1 Волновое уравнение

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 1 Классификация уравнений второго порядка

Выглядят так

$$\mathcal{L}[u] = \sum_{i,j} A^{ij}\partial^2_{ij}u + \sum_i B^i\partial_i u + Cu = 0$$

В зависимости от собственных чисел A классифицируются

$$\begin{aligned} &\text{эллиптический} && \Rrightarrow\ \forall\, i\ ::\ \Lambda_i > 0 \\ &\text{параболический} && \Rrightarrow\ \exists\, j:\ \Lambda_j = 0, \quad \forall\, i \neq j\ ::\ \Lambda_i > 0 \\ &\text{гиперболический} && \Rrightarrow\ \exists\, j:\ \Lambda_j < 0, \quad \forall\, i \neq j\ ::\ \Lambda_i > 0 \end{aligned}$$

И их канонические формы

$$\begin{aligned} \Box\, u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{волновое уравнение} \\ \Delta u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение Лапласа} \\ \left(-\partial_t + a^2\Delta\right) u = 0 \quad &\Rrightarrow \quad \text{уравнение теплопроводности} \end{aligned}$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 2 Характеристические поверхности

Здесь непросто, потому что обычно характеристики определяют для уравнений первого порядка. А тут нужно как-то факторизовать.

Впрочем, можно сказать, что характеристическая поверхность — $(w_x, Aw_x) = 0$ Здесь $\xi = w(x,y)$, и для тех типов уравнений, что мы рассматриваем, верно

- ▷ $\omega \equiv \mathrm{const}$
- ▷ при замене переменных $\xi = \omega(x,y)$ член при $u_{\xi\xi}$ зануляется[1]

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 3 Волновое уравнение

Уравнение и начальные условия:

$$\begin{gathered} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u_t(x,0) = \varphi_1(x) \end{gathered}$$

Решение Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 4 Принцип Дюамеля

Основная мысль в том, чтобы научиться получать из решения однородного уравнения решение неоднородного неочевидным способом.

1. $\Box\, P = 0$, $P(x,t,t) = 0$, $P_t(x,t,t) = f(x,t)$ (если существует)
2. $w = \int_0^t P(x,t,t')\,\mathrm{d}t'$
3. $\Box\, w = f(x,t)$

Для волнового уравнения $P = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\xi,t')\,\mathrm{d}\xi$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 5 Энергетическое неравенство

<+картиночка+>

1. Ω_t — срез конуса причинности (характеристическая поверхность волнового уравнения).
2. $E[u] = u_t^2 + a^2u_x^2$

Само энергетическое неравенство

$$\int_{\Omega_0} E[u]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\Omega_t} E[u]\,\mathrm{d}x$$

Отсюда можно заполучить единственность решения волнового уравнения.

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 6

$$u(x,t) = t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_1(y)\,\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \varphi_0(y)\,\mathrm{d}S\right)$$

Здесь видно, что что возмущения (начальные) влияют на решение только будучи на границе конуса причинности. Получается, что волна не «запоминает» своё прошлое. То есть, возмущение приходит с волновым фронтом и уходит с ним.

Это не принцип Гюйгенса-Френеля (тот про функцию Грина), но тоже принцип Гюйгенса.

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЋЏ}intopreamble] 7

$$u(x,t) = \frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_1(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2}{2}\fint_{\mathcal{B}_{at}(x)} \frac{\varphi_0(y)}{\sqrt{(at)^2 - |x-y|^2}}\,\mathrm{d}y\right)$$

Здесь возмущение «чувствуется» даже после прохождения фронта. В каком-то смысле оно «размывается». Видимо, это и есть упомянутая диффузия?

2 Теплопроводность

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЂЦ}intopreamble] 1 Вывод уравнения

1. Уравнение неразрывности: $u_t = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}$
2. Связь потока с текущим веществом $\boldsymbol{F} \propto -\operatorname{grad} u$

$$u_t + a^2 \Delta u = 0$$

Характерные множества

параболический цилиндр (Q_T) $\Rrightarrow$ $\Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

параболическая граница $(\partial' Q_T)$ $\Rrightarrow (\Omega \times \{0\}) \cup \partial\Omega \times [0; T]$

Для удобства $R_T := Q_T(\Omega = \mathbb{R}^n)$.
Разные задачи:

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(0; T) \cap C(\partial' R_T), \quad u(x, 0) = \varphi \qquad (1)$$
$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(0; T) \cap C(\partial' Q_T), \quad u\big|_{\partial' Q_T} = \varphi \qquad (2)$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЂЦ}intopreamble] 2 Закон сохранения

При довольно мутных условиях (что-то вроде в меру быстрого убывания u к бесконечности)

$$\mathcal{U}(t, R) := \int_{\mathcal{B}_R(0)} u(x, t)\, \mathrm{d}x = \text{const}$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЂЦ}intopreamble] 3 Ограниченный принцип максимума

$$\inf_{\partial' Q_T} u(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \sup_{\partial' Q_T} u(x, t) \quad (\text{в } Q_T)$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЂЦ}intopreamble] 4 Принцип максимума в полупространстве

Пусть u ограничена сверху[2]

$$\inf_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} u(x, t)$$

[Pleaseinsert\PrerenderUnicode{вЂЦ}intopreamble] 5 Единственность

кажется, это очевидно следует из [Pleaseinsertintopreamble] 3, [Pleaseinsertintopreamble] 4.

№ 6 Автомодельные решения

$\triangleright$ $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$

$\triangleright$ $v(\xi) = c \displaystyle\int_0^{\xi} e^{-\xi^2/4a^2}\, \mathrm{d}\xi$

№ 7 Функция источника (одномерье)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

№ 8 Функция источника (многомерье)

$$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$$

№ 9 Свойства функции источника

1. $G(x, t) \in C^\infty$ при $t > 0$, $|x| > 0$
2. $G_t - a^2 \Delta G = 0$, при $t > 0$, $|x| > 0$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G(x, t)\, \mathrm{d}x = 1$ при $t > 0$
4. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) G(x, t)\, \mathrm{d}x = \varphi(0)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$

G — функция Грина: $G(x, 0) = \delta(x)$

№ 10 Формула Пуассона

Поставлена задача Коши:

$$\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \qquad (t > 0)$$
$$u(x, 0) = \varphi(x) \qquad (u(x, t) \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi(x))$$

Решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y) G(y, t)\, \mathrm{d}y = \varphi * G$$

№ 11 Принцип Дюамеля

1. $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + a^2 \Delta\right) P = 0$, $P(x, t, t) = 0$, $P_t(x, t, t) = f(x, t)$
2. $w = \displaystyle\int_0^t P(x, t, t')\, \mathrm{d}t'$
3. $\square\, w = f(x, t)$

Для уравнения теплопроводности

$$P(x, t, t') = \int_{\mathbb{R}^n} f(y, t')\, G(x - y, t - t')\, \mathrm{d}y$$

3 Уравнение Лапласа

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad -\Delta u = f \quad (\text{в } \mathbb{R}^n)$$ [3]

Разные задачи (по н.у.):

Дирихле $\Rrightarrow$ $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$

Неймана $\Rrightarrow$ $u_n\big|_{\partial\Omega} = \psi(x)$ $(u_n = (\nabla u, \boldsymbol{n}$ к $\partial\Omega))$

№ 1 Фундаментальное решение

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,|S_1|}\, \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}}, & n \geqslant 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & n = 2 \end{cases}$$

Тут $|S_1|$ — мера единичной сферы.

№ 2 Представление функции в виде суммы потенциалов

$$\begin{aligned}u(x) = &-\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_\Omega \frac{\Delta\, u(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}y\\ &-\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_{\partial\Omega} u(y)\left(\nabla_y \frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}, \boldsymbol{n}\right)\mathrm{d}s\\ &+\frac{1}{(n-2)\,|S_1|}\int_{\partial\Omega}\frac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned}u = &-\{\text{объёмный потенциал}\}\\ &-\{\text{потенциал двойного слоя}\}\\ &-\{\text{потенциал простого слоя}\}\end{aligned}$$

№ 3 Интегральное представление гармонической функции

$$u(x) = \frac{-1}{(n-2)\,|S_1|}\left(\int\limits_{\partial\Omega} u(y)\tfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\tfrac{1}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\partial\Omega}\tfrac{u_n(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\,\mathrm{d}s\right)$$

№ 4 Теорема о среднем для гармонических функций

$$u \in C^2(U), \Delta\, u = 0 \Rightarrow \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \;::\; \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y$$

№ 5 Обратная теорема о среднем

$$u \in C^2(U), \forall\, \mathcal{B}_r(x) \subset U \;::\; \fint_{\partial\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}s = \fint_{\mathcal{B}} u\,\mathrm{d}y \Rightarrow \Delta\, u = 0$$

№ 6 Свойства гармонических функций

1. $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $\Delta\, u = 0 \quad \Rightarrow$

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u \quad \text{(принцип максимума)}$$

2. 1, U связно, $\exists\, x_0 \in U:\; u(x_0) = \max u \quad \Rightarrow$

$$u \underset{U}{\equiv} \mathrm{const} \quad \text{(сильный принцип максимума)}$$

Единственность решения задачи Дирихле (почти очевидно).

№ 7 Свойства объёмного потенциала

Пусть $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $J[f] = \displaystyle\int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y$[4]

1. $J[f] \in C^2$
2. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \;\Rightarrow\; \Delta\, J[f] = 0$
3. $x \in \Omega \quad\Rightarrow\quad \Delta\, J[f] = (n-2)|S_1|f(x)$

что весьма похоже на потенциалы из небмеха.

№ 8 Формула Пуассона

Сначала введём *ядро Пуассона:* $K(x,y)$. При этом $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$

1. $\Delta\, u = 0 \;\Rightarrow\; u = \displaystyle\int_{\partial\Omega} K u$
2. $u = \displaystyle\int K\varphi \;\Rightarrow\; u \in C^\infty(\Omega),\; \begin{cases}\Delta\, u = 0\\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\end{cases}$

Конкретные случаи:

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \quad\Rightarrow\quad K(x,y) = \frac{2x_n}{|S_1|\,\|x-y\|^n} \;\text{(плоскость)}$$

$$\Omega = \mathcal{B}_R(0) \quad\Rightarrow\quad K(x,y) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{|S_1|\,\|x-y\|^n} \;\text{(шар)}$$

№ 9 Решение задачи Дирихле в шаре

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathcal{B}_R\\ f \in C_c^2(\Omega), \quad \varphi &\in C(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega);\\ u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad -\Delta\, u = f, \quad u\big|_{\partial\Omega} &= \varphi\end{aligned}$$

1. $v = \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{|S_1|}\displaystyle\int_{\partial\mathcal{B}} \frac{\varphi(y)}{\|x-y\|^n}\,\mathrm{d}y$
2. $w = \dfrac{1}{|S_1|\,(n-2)}\displaystyle\int_{\mathcal{B}} \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}$
3. $u = v + w$

Дальше мутно

Заметки

1 У нас было всё наоборот, но так ещё непонятней что происходит

2 в Эвансе $\leqslant Ae^{a|x|^2}$, например

3 здесь “$-$” из-за того, что оператор Лапласа отрицательно определённый

4 где-то вообще требуют C^∞ (то же получают для J). У нас было C^1, но верится с трудом.