# Элементы линейной алгебры

taxus

22.06.2016

**Аннотация**

*Сей труд не стоит рассматривать как исчерпывающий конспект лекций. Скорее он представляет субъективно выбранный мною материал, показавшийся или наиболее важным, или наиболее непонятым, или ещё не знаю каким. Надеюсь, он хоть кому-нибудь принесёт немного пользы.*

# Оглавление

**6 Линейные пространства** **4**

§ 1 Определения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
§ 2 Линейная независимость системы векторов . . . . . . 5
§ 3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
§ 4 Базис в конечномерных пространствах . . . . . . . . 6
§ 5 Сумма и пересечение ЛП . . . . . . . . . . . . . . . . 7
§ 6 Внутренняя прямая сумма . . . . . . . . . . . . . . . 7
§ 7 Размерность прямой суммы конечного числа ЛП . . . 8
§ 8 Аффинные подпространства . . . . . . . . . . . . . . 9
§ 9 Факторпространство . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**7 Матрицы** **10**

§ 10 Матрицы, основные определения . . . . . . . . . . . 10
§ 11 Кольцо квадратных матриц . . . . . . . . . . . . . . 10
§§ 12–13 Определитель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
§ 14 Теорема Лапласа . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
§ 15 Ступенчатая матрица . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
§ 16 Определитель произведения матриц . . . . . . . . . . 14
§ 17 Обратимость матриц . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
§§ 18–19 Ранг, строчный и столбцовый . . . . . . . . . . . . . 15
§ 20 Ранг матрицы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
§ 21 Ранги и миноры . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
§ 22 Матричная запись СЛУ и решения такой системы . . 18
§ 23 Теорема Кронекера-Капелли . . . . . . . . . . . . . . 20
§ 24 Матрицы элементарных преобразований . . . . . . . 21

**8 Линейные операторы** **22**

§ 8 Кольцо линейных операторов . . . . . . . . . . . . . 22
§ 12 Инвариантные подпространства . . . . . . . . . . . . 23
§ 13 Характеристический многочлен оператора . . . . . . 24
§ 20 Корневые подпространства . . . . . . . . . . . . . . . 24

§ 21 Сумма корневых подпространств . . . . . . . . . . . . . 25
§ 22 Про инвариантность корневых подпространств . . . . 27
§ 23 Размерность корневого подпространства . . . . . . . . 28
§§ 24–25 Жорданова нормальная форма . . . . . . . . . . . . . 29
Использованная литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

# Глава 6: Линейные пространства

## § 1 Определения

**Определение 1.** Пусть $K$— поле. Рассмотрим множество $V$ с двумя операциями

$$+ : V \times V \to V$$
$$\cdot : K \times V \to V$$

Тогда $V$— линейное пространство над $K$, если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V,\ \alpha_i \in K$

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$
3. $\exists\, \mathbf{0} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\exists\, (-\mathbf{x}) \in V : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
5. $(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x} + \alpha_2\mathbf{x}$
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$
8. $(\alpha_1\alpha_2)\mathbf{x} = \alpha_1(\alpha_2\mathbf{x})$

**Определение 2.** Пусть $U, V$— линейные пространства над $K$, $U \subset V$. Тогда $U$— подпространство $V$.

**Определение 3.** Пусть $V$— линейное пространства над $K, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Тогда $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$— линейная комбинация $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

**Лемма 1.** *Пусть $U, V$ — линейные пространства над $K$, $U \subset V$. Тогда если $U$ замкнуто относительно $+, \cdot$ из $V$, то $U$ — подпространство $V$.*

▼

Формулировка леммы аналогична тому, что всякая линейная комбинация элементов $U$ лежит в нём же. Нужная дистрибутивность, ассоциативность и т.д. унаследуется от соответствующих операций в надпространстве, так как их свойства заданы на всём множестве $V$, а значит и на подмножестве $U$. Однако в некоторых свойствах требовалось существование в множестве чего-нибудь. Покажем, что все эти требования равносильны существованию линейной комбинации.

3. $\exists\, \mathbf{0} \in U \Leftarrow \exists\, 0 \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

4. $\exists\, -\mathbf{x} \in U \Leftarrow \exists\, (-1) \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in U$

▲

**Определение 4.** Пусть $V$— линейное пространства над $K$, $M \subset V$

$$\langle M \rangle = \left\{ \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n \middle| \begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \\ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in M \end{cases} \right\}$$

$\langle M \rangle$— линейная оболочка $M$.

**Лемма 2.** *Верны утверждения:*

1. *$\langle M \rangle$ — подпространство $V$*

2. *$\langle M \rangle = \bigcap\limits_i W_i$, $W_i \supset M$, $W_i$— подпространство $V$*

▼

Доказательства очень похожи на соответствующие в теории групп.

▲

**Определение 5.** Пусть $V$— линейное пространство. Тогда $M \subset V$— порождающая система, если $\langle M \rangle = V$

## § 2 Линейная независимость системы векторов

**Определение 1.** Пусть $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Тогда если

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow \forall\, i\ \alpha_i = 0$$

то система векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ линейно независима. В противном случае система линейно зависима.

### Свойства

1. Подсистема линейно независимой системы линейно независима.

2. В ЛНЗ системе ни один вектор не выражается через другие

## § 3 Лемма о линейной зависимости линейных комбинаций. Базис

**Лемма 1** (Линейная зависимость линейных комбинаций)**.** *Пусть* $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *— ЛНЗ, а* $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$*— линейные комбинации векторов из* $M$*. Тогда если* $m > n$*, то* $U$*— линейно зависимы.*

▼
Там получается ОСЛУ, в которой уравнений больше, чем неизвестных. Решение найдётся.
▲

**Определение 1.** Базис— линейно независимая (6.2.1), порождающая (6.1.5) система векторов.

**Определение 2.** Размерность (dim) линейного пространства— число векторов в базисе.

**Лемма 2** (Корректность определения размерности)**.** *Пусть* $\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}, \{v_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$*— базисы* $V$*. Тогда* $m = n$*.*

▼
Иначе одна система выражается через другую и по 6.3.1 она ЛЗ, что странно.
▲

## § 4 Базис в конечномерных пространствах

Во всех следующих теоремах действие происходит в конечномерных пространствах.

**Теорема 1.** *Из всякой порождающей системы можно выделить базис*

**Следствие 1.** *Базис— минимальная порождающая система векторов*

**Теорема 2.** *Из всякой линейно независимой системы можно выделить базис.*

**Следствие 1.** *Базис— максимальная линейно независимая система*

## § 5 Сумма и пересечение ЛП

**Определение 1.** Пусть $\forall\, i \in I \;\; U_i \subset V$. Тогда

$$\sum_{i\in I} U_i := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i\}$$

То есть совокупность всевозможных сумм

**Определение 2.**

$$\bigcap_{i\in I} U_i := \{u \mid \forall\, i \;\; u \in U_i\}$$

*Замечание.* Пересечение— подпространство.

**Теорема 1.** *Пусть $U_1, U_2$ — подпространства $V$. Тогда*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim(U_1 \cap U_2)$$

□ Пусть $\dim(U_1 \cap U_2) = k$, $\dim U_1 = k + l$, $\dim U_2 = k + n$. Тут мы просто дополняем базис пересечения до базиса пространства, умеем же по 6.4.2.

1. Сначала доказываем, что $k+l+n$ нужных векторов вообще хватит, чтобы породить всё $U_1 + U_2$
2. Потом доказываем, что построенный таким образом базис линейно независим

■

## § 6 Внутренняя прямая сумма

**Определение 1.** Пусть $\{U_i\}_{i\in I} \subset 2^V$, $U = \sum_I U_i$. Тогда

$$\left( \sum_{\substack{i\in I \\ u_i \in U_i}} u_i = 0 \Rightarrow \forall\, i \;\; u_i = 0 \right) \Leftrightarrow U = \bigoplus_{i\in I} U_i$$

**Лемма 1.** *Элемент из прямой суммы единственным образом представляется суммой $u_i \in I_i$.*

**Теорема 2** (Критерий $\oplus$). *Пусть*

$$U = \sum_{i\in I} U_i$$
$$W_i = \sum_{j\in I, j\neq i} U_j$$

*Тогда $U$ — прямая сумма $\Leftrightarrow$*

$$\forall\, i \;\; U_i \cap W_i = \{0\}$$

□ Более-менее ясно из определения прямой суммы. И вообще, похоже на свойства ЛНЗ системы векторов. ■

## § 7 Размерность прямой суммы конечного числа ЛП

**Теорема 1.**

$$\dim \underbrace{\bigoplus_{i \in I} U_i}_{V} = \sum_{i \in I} \dim U_i$$

□ (По мотивам [1, стр. 195]).

Сначала заметим, что объединение базисов — точно порождающая система в $V$. Теперь докажем, что она линейно независима. Пусть для начала $e_{ij}$ — базис $U_i$. Тогда

$$V \ni v = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}$$

Сгруппируем

$$u_i = \sum_j \alpha_{ij} e_{ij}$$

$$v = 0 \Leftrightarrow \sum_i u_i = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \;\; u_i = 0$$

Ну а ноль в подпространствах представляется единственным образом

$$u_i = 0 \Rightarrow \forall\, j \;\; \alpha_{ij} = 0$$

■

**Утверждение 2** (Непонятно зачем нужное утверждение)**.** *Пусть*

$$V_{k+1} = \bigoplus_{i=1}^{k+1} U_i, \; V_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$$

*Тогда*

$$V_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$$

## § 8 Аффинные подпространства

**Определение 1.** Пусть $U$— подпространство $V$, $a \in V$. Тогда $W = U + a = \{x + a \mid x \in U\}$ — аффинное подпространство.

**Лемма 1.** *Пусть $U$ — подпространство $V$. Тогда*

$$U + a = U + b \Leftrightarrow a - b \in U$$

**Лемма 2.** *Пусть $V$ — линейное пространство над $K$, $W \subset V$, $a \in V$. Тогда если:*

1. $\forall\, \alpha \in K, x \in W \;\; \alpha(x - a) + a \in W$
2. $\forall\, x_1, x_2 \in W \;\; x_1 + x_2 - a \in W$

*то $W$ — аффинное подпространство*

## § 9 Факторпространство

**Определение 1.** Пусть $U$ — подпространство линейного пространства $V$ над полем $K$. Тогда такая структура называется факторпространством:

$$\begin{aligned} V/U &:= \{U + a \mid a \in V\} \\ \overline{a} &:= U + a \\ \overline{a} + \overline{b} &:= \overline{a + b} \\ \alpha \cdot \overline{a} &:= \overline{\alpha \cdot a} \end{aligned}$$

**Утверждение 1.** *Определение 6.9.1 корректно*

**Утверждение 2.** *Структура которую описали в 6.9.1— векторное пространство.*

**Теорема 3.**

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

**Определение 2.** Дополнение базиса $U$ до базиса $V$ называется базисом $V$ относительно $U$ (относительным базисом).

# Глава 7: Матрицы

## § 10 Матрицы, основные определения

**Определение 1** (Матрицы над $K$)**.** Пусть $K$— поле, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$M_{m,n}(K) = \left\{ A \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mb} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in K \right\}$$

**Определение 2** (Сложение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{mn}$ :

$$(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Определение 3** (Умножение матриц)**.** $A_{mn} \cdot B_{nk}$ :

$$(ab)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$$

## § 11 Кольцо квадратных матриц

Обозначается $M_n(K)$
Ноль:

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Единица:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## §§ 12–13 Определитель

**Определение 1.** Пусть $A \in M_n(K)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

**Определение 2.** Если обозначать строки $A_1, \dots, A_n$, а столбцы $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, то можно ввести ещё такую функцию:

$$\det(A_1, \dots, A_n) = \det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) := \det A$$

**Определение 3** (Элементарные преобразования)**.**

| | | |
|---|---|---|
| I | $A_i \leftrightarrows A_j$ | $A^{(i)} \leftrightarrows A^{(j)}$ |
| II | $A_i := A_i + \lambda A_j$ | $A^{(i)} := A^{(i)} + \lambda A^{(j)}$ |
| III | $A_i := \lambda A_i$ | $A^{(i)} := \lambda A^{(i)}$ |

**Определение 4** (Транспонированная матрица)**.**

$$A^T \colon (a^T)_{ij} = (a)_{ij}$$

### Свойства

1. Определитель (в описанном в 7.13.2 смысле) полилинеен и кососимметричен по строкам и столбцам.
2. Если 2 строчки или столбца одинаковые, то определитель равен 0
3. Элементарные преобразования влияют на определитель следующим образом:

$$\begin{array}{r|r} \text{I} & (-1)\det A \\ \text{II} & \det A \\ \text{III} & \lambda \det A \end{array}$$

4. $\det A^T = \det A$

## § 14 Теорема Лапласа

**Определение 1** (Минор)**.** Пусть $A \in M_n(K)$, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда определитель подматрицы, собранной из $k$ строк и $k$ столбцов называется *минором* порядка $k$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

$\Delta'$ — дополнительный минор— всё, что осталось. Его ещё иногда (когда минор— один элемент) обозначают как $M_{ij}$

**Определение 2** (Алгебраическое дополнение)**.**

$$A_\Delta = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\Delta'$$

**Теорема 1** (Теорема Лапласа)**.** *Пусть $A \in M_n(K)$, $k \in \mathbb{N}$. Выберем из матрицы $k$ строчек. Тогда*

$$\det A = \sum_\Delta \Delta \cdot A_\Delta$$

*где $\Delta$ — любой минор, содержащий нужные $k$ строчек.*

☐ Выберем какой-то один минор, $i_k$ — его строчки, $j_\ell$ — его столбцы

$$\Delta : \begin{cases} i_1, \ldots, i_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{cases}$$

Теперь отправим все элементы, попавшие в минор, в левый верхний угол. Сначала сдвинем все строчки:

$$\begin{cases} i_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \dotfill \\ i_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

Потом все столбцы

$$\begin{cases} j_1 \to 1 \quad (i_1 - 1 \text{ сдвигов}) \\ \dotfill \\ j_k \to k \quad (i_k - k \text{ сдвигов}) \end{cases}$$

В итоге, из свойств элементарных преобразований, получим:

$$\det B = (-1)^{i_1-1+\cdots+i_k-k+j_1-1+\cdots+j_k-k}\det A = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\det A$$

так как все добавки парные $\Rightarrow$ делится на 2.

С другой стороны, $\Delta$ и $\Delta'$ никак не поменялись, так как переставляемые чиселки в них не не входят. Также нужно отметить, что $B_\Delta = \Delta'$, по тем же причинам, в общем-то.

Посмотрим, что такое $\Delta \cdot \Delta'$ [1].

$$\Delta \cdot \Delta' = \left( \sum_{\tau \in S_k} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau(1)} \cdots b_{k\tau(k)} \right) \cdot \left( \sum_{\tau' \in S_{n-k}} (-1)^{I(\tau')} b_{k+1\tau'(k+1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right)$$

Пусть теперь $\sigma = \tau \circ \tau'$. Тогда $I(\sigma) = I(\tau) + I(\tau')$ по свойствам перестановок, а $\sigma$ фактически разбивается на 2 независимых: $\tau$ и $\tau'$. В итоге

$$\Delta \cdot \Delta' = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

А это вообще-то правильный кусок определителя $B$. Поймём, что это за кусок определителя $A$. Числа-то те же самые. А вот на вопрос со знаком мы уже по сути ответили, когда рассуждали про определитель. Слагаемые точно не перемешиваются, так как все перестановки— биекции, так что каждое слагаемое просто умножается на $(-1)^{\cdots}$. Так что

$$\Delta \cdot \Delta' = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$
$$A_\Delta = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \Delta'$$
$$\Delta \cdot A_\Delta = \sum_{\sigma'} a_{1\sigma'(1)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

где у $\sigma'$ уже другие независимые циклы: $\binom{i_1,\ldots,i_k}{j_1,\ldots,j_k}$ и всё остальное.

■

**Следствие 1.**

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

**Следствие 2.**

$$a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0$$

▼

Приравняем $i$ строчку к $j$-ой, получим матрицу $B$. Тогда

$$a_{j1}A_{i1} + \cdots + a_{jn}A_{in} = b_{i1}B_{i1} + \cdots + b_{jn}B_{in} = \det B = 0$$

Так как определитель $B$ очевидно равен 0

▲

[1] Вообще, тут маленькая неточность: здесь фактически *действие* группы перестановок на множестве $\{k+1, \ldots, n\}$

## § 15 Ступенчатая матрица

**Определение 1.** $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ — ступенчатая матрица.[1]

**Теорема 1** (Определитель ступенчатой матрицы)**.**

$$\det A = \det A_1 \cdots \det A_n$$

$\square$ По индукции через теорему Лапласа 7.14.1 $\blacksquare$

## § 16 Определитель произведения матриц

**Теорема 1.** *Пусть* $A, B \in M_n(K)$. *Тогда*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$\square$ Докажем, что такие матрицы имеют одинаковый определитель:

$$C = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E_n & B \end{array}\right) \quad \text{и} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} AB & A \\ \hline 0 & -E_n \end{array}\right)$$

Теперь сделаем из куска с $B$ $Z_n$.

$$D'^{(n+j)} := C^{(n+j)} + b_{1j}C^{(1)} + \cdots + b_{nj}C^{(n)}$$

Внизу получатся нули, а вот сверху:

$$d_{i,n+j} = 0 + b_{1j}a_{i1} + \cdots + b_{nj}a_{in} = (ab)_{ij}$$

Тысяча индексов, это же произведение матриц!

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E_n & 0 \end{array}\right)$$

Мы тут пользовались только преобразованием II, так что определитель не поменялся.

Теперь переставим половинки матрицы. При этом будет совершено $n$ преобразований I. Так что

$$\begin{aligned} \det A \det B = \det C = \det D' = (-1)^n \det D = (-1)^n \det(-E_n) \det(AB) \\ = (-1)^{2n} \det(AB) = \det AB \end{aligned}$$

$\blacksquare$

[1] вообще-то, она квазитреугольная, а не ступенчатая

## § 17 Обратимость матриц

**Определение 1.** Пусть $A = M_n(K)$. Тогда $A$ — невырожденная $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

**Определение 2** (Взаимная матрица)**.**

$$\widetilde{A} = (a)_{ij}^T$$

**Лемма 1.**

$$A \cdot \widetilde{A} = \det A \cdot E_n$$

**Определение 3.** Пусть $A = M_n(K)$. Тогда матрица $A^{-1}$ :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$

(если существует)

**Следствие 1.** *Если* $\det A \neq 0$*, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$$

**Следствие 2.** *$A$ невырождена $\Leftrightarrow$ $A$— обратима.*

**Следствие 3.** *Пусть $A, B \in M_n(K)$. Тогда*

$$AB = E_n \Rightarrow A, B \text{ — обратимы и } \begin{cases} B = A^{-1} \\ A = B^{-1} \end{cases}$$

## §§ 18–19 Ранг, строчный и столбцовый

**Определение 1** (Строчный ранг)**.** Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда

$$\mathrm{rk}_s(A) = \dim\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$$

**Определение 2** (Столбцовый ранг)**.** Пусть $A \in M_{m,n}(K)$. Тогда

$$\mathrm{rk}^{(s)}(A) = \dim\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}\rangle$$

**Лемма 1.** *Строчный ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

▼
Пусть $B_1, \dots, B_m$ получены из $A_1, \dots, A_m$ элементарными преобразованиями строк. Эти преобразования— линейные.[1]. Так что линейная оболочка никак не изменится.

$$\langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle B_1, \dots, B_m \rangle$$

А значит, и ранги совпадают.
▲

Транспонирование даст аналогичное рассуждение для столбцов

**Лемма 2.** *Столбцовый ранг сохраняется при элементарных преобразованиях строк.*

▼
Пусть $\mathrm{rk}^{(s)}(A) = r$. Будем по одному убирать из линейной оболочки столбцов линейно выражающиеся векторы

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle \rightsquigarrow \langle A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)} \rangle$$

Пусть после линейных преобразований образы этих векторов стали линейно зависимы, $A \rightsquigarrow B$. Перепишем:

$$\beta_1 B^{(i_1)} + \dots + \beta_n B^{(i_r)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_{1i_1}\beta_1 + \dots + b_{1i_r}\beta_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{mi_1}\beta_1 + \dots + b_{mi_r}\beta_n = 0 \end{cases} \quad (\exists\, \beta_i \neq 0)$$

Проведём все преобразования в обратную сторону. Тогда, $\{\beta_i\}$ тоже останутся решениями такой системы уравнений, так как все преобразования не изменят решений. А тогда и $\{A^{i_k}\}$ — линейно зависимы(?!?).

Таким образом, $\mathrm{rk}^{(s)}\, B \geqslant \mathrm{rk}^{(s)}\, A$. Теперь можно поменять всюду $A$ и $B$ местами. В силу обратимости элементарных преобразований рассуждение не изменится. Так что $\mathrm{rk}^{(s)}\, A \geqslant \mathrm{rk}^{(s)}\, B$. А тогда $\mathrm{rk}^{(s)}\, A = \mathrm{rk}^{(s)}\, B$.

▲

Транспонирование даст аналогичное рассуждение для строчек

## § 20 Ранг матрицы

**Теорема 1.** *Строчный и столбцовый ранг совпадают*

[1]Вообще, конечно, так нехорошо. Линейные отображения ещё не ввели, так что надо каждое преобразование проверять

□ Тут рисовать надо, а я пока не умею это делать быстро..⌢̈ Будем приводить матрицу к такому виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

1. Найдём ненулевой элемент, поставим в $1, 1$ преобразованием I
2. С помощью преобразования II для строк сделаем нулевым весь первый столбец, кроме $1, 1$.
3. Теперь с помощью такого же преобразования для столбцов сделаем первую строку нулевой, кроме первого элемента.
4. Поделим первую строку на первый элемент
5. Выкинем первую строку и первый столбец, повторив всё для остальной матрицы

Даже такие издевательства над бедной матрицей не изменят оба ранга. А в преобразованной они очевидно равны ■

**Определение 1** (Ранг матрицы)**.**

$$\operatorname{rk} A := \operatorname{rk}_s(A) = \operatorname{rk}^{(s)} A$$

## § 21 Ранги и миноры

**Теорема 1.** *Ранг матрицы— наибольший порядок*[1] *её ненулевого минора.*

□ Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Тогда строки всех миноров порядка $s > r$ линейно зависимы. А значит, можно элементарными преобразованиями получить строку нулей. Значит, наибольший порядок минора $\leqslant r$.

Докажем, что минор порядка $r$ подходит. Выберем $r$ линейно независимых строк и из них вытащим подматрицу. Убедимся, что её определитель ненулевой. Можно преобразовать её всё тем же алгоритмом, что был описан в теореме 7.21.1, разве что делить первую строку чтобы получить 1 не будем. Если где-то появится нулевая строка, значит строки были линейно зависимы. А матрица ещё была квадратной. Так что получится матрица диагонального вида. Определитель посчитать нетрудно, он получается ненулевой. ■

[1]размер подматрицы соответствующей минору, проще говоря.

## § 22 Матричная запись СЛУ и решения такой системы

**Определение 1.** Рассмотрим какую-то систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_1 \end{cases} \tag{7.1}$$

Можно записать её в таком виде:

$$A \cdot X = B$$

где $A$ — матрица системы, $X$ — столбец неизвестных, $B$ — столбец решений, умножение матричное.

Однородную систему уравнений можно записать как $A \cdot X = 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

**Теорема 1.** *Решение однородной системы линейных уравнений— подпространство $K^n$, причём размерность пространства решений— количество главных (основных, базисных) переменных.*

□ Приведём матрицу к ступенчатому[**?**, стр. 50] виду. Нигде это нормально не определялось, но и так очевидно что это и как получается. Я рисуночек хотел вставить, но не успею.

Тогда главные переменные— те, что которые соответствуют числа, *не* стоящие на краях «ступенек». Пусть $i_1, \dots, i_k$ — их номера. Тогда рассмотрим $\{e_j\}$, такие, что

$$e_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ i_1 \\ \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

причём остальные чиселки в этих векторах выбираются с тем условием, что $Ae_j = 0$.

Все $e_j$ разные, так что система линейно независима. Теперь докажем, что все решения порождаются такой системой векторов.

Пусть $x$ — столбец решений. Соберём

$$x^* = x_{i_1} e_i + \cdots + x_{i_k} e_k$$

Если подумать до конца своих дней, то можно осознать, что

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ Ax^* = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x* \text{ — решение.}$$

Оказалось, что думать до конца своих дней не нужно, ведь векторы $e_j$ определены так, что $Ax^* = 0$.

Итак, мы выяснили, что $x - x^*$ решение. Но у этого вектора на всех позициях, соответствующих главным переменным стоят нули. А раз он решение, то и на всех остальных местах нули. (ну, иначе $1 \cdot x_1 \neq 0$, например). Тогда $x = x^*$.

Чудно, мы получили что можем таким хитрым базисом породить все решения. Докажем, что решения— подпространство.

Пусть $x^1, x^2$ — решения. Тогда

$$A(\lambda x^{(1)} + \mu x^{(2)}) = \lambda A x^{(1)} + \mu A x^{(2)} = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

Тогда по лемме 6.1.1 оно подпространство. А выбранные векторы $e_j$ — базис, так как они порождают все решения и линейно независимы. ■

**Определение 2.** Базис пространства решений ОСЛУ — фундаментальная система решений.

**Теорема 2.** *Пусть* (7.2) *— однородная система линейных уравнений. Тогда размерность пространства её решений равна $m - \operatorname{rk} A$, где $m$ — порядок матрицы.*

□ Если сделать матрицу ступенчатой с единицами на «ступеньках» , то её ранг не изменится. Размерность строк приведённой матрицы — это число «ступенек». А последнее равно $m - k$, где $k$ — число главных переменных. ■

**Теорема 3.** *Пусть $V$ — пространство решений* (7.2)*, $U$ — множество решений* (7.1)*, $x^0\colon Ax^0 = B$. Тогда $U = V + x^0$ — аффинное подпространство $K^n$*

□ Пусть $x \in V + x^0$. Тогда $x = x' + x^0$, $x' \in V$.

$$Ax = Ax' + Ax^0 = B + 0 = B \Rightarrow x \in U \Rightarrow V + x^0 \subset U$$

С другой стороны, пусть $y \in U$. Тогда

$$A(y - x^0) = Ay - Ax^0 = 0 \Rightarrow y \in V + x^0 \Rightarrow U \subset V + x^0$$

■

## § 23 Теорема Кронекера-Капелли

**Определение 1.** Система уравнений вида $Ax = B$ называется совместной, если она имеет решение.

**Определение 2** (Расширенная матрица сиситемы)**.**

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_1 \end{pmatrix}$$

**Теорема 1** (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ $Ax = B$ совместна* $\Leftrightarrow \operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|B)$

□

$\Rightarrow$

$$Ax = B \Rightarrow A^{(1)}x_1 + \cdots + A^{(n)}x_n = B$$

Таким образом, $B$ выражается через $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$. Следовательно,

$$B \in \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \Rightarrow \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, B \rangle$$

А тогда равны их размерности $\Rightarrow$ равны ранги.

$\Leftarrow$ Раз равны ранги, то равны и размерности линейных оболочек столбцов. А раз прибавление вектора $B$ не меняет размерности, то он линейно выражается через остальные. Дальше уже совсем ясно.

■

## § 24 Матрицы элементарных преобразований

$$\text{I}\ E_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \phantom{E_n} & i & \phantom{0} & j & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{II}\ E_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \phantom{E_n} & j & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{III}\ E_i(\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \phantom{E_n} & i & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E_n & \vdots & 0 \\ \cdots & \lambda & \cdots \\ 0 & \vdots & E_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Умножение слева преобразует строки, справа— столбцы.

**Поиск обратной матрицы** Можно привести матрицу, как уже много раз делали, к такому виду

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

1) $M \neq E_n \Rightarrow A$ необратима.

2) $M = E_n$.

$$E_n = \underbrace{P_\ell \cdots P_1}_{\text{преобразования строк}} \quad A \quad \underbrace{Q_1 \cdots Q_s}_{\text{преобразования столбцов}}$$

$$A = P_1^{-1} \cdots P_\ell^{-1} E_n Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$$

$$A^{-1} = Q_1 \cdots Q_s P_\ell \cdots P_1$$

Отсюда кстати проистекает волшебный способ поиска обратной матрицы — написать рядом с ней единичную и преобразованиями строк получить из неё единичную. Тогда там, где была единичная матрица, получится обратная к $A$.

# Глава 8: Линейные операторы

## § 8 Кольцо линейных операторов

**Определение 1.** Пусть $V$ — линейное пространство над полем $K$. Пусть также $\varphi\colon V \to V$, и $\varphi$ — линейное отображение. Тогда $\varphi$ — линейный оператор.

**Определение 2** (Сложение и умножение операторов)**.** Введём 2 операции:

$$+\colon V \times V \to V \land (\psi + \varphi)(x) = \psi(x) + \varphi(x)$$
$$\circ\colon V \times V \to V \land \ (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$$

**Теорема 1.** *Множество эндоморфизмов* $\mathrm{End}(V)$ *с операциями, определёнными в 8.8.2 — кольцо.*

**Теорема 2.** *Пусть* $\dim V = n$*. Тогда*

$$(\mathrm{End}(V), \circ, +) \cong (M_n(K), \cdot, +)$$

$\square$ Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$, $A, B \in M_n(K)$. Выберем базис в $V$ и рассмотрим отображение $f\colon \varphi \mapsto A_\varphi$, композиция переходит в умножение матриц, сложение — в сложение матриц.

Такое отображение обратимо, действительно,

$$\forall\, A \in M_n(K)\ \big(\omega(x) := Ax\big) \in \mathrm{End}(V)$$

А значит $f$ — биекция.

Пусть в выбранном базисе $\varphi(x) = Ax$, $\psi(x) = Bx$. Уже доказывали, что матрица, соответствующая композиции $\psi\varphi$, равна $BA$. Теперь разберёмся с матрицей суммы

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = Ax + Bx = (A + B)x$$

То есть, в фиксированном базисе $(\varphi + \psi)$ соответствует $A + B$.

Таким образом, раз базис выбирали произвольно, то в любом базисе $V$.

1. $f$ — биекция.

2. $f(\varphi+\psi) = A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = f(\varphi) + f(\psi)$

3. $f(\varphi\psi) = A_{\varphi\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = f(\varphi) \cdot f(\psi)$

Следовательно, $f$ — изоморфизм. ■

**Определение 3.** Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A$ — матрица $\varphi$ в фиксированном базисе, $p \in K[t]$. Тогда

$$p(\varphi)(x) = a_k\varphi^l(x) + \cdots + a_1\varphi(x) + a_0 p(A) \quad = a_k A^l + \cdots + a_1 A + a_0$$

**Лемма 3.** *Если в некотором базисе $\varphi$ имеет матрицу $A$, то в том же базисе $f(\varphi)$ имеет матрицу $f(A)$.*

**Лемма 4.** *Многочлены от одного и того же оператора и его матрицы в фиксированном базисе коммутируют.*

▼
По сложению оно все коммутативно. В слагаемых переставлять нужно степени одного и того же. Циклические группы обычно абелевы.
▲

## § 12 Инвариантные подпространства

**Определение 1.** Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $W$ — подпространство $V$. Тогда если $\varphi(W) \subset V$, то $W$ — $\varphi$-инвариантное подпространство $V$.

**Лемма 1.** *Пусть:*

- $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$
- *$W_i$ — $\varphi$-инвариантное подпространство*
- *базис $V$ разбивается на базисы $W_i$.*
- $\varphi\,\big|_{W_i} \in \mathrm{End}(V)$
- *В фиксированном базисе $A_i, A$ — матрицы $\varphi_i, \varphi$ соответственно.*

*Тогда*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

▼
Можно рассмотреть один такой «блок». Если сверху/снизу него не ноли, то с инвариантностью проблемы.
▲

## § 13 Характеристический многочлен оператора

**Определение 1.** Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A$ — его матрица в выбранном базисе. Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$$

**Утверждение 1.** *Какой бы базис не выбрали в $V$, характеристический многочлен не изменится.*

▼

Матрицы оператора во всевозможных базисах подобны. Единичная матрица не поменяется при смене базиса. А определители подобных матриц равны.

▲

### Свойства

1. $\deg \chi_\varphi = n$
2. Пусть $\chi_\varphi(t) = a_n t^n + \dots + a_0$. Тогда

$$a_n = (-1)^n$$
$$a_{n-1} = (-1)^n(a_{11} + \dots + a_{nn})$$

   **Определение 2.** $\mathrm{Tr}\, A = a_{11} + \dots + a_{nn}$

3. $A \sim A' \Rightarrow \mathrm{Tr}\, A = \mathrm{Tr}\, A'$

## § 20 Корневые подпространства

**Определение 1.** Пусть $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in K$[1] Корневой вектор — такой вектор $x$, что

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \colon (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^k(x) = 0$$

**Определение 2.** Корневое подпространство — множество всех корневых векторов для данного числа $\lambda$. Обозначается $V(\lambda)$.

**Утверждение 1.**

$$\lambda \in \mathrm{Spec}\,\varphi \Rightarrow V_\lambda \subset V(\lambda)$$

**Лемма 2.** *Пусть $\psi \in \mathrm{End}(V)$, $x \in V$, $x \neq 0$. Пусть также $k \in \mathbb{N}$ — минимальное $k$, что $\psi^k(x) = 0$. Тогда*

$$\{x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)\} \text{ — линейно независимы}$$

[1] У меня тут в конспекте баг, а у вас?

▼

Пусть оно линейно зависимо. Тогда

$$\exists\,\beta_i \neq 0\colon \beta_0 x + \beta_1\psi(x) + \cdots + \beta_{k-1}\psi^{k-1}(x) = 0$$

Пусть $\ell$ — наименьший индекс $\beta$ не равного нулю. Тогда если применить к обеим частям предыдущего равенства $\psi^{k-1-\ell}$, то

$$0 + \cdots + 0 + \beta_\ell\psi^{k-1}(x) + 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow \beta_l = 0$$

А таким методом можно получить что все $\beta_i = 0$. (?!?)

▲

**Утверждение 3.**

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^n(x) = 0\},\ n = \dim V$$

▼

Больше размерности линейно независимых векторов не наберёшь.

▲

## § 21 Сумма корневых подпространств

**Лемма 1.** *Пусть* $f, g \in K[t]$, $(f, g) = 1$. *Тогда*

$$\big(f(\varphi)(x) = g(\varphi)(x) = 0\big) \Rightarrow x = 0$$

**Теорема 2.** *Пусть* $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, $n = \dim V$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} V(\lambda_i)^n \text{ — \textit{прямая}}$$

□ Воспользуемся тут критерием прямой суммы. Докажем, что $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$. Хорошо, пусть это не так. Выберем $x$ из этого пересечения. Тогда $x = \sum_{i\neq j} x_j$, где $x_j \in W_j$.

Рассмотрим:

$$f(\varphi) = \prod_{j\neq i}(\varphi - \lambda_j\,\mathrm{id})^n$$

Тогда

$$\forall\, j\ \ f(\varphi)(x_j) = 0 \Rightarrow f(\varphi)(x) = 0$$

В нём попросту найдётся нужное корневое число.

С другой стороны,

$$g(\varphi)(x) = (\varphi - \lambda_i)^n(x) = 0$$

А поскольку $f, g$ — взаимно просты, то по лемме 8.21.1 $x = 0$. ■

$\boxed{\text{А вот тут начинается совсем жестище...}}$

## § 22 Про инвариантность корневых подпространств

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. *Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в* $\mathbb{C}$ *заберёмся)*

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{k_i}$$

*Тогда:*

1. $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V(\lambda_i)$
2. $V(\lambda_i)$ — $\varphi$*-inv.*

□ Соорудим $i$ многочленов

$$f_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j}$$

Они все взаимно просты. Тогда есть такое линейное представление id :

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_m f_m)(\varphi) = \mathrm{id}$$

посчитаем такую штуку для каждого $x \in V$.

Пусть

$$W_i = \big((h_i f_i)(\varphi)\big)(V)$$

Тогда

$$\mathrm{id}(V) = W_1 + \dots + W_m = V$$

a) Докажем, что $W_i$ — $\varphi$-inv. Там многочлены в процессе коммутируют, мы это доказывали в 8.11.4

$$\begin{aligned} \varphi(W_i) &= \varphi\big(h_i f_i(\varphi)(V)\big) = \big(\varphi \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)\big)(V) \\ &= \big(h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)\big)(\varphi(V)) < \big(h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi)\big)(V) = W_i \end{aligned}$$

b) Докажем, что $W_i \subset V(\lambda_i)$. Пусть $y \in W_i$. Тогда

$$\begin{aligned} y &= (h_1(\varphi) f_1(\varphi))(x) \\ (\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i}(y) &= \big((\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i} h_1(\varphi) f_1(\varphi)\big)(x) \\ &= h_i(\varphi) \cdot \big(\underbrace{(\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i} f_1(\varphi)}_{\chi_\varphi(\varphi)=0}\big)(x) = 0 \end{aligned}$$

Так как корневые подпространства — подпространства $V$, то

$$V \supset \bigoplus_{i=1}^{m} V(\lambda_i) \Rightarrow \dim V \geqslant \sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i)$$

С другой стороны,

$$\dim \sum_{i=1}^{m} W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim W_i$$

При этом

$$W_i \subset V(\lambda_i) \Rightarrow \dim W_i \leqslant \dim V(\lambda_i)$$

Так что

$$\dim V = \dim \sum_{i=1}^{m} W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim W_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim V(\lambda_i) \leqslant \dim V$$

■

## § 23 Размерность корневого подпространства

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. *Пусть ещё характеристический многочлен разложился на множители (ну в* $\mathbb{C}$ *заберёмся)*

$$\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{k_i}$$

*Тогда:*

1. $\dim V(\lambda_i) = k_i$
2. $\varphi_i = {}^{\varphi}\big|_{V(\lambda_i)}$ *имеет единственное собственное число* $\lambda_i$.

□

2 Пусть $\mu$ — собственное число $\varphi_i$ не равное $\lambda_i$. Тогда

$$(\varphi - \mu\,\mathrm{id})(x) = 0$$
$$(\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id})^n(x) = 0$$
$$\big((t - \mu), (t - \lambda_i)^n\big) = 1$$

А по лемме 8.21.1 $x = 0$. А тут что-то не так.[1].

[1]Собственные числа есть, так как любой характеристический многочлен приводим в $\mathbb{C}$. А тогда $\det(A - \lambda E_n) = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A - \lambda E_n) < n$. Тогда и размерность $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ не ноль. Значит, ненулевой вектор там есть.

1 Так как мы уже доказали, что пространство — прямая сумма корневых, то его базис разбивается на базисы корневых подпространств.

$$\underbrace{\underbrace{e_1^1, \dots, e_{s_1}^1}_{\text{базис } V(\lambda_1)}, \dots, \underbrace{e_1^n, \dots, e_{s_n}^n}_{\text{базис } V(\lambda_m)}}_{\text{базис } V}$$

мы когда-то (8.12.1) доказали, что матрица $\varphi$ в таком случае выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) = \det(A_1 - tE_n) \cdots \det(A_m - tE_n) = \\ = \chi_{\varphi_1}(t) \cdots \chi_{\varphi_m}(t)$$

Что может входить в $\chi_{\varphi_i}$? $(t - \lambda_j), j \neq i$ там точно нет из второго пункта. Но часть $t - \lambda_i$ в него не входить не может, иначе мы просто не наберём нужную степень в $\chi_\varphi(t)$. Так что

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (t - \lambda_i)_i^k$$

Но

$$s_i = \dim V(\lambda_i) = \deg \chi_{\varphi_i}(t) = k_i$$

■

## §§ 24–25 Жорданова нормальная форма

Сначала пара определений

**Определение 1** (Относительная линейная независимость)**.** Пусть $W$ — подпространство $V$, $e_1, \dots, e_s \in V$ Тогда $\{e_i\}$ ЛНЗ относительно $W$, если

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s \in W \Rightarrow \forall\, \alpha_i = 0$$

Или (эквивалентная формулировка) объединение с базисом подпространства линейно независимо в $V$.

**Определение 2** (Относительный базис)**.** Пусть $W$ — подпространство $V$. Тогда дополнение базиса $W$ до базиса $V$ называется базисом $V$ относительно $W$

Или, что тоже самое, они относительно линейно независимы и их линейная оболочка с $W$ равна $V$.

**Лемма 1.** *Относительно линейно независимую систему можно дополнить до относительного базиса.*

может это 1-ая корректность?

Теперь что известно:

- $V$ - линейное пространство над $K$, $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$
- $\operatorname{Spec} \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.
- $\chi_\varphi(t) = \prod\limits_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)^{k_i}$
- $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V(\lambda_i)$
- $\dim V(\lambda_i) = k_i$
- $A_i$ — матрица ${}^{\varphi}\big|_{V(\lambda_i)}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_m} \end{pmatrix}$$

**Определение 3** (ЖНФ)**.** Такая форма записи матрицы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

где $J_i$ — жорданова клетка

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

**Определение 4** (Жорданов базис)**.** Базис, в котором матрица линейного оператора выглядит, как в 8.25.3

Рассмотрим $\psi = \varphi - \lambda\,\mathrm{id}$. Тогда

$$V_\lambda = \begin{matrix} \operatorname{Ker}\psi \\ \shortparallel \\ W_1 \end{matrix} \supset \begin{matrix} \operatorname{Ker}\psi^2 \\ \shortparallel \\ W_1 \end{matrix} \supset \cdots \supset \begin{matrix} \operatorname{Ker}\psi^\ell \\ \shortparallel \\ W_\ell \end{matrix} = V(\lambda)$$

Во всей этой процедуре будем ещё базисы $W_j$ искать

- $s_\ell$ векторов на первой ступеньке — базис $W_\ell$ относительно $W_{\ell-1}$, то есть что добавилось на последнем шаге.
- Все ступеньки выше $r-1$ — базис $W_\ell$ относительно $W_{r-1}$
- На каждом шаге считаем $\psi$ от всего, что было на предыдущей ступеньке и добавляем векторов, чтобы выполнялось предыдущее условие.

**Лемма 2.** *На $r$-ой ступеньке лежат векторы из* $\operatorname{Ker}\psi^r$.

▼

По индукции:

**База:** Векторы на $\ell$-ой ступеньке из $\operatorname{Ker}\psi^\ell$.

**Переход:** $x \in \operatorname{Ker}\psi^{r+1} \Rightarrow \psi(x) \in \operatorname{Ker}\psi^r$. А оставшиеся векторы добираются из $W_r = \operatorname{Ker}\psi^r$

▲

**Лемма 3** (Корректность поиска базиса)**.** *После дополнения до базиса относительно $W_{r-1}$ система будет ЛНЗ относительно $W_{r-2}$.*

▼

Пусть оно линейно зависимо относительно $W_{r-2}$. Тогда

$$\sum_{i=r}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{s_i}\alpha_j^i x_j^i\right) + \sum_{j=1}^{s_r}\beta_j\psi(x_j^r) = w \in W_{r-2} \tag{8.1}$$

1) не все $\alpha_j^i = 0$
   Пусть $t$ — наибольший номер этажа на котором есть ненулевые $\alpha_i^t$. Применим $\psi^{t-1}$ к обеим частям равенства (8.1).

Второй член уберётся совсем, ведь $t \geqslant r$. Правая часть пропадёт по тем же причинам. А вот от первого слагаемого левой останется кусок (это не весь, ещё штуки вида $x^{t-k}$ есть, но они пока не нужны):

$$\sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t \psi^{t-1}(x_j^t) = 0 \Rightarrow \psi^{t-1}\left(\sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s_t} \alpha_j^t x_j^t \in W_{t-1}$$

В итоге оно линейно зависимо над $W_{t-1}$,$t-1 > r-2$ а мы тут неявно предполагали по полной индукции, что нет.

2) все $\alpha_j^i = 0$ Тогда просто применяем $\psi^{r-1}$ к (8.1). Выйдет, что

$$\psi^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{s_r} \beta_j x_j^r\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{s_r} \beta_j x_j^r \in W_{r-1}$$

Но в таком случае снова проблемы с индукционным предположением.

▲

Теперь рассмотрим циклическое подпространство

$$N_x = \langle x, \psi(x), \ldots, \psi^{\ell-1}(x) \rangle$$

Пусть $B_{N_x}$ — матрица $\psi\big|_{N_x}$. Тогда можно понять, как она выглядит:

$$\begin{cases} Bx = \psi(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B\psi^{\ell-1}(x) = \psi^{\ell}(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \ell\left\{\overbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix}}}^{\ell}\right.$$

Тогда блок жордановой формы выглядит так:

$$J_i = \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{matrix}}$$

где $\lambda_i$ — собственное число.

# Литература

[1] **Винберг Э. Б.**
Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. — 592 с.: ил.