Конспект по анализу за 3 семестр

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :taxus

30 мая 2017 г.

Оглавление

Глава 1: Анализ в $\mathbb{R}^n$

1 Оценка приращения дифференцируемого отображения

Утверждение 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$. *Тогда формула Лагранжа*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

не работает.

E.g. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t),\ \ b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения)**.** *Пусть* $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, G *— выпуклое,* f *— дифференцируема,*

$$\forall\, x \in G\ \ \|f'(x)\| \leqslant M$$

Тогда $\forall\, a, b \in G\ \ \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$

☐ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где [1]

$$\begin{array}{lll} \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n & \varphi(t) := t(b-a) + a, & t \in [0,1] \\ \psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists\, c \in [0,1]\colon F(1) - F(0) = F'(c)(1-0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leqslant \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$\mathrm{d}L(x,h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b-a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b-a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, l \rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leqslant M \cdot \|\ell\| \cdot \|b-a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

[1] Вот тут как раз нужна выпуклость, иначе отрезок $[a;b]$ может и не лежать в G

2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall\, x \in G\ \exists\, \partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f(x)$. Тогда

$$\partial^{k+1}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} f(x) := \partial_{i_{k+1}}(\partial^k_{i_1,\ldots,i_k} f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p-го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p-го порядка от перестановки переменных)**.** *Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом*

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \ldots, i_p \mid i_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \ldots, j_p \mid j_k \in \{1, \ldots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

Тогда $\partial^p_i f(x) = \partial^p_j f(x)$

$\square$ Сначала докажем всё для $p = 2$, $n = 2$, т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Пусть $(x, y) \in G$, $(x_0 + \Delta x, y) \in G$, $(x, y + \Delta y) \in G$, $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in G$ Введём ещё 2 функции:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t, y + \Delta y) - f(t, y) \\ \psi(t) &= f(x + \Delta x, t) - f(x, t) \end{aligned}$$

Тогда $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(c_1)\Delta x = W$, $c_1 \in [x, x + \Delta x]$. При этом

$$W = \varphi'(x)\Delta x \Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2)\, \Delta x \Delta y,\ c_2 \in [y, y{+}\Delta y]$$

Аналогично

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4)\Delta x \Delta y,\ c_4 \in [y, y + \Delta y], c_3 \in [x, x + \Delta x]$$

По непрерывности второй производной f ($f \in C^2$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_3, c_4) \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

По теореме о предельном переходе в равенствах ⌣ смешанные производные равны.

Теперь поймём, что делать в случае произвольных p, n.

Представим подстановку π как произведение транспозиций соседних элементов. Будем дальше разбираться с такими транспозициями.

Пусть $\tau_k = (j, j + 1)$. Сначала посчитаем производные по $x_1, \ldots, x_{j-1} = i'$. А теперь обозначим $\widetilde{f} = \partial_{i'} f$. По доказанному утверждению для двух переменных, $\partial_{j,j+1}\widetilde{f} = \partial_{j+1,j}\widetilde{f}$. А теперь продифференцируем это равенство по оставшимся переменным.

Таким образом, для произвольной транспозиции $\tau_k = (j, j + 1)$ верно утверждение теоремы. А значит, и для произвольной подстановки $\pi = \prod_k \tau_k$ теорема верна. $\blacksquare$

Замечание 1. Тут важно, что $f \in C^p(G)$. Одной точки бы не хватило, мы ведь рассматриваем маленький параллелепипед в $U(x)$ и используем одномерную теорему Лагранжа внутри него. А для неё нужна дифференцируемость на интервале.

3 Обобщение бинома

«Обычный» бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Его нетрудно обобщить до полинома Ньютона

$$(a_1 + \cdots + a_n)^p = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1}\cdots a_{i_p} = \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0,\ldots,p\} \\ \sum \alpha_i = 1}} a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n} \cdot C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

Введём обозначения:

- $a = (a_1, \ldots, a_n)$
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, по сути вектор индексов, для которого вводится своя куча обозначений, дабы упростить жизнь
  1. $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i=1}^n$
  2. $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
  3. $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$
- $a^\alpha = \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}$
- $\partial_\alpha = \partial^n_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \dfrac{\partial^n f}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_n}}$
- $C_\alpha = C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$

Утверждение 1. $C_\alpha = \dfrac{p!}{\alpha!}$

▼

Ну, это просто число перестановок с повторениями. Нужно взять по множителю из p скобок, причём перестановки одинаковых множителей входят в одно слагаемое. В итоге нужно делить общее число перестановок на число перестановок одинаковых множителей. А дальше можно сказать, что в каждое слагаемое входит каждый множитель, просто некоторые в нулевой степени.

▲

4 «Многомерный» дифференциал высоких порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$. Тогда

$$\mathrm{d}^p f(x) := \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_p}} \,\mathrm{d}x_{i_1}\cdots\mathrm{d}x_{i_p}$$

Или ещё можно вот так записать

$$\left(\sum_i \mathrm{d}x_i\,\partial_i\right)^p f(x)$$

Утверждение 1. *Если частные производные можно переставлять, то*

$$\mathrm{d}^p f(x) = \sum_{\substack{0\leqslant\alpha_i\leqslant p\\ |\alpha_i|=p}} \frac{p!}{\alpha!}\,\partial_\alpha f(x)\,\mathrm{d}x^\alpha$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C^{p+1}(G), G \in \mathbb{R}^n$,$G$ –выпуклая, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n\colon a+h \in G$. Тогда*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\,\mathrm{d}^k f(a,h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. *В форме Пеано: $R_p(h) = o(\|h\|^p)$*
2. *В форме Лагранжа: $R_p(h) = \dfrac{1}{(p+1)!}\,\mathrm{d}^{p+1} f(a+\theta h, h)$, $\theta \in (0,1)$*

□ Рассмотрим $\varphi(t) = a + th$, $t \in [0,1]$, $F(t) = f(\varphi(t))$, $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. По одномерной теореме Тейлора

$$F(1) = F(0) + 1\cdot F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0)1^2 + \cdots + \frac{1}{p^2}F^{(p)}(0)\cdot 1^p + R_p$$

Докажем, что $F^{(k)}(0) = \mathrm{d}^k f(a,h)$. Проще всего по индукции, давайте ещё такое нестандартное обозначение введём: $(k) = (1,\ldots,k)$, и будем понимать под $i_{(k)}$ вектор индексов, а под $h_{i(k)}$ — произведение соответствующих h.

база: $F(0) = f(a)$

переход: Пусть $F^{(k-1)}(t) = \sum\limits_{1\leqslant i_1,\ldots,i_{k-1}\leqslant n} \partial_{i_{(k-1)}} f(a+th)\,h_{i_{(k-1)}}$. При дифференцировании по t всякие h_{i_j} в каждом слагаемом вынесутся за знак производной, а частная производная от f даст $\sum_{i_k} \partial_{i_{(k)}} f(a+ht)h_{i_k}$. Если скомпоновать все суммы и подставить $t=0$, как раз получается $d^k f(a,h)$

Теперь разберёмся с остатком

$$R_p = \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)\cdot 1^{p+1} = \frac{1}{(p+1)!}\mathrm{d}^{(p+1)} f(a+h\,\theta, h)$$

Поскольку $\forall\, i\ \ |h_i| \leqslant \|h\|$

$$d^{(p+1)} f(a+\theta\, h, h) = O(\|h\|^{p+1}) = o(\|h\|^p)$$

Следовательно, $R_p = o(\|h\|^p)$ ■

5 Понятие экстремума, необходимое условие

Определение 1. Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что f имеет в a максимум (нестрогий), если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U\ \ f(x) \leqslant f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколотая, то максимум — строгий Для минимума нужно $\geqslant$.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть a внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если f имеет в a экстремум, то*

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; \partial_i f(a) = 0$$

$\square$ Рассмотрим $\varphi_i(t) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Тогда у такой функции есть экстремум в a_i. А тогда, из одномерной теоремы Ферма $d\varphi_i(t) = 0$. А значит $\partial_i f = 0$ $\blacksquare$

6 Про квадратичные формы

Определение 1. [1] Функция $A\colon V \times V \to \mathbb{R}$, где V — векторное пространство, называется *билинейной формой*, если она линейна по обеим своим аргументам.

Определение 2. Билинейная форма A называется *симметрической*, если $\forall\, x, y$ $A(x, y) = A(y, x)$.

Определение 3. Пусть A — билинейная форма, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в векторном пространстве. Тогда

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i, e_j) x^i y^j$$

и матрица A, элементы которой $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ называется матрицой билинейной формы.

Определение 4. Пусть A — симметрическая билинейная форма. Тогда $A(x) = A(x, x)$ — *квадратичная форма.* При этом $A(x, y)$ называется *полярной формой* по отношению к $A(x)$.

Определение 5. Матрица квадратичной формы — матрица соответствующей полярной формы.

Определение 6 («Определённость» формы)**.** Если что-то верно, то про форму $A(x, y)$ говорят:

- $\forall\, x, y \neq 0 \;\; A(x, y) > 0$ — положительно определена
- $\forall\, x, y \neq 0 \;\; A(x, y) < 0$ — отрицательно определена
- $\forall\, x, y \neq 0 \;\; A(x, y) \geqslant 0$ — полуопределена в положительном смысле
- $\forall\, x, y \neq 0 \;\; A(x, y) \leqslant 0$ — полуопределена в отрицательном смысле

E.g. Скалярное произведение — положительно определённая билинейная форма.

Теорема 1. *Пусть в некотором базисе $f_1, \ldots, f_n$ квадратичная форма A имеет матрицу (a_{ij}). Пусть к тому же все «северо-западные» миноры Δ_i отличны от нуля. Тогда существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица A имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta_1} & & & \\ & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix}$$

[1] тут изложение больше по [4]

□ По сути, нам нужно построить ортогональный базис, только вместо скалярного произведения используется билинейная форма A(причём не обязательно положительно определённая). За подробностями см. [4]. ■

Теорема 2 (Правило Сильвестра)**.** *Квадратичная форма положительно определена, если все миноры из теоремы 0.1 положительны, и отрицательно определена, если их знаки чередуются, начиная с «-».*

□ Следствие предыдущей теоремы. Определённость формы не зависит от выбора базиса. ■

7 Достаточное условие экстремума

Теорема 1 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка, $f \in C^2(a)$.*

1. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) > 0 \Rightarrow f$ *имеет в* a min
2. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) < 0 \Rightarrow f$ *имеет в* a max
3. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) \lesseqgtr 0 \Rightarrow$ *ничего нет*
4. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) \leqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в* a min
5. $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\mathrm{d}^2 f(a, h) \geqslant 0 \Rightarrow f$ *не имеет в* a max

□ Поскольку $\mathrm{d}f(a) = 0$, $\Delta f(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}^2 f(a) + \alpha)$, где $\alpha = o(\|h\|)$. Для упрощения жизни примем $t = \frac{h}{\|h\|}$. Тогда приращение функции можно переписать в виде

$$\Delta f = \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \sum b_{ij} t_i t_j + \frac{\alpha}{\|h\|^2} \right)$$

Поскольку $\frac{\alpha}{\|h\|^2} \to 0$, существует $\mathring{U}_\varepsilon(a)$ в которой знак приращения определяется лишь первым слагаемым. Нетрудно заметитить, что все значения t лежат на единичной сфере, которая компакт. Причём значения t покрывают всю сферу, ведь направление h можно выбирать в окрестности a произвольно. Так что можно просто сделать второе слагаемое меньшим минимума квадратичной формы на единичной сфере.

Таким способом можно расправиться с пунктами 1–2.

Для пункта 3 отыщем $h_1\colon \mathrm{d}^2(a, h_1) > 0$, $h_2\colon \mathrm{d}^2(a, h_1) < 0$. Заметим, что если A — квадратичная форма, то $A(h) > 0 \Rightarrow \forall\, s \;\; A(sh) = s^2 A(h) > 0$. По сути, мы считаем значение формы вдоль прямой, проходящей через a. Если, как и выше, записать приращение в виде

$$\Delta f = s^2 \left(\frac{1}{2} \mathrm{d}^2(a, h_{1|2}) + \frac{\alpha}{s^2} \right)$$

то видно, что можно получить в окрестности $\mathring{U}(a)$ всё, что угодно, просто $s \to 0$.

4–5 легко доказываются от противного. ■

8 Полнота пространства $\mathbb{R}^n$

Определение 1. Последовательность (x_n) называется фундаментальной (последовательностью Коши), если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\;\exists\,N\colon \forall\,m,n > N \;\; \rho(x_n - x_m) < \varepsilon$$

Определение 2. Метрическое пространство (X, ρ) — полное, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится

E.g. $\mathbb{R} \setminus 0$ — не полное метрическое пространство, $x_n = {}^1\!/_n$ тому пример.

Замечание 1. Если (X, ρ) — полно, то X вообще-то замкнуто. Хорошо видно на примере выше.

Замечание 2. Если (X, ρ) — полно, $Y \subset X$ — замкнуто. Тогда и Y — полно.

Утверждение 1. $\mathbb{R}^n$ *— полное метрическое пространство.*

▼

$\lhd$ произвольный $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\rho(x_n - x_m) < \varepsilon \Rightarrow \forall\,i \;\; \rho(x^i_m e_i - x^i_n e_i) < \varepsilon \Rightarrow \forall\,i \;\; |x^i_m - x^i_n| < \varepsilon$$

Таким образом $(x^i_n) \in \mathbb{R}$ — фундаментальная. А в $\mathbb{R}$ по теореме из первого семестра фундаментальные последовательности сходятся. Тогда $\forall\,x^i_n \to a^i$. Значит и $x_n \to a$.

▲

Кусок дальше не шибко нужен

Давайте введём метрику на пространстве непрерывных функций

Определение 3. Пусть $f, g, h \in C\big([a;b]\big)$. Тогда

$$\rho(f,g) := \sup_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|$$

Здесь супремум можно заменить на максимум по теореме Вейерштрасса.
Докажем что это правда расстояние:

- $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ — очевидно
- $\rho(f,g) \geqslant 0$ — тоже очевидно
- $\rho(f,g) = \rho(f,h) + \rho(h,g)$ — не так очевидно

$$\max_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)| = |f(x_0) - g(x_0)| \leqslant |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)|$$
$$\leqslant \max_{x \in [a;b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a;b]} |h(x) - g(x)| = \rho(f,h) + \rho(h,$$

Утверждение 2. *Пространство* $C\big([a;b]\big)$ *с указанной выше метрикой полно.*

▼

Поточечная сходимость очевидна из полноты $\mathbb{R}$. А равномерную можно получить, устремив m к ∞, зафиксировав n. А из равномерной сходимости следует непрерывность предельной функции.

▲

Замечание. Если взять в качестве метрики $\int_a^b |f - g|$, то полнота поломается. Пополнение будет пространством суммируемых функций.

9 Теорема о сжимающем отображении

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда отображение $T\colon X \to X$ называется сжимающим, если

$$\exists\, C \in (0,1) \colon \forall\, x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leqslant C \cdot \rho(x', x'')$$

Теорема 1 (Банах)**.** *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а отображение $T\colon X \to X$ — сжимающее. Тогда $\exists!\, x_* \in X \colon Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).*

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall\, x_0 \in X\ \exists \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x_*$$

$\square \lessdot x_n = T^n x_0$, где $x_0 \in X$ — произвольное. Докажем, что

1. $x_n \to x_*$
2. $Tx_* = x_*$
3. других таких x_* нет.

Поехали

1. (x_n) сходится в себе, ведь $C \in (0,1)$.

   $$\rho(x_m, x_{m+p}) \leqslant \rho(x_m, x_{m+1}) + \cdots + \rho(x_{m+p-1}, x_{m+p}) \leqslant \rho(x_0, x_1) C^m (1 + \cdots + C^{p-1}) < \rho(x_0, x_1)\, \frac{C^m}{1-}$$

   раз пространство полное, $\exists \lim_\infty x_n$
2. отображение T непрерывно $\Rightarrow Tx_n \to Tx_*$. Но по теореме о подпоследовательности и единственности предела $Tx_* = x_*$.
3. Пусть x_{**} — другая неподвижная точка. Но тогда

   $$\rho\left(x_{**}, x_*\right) = \rho\left(Tx_{**}, Tx_*\right) \leqslant C\rho\left(x_{**}, x_*\right) \Rightarrow (C-1)\,\rho\left(x_{**}, x_*\right) \geqslant 0 \underset{C<1}{\Longrightarrow} \rho\left(x_{**}, x_*\right) = 0$$

$\blacksquare$

10 Метод Ньютона

Пусть $f \in C\big([a;b]\big)$, $f(a) \cdot f(b)$, $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$. Сам метод выглядит как-то так:
Проводится касательная к графику в текущей точке, ищется её пересечение с осью x, оттуда восставляется перпендикуляр, пересечение которого с графиком — новая точка.

$$x - Tx = \frac{f(x)}{f'(x)} \Leftrightarrow Tx = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Докажем, что это вообще работает.

Теорема 1. *Пусть $f \in C^2\left([a;b]\right)$, $x_* \in [a;b]$:*

a) $f(x_*) = 0$

b) $f'(x_*) \neq 0$

Тогда $\exists\, U(x_*)\colon \forall\, x_0 \in U$, *такая что* $T^n x_0 \to x_*$ *и* $x_{n+1} - x_* = O\big((x_n - x_*)^2\big)$

$\square$ Сначала оценим T'.

$$T'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{(f\in C^2)} \frac{f(x_*)f''(x_*)}{f'(x_*^2)} = 0$$

Так что $\exists\, U(x_*)\colon c \in \overline{U} \Rightarrow |T'(c)| \leqslant 1/2$.

Теперь покажем, что $T(\overline{U}) \subset \overline{U}$. Из вышесказанного

$$|Tx - Tx_*| \leqslant \frac{1}{2}|x - x_*| \tag{1.1}$$

Поскольку $Tx_* = x_* - 0 = x_*$, то (1.1) равносильно

$$|Tx - x_*| \leqslant \frac{1}{2}|x - x_*|$$

А это как раз то, что надо. Значит T как раз сжимающее отображение, и по теореме 0.1 такой $x_*\colon f(x_*) = 0$ единственный.

Вторая часть тривиально получается из разложения f в ряд Тейлора в окрестности x_n. $\blacksquare$

11 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать F^{-1}.

Рассмотрим, например, линейное отображение.

$$y = F(x) = Ax \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists\, U(a), V(b) :\ \ F\colon U \leftrightarrow V$$

$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \tag{1.1}$$
$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \tag{1.2}$$
$$\mathrm{d}F(a) = \mathrm{d}y(b) \tag{1.3}$$

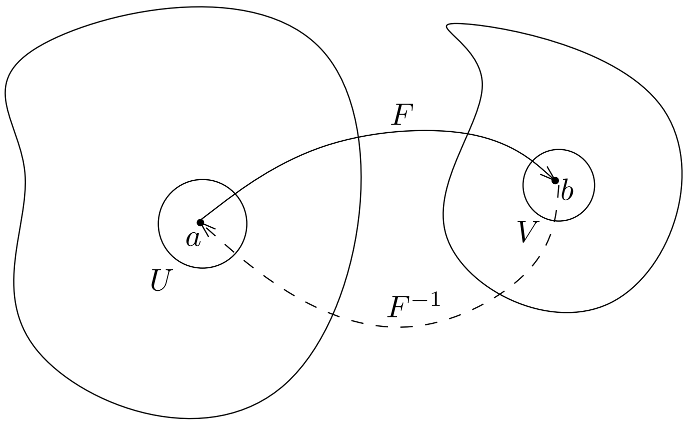
Условие разрешимости (1.3) — $\det\big(F'(a)\big) \neq 0$. Утверждается, что у (1.1) условие разрешимости такое же.

Соответственно, формулировка

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $b = F(a)$. *Пусть ещё* F *дифференцируема в* a, $\det(F'(a)) \neq 0$

Тогда

$$\exists\, U(a), V(b) :\ \ F\colon U \leftrightarrow V$$
$$\exists\, F^{-1}\colon V \to U,\ \ F^{-1} \in C^0$$



12 Доказательство теоремы об обратимости

□ (*Теорема об обратимости отображения*) Введём обозначения:

$$F'(a) = \Gamma$$
$$\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y)$$

Нетрудно заметить, что x — неподвижная точка $\Phi \Leftrightarrow F(x) = y$. Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (0.1). Тогда отображение в окрестности a будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$.[1] Попутно примем $\|y - b\| < \delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

   $$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

   $$\|\Phi'(x)\| \leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|(F'(a) - F'(x))\|$$

   Последний множитель явно $\xrightarrow[x\to a]{} 0$ (так как $F \in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\| \to 0$. А значит найдётся $U_{\varepsilon_0}(a)\colon \|\Phi'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

   Тогда по теореме 0.2

   $$x, x' \in U_{\varepsilon_0}(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

   Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри U_{ε_0} компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

   $$\exists\, \overline{U}\colon \Phi(\overline{U}) \subset \overline{U}$$

   $$\|\Phi(x) - a\| = \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\|$$
   $$\leqslant \|\Gamma^{-1}\| \cdot \big(\| - \underbrace{(F(x) - F'(a)(x - a) - F(a))}_{\alpha}\| + \|y - b\|\big)$$

   Выберем произвольный $\varepsilon\colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

   Однако мы ещё можем подкрутить ε_1.

   $$\exists\, U_{\varepsilon_1}\colon \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

[1] Тут y фиксируется и от x не зависит. Так что $y' = 0$

Это следует из формулы Тейлора (0.2), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда ε, а не ε_1.

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\ldots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x-a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x-a\| \leqslant \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists!\, x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a)\colon \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность a с прообразом $V(b) : U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность, за счёт произвольно выбранного ε:

$$\forall\, U_\varepsilon\ \exists\, V_\delta(b)\colon F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

■

13 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

Теорема 1 (о дифференцируемости F^{-1})**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F\colon U \leftrightarrow V$. Пусть также F дифференцируема в $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. Тогда F^{-1} дифференцируемо в b.*

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцируемости F

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha, \;\; \alpha = o(h)\ (h \to 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists\, A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k)\ (k \to 0)$

$$A\beta \leqslant \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leqslant \frac{\|h\|}{\big|\|Ah\| - \|\alpha\|\big|} = \frac{1}{\left|\frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|}\right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$

■

Следствие. $(F^{-1})'(b) = \big(F'(a)\big)^{-1}$

14 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 1. *Пусть* $F\colon U \leftrightarrow V$, *биективна,* $\in C^p$. *Пусть к тому же* $\det F'(x) \neq 0$. *Тогда* $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$
$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \dfrac{\mathcal{A}_{ji}}{\det A}$ (здесь $\mathcal{A}$ — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что b_{ij} — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widetilde{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \ldots, a_{kl}, \ldots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j}\big(F(x)\big) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \ldots, a_{kl}(x), \ldots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = \big(\overline{b_{ij}} \circ F^{(-1)}\big)(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные F^{-1} принадлежат C^i. Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бобром мы доберёмся до C^p. Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. ■

15 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

Теорема 1. *Пусть* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ *имеет* n *корней* (x_j^0), $x_j^0 \in \mathbb{R}$, *таких что* $\forall\, i, j\ x_i^0 \neq x_j^0$. *Пусть ещё старший коэффициент = 1. Тогда*

$$x_i = x_i(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$a_0 = (-1)^n x_1 \cdots x_n$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} = (-1) \sum_i x_i$$

Рассмотрим P как отображение $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$.

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\det(F')$. Этот определитель можно рассмотреть как многочлен $\in R[x_1, \ldots, x_n]$ Его степень не превосходит $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что если хоть какая-то пара столбиков равны, то определитель равен нулю. Так что $\det(F')$ делится на всевозможные многочлены вида $x_i - x_j$. А их как раз $\frac{n(n-1)}{2}$ и они неприводимые. Следовательно, [1]

$$\det(F')(x_1, \ldots, x_n) = C \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой.

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

16 Теорема о неявном отображении

Определение 1. Пусть $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$[2]. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$ такие, что $F(x^0, y^0) = 0$.

Тогда если $\exists\, P(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, $Q(y^0) \subset \mathbb{R}^m$, такие что

$$\forall\, x \in P\ \exists!\, y \in Q\colon F(x, y) = 0$$

то говорят, что уравнение (1.1) задаёт неявную функцию $f\colon P \to Q$.

Сначала всякие комментарии.

$$(1.1) \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Как обычно, главная идея состоит в том, чтобы всё линеаризовать

$$\begin{cases} \mathrm{d}F_1 = 0 \\ \dots\dots \\ \mathrm{d}F_k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j}\, \mathrm{d}y_j = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\, \mathrm{d}y_j = -\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j. \end{cases} \tag{1.2}$$

При этом $\mathrm{d}y_j$ мы хотим выразить через $\mathrm{d}x_j$. Какие-то шансы обратить всё это дело есть лишь при условиях:

1. $k = m$

[1] Этого, конечно, не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.

[2] В доказательстве потом весомо пользуются, что функция действует в пространство той же размерности, что и y

2. $\det\left(\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_k)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right) \neq 0$

Сейчас будем доказывать, что (1.2) $\Rightarrow$ (1.1).

Теорема 1 (Теорема о неявном отображении)**.** *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^p$, $p \geqslant 1$.

$$F(x,y) = 0, \quad (x_0, y_0) \in G$$

1. $F(x_0, y_0) = 0$

2. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists\, P(x_0), Q(x_0)$, *такие, что* (1.1) *задаёт неявное отображение* $f\colon P \to Q$. *При этом* $f \in C^p$ *и*

$$f'(x) = -\big(F'_y(x,y)\big)^{-1} \cdot F'_x(x,y)$$

$\square$ Доказательство — «обёртка» над теоремой об обратном отображении. К слову, в [1, с. 673] сразу доказывается утверждение о неявном отображении.

Итак, обозначения:

1. $\Phi\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Работает как-то так:

$$(x,y) \mapsto (u,v), \begin{cases} u = x, & u \in R^n \\ v = F(x,y), & v \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

2. $i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ такого сорта $x \mapsto (x, 0)$

3. $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такого сорта $(x,y) \mapsto y$

Теперь найдём определитель $\Phi'(x,y)$. Посчитав как-то частные производные, получим

$$\Phi'(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right) \Rightarrow \det\big(\Phi'(x_0,y_0)\big) = \det E_n \cdot \det F'_y(x_0,y_0) \neq 0$$

Чудно, значит по теореме об обратном отображении (0.1) $\exists\,\Phi^{-1}(x_0,y_0)$ и ещё окрестности $U(x_0,y_0), V(x_0,0)$. Теперь определим окрестности из условия теоремы:

$$P(x_0) = i^{-1}(V) \ \wedge\ Q(y_0) = \pi(U)$$

По сути — проекции.

В таких обозначениях $f = \pi \circ \Phi^{-1} \circ i$. Вполне очевидно, что $f \in C^p$. Ну $i, \pi \in C^\infty$, $\Phi^{-1} \in C^p$.

К тому же

$$\forall x \in P\ x \overset{i}{\mapsto} (x,0) \overset{\Phi^{-1}}{\mapsto} (x,y) \overset{\pi}{\mapsto} y \in Q$$

При этом такой y — единственный. В итоге получилось задать неявно отображение f.

Из вышесказанного, оно сколько нужно раз дифференцируемо. Так что

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) = F'_x \cdot E + F'_y \cdot f'(x) = 0$$

По условию F'_y — обратима. Следовательно,

$$f'(x) = -(F'_y(x,y))^{-1} \cdot F'_x(x,y)$$

$\blacksquare$

17 Функциональная зависимость системы функций

Определение 1. Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, $x_0 \in G$. Тогда g называются функционально зависимой от $f_1, \ldots, f_m$ в $V(x_0)$, если

$$\exists\, \varphi\colon U(f(x_0)) \to \mathbb{R}, \varphi \in C^1 : \ g(x) = \varphi(f(x)) \text{ в } V(x_0)$$

Определение 2. Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. Тогда эти функции называются функционально *не*зависимыми, если определение выше не выполняется ни для какой $V \subset G$ ни для какой из функций из набора.

Теорема 1. *(о функциональной зависимости) Пусть $f_1, \ldots, f_m, g\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. К тому же $a \in G$, $f = (f_i)_i$, $y = f(x)$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \end{pmatrix} = m$ в точке $x \in U(a)$. Тогда, если $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_m' \\ g' \end{pmatrix} = m$ в точке a,* [1] *то $\exists\, V(a)$ в которой g функционально зависит от $f_1, \ldots, f_m$.*

$\square$ Пусть сразу $n \geqslant m$, иначе условие теоремы не выполняется совсем никогда (ну там m векторов всегда ЛЗ).

Введём обозначения:

$$x = (\underbrace{x, \ldots, x_m}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_n}_{\bar{\bar{x}}}),\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_m, \bar{\bar{x}})$$

Из алгебры в $f'(x), x \in U(a)$ существует ненулевой минор порядка m. Можно НУО считать, что он соответствует $\bar{x}$. Тогда это равносильно тому, что $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}}(a)\right) \neq 0$.

Рассмотрим такую неявную функцию

$$F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,\ F(\bar{y}, \bar{x}) = y - f(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

Оно всё по условию гладкое. Тогда по теореме о неявном отображении существует пара окрестностей P, Q и

$$\exists\, \varphi\colon P \subset \mathbb{R}^n \to Q \subset \mathbb{R}^m,\ \bar{x} = \varphi(\bar{y})$$

В этих окрестностях $F \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv f(\varphi(y, \bar{\bar{x}}), \bar{\bar{x}})$. Заметим, что здесь $y, \bar{\bar{x}}$ — независимые переменные. Так что если $j > m$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}}) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f_i \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \equiv 0$$

Из условия на ранг известно, что

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(x),\ x \in U(a)$$

[1] тут тонкость. Если ранг равен m, то определитель не 0 и в некой окрестности a по непрерывности. А вот со вторым так не прокатит, там наоборот нужно равенство 0

Нам для того чтобы показать, что g функционально зависит от f, необходимо приравнять в окрестности точки a g к функции от y. Пусть снова $j > m$, тогда

$$g(x) = g(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = g(\varphi(\bar{y}), \bar{\bar{x}})$$
$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j g$$

А вот теперь нужно воспользоваться условием на ранги. Тут очень важно, что это условие работает в окрестности a — ведь какие-то тождества в точке нам ничего интересного не дадут.

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\partial_k f \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \partial_j f_i \right) = 0$$

Из того, что g, φ — гладкие получаем, что и функция, нужная в определении 0.1 тоже гладкая. Осталось только пересечь много окрестностей (из неявного отображения, условия на ранг etc). ■

18 Геометрический смысл ранга матрицы Якоби

Определение 1 (Коразмерность)**.** Пусть V — подпространство U. Тогда $\operatorname{codim} V = \dim U - \dim V$.

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in G$, $b = F(a)$, $\exists\, V(a)\colon \forall\, x \in V \;\operatorname{rk} F'(x) = r$. *Тогда*

1. $\exists\, U(a)\colon F(U)$ *имеет вид графика* $\bar{\bar{y}} = \varphi(\bar{y})$
2. $\exists\, U(a) \subset F^{-1}(b)$ *имеет вид графика* $\bar{x} = \psi(\bar{\bar{x}})$

□ Аккуратное следствие 0.1 и 0.1. Единственное нетривиальное место — во второй половине, где нужно показать, почему из m уравнений вида $F_i(x) = b_i$, можно оставить лишь r. Здесь можно сказать, что последние уравнения не накладывают дополнительных ограничений на $\{x_i\}$, ведь там по сути написано, что-то такое: $\varphi(\bar{b}) = \bar{\bar{b}}$. А эти уравнения точно верны из 1 пункта. ■

Замечание. Ранг, собственно, показывает сколько есть степеней свободы у значений функции, причём в довольно механическом смысле. Мало ли, вдруг мы отобразили пространство в какую-то кривую в другом.

Есть кстати шансы, что в этой теореме попутно определили размерность образа при отображении, но неточно. Собственно, график $\bar{\bar{y}} = \varphi(\bar{y})$ можно считать заданным на $y \in \mathbb{R}^m$, которое уже «прямое», а дальше размерностью объявить $\dim\{\bar{y}\}$.

19 Три способа локального задания поверхности

1. Параметрическое

   $$f\colon D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \;:\; \operatorname{rk} f' = k \;\forall\, x \in D (\geqslant k)$$

   Тогда $M = f(D)$ — поверхность размерности k.

   Условие на ранг означает, что нигде нету изломов, параметр же по сути — скорость.

2. Задание графиком

$$D \subset \mathbb{R}^k,\ f\colon D \to \mathbb{R}^{n-k} \text{ — гладкое}$$

Тогда $M = \{(t, f(t)) \mid t \in D\} = \Gamma_f$.

Определение 1 (Поверхность(нестрого))**.** Множество $S \subset \mathbb{R}^m$ можно называть k-мерной гладкой поверхностью, если в окрестности любой своей точки оно задаётся графиком гладкого отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$.

3. Неявное

Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, $\operatorname{rk} F = n - k$. Тогда

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

По сути уравнения связи.

Теорема 1. *Если в некой окрестности $a \in R^n$ k-мерная поверхность может быть задана один из 3 способов, то она может быть задана и всеми остальными.*

□

$1 \to 2$ см 0.1 (1)

$2 \to 3$ $F(t, y) = f(t) - y$, $F' = (f'_t \mid -E) \Rightarrow \operatorname{rk} F' = n - k$

$3 \to 2$ см 0.1 (2)

$2 \to 1$ $(x, y) \mapsto (x(t), f(x(t)))$, где $t = x$. С рангами очевидно проблем нет, единичная матрица же.

■

20 Условный экстремум(нестрого)

Определение 1 (Безусловный экстремум)**.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G$ — внутренняя точка. Тогда в точке a $\max / \min$ если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U\ \ f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Определение 2 (Экстремум на подмножестве)**.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная поверхность, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка. Тогда в точке a $\max / \min$ относительно M, если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U \cap M\ \ f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Чаще всего M задают неявно — «накладывают условия» на значения f.

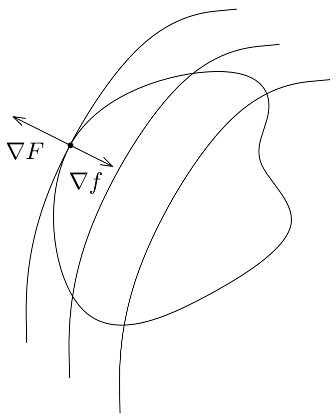
Определение 3 (Условный экстремум)**.** Пусть $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_1, \ldots, F_m\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in G \cap M$ — внутренняя точка, $F_1(a) = \cdots = F_m(a) = 0$. Тогда в точке a *условный* $\max / \min$ если

$$\exists\, U(a)\colon \forall\, x \in U, F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0\ \ f(x) \leqslant / \geqslant f(a)$$

Теорема 1. *Пусть $f, F_1, \dots, F_m \in C^1(G)$, $a \in G$.*

Тогда если f имеет в a экстремум при условии $F(a) = 0$, то $\nabla f(a), \nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — линейно зависимы.

E.g. Можно двумерный случай рассмотреть.



$$\nabla f = \lambda \nabla F$$

Следствие 1 (Правило Лагранжа)**.** *f имеет в a экстремум при условии $F_1(a) = \dots = F_m(a) = 0$, то*

1. *либо $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ ЛЗ*
2. *либо $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}\colon \nabla f(a) = \sum_i \lambda_i \nabla F_i(a)$*

21 Доказательство теоремы об условном экстремуме

$\square$

1. Пусть $m = n - 1$. Будем доказывать от противного. Пусть в a условный max, но $\nabla f(a)$, $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ.

   Рассмотрим $\Phi(x) = (f(x), F_1(x), \dots, F_m(x))$. Тогда такое $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$. Из линейной независимости градиентов

   $$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix}, \ \det \Phi'(a) \neq 0$$

   Пусть $b = \Phi(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$. Тогда по теореме об обратном отображении (0.1)

   $$\exists\, U(a), V(b) \ : \ \Phi\colon U \to V \text{ — диффеоморфизмъ}$$

   Пусть $V \supset B_\varepsilon(b)$, $y = (f(a) + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0) \in V$, тогда $\exists!\, x \in U\colon \Phi(x) = y$. Получается, что $f(x) > f(a)$, $\forall\, i \ \ F_i(x) = 0$, что немного противоречит тому, что в a условный max.

2. Теперь рассмотрим случай $m < n - 1$ (всё остальное неинтересно, точно будет ЛЗ).
   Будем доказывать от противного. Пусть в a условный max, но $\nabla f(a)$, $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_m(a)$ — ЛНЗ. Тогда $\operatorname{rk} \Phi'(a) = m + 1 < n$. Добавим ещё функций $F_{m+1}, \dots, F_{n-1}$ таких, что $F_i(x) = x_{i+1} - ai + 1$.

   Введём ещё стандартное обозначение

   $$x = (\underbrace{x, \dots, x_{m+1}}_{\bar{x}}, \underbrace{x_{m+2}, \dots, x_n}_{\bar{\bar{x}}})$$

   И не совсем стандартное

   $$A = \frac{\partial(f_1, F_1, \dots, F_m)}{\partial x_1, \dots, x_{m+1}}(a)$$

Обычно такой «дробью» обозначают якобиан, но, пожалуй, сохраню обозначения с лекции.

Итак
$$\Phi'(a) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & E_{n-m-1} \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rk} \Phi'(a) = n$$

А теперь можно подвести всё к первому пункту. Рассмотрим $\widetilde{M} = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$ (а $M = \{x \mid F_1(x) = \dots = F_m(x) = 0\}$). Поскольку $\widetilde{M} \subset M$, f будет иметь в a максимум и относительно $\widetilde{M}$.

Аналогично 1 пункту получаем бред какой-то.

■

Замечание 1. Такая теорема может найти лишь точки, «подозрительные» на экстремум. Надо ещё отдельно думать. Например, вдруг там на компакте всё определено.

Замечание 2. Можно рассматривать функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x) = f(x, \lambda) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x)$$

Тогда если в a условный экстремум, то в (a, λ) стационарная точка ($\mathcal{L}'(a) = 0$) функции Лагранжа.

Глава 2: Криволинейные интегралы

22 ⚒Интеграл от дифференциальной формы по пути

Параграфы со значком «⚒» лучше не читать, они недопилены.

Дифференциальные формы. Начать лучше с полилинейных форм.

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем K. Тогда функция $A\colon L^k \to K$, линейная по каждому из своих аргументов, называется k-линейной формой.

[1][2]

Нам тут хватит и 1-форм, так что

Определение 2. Дифференциальной 1-формой можно назвать отображение из $\mathbb{R}^n$ в линейную (по h) форму, $P \in C^0$

$$\omega = \langle P(x), \mathrm{d}x(x,h)\rangle$$

Но это как-то не очень (а что такое дифференциал?).

Гладкие пути.

Определение 3. Пусть $\gamma\colon [a;b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Тогда γ называется путём в пространстве $\mathbb{R}^n$.

- Путь гладкий, если $\gamma \in C^1$,
- путь регулярный, если $\operatorname{rk}\gamma' \geqslant 1$,
- путь простой, если γ — биекция.

Определение 4. Образ $\Gamma = \gamma([a;b]) \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой* в $\mathbb{R}^n$. Ещё говорят, что Γ — носитель пути γ, а γ — параметризация Γ. [3]

Замечание. Путь простой $\Leftrightarrow$ кривая не имеет самопересечений.

Определение 5. Будем говорить, что простые пути имеют одинаковую ориентацию, если

$$\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2) \wedge \gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$$

и противоположную, если всё наоборот. Тут ещё введу нестандартное обозначение, но так жить проще $\ddot\smile$.

- $\upuparrows$ — одинаковая ориентация
- $\uparrow\downarrow$ — противоположная ориентация

Замечание. Для биективных параметризаций видимо просто нет другого выбора. С петлями всё будет интереснее.

---

[1]<ну его>

[2]<потом лучше напишу>

[3]здесь ещё можно как в [5] определять кривую как класс эквивалентности путей, так вроде проще

Интегралы от форм по пути

Определение 6. Просто возьмём и определим интегралы по простому гладкому пути от 1-форм так:

$$I = \int\limits_{\gamma} \omega := \int\limits_{a}^{b} \langle P, \dot{x}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

Утверждение 1 (Корректность определения выше)**.** *Интеграл по пути не зависит от параметризации.*

□ Пусть γ_1, γ_2 — параметризации Г, одинаково ориентированы. Докажем,что

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega = I_2$$

Поскольку γ_1, γ_2 — биекции, $\exists\, \varphi\colon\ t_2 = \varphi(t_1)$, тоже биекция, такого сорта: $t_1 \xmapsto{\gamma_1} x \xmapsto{\gamma_2^{-1}} t_2$ Тогда

$$I_2 = \int\limits_{a_2}^{b_2} \langle P(\gamma_2(t_2)), \partial_{t_2}\gamma_2(t_2) \rangle \,\mathrm{d}t_2 = \int\limits_{a_1}^{b_1} \langle P(\underbrace{\gamma_2(\varphi(t_1))}_{x}), \partial_{t_2}\gamma_2(t_2)) \rangle \,\partial_{t_1}\varphi(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

Покажем, что $\partial_{t_2}\gamma_2(t_2)\partial_{t_1}\varphi = \partial_{t_1}\gamma_1(t_1)$. Это просто следует равенства $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, если его продифференцировать по t_1. Так что

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \langle P(x), \partial_{t_1}\gamma_1(t_1)) \rangle \left(\partial_{t_1}\varphi(t_1)\right)^{-1} \partial_{t_1}\varphi(t_1)\,\mathrm{d}t_1 = I_1$$

■

Замечание 1. Если $\gamma_1 \upharpoonleft\!\downharpoonright \gamma_2$, то $I_2 = -I_1$.

Замечание 2. Если рассматривать только одинаково ориентированные пути, то

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega$$

Замечание 3. Если Г разбивается на непересекащиеся Γ_1, Γ_2, то

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega$$

Петли и интегралы по ним

Определение 7. Кривая Г — петля, если для всякой её параметризации $\gamma(a) = \gamma(b)$. Петля называется простой, если $\exists : \gamma|_{[a;b)}$ — биекция.

Замечание. Плохие петли можно разбивать на простые.

Определение 8. Пусть Γ — простая петля. Тогда

$$I = \oint\limits_{\gamma} \omega := \int\limits_{a}^{b} \langle P, \dot{x}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

Утверждение 2. *Определение выше корректно, и не зависит от выбора «начала» петли.*

▼
Можно рассмотреть 2 разные параметризации и разбить на 2 куска. Дальше работает определение интеграла по простому пути.
▲

Замечание. Чтобы посчитать интегралы по всем остальным путям, их нужно разбивать на простые пути и простые петли

23 Точные формы

Определение 1. 1-форма ω называется точной в G, если $\exists\, \Phi\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что $\omega = \mathrm{d}\Phi$. Φ в таком случае называется потенциалом, а сама форма ещё иногда назыается потенциальной.

E.g. Работа в физике.

Теорема 1. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma \subset G$, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$ Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \Phi(B) - \Phi(A)$$

□ $\langle P, x \rangle = (\Phi \circ \gamma)'(t)$. Дальше уже тривиально из непрерывности Φ. ■

Теорема 2. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset G$, $\gamma_{1,2}(a) = A$, $\gamma_{1|2}(b) = B$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$$

Теорема 3. *Пусть ω — точная форма в G, $\Gamma \subset G$ — петля Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma} \omega = 0$$

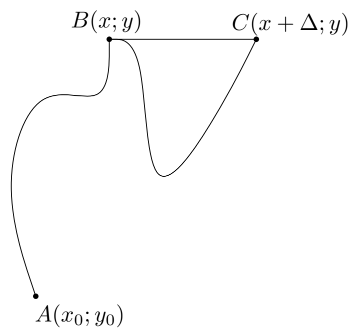
Теорема 4. *Пусть ω — форма в G, и $\int_\gamma \omega$ не зависит от пути при фиксировнных концах. Тогда ω — точна.*

□ Пусть

$$\Phi(x) := \int\limits_{A}^{B} \omega = \int\limits_{(x_0, y_0}^{(x,y)} \omega$$

Надо показать, что $\partial_i \Phi = P^i$. В этом месте можно забить на общности и объявить $n = 2$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P^1$. Поскольку от пути ничего не зависит,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int\limits_{A}^{(x+\Delta x, y)} \omega - \int\limits_{A}^{(x,y)} \omega \right)$$



А это по сути интеграл по пути, соединяющем $(x+\Delta x, y)$ и (x, y). А здесь уже можно взять приличную кривую (прямую) с правильной параметризацией, и воспользоваться теоремой о среднем.

$$\dots = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y)\mathrm{d}t = \lim_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x, y)$$

Последнее равенство верно по непрерывности. ■

Теорема 5. $\displaystyle\oint \omega = 0 \Rightarrow \omega$ *— точна*

Теорема 6. *Пусть G, $\oint \omega = 0$ для любой прямоугольной петли. Тогда ω — точна.*

□ Аккуратно свести к теореме 0.4, там всё будет работать и с путями, параллельными осям координат. ■

24 Замкнутые формы

Здесь уже окончательно забиваем на все $n \geqslant 2$. Там, в целом, понятно как обобщать. Тут всюду $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$

Определение 1. Форма ω замкнута в G, если

$$\forall\, A \in G\ \exists U(A)\colon \exists\, \Phi_U\colon U \to R \quad \omega = \mathrm{d}\Phi_U$$

короче, локально точна.

Теорема 1. *Пусть ω — гладкая форма в G. Тогда если ω замкнута, $\partial_y P = \partial_x Q$ в G.*

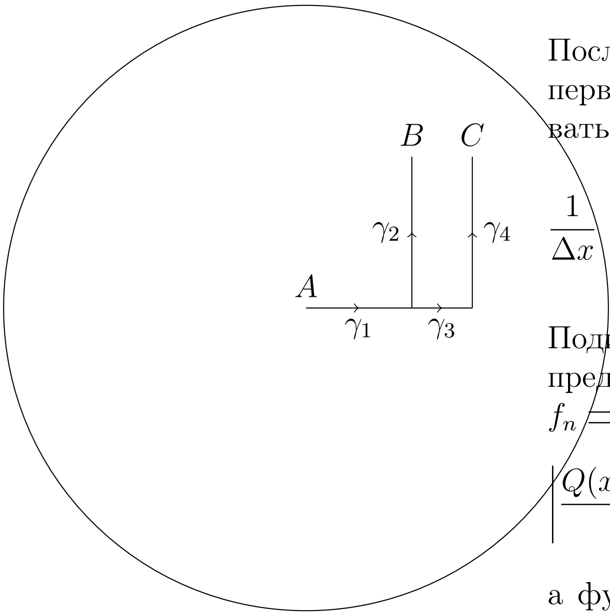
□ Очевидно следует из «локальной точности» и дифференцируемости Φ в окрестности любой точки из G. ■

Теорема 2. *Пусть ω — гладкая форма в G. Тогда если $\partial_y P = \partial_x Q$ в G, то ω замкнута.*

□ Выберем произвольную A, тогда $U_\varepsilon(A) \subset G$. Надо попробовать построить потенциал. Например так $\Phi(B) = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega$. Докажем, что $\partial_x \Phi = P$, $\partial_y \Phi = Q$.

$$\Delta\Phi = \Phi(C) - \Phi(B) = \int\limits_{\gamma_4} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega + \int\limits_{\gamma_3} \omega$$

$$= \int\limits_{y_A}^{y} Q(x+\Delta x, t)\mathrm{d}t - \int\limits_{y_A}^{y} Q(x,t)\mathrm{d}t + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t, y_A)\mathrm{d}t$$



Последний сходится к $P(x, y_A)\mathrm{d}x$, а первые два надо немного преобразовать

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_{\gamma_4} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega\right) = \int\limits_{y_0}^{y} \left(\frac{Q(x+\Delta x, t) - Q(x,t)}{\Delta x}\right) \mathrm{d}t$$

Подинтегральную функцию можно представить как последовательность $f_n \rightrightarrows Q'$.

$$\left|\frac{Q(x + 1/n) - Q(x)}{\frac{1}{n}} - Q'(x)\right| = |Q'(\xi) - Q'(x)| < \varepsilon$$

а функция Q' равномерно непрерывна на $[x, x+\Delta x]$, ибо он отрезок. Так что можно поменять местами предел и интеграл.

$$\dots = \int\limits_{y_A}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}t = \int\limits_{y_A}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \Delta P$$

Если сложить с оставшимся куском, то как раз и выйдет P. С равенством Q вроде все попроще, там нужно считать приращение всего лишь по одному пути. ■

Замечание 1. Бывают замкнутые, но не точные формы. Например $\omega = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. Она замкнута, а вот $\oint_\gamma w$ по окружности вокруг 0 не 0.

25 ⚒Первообразная замкнутой формы вдоль пути

Сначала можно отметить, что $\Gamma = \gamma\big([a;b]\big)$ — компакт. Так что вроде можно пользоваться теоремой о конечном подпокрытии.

Лемма 1. *Пусть G — область, ω — гладкая точная форма в G, а Φ, Ψ — две её первообразные в G. Тогда $\Phi - \Psi \equiv C \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Пусть ω замкнута в G, $\Gamma = \gamma([a;b])$. Тогда существует первообразная вдоль пути γ и $\int\limits_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$.*

□ Поскольку кривая компактна, в любом её покрытии можно выделить конечное подпокрытие. Собственно, будем рассматривать покрытие открытыми кругами $U(p_i)$. Пусть Φ_i — произвольная первообразная в U_i. Заменим Φ_i $\widetilde{\Phi}_i$, так что $\widetilde{\Phi}_{i+1} = \widetilde{\Phi}_i$ на $U_{i+1} \cap U_i$, $\widetilde{U}_0 = U_0$.

Выберем параметризацию, тогда p_i соответствуют $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ Теперь выберем $f(\gamma(t)) = \widetilde{\Phi}_k(\gamma(t))$, $\gamma(t) \in U_k$. Здесь вроде можно прожить и без простоты пути.[1]

Теперь ещё выберем $q_i \in U_{i+1} \cap U_i$, $\{\gamma_j\}$ = пути от p_i до $q_i \cap$ пути от q_i до p_{i+1}. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \sum_j \int\limits_{\gamma_j} = \widetilde{\Phi}(p_n) - \widetilde{\Phi} p_0 = f(b) - f(a)$$

■

26 ⚒Гомотопия путей

Определение 1. Непрерывным семейством путей называется непрерывная функция $g\colon [0;1] \times [a;b] \to \mathbb{R}^n$. Часто обозначается так: $\gamma_s(t) = g(s,t)$. [2]

Определение 2 (∴). Пусть $\gamma_1, \gamma_2\colon [a;b] \to G$, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$,$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда утверждается, что пути гомотопны, если существует семейство $\gamma_s(t)\colon\ \gamma_{s_1} = \gamma_1$, $\gamma_{s_2} = \gamma_2$.

Замечание. Таки отношение эквивалентности.

Теорема 1. *Пусть ω — замкнутая форма в области G, $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$$

Теорема 2. *Пусть ω — замкнутая форма в области G, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ — гомотопные петли. Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma_1} \omega = \oint\limits_{\gamma_2} \omega$$

Замечание. Доказывать я это пока не буду, иначе это будет выглядеть как-то так:

[1]вообще первообразную вдоль пути нигде не определяли, так что можно считать конструкцию, построенную выше, определением

[2]По-хорошему там должны быть топологические пространства, но не сегодня и не сейчас .

Следствие 1. *Пусть* γ *— петля в* G *и* $\gamma \overset{G}{\sim} \bullet$*. Тогда* $\oint\limits_{\gamma} w = 0.$

Определение 3. Область в G называется односвязной, если в ней всякая петля стягивается в точку.

Теорема 3. *В односвязной области все замкнутые формы точны.*

E.g. Далёкая, далёкая галактика — не односвязная область.

Глава 3: Комплексный анализ

27 ⚒Интеграл от комплексной дифференциальной формы

[1]

Определение 1. Определим «шаровую» окрестность комплексного числа как $\{z \mid |z-a| < \varepsilon\}$, проколотую окрестность как $\{z \mid 0 < |z-a| < \varepsilon\}$. Дальше можно уже рассмотреть базу таких окрестностей и ввести топологию как в $\mathbb{R}^2$. Аналогично вводятся пределы и непрерывности.

Определение 2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, $f\colon G \to C$, непрерывна, $f = f_1 + if_2$, $\omega(z, \mathrm{d}z) = f(z)\mathrm{d}z$ — комплексная дифференциальная форма. [2] Пусть $\Gamma \subset G$ — кривая, γ — её параметризация, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} := \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t := \int\limits_{a}^{b} (f_1(\gamma(t))\gamma_1(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2)\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} (f_1(\gamma(t))\gamma_2(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1)\mathrm{d}t$$

Свойства:

Утверждение 1. *см 22*

Утверждение 2. *Пусть $\{t_i\}$ — разбиение отрезка $[a;b]$, $z_i = \gamma(t_i)$, $\Delta z_i = z_{i+1} - zi$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\xi_i = \gamma(\tau_i)$. Пусть ещё*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta z_i$$
$$r = \max|\Delta z_i|$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\sigma$$

▼
Следует из вещественной теоремы Римана
▲

Следствие 1. *Пусть $|f(z)| \leqslant M \;\; \forall z \in \Gamma$*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \ell(\Gamma)$$

[1]здесь надо сильно больше определений

[2]Тут определение по сути такое же как и раньше, дифференциал имеет символический смысл.

▼

$$|\sigma| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \leqslant M \cdot \sum_i |\Delta z_i|$$

А дальше просто предельный переход в неравенстве.
▲

```
........................
{censored by galactic vimperor}
........................
```

30 Свойства дробно-линейного отображения

Определение 1 (Дробно-линейное отображение)**.** $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad \neq bc$ В ∞ определим её как $^a/_c$, а в $-^d/_c$ как ∞.

Утверждение 1. *Дробно-линейное отображение — гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Определение 2. Углом между двумя путями на бесконечности называется угол между образами утих путей при отображении $z \mapsto \frac{1}{z}$

Замечание. Геометрическая мотивировка связана с углами между путями через северный полюс сферы Римана.

Утверждение 2. *Дробно-линейное отображение конформно во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$*

Утверждение 3. *Дробно-линейные отображения образуют группу.*

Утверждение 4. *Дробно-линейные отображения переводят обобщённые окружности (прямые или окружности) в обобщённые окружности.*

▼
Дробно-линейное — композиция линейного и инверсии (с отражением относительно вещественной оси). С линейными всё ясно, а с инверсией надо доказывать. Окружность можно записать уравнением

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2$$

А прямую

$$(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = (z-b)(\bar{z}-\bar{b}) \Leftrightarrow \overline{(a-b)}z + (a-b)\bar{z} + |b|^2 - |a|^2 = 0$$

Посмотрим, прообразом чего она является

$$\left(w^{-1}-a\right)\left(\bar{w}^{-1}-\bar{a}\right) = \frac{(1-aw)(1-\bar{a}\bar{w})}{|w|^2} = R^2 \Leftrightarrow \left(|a|^2-1\right)|w|^2 - a\bar{w} - \bar{a}w + 1 = 0$$

Дальше есть два случая:

$|a| = 1$**:** Это уравнение прямой с $|b| \neq |a|$. А такие прямые не проходят через 0. Ну, точки на одной окружности равноудалены от её центра. А центр у неё в 0.

$|a| \neq 1$ Поделим на $|a|^2 - 1$.

$$\left(w - \frac{a}{|a|^2-1}\right)\overline{\left(w - \frac{a}{|a|^2-1}\right)} = \frac{|a|^2}{|a|^2-1} - 1 = \frac{1}{|a|^2-1}$$

а сие есть уравнение окружности.

Ну, оставшиеся случаи разбираются аналогично. Разве что прямая через начало координат проще задаётся как

$$(e^{-ia} - e^{-ib})z + (e^{ia} - e^{ib})\bar{z} = 0$$

Ну и видно что не будет членов с $|w|^2$ — выйдет прямая.
▲

Утверждение 5. *Дробно-линейное отображение сохраняет ангармоническое отношение:*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} / \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_4}$$

Утверждение 6. *Дробно-линейное отображение однозначно задаётся 3 точками и их образами.*

```
........................
{censored by galactic vimperor}
........................
```

42 Классификация изолированных особых точек

Определение 1. Особой точкой функции f называется точка, где f не голоморфна или не определена.

Определение 2. Изолированной особой точкой функции f называется особая точка, в некоторой окрестности которой нет других особых точек.

46 Вычисление вычетов в полюсах

Определение 1. Пусть f имеет в a полюс. Порядком полюса называется наименьшая отрицательная степень в разложении f в ряд Лорана в кольце с центром в a.

Теорема 1. *Пусть a — полюс первого порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \to a} f(z)$$

Теорема 2. *Пусть a — ноль первого порядка для ψ, $\varphi(a) \neq 0$, φ, ψ голоморфны в $U(a)$, $f = \frac{\varphi}{\psi}$. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Теорема 3. *Пусть a — полюс p-го порядка функции f. Тогда*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(p-1)!}\left((z-a)^p f(z)\right)^{(p-1)}_{z=a}$$

47 Вычисление интегралов с помощью вычетов

I⟩ Интеграл по периоду от периодической функции.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Тогда

$$f = 2\pi i \sum_{a_k} \operatorname{Res}_{a_k} g,$$

где a_k — вычеты функции $g(z)$, внутри единичной окружности. В функции g sin / cos заменены на $\frac{1}{2}\left(z \pm z^{-1}\right)$

II⟩ Интеграл от рациональной функции на $\mathbb{R}$

Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P \leqslant \deg Q - 2$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} R(z)$$

III⟩ $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z = I$

Пусть $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, голоморфна всюду кроме $\{a_k\}$, нету особых точек на $\mathbb{R}$. Тогда

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) e^{i\lambda z}$$

Лемма 1 (Жордана). *Пусть f голоморфна всюду кроме счётного числа особых точек, $f(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, e^{i\lambda z}\,\mathrm{d}z \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

55 Классические односвязные области. Теорема Римана

Определение 1. Комплексным изоморфизмом областей G и H называется однолистное конформное отображение [1] $f\colon G \to H$. Область G и H тогда называются и конформно эквивалентными (изоморфными).

Замечание. $f\colon G \to G$ при условиях выше — автоморфизм.

Утверждение 1. *Все автоморфизмы области G с операцией композиции образуют группу* $\operatorname{Aut} G$.

▼

Пусть $f, g, h \in \operatorname{Aut} G$. Тогда $f \circ g\colon G \to G$, композиция биекций — биекция. Так что операция задана корректно.

- $\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f(g(h(x))) = \big((f \circ g) \circ h\big)(x)$
- $\forall\, f\ \exists\, f^{-1}$, обратное — голоморфно и биекция, $\Rightarrow$ конформно и однолистно.
- $\mathrm{id}\colon G \to G$ — конформно и однолистно.

▲

[1] Тут хватит и голоморфности с сюръективностью, ведь из однолистности производная нигде не обращается в 0

Классические области

1. $\overline{\mathbb{C}}$
2. $\mathbb{C}$
3. $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

Теорема 2 (Римана)**.** *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $G \cong$ одной из классических областей*

1. $G = \overline{\mathbb{C}} \Rightarrow G \cong \overline{\mathbb{C}}$
2. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \Rightarrow G \cong \mathbb{C}$
3. $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus U \Rightarrow G \cong \mathbb{D}$, $|U| > 1$

56 Лемма Шварца

57 Лемма о подгруппе группы автоморфизмов

Определение 1. Пусть $\Gamma < \operatorname{Aut} G$. Тогда говорят, что Γ — транзитивна, если

$$\forall\, z_1, z_2 \in G \;\; \exists\, f \in \Gamma\colon\; f(z_1) = z_2$$

Замечание. Лучше конечно говорить, что действие группы автоморфизмов на G транзитивно.

Лемма 1. *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, Γ — транзитивна. Пусть к тому же $\exists\, z_0\colon \operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma$. Тогда $\Gamma = \operatorname{Aut} G$.*

▼
Выберем произвольный $f \in \operatorname{Aut} G$, пусть $z_1 = f(z_0)$. Из транзитивности G $\exists\, \gamma \in \Gamma\colon \gamma(z_1) = z_0$. Тогда $h = \gamma \circ f \in \operatorname{Stab}(z_0)$. Но из второго условия $\operatorname{Stab}(z_0) < \Gamma \Rightarrow h \in \Gamma$. Но тогда

$$\forall\, f \in \operatorname{Aut} G \;\; f = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\in\Gamma} \circ \underbrace{h}_{\in\Gamma} \in \Gamma$$

▲

58 Автоморфизмы классических областей

Здесь всё константы по умолчанию $\in \mathbb{C}$.

Теорема 1. $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}} = \{f \mid f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0\}$

□ Пусть

$$\Gamma = f \mid f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \Gamma < \operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}}$$

Композиция дробно-линейных — дробно-линейна, обратное — тоже дробно-линейно. Так что подгруппа.

Она транзитивна, для $\mathbb{C}$ хватит и линейного (сдвиг), а как отправить что-то в бесконечность, понятно. Давайте посмотрим, чему равен $\operatorname{Stab} \infty$. Нам нужно чтобы $\infty \mapsto \infty$. А значит $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Но из теоремы 0.2 это линейные функции. А они явно входят в дробно-линейные. Так что $\operatorname{Stab} \infty < \Gamma$. А тогда по лемме 0.1 $\Gamma = \operatorname{Aut} \overline{\mathbb{C}}$ ■

Теорема 2. $\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$

□ Пусть $A = U(\infty)$. Бесконечность — явно особая точка, надо подумать только какая.

Пусть ∞ — существенно особая точка. Но тогда по теореме Сохоцкого $f(A)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. А значит в $U(0) \subset \mathbb{C} \setminus U(\infty)$ есть точка из $f(A)$ — проблемы с однолистностью (она же инъективность).

Пусть ∞ — устранимая особая точка. Но тогда в кольце $U(\infty)$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \dots + c_0$$

Но $f \in \operatorname{Aut} G \Rightarrow f$ голоморфна в 0. Беда

Выхода нет — в ∞ — полюс. Но тогда $f(z)$ — какой-то полином, ведь для полюса нужно ограниченное число членов в главной части ряда Лорана. Но любой полином степени n имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней. А у нас функция однолистная. Так что подходят полиномы лишь первой степени. Константу тоже нельзя, проблемы с однолистностью. [1] ■

Теорема 3. $\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \{f \mid f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}, \theta \in \mathbb{R}, |a| < 1\}$

□ Опять рассмотрим Γ как в условии и покажем, что $\Gamma = \operatorname{Aut}\mathbb{D}$. Надо сначала показать хотя бы, что $\Gamma < \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

$$\left| e^{i\theta}\,\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|$$

Проще всего домножить на сопряжённое

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(z-a)\,(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)\,(1-a\bar{z})} = \frac{|z|^2 - a\bar{z} - z\bar{a} + |a|^2}{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2|z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2 \Leftrightarrow (|a|^2-1)(|$$

Так что при $|z| < 1 \wedge |a| < 1$ это верно.

Дальше легко найти обратное к $\gamma(z) = w$

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w - e^{i\theta}}{w\bar{a} - e^{i\theta}} = e^{i\theta_1}\frac{a_1 - z}{1 - \bar{a}_1 z} \quad (a_1 = e^{i\theta}a \in \mathbb{D})$$

С композицией тоже несложно разобраться

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z} \\
f_2(z) &= \frac{z-a_2}{1-\bar{a}_2 z} \\
a &= \frac{a_1 e^{-i\theta} + a_2}{1 + a_1\bar{a}_2 e^{-i\theta}} \qquad\qquad |a| = |e^{-i\theta} f_1(-a_2 e^{i\theta})| < 1 \\
f_2(f_1(z)) &= e^{i\theta_2}\frac{e^{i\theta}z - e^{i\theta}a_2 - a_1 + a_1\bar{a}_2 z}{1 + \bar{a}_1 a_2 e^{i\theta} - \bar{a}_1 e^{i\theta} z - \bar{a}_2 z} = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}
\end{aligned}$$

Осталось показать оба условия из леммы 0.1

1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Будем строить так: $z_1 \mapsto 0 \mapsto z_2$

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \qquad f_2^{-1}(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z} \qquad f = f_2 \circ f_1$$

[1] Все утверждения про полюс в бесконечности можно получить, рассмотрев $f(1/z)$ в $U(0)$

2. Посмотрим на $f \in \operatorname{Stab} 0$. По лемме Шварца $\forall\, z \in D$ $|f(z)| \leqslant |z|$. Поскольку $\operatorname{Stab} 0$ — группа, $\exists\, f^{-1}$ и

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leqslant |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|.$$

А тогда по второму пункту леммы Шварца $f(z) = cz$, $|c| = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$. Следовательно, $\operatorname{Stab} 0 < \Gamma$. Тогда по уже упомянутой лемме $\Gamma = \operatorname{Aut} \mathbb{D}$

■

Литература

[1] **Зорич В. А.**, Математический анализ. Часть I — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012

[2] **Зорич В. А.**, Математический анализ. Часть II — 6 изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012

[3] **Фихтенгольц Г. М.**, Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трёх томах. Том II. — СПб.: Издательство «Лань», 1997. — 800 с.

[4] **Гельфанд И. М.**, Лекции по линейной алгебре — 5 изд., испр. — М.: Добросвет,МЦНМО, 1998. — 320 с.

[5] **Шабат Б. В.**, Введение в комплексный анализ, ч. I — 2 изд. — М.: Наука, 1976. — 320 с.