)$$

Проведём все преобразования в обратную сторону. Тогда, $\{\beta_i\}$ тоже останутся решениями такой системы уравнений, так как все преобразования не изменят решений. А тогда и $\{A^{i_k}\}$ — линейно зависимы(?!?).

Таким образом, $\mathrm{rk}^{(s)} B \geqslant \mathrm{rk}^{(s)} A$. Теперь можно поменять всюду A и B местами. В силу обратимости элементарных преобразований рассуждение не изменится. Так что $\mathrm{rk}^{(s)} A \geqslant \mathrm{rk}^{(s)} B$. А тогда $\mathrm{rk}^{(s)} A = \mathrm{rk}^{(s)} B$.

▲

Транспонирование даст аналогичное рассуждение для строчек

§ 11 Ранг матрицы

Теорема 1. *Строчный и столбцовый ранг совпадают*

[1]Вообще, конечно, так нехорошо. Линейные отображения ещё не ввели, так что надо каждое преобразование проверять

□ Тут рисовать надо, а я пока не умею это делать быстро..$\ddot{\frown}$ Будем приводить матрицу к такому виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. Найдём ненулевой элемент, поставим в $1, 1$ преобразованием I
2. С помощью преобразования II для строк сделаем нулевым весь первый столбец, кроме $1, 1$.
3. Теперь с помощью такого же преобразования для столбцов сделаем первую строку нулевой, кроме первого элемента.
4. Поделим первую строку на первый элемент
5. Выкинем первую строку и первый столбец, повторив всё для остальной матрицы

Даже такие издевательства над бедной матрицей не изменят оба ранга. А в преобразованной они очевидно равны ■

Определение 1 (Ранг матрицы)**.**

$$\operatorname{rk} A := \operatorname{rk}_s(A) = \operatorname{rk}^{(s)} A$$

§ 12 Ранги и миноры

Теорема 1. *Ранг матрицы— наибольший порядок*[1] *её ненулевого минора.*

□ Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Тогда строки всех миноров порядка $s > r$ линейно зависимы. А значит, можно элементарными преобразованиями получить строку нулей. Значит, наибольший порядок минора $\leqslant r$.

Докажем, что минор порядка r подходит. Выберем r линейно независимых строк и из них вытащим подматрицу. Убедимся, что её определитель ненулевой. Можно преобразовать её всё тем же алгоритмом, что был описан в теореме 0.12.1, разве что делить первую строку чтобы получить 1 не будем. Если где-то появится нулевая строка, значит строки были линейно зависимы. А матрица ещё была квадратной. Так что получится матрица диагонального вида. Определитель посчитать нетрудно, он получается ненулевой. ■

[1]размер подматрицы соответствующей минору, проще говоря.

§ 13 Матричная запись СЛУ и решения такой системы

Определение 1. Рассмотрим какую-то систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases} \tag{1}$$

Можно записать её в таком виде:

$$A \cdot X = B$$

где A — матрица системы, X — столбец неизвестных, B — столбец решений, умножение матричное.

Однородную систему уравнений можно записать как $A \cdot X = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Решение однородной системы линейных уравнений— подпространство K^n, причём размерность пространства решений— количество главных (основных, базисных) переменных.*

$\square$ Приведём матрицу к ступенчатому[**?**, стр. 50] виду. Нигде это нормально не определялось, но и так очевидно что это и как получается. Я рисуночек хотел вставить, но не успею.

Тогда главные переменные— те, что которые соответствуют числа, *не* стоящие на краях «ступенек». Пусть $i_1, \dots, i_k$ — их номера. Тогда рассмотрим $\{e_j\}$, такие, что

$$e_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vdots \\ i_1 \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \end{matrix} \end{array}$$

причём остальные чиселки в этих векторах выбираются с тем условием, что $Ae_j = 0$.

Все e_j разные, так что система линейно независима. Теперь докажем, что все решения порождаются такой системой векторов.

Пусть x — столбец решений. Соберём

$$x^* = x_{i_1}e_i + \cdots + x_{i_k}e_k$$

Если подумать до конца своих дней, то можно осознать, что

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ Ax^* = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x* \text{ — решение.}$$

Оказалось, что думать до конца своих дней не нужно, ведь векторы e_j определены так, что $Ax^* = 0$.

Итак, мы выяснили, что $x - x^*$ решение. Но у этого вектора на всех позициях, соответствующих главным переменным стоят нули. А раз он решение, то и на всех остальных местах нули. (ну, иначе $1 \cdot x_1 \neq 0$, например). Тогда $x = x^*$.

Чудно, мы получили что можем таким хитрым базисом породить все решения. Докажем, что решения— подпространство.

Пусть x^1, x^2 — решения. Тогда

$$A(\lambda x^{(1)} + \mu x^{(2)}) = \lambda A x^{(1)} + \mu A x^{(2)} = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

Тогда по лемме **??** оно подпространство. А выбранные векторы e_j — базис, так как они порождают все решения и линейно независимы. ■

Определение 2. Базис пространства решений ОСЛУ — фундаментальная система решений.

Теорема 2. *Пусть* (2) *— однородная система линейных уравнений. Тогда размерность пространства её решений равна* $m - \operatorname{rk} A$*, где* m *— порядок матрицы.*

□ Если сделать матрицу ступенчатой с единицами на «ступеньках» , то её ранг не изменится. Размерность строк приведённой матрицы — это число «ступенек». А последнее равно $m - k$, где k — число главных переменных. ■

Теорема 3. *Пусть* V *— пространство решений* (2)*,* U *— множество решений* (1)*,* $x^0 \colon Ax^0 = B$*. Тогда* $U = V + x^0$ *— аффинное подпространство* K^n

$\square$ Пусть $x \in V + x^0$. Тогда $x = x' + x^0$, $x' \in V$.

$$Ax = Ax' + Ax^0 = B + 0 = B \Rightarrow x \in U \Rightarrow V + x^0 \subset U$$

С другой стороны, пусть $y \in U$. Тогда

$$A(y - x^0) = Ay - Ax^0 = 0 \Rightarrow y \in V + x^0 \Rightarrow U \subset V + x^0$$

$\blacksquare$

§ 14 Теорема Кронекера-Капелли

Определение 1. Система уравнений вида $Ax = B$ называется совместной, если она имеет решение.

Определение 2 (Расширенная матрица сиситемы)**.**

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_1 \end{pmatrix}$$

Теорема 1 (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ* $Ax = B$ *совместна* $\Leftrightarrow \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|B)$

$\square$

$\Rightarrow$

$$Ax = B \Rightarrow A^{(1)}x_1 + \cdots + A^{(n)}x_n = B$$

Таким образом, B выражается через $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$. Следовательно,

$$B \in \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \Rightarrow \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, B \rangle$$

А тогда равны их размерности $\Rightarrow$ равны ранги.

$\Leftarrow$ Раз равны ранги, то равны и размерности линейных оболочек столбцов. А раз прибавление вектора B не меняет размерности, то он линейно выражается через остальные. Дальше уже совсем ясно.

$\blacksquare$

§ 15 Матрицы элементарных преобразований

$$\text{I}\ E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{II}\ E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{III}\ E_i(\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Умножение слева преобразует строки, справа— столбцы.

Поиск обратной матрицы Можно привести матрицу, как уже много раз делали, к такому виду

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

1) $M \neq E_n \Rightarrow A$ необратима.

2) $M = E_n$.

$$\begin{aligned} E_n &= \underbrace{P_\ell \cdots P_1}_{\text{преобразования строк}} \quad A \quad \underbrace{Q_1 \cdots Q_s}_{\text{преобразования столбцов}} \\ A &= P_1^{-1} \cdots P_\ell^{-1} E_n Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} \\ A^{-1} &= Q_1 \cdots Q_s P_\ell \cdots P_1 \end{aligned}$$

Отсюда кстати проистекает волшебный способ поиска обратной матрицы — написать рядом с ней единичную и преобразованиями строк получить из неё единичную. Тогда там, где была единичная матрица, получится обратная к A.