§ 1 Оценка приращения дифференциального отображения

Утверждение 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. *Тогда формула Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

не работает.

E.g. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения)**.** *Пусть* $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G *— выпуклое,* f *— дифференцируема,*

$$\forall\, x \in G \;\; \|f'(x)\| \leqslant M$$

Тогда $\forall\, a, b \in G \;\; \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$

☐ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где

$$\begin{array}{lll}
\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m & \varphi(t) := t(b-a) + a, & t \in [0,1] \\
\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a)
\end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists\, c \in [0,1]\colon F(1) - F(0) = F'(c)(1-0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leqslant \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$\mathrm{d}L(x,h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b-a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b-a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, l \rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leqslant M \cdot \|\ell\| \cdot \|b-a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

§ 2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, существуют производные k-го порядка. Тогда

$$\partial^{k+1}_{i_1,\dots,i_{k+1}} f(x) := \partial_{i_{k+1}}(\partial^k_{i_1,\dots,i_{k+1}} f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p-го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p-го порядка от перестановки переменных)**.** *Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом*

$$\begin{aligned} &i = \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ &j = \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ &j = \pi(i) \end{aligned}$$

Тогда $\partial^p_i f(x) = \partial^p_j f(x)$

Замечание 1. Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

§ 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$

$$\mathrm{d}^p f(x) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_p}} \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

Утверждение 1. *Если частные производные можно переставлять, то*

$$\mathrm{d}^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geqslant 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n} \, \mathrm{d}x_{i_1} \cdots \mathrm{d}x_{i_p}$$

§ 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

Теорема 1. *Пусть $f \in C^p(G), G \in \mathbb{R}^n$, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n\colon a + h \in G$. Тогда*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \, \mathrm{d}^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. *В форме Пеано: $R_p(h) = o(\|h\|^p)$*

2. *В форме Лагранжа $R_p(h) = \dfrac{1}{(p+1)!} \, \mathrm{d}^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0, 1)$*