

Алгебра и теория чисел

Группа 191, 2015-2016 год

Основные понятия

1. Кольцо, поле, типы колец. Определения и примеры.
2. Отношение эквивалентности. Разбиение множества на классы эквивалентности.
3. Идеал, главный идеал, идеал порожденный набором элементов. Идеалы в поле.
4. Гомоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма.
5. Мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм. Свойства.
6. Факторкольцо. Конструкция, корректность и свойства.
7. Факторкольцо по ядру гомоморфизма изоморфно образу этого гомоморфизма.
8. Поле частных области целостности.

Комплексные числа

1. Комплексные числа: Re , Im , сопряжение, норма, модуль.
2. Сложение и умножение комплексных чисел. Поле комплексных чисел.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа, геометрическая интерпретация комплексных чисел. Изменение модуля и аргумента при перемножении комплексных чисел, формула Муавра.
4. Корни из единицы. Извлечение корня из комплексного числа.

Целые числа

1. Делимость. Определения и простейшие свойства. Теорема о делении с остатком.
2. Совокупность общих делителей и НОД. Простейшие свойства. (Если $a \div b$, то $(a, b) = b$. Если $a = kb + c$, то $(a, b) = (c, b)$.)
3. Алгоритм Евклида. Теорема о совокупности общих делителей. Следствия. $((am, bm) = m(a, b))$. Если $(a, b) \div d$, то $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{(a, b)}{d}$.)
4. Линейное представление НОД: построение с помощью алгоритма Евклида.
5. Взаимно простые числа и их свойства.
6. Простые числа, их свойства. Бесконечность количества простых.
7. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение.
8. Представление НОД и НОК нескольких чисел с помощью канонических разложений этих чисел.
9. Представление НОД и НОК нескольких чисел через НОД и НОК двух чисел. Линейное представление НОД нескольких чисел.
10. Идеалы в \mathbb{Z} .
11. НОД и его линейное представление в \mathbb{Z} : доказательство существования с помощью идеала.
12. Сравнения, простейшие свойства. Вычеты.
13. Полная и приведенная системы вычетов, их свойства (умножение системы вычетов на число, взаимно простое с модулем).
14. Функция Эйлера. Свойства, явный вид (без доказательства мультипликативности.)
15. Мультипликативность функции Эйлера.
16. Теорема Эйлера.
17. Кольцо вычетов, поле вычетов по простому модулю.

Кольцо многочленов от одной переменной над полем

1. Многочлены от одной переменной. Сложение, умножение, степень многочлена.
2. Кольцо многочленов от одной переменной.
3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов над полем.

4. Идеалы и НОД в кольце многочленов над полем.
5. Неприводимые многочлены, их свойства.
6. ОТА в кольце многочленов над полем.
7. Корень многочлена. Теорема Безу. Количество корней многочлена с учетом кратности.
8. Производная многочлена. Производная суммы и произведения двух многочленов.
9. Определение кратности корня с помощью производной.
10. Основная теорема алгебры (формулировка). Сопряженные комплексные корни многочлена с вещественными коэффициентами. Неприводимые многочлены над полями \mathbb{C} и \mathbb{R} .
11. Поле комплексных чисел, как факторкольцо $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$.
11. Теорема Виета.
12. Интерполяционный многочлен: формула Лагранжа.
13. Метод интерполяции по Ньютону.

Рациональные функции над полем

1. Правильные дроби и их свойства (линейная комбинация и умножение правильных дробей).
2. Разложение правильной дроби в сумму простейших.
3. Связь задачи разложения правильной дроби в сумму простейших с интерполяцией.

Кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x]$

1. Лемма Гаусса и следствие о содержании произведения многочленов.
2. Лемма о связи разложений многочлена с целыми коэффициентами на множители в $\mathbb{Q}[x]$ и в $\mathbb{Z}[x]$.
3. ОТА в $\mathbb{Z}[x]$: доказательство существования.
4. ОТА в $\mathbb{Z}[x]$: доказательство единственности.
5. Критерий Эйзенштейна.
6. Свойства рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами.

Линейные пространства

1. Линейное пространство. Подпространство. Линейная комбинация, линейная оболочка. Порождающая система векторов.
2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов и их свойства.
3. Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис и размерность линейного пространства, корректность определения размерности.
4. Существование базиса в конечномерном пространстве. Дополнение до базиса линейно независимой системы. Выделение базиса из порождающей системы (в конечномерном пространстве).
5. Сумма и пересечение линейных пространств. Размерность суммы двух линейных пространств.
6. Внутренняя прямая сумма. Критерий прямой суммы.
7. Размерность прямой суммы конечного числа пространств.
8. Аффинные подпространства.
9. Факторпространство и его размерность. Относительный базис.

Теория групп

1. Моноид, полугруппа, группа, абелева группа, подгруппа. Определения, примеры. Пересечение подгрупп.
2. Подгруппа, порожденная множеством элементов. Система образующих.
3. Порядок циклической группы. Подгруппы циклической группы.

4. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
5. Симметрическая группа. Разложение подстановки на независимые циклы.
6. Определение порядка элемента S_n через разложение на независимые циклы.
7. Транспозиции, как система образующих S_n .
8. Четные и нечетные подстановки. Группа A_n .
9. Четность цикла. Определение четности подстановки через разложение на независимые циклы.
10. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма.
11. Типы гомоморфизмов и их свойства. Отображение, обратное к изоморфизму.
12. Автоморфизмы и сопряжения группы.
13. Нормальные подгруппы. Критерий нормальности.
14. Пересечение нормальных подгрупп. Нормальность ядра гомоморфизма.
15. Факторгруппа.
16. Теорема о гомоморфизме.
17. Вторая теорема о гомоморфизме (теорема о сокращении).
18. Коммутант: определение и свойства.
19. Действие группы на множестве: определение, примеры действий.
20. Орбиты и стабилизаторы. Свойства.
21. Связь мощности стабилизатора элемента и длины его орбиты.
22. Теорема Кэли.
23. Центр группы. Свойства. Связь центра с группой сопряжений.
24. Центр p -группы.

Матрицы, определители и системы линейных уравнений

1. Матрицы. Сложение, умножение. Ассоциативность умножения матриц.
2. Кольцо квадратных матриц $M_n(k)$.
3. Определитель. Определение и свойства: полилинейность, определитель матрицы с нулевой строкой.
4. Свойства определителя: кососимметричность, определитель матрицы с одинаковыми строками. Изменение определителя при элементарных преобразованиях матриц.
5. Определитель транспонированной матрицы.
6. Минор, алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа.
7. Сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения этой (другой) строки.
8. Определитель ступенчатой матрицы.
9. Определитель произведения матриц.
10. невырожденные матрицы. Взаимная матрица и ее связь с обратной матрицей. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Обратимость матрицы, имеющей левую (правую) обратную.
11. Строчный и столбцовый ранг матрицы. Сохранение строчного ранга при элементарных преобразованиях строк и столбцового ранга при элементарных преобразованиях столбцов.
12. Сохранение столбцового ранга при элементарных преобразованиях строк и строчного ранга при элементарных преобразованиях столбцов.
13. Равенство строчного и столбцового ранга матрицы.
14. Равенство ранга матрицы и порядка наибольшего ненулевого минора. Ранг невырожденной матрицы.

15. Матричная запись системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Решения неоднородной системы линейных уравнений.
16. Совместность системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
17. Матрицы элементарных преобразований. Алгоритм поиска обратной матрицы.

Линейные отображения

1. Линейные отображения. Соответствие линейных отображений и матриц.
2. Типы линейных отображений.
3. Композиция линейных отображений. Связь с умножением матриц.
4. Ядро и образ линейного отображения. Простейшие свойства.
5. Сумма размерностей ядра и образа линейного отображения.
6. Связь размерности образа отображения и ранга матриц этого отображения.
7. Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.
8. Кольцо линейных операторов $\text{End}(V)$, связь с кольцом матриц.
9. Обратимые линейные операторы и их свойства.
10. Координаты вектора в разных базисах. Матрицы перехода и их свойства.
11. Матрицы оператора в разных базисах. Свойства подобных матриц.
12. Многочлен от оператора и от матрицы, соответствие между ними. Многочлены от одного и того же оператора коммутируют.
13. Инвариантные подпространства и их свойства.
14. Характеристический многочлен оператора. Корректность определения, свойства. След матрицы.
15. Теорема Гамильтона-Кэли.
16. Минимальный многочлен: определение, свойства.
17. Собственные числа, векторы и подпространства. Их свойства. Связь собственных чисел с характеристическим многочленом.
18. Линейная независимость собственных векторов разных собственных чисел.
19. Диагонализируемые матрицы.
20. Корневые подпространства. Свойства.
21. Сумма корневых подпространств линейного оператора — прямая.
22. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств линейного оператора и об инвариантности корневых подпространств.
23. Теорема о размерности корневого подпространства.
24. Жорданова нормальная форма оператора и жорданов базис: лемма о корректности процедуры выбора векторов в относительном базисе.
25. Жорданова нормальная форма оператора и жорданов базис. Существование, единственность, алгоритм поиска и его корректность.

Квадратичные формы и скалярное произведение.

1. Квадратичные формы. Матрицы квадратичной формы в разных базисах.
2. Приведение квадратичной формы к диагональному виду.
3. Вещественные квадратичные формы. Закон инерции квадратичных форм.
4. Положительно определенные квадратичные формы.
5. Вещественное и комплексное скалярное определение. Матрица Грама.
6. Ортогонализация набора векторов. Ортогональный и ортонормированный базис.
7. Ортогональное дополнение: определение, свойства.