1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi Q$.
2. Закон Фарадея: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$,
   $\Phi = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}\times \boldsymbol{R}}{R^3}$
4. $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$
5. Закон Ампера: $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
6. Уравнение неразрывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho\\
\operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

2 В среде

1. Поляризация и намагниченность
   $\boldsymbol{P} \;::\; \boldsymbol{j}_{\mathrm{pol}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},\ \rho_{\mathrm{pol}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$,
   $\boldsymbol{M} \;::\; \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
   $\{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{int}} = \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{pol}} + \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{m}}$
2. В сильнопеременных
   $\rho_{\mathrm{int}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$
   $\boldsymbol{j}_{\mathrm{int}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
3. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$
4. Уравнения Максвелла в среде:
   $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ex}$
   $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}_{ex} + \boldsymbol{j}_c)$
5. Материальные уравнения (простейшие)
   $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}_c = \sigma\boldsymbol{E}$
6. Дисперсия, варианты
   $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$$
   $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$$
   f, g — функция отклика.

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$
$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\sigma E^2 - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_{ex}$$

Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

1. Вид потенциала: $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$
2. Калибровочная инвариантность: $\begin{cases}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\chi\\ \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{cases}$
3. Калибровка Лоренца: $\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$[1]
4. Уравнения Максвелла примут вид:
   $\Box\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$,
   $\Box\boldsymbol{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}$, где $\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla, v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

5 Волновые уравнения

$$\Box\boldsymbol{E} = 0,\ \Box\boldsymbol{B} = 0$$
$$\Box\boldsymbol{A} = 0,\ \Box\varphi = 0 \qquad (\Box\chi = 0)$$

Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ [2]

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:
   $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
   $u = f(x - vt) + g(x + vt)$
2. Плоская волна: $A = A(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$[3]
3. Условие поперечности: $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{c}{v}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$
4. $\boldsymbol{S} = v\,w\,\boldsymbol{n}$.
5. Уравнение сферической волны: $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$
6. Его решение: $u(r,t) = \frac{1}{r}\big(f(r-vt) + g(r+vt)\big)$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$
$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2}u = 0,\ \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{n} \ \Rightarrow\ u = \operatorname{Re}\Big(\boldsymbol{E}_0\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\Big)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. $\alpha, \boldsymbol{b}$
   $\alpha \;::\; \boldsymbol{E}_0^2 = |E_0^2|\,e^{-2i\varphi_0}$
   $\boldsymbol{b} \;::\; \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}\,e^{-i\varphi_0},\ \boldsymbol{b}^2 = |E_0^2|,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\,\boldsymbol{b}_2$
2. $b^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{b}_2$
3. $\frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_1)^2}{b_1^2} + \frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_2)^2}{b_2^2} = 1,\ (\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^3)$.

9 Почти монохроматические волны

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t)\,e^{-i\omega t}$, $\langle ? \rangle$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$|\overline{\boldsymbol{S}}| = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}^\dagger \boldsymbol{E}}$

$\rho = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix}$

1. $\det\rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$
2. $\det\rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0$ [4]
3. I^2, V^2, U^2+Q^2 — инварианты [5]
4. $I(\psi,\delta) = \overline{|\boldsymbol{S}|} = \boldsymbol{\ell}_\delta^\dagger\,\rho\,\boldsymbol{\ell}_\delta =$
   $\dfrac{1}{2}(I + Q\,\cos 2\psi + U\,\sin 2\psi\,\cos\delta - V\,\sin 2\psi\,\sin\delta)$,
   $\boldsymbol{\ell}_\delta = (\cos\psi,\ \sin\psi\, e^{-i\delta})^\top$, а вот выводится это неприятно.

11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$I = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = \overline{|\boldsymbol{S}|}$

$Q = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$

$U = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Re}\,\overline{E_x^* E_y}$

$V = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Im}\,\overline{E_x^* E_y}$

1. $Q = U = V = 0$ — белый свет
2. $\det\rho = 0$ — эллиптическая поляризация
   (a) $Q = U = 0$ — круговая поляризация
   (b) $V = 0$ — линейная поляризация

   Ещё всякие величины:
   - $R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, $r_d^2 = Q^2 + U^2$
   - $P = {}^{R_d}/_{I}$ — степень поляризации
   - $p = {}^{r_d}/_{I}$ — степень линейной поляризации
   - $p_s = {}^{V}/_{I}$ — степень круговой поляризации
   - $\mathrm{tg}\,2\alpha = {}^{U}/_{D}$, α — угол между базисом и осями эллипса.

3. Частичная поляризация:
   - белый свет + эллитическая
   - сумма 2 ортогональных эллиптических

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi},\ \psi \text{ — эйконал}$$ [6]

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\psi)^2 = 0$$

$\psi = -\omega t + \dfrac{\omega}{c}\psi_1,\ (\nabla\psi_1)^2 = n^2(\boldsymbol{r})$ — уравнение эйконала.

$$\frac{\omega}{c}\,\psi_1 - \omega t = \mathrm{const} \text{ — волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые прозводные эйконала.

13 Гадость в неоднородной среде

1. $\varepsilon = \varepsilon(r)$, $\mu = 1$
2. Волновые уравнения поменяются:
   $\Box\,\boldsymbol{E} - \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$
   $\Box\,\boldsymbol{H} - \nabla(\ln\varepsilon)\times\mathrm{rot}\,H = 0$
3. Монохроматический случай:
   $[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{E} + \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$
   $[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{H} + \nabla(\ln\varepsilon)\times\mathrm{rot}\,H = 0$

14 E,H-волны

$\varepsilon = \varepsilon(z)$

1. $\boldsymbol{E}\upuparrows\mathrm{Oy},\ E = (0,1,0)\,E(z)e^{i\varkappa x}$ — E-волны
2. $\boldsymbol{H}\upuparrows\mathrm{Oy},\ H = (0,1,0)\,H(z)e^{i\varkappa x}$ — H-волны

Если переписать волновое уравнение выше:

1. $E''(z) + f(z)\,E(z) = 0,\ f(z) = k^2 - \varkappa^2$
2. $w''(z) + f(z)\,w(z) = 0,\ H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}\,w(z)$,
   $f(z) = k^2 - \varkappa^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$

15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений: $\dfrac{1}{s^2}u'' + f\,u = 0$, ${}^1/_{s^2}$ — малый параметр.

1. $z = s\,\tau$, $u = e^{is\psi}$
2. В ряд его: $\psi = \psi_0 + \dfrac{i}{s}\,\psi_1 + \cdots$
3. ВКБ-решения (первое приближение)
   $u_{1,2} = f^{-1/4}\,\exp\left(\pm is\displaystyle\int\sqrt{f}\,\mathrm{d}\tau\right)$
   $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$
4. Условия применимости ⟨?⟩:
   $$\left|\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}\tau}\right|^2 \gg \frac{1}{s}\left|\frac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\tau^2}\right| \Leftrightarrow |f| \gg \frac{1}{s}\left|\frac{f'}{2\sqrt{f}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{1}{f}}}{\mathrm{d}z}\right| \ll 1$$

Для предыдущего параграфа просто $\lambda = \dfrac{2\pi}{\sqrt{f}}$

16 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

- $\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{E}(\omega)$
- $\boldsymbol{B}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{H}(\omega)$
- $\varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$
- $\mu \sim 1$
- ⟨⚒⟩

17 Энергетические соотношения при дисперсии

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$

Для монохроматических волн:

- $\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu(\omega)\,\boldsymbol{H}$
- $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$
- $\overline{\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}} = \dfrac{-\omega}{8\pi}\left(\varepsilon_2\overline{|\boldsymbol{E}|^2} + \mu_2\overline{|\boldsymbol{H}|^2}\right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0$ ⟨?⟩[7]

$\{\varepsilon,\mu\}_2 \ll \{\varepsilon,\mu\}_1$ — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить $\operatorname{div}\boldsymbol{S}$
2. первый член: $\dfrac{1}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{D}^*}{\partial t} + \boldsymbol{E}^*\,\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$
3. $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\,\dfrac{\partial \boldsymbol{E}^0}{\partial t}\,e^{-i\omega t}$
4. $\operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\dfrac{\partial w}{\partial t}$
5. $\overline{w} = \dfrac{1}{8\pi}\left(\dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\,\overline{|\boldsymbol{E}^0|^2} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega}\,\overline{|\boldsymbol{H}^0|^2}\right)$

18 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде[8]

Здесь $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)}\,\dfrac{\omega}{c} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2$, $\{\varepsilon,\mu\}_2 \ll \{\varepsilon,\mu\}_1$.

$\boldsymbol{k}_1 \nparallel \boldsymbol{k}_2$ Неоднородная плоская волна:
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\,e^{-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}}\,e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$

$\boldsymbol{k}_1 \upuparrows \boldsymbol{k}_2$ Однородная плоская волна:

1. $k = (n + i\varkappa)\,{}^{\omega}/_{c}$ — показатель преломления и затухания,
2. $E(z,t) = E_0\,e^{-\varkappa\omega z/c}\,e^{-i\omega(t - nz//c)}$
3. $\overline{S(z)} = S_0\,e^{-2\varkappa\omega\,z/c} = S_0 e^{-\alpha z}$, α — к-т поглощения.

Заметки

1 при этом подходят все $\chi \,::\, \Box\,\chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.

4 В поляризационной матрице все E можно позаменять на E^0 (фазы всё равно сокращаются), а в предпредыдущем пунке у нас как раз $E_x^0 = b_1\, e^{-i\varphi_0}$, $E_y^0 = ib_2\, e^{-i\varphi_0}$

5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах

6 ψ_1 — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но $\langle ? \rangle$

7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то $\dfrac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$.

8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову