Г Л А В А II

Дифференциальные уравнения I порядка в симметричной форме

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ, ЕГО СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

1^0. Объект изучения.

В предшествующей главе рассматривалось уравнение первого порядка (1.1) $y' = f(x,y)$, разрешенное относительно производной.

Недостатком уравнение (1.1) является его несимметричность относительно переменных x и y. В частности, интегральную кривую такого уравнения нельзя продолжить за точку с вертикальной касательной. Чтобы не исключать вертикальные направления, можно рассматривать "перевернутое" уравнение $dx/dy = 1/f(x,y)$, в нем переменные x и y, фактически, меняются местами. Это уравнение равносильно (1.1) всюду в области G, где $f(x,y) \neq 0$, но имеет аналогичный недостаток.

Существует форма записи дифференциального уравнения первого порядка, которая объединяет и обобщает как уравнение (1.1), так и перевернутое уравнение, — это запись уравнения, представленного в симметричной форме.

Уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.1}$$

и в нем вещественные функции M и N определены и непрерывны на множестве $\widehat{G}^0 = G^0 \cup \hat{\partial} G^0$, где G^0 — это область в $\mathbb{R}^2$, в которой

$$M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0, \tag{2.2}$$

множество $\hat{\partial} G^0$, возможно пустое, состоит из граничных точек G^0.

Таким образом, ни в одной из точек области G функции M и N не могут одновременно обратиться в нуль, а точки множества $\hat{\partial} G^0$ — это те точки ∂G^0 — границы G^0, в которых функции M и N

определены и сохраняют непрерывность или могут быть доопределены по непрерывности.

Поскольку на множество $\hat{\partial} G^0$ не распространяется условие (2.2), оно естественным образом распадается на два подмножества: $\hat{\partial} G^0 = \breve{\partial} G^0 \cup \check{\partial} G^0$, где для точек $\breve{\partial} G^0$ условие (2.2) выполняется, а для точек $\check{\partial} G^0$ — не выполняется, т. е. $M(\check{x}, \check{y}) = N(\check{x}, \check{y}) = 0$ для любой точки $(\check{x}, \check{y}) \in \check{\partial} G^0$.

Df. *Точки из множества $\check{\partial} G^0$ будем называть нуль-граничными точками, а само $\check{\partial} G^0$ — нуль-граничным множеством.*

Множество $\check{\partial} G^0$ замкнуто, так как является пересечением двух множеств, образованных нулями непрерывных функций M и N.

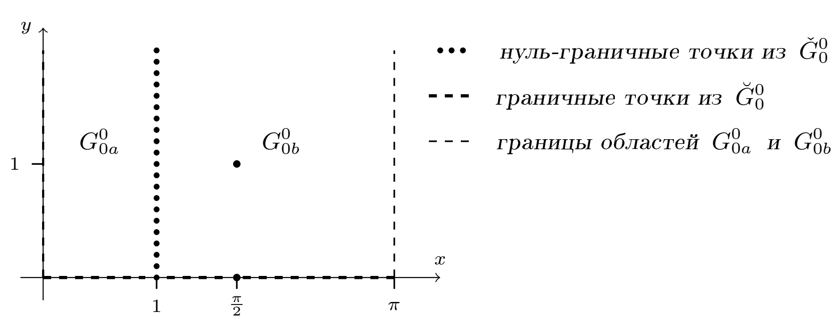
Вытекает это как из топологического определения непрерывного отображения, согласно которому прообраз любого замкнутого множества, а в нашем случае — это точка 0 из $\mathbb{R}^1$, есть замкнутое множество, так и непосредственно из определения замкнутого множества, поскольку на любой сходящейся последовательности точек из $\check{\partial} G^0$ функции M и N принимают нулевые значения, а значит, в силу непрерывности будут равны нулю и в предельной точке.

В результате уравнение (2.1) рассматривается на множестве

$$\widehat{G}^0 = G^0 \cup \breve{\partial} G^0 \cup \check{\partial} G^0 \qquad (M, N \in C(\widehat{G}^0),\ M^2 + N^2 \neq 0 \text{ в } G^0), \quad (2.3)$$

Пример 1. *Пусть в уравнении (2.1) $M(x,y) = \sqrt{y}(x-1)\operatorname{ctg} x$, $N(x,y) = (y-1)\ln x$. Для $\forall\, k \in \mathbb{Z}_0$ функции M и N непрерывны на связных множествах $\widehat{G}^0_k = \{(x,y)\colon\ k\pi < x < (k+1)\pi,\ y \geq 0\}$.*

При $k = 0$, например, множество $\widehat{G}^0_0$ распадается в объединение двух множеств с общей границей: $\widehat{G}^0_0 = \widehat{G}^0_{0a} \cup \widehat{G}^0_{0b}$, где $\widehat{G}^0_{0a} = \{(x,y)\colon$ $0 < x \leq 1,\ y \geq 0\}$, $\widehat{G}^0_{0b} = \{(x,y)\colon\ 1 \leq x < \pi,\ y \geq 0\}$. Множество $\{x = 1,\ y \geq 0\}$ — граница $\widehat{G}^0_{0a}$ и $\widehat{G}^0_{0b}$, так как состоит из нуль-граничных точек.



Рассмотрим, например, $\widehat{G}^0_{0b}$ *— одно из множеств, на котором определено предложенное уравнение в симметричной форме.*

Согласно разложению (2.3) оно состоит из области $G^0_{0b} = \{(x,y)\colon 1 < x < \pi,\ y > 0\} \backslash \{(\pi/2, 1)\}$*, множества граничных точек* $\check{\partial} G^0_{0b} = \{x \in (1, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi),\ y = 0\}$ *и множества нуль-граничных точек* $\mathring{\partial} G^0_{0b} = \{x \equiv 1,\ y \geq 0\} \cup \{(\pi/2, 1)\} \cup \{(\pi/2, 0)\}$*, причем* $(\pi/2, 1)$ *является внутренней точкой связного множества* $\widehat{G}^0_{0b}$*.*

Отметим также, что если функцию $M(x,y)$ *домножить на* $\ln y$*, то для нового уравнения все введенные множества не изменятся, поскольку, сохраняя непрерывность на границе, новую функцию* $M(x,y)$ *можно доопределить, положив* $M(x,0) \equiv 0$*.*

2^0. Определение решения и граничных решений.

Рассмотрим уравнение симметричной форме (2.1) в области G^0 из (2.3). Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G^0$ либо $M(x_0, y_0) \neq 0$, либо $N(x_0, y_0) \neq 0$, а значит, в силу непрерывности функций M и N существует окрестность $V = V(x_0, y_0) \subset G^0$, в которой либо $M(x,y) \neq 0$, либо $N(x,y) \neq 0$.

В области V уравнение (2.1) сводится по крайней мере к одному из двух уравнений, разрешенных относительно производной,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}. \tag{2.4}$$

В свою очередь, уравнение (1.1) $y' = f(x,y)$ с $f \in C(G)$ или "перевернутое" уравнение $x' = g(x,y)$ с $g \in C(G)$ во всей области G сводятся к уравнению в симметричной форме соответственно

$$f(x,y)dx - 1 \cdot dy = 0 \quad (\text{или}\ \ 1 \cdot dx - g(x,y)dy = 0),$$

поскольку в этом случае G совпадает с G^0.

Невозможность сведения уравнения в симметричной форме (2.1) в окрестностях определенных точек к каждому из уравнений (2.4) приводит к обобщению понятия решения уравнения (2.1).

Df. *Решением дифференциального уравнения* (2.1) *в области* G^0 *из* (2.3) *называется определенная на некотором промежутке* $\langle a, b\,\rangle$ *функция* $y = \varphi(x)$ *или функция* $x = \psi(y)$*, удовлетворяющая следующим трем условиям:*

1) *функция* $\varphi(x)$ *или функция* $\psi(y)$ *дифференцируема на* $\langle a, b\,\rangle$,
2) *точка* $(x, \varphi(x)) \in G^0$ *для* $\forall\, x \in \langle a, b\,\rangle$ *или*
точка $(\psi(y), y) \in G^0$ *для* $\forall\, y \in \langle a, b\,\rangle$,
3) $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} 0$ *или*
$M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} 0.$

Непосредственно из определения решения уравнения (1.1) вытекает, что оно является и решением уравнения (2.1).

Убедимся теперь, что любое решение уравнения (2.1) является решением по крайней мере одного из уравнений (2.4).

Пусть, например, $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (2.1). Тогда согласно тождеству $3_1)$ $N(x, \varphi(x)) \neq 0$ для $\forall\, x \in \langle a, b\,\rangle$, иначе $M(x, \varphi(x)) = 0$ и точка $(x, \varphi(x))$ окажется нуль-граничной.

Поэтому $d\varphi(x)/dx \equiv -M(x, \varphi(x))/N(x, \varphi(x))$ для $\forall\, x \in \langle a, b\,\rangle$, а значит, на этом промежутке функция $y = \varphi(x)$ по определению является решением уравнения (2.4_1).

Аналогичные рассуждения справедливы для решения $x = \psi(y)$, удовлетворяющего тождеству $3_2)$.

Пример 2. *Уравнение в симметричной форме* $y dx = x \ln x\, dy$ *определено в области* $G^0 = \{x > 0,\, y \in \mathbb{R}^1\} \backslash \{(1, 0)\}$, *поскольку* $(1, 0)$ *— единственная нуль-граничная точка этого уравнения. Помимо двух классических общих решений* $y = C \ln x$, *определенных при* $x \in (0, 1)$ *и* $x > 1$, *оно имеет еще два решения:* $x(y) \equiv 1$ *при* $y < 0$ *или при* $y > 0$. *При этом для* $\forall\, C$ *графики решений* $y = C \ln x$ $(x \neq 1)$, *как и кривые* $x(y) \equiv 1$ $(y \neq 0)$, *одним из своих концов примыкают к точке* $(1, 0)$, *и каждая пара — со своим тангенсом угла наклона касательной.*

Если предложенное уравнение в симметричной форме разрешить относительно производной, то полученное уравнение $y' = y/(x \ln x)$ *будет определено в областях* $G_1 = \{x \in (0, 1),\, y \in \mathbb{R}^1\}$ *и* $G_2 = \{x \in (1, +\infty),\, y \in \mathbb{R}^1\}$, *и кривая* $x(y) \equiv 1$ *из решения превратится в границу этих областей. Аналогичным образом перевернутое уравнение* $dx/dy = y^{-1} x \ln x$ *"теряет" решения* $y(x) \equiv 0$ $(x \neq 1)$.

Также обстоит дело с и граничными решениями. Уравнение (2.1) может иметь их не только больше, чем (1.1), но и сама природа появления граничного решения может быть иной в связи с возможностью появления непустого множества нуль-граничных точек $\check{\partial} G^0$.

Df. *Функцию* $y=\varphi_\partial(x)$ *или* $x=\psi_\partial(y)$, *определенную на некотором промежутке* $\langle a,b\,\rangle$, *будем называть граничным решением уравнения* (2.1), *если выполняются условия* 1) *и* 3) *из определения решения уравнения* (2.1), *а условие* 2) *имеет следующий вид:*

2_∂) *точки* $(x,\varphi_\partial(x))$ *для* $\forall\, x\in\langle a,b\,\rangle$ *или точки* $(\psi_\partial(y),y)$ *для* $\forall\, y\in\langle a,b\,\rangle$ *принадлежат либо* $\breve{\partial} G^0$, *либо* $\check{\partial} G^0$ *из* (2.3), *причем в последнем случае решение будем называть нуль-граничным.*

Замечание 1. *Непрерывная дифференцируемость любого граничного решения уравнения (2.1), гарантируемая непрерывностью функций* M *и* N *на* $\widehat{G}^0$, *вытекает непосредственно из определения, как это происходит и для решений уравнения (1.1). Однако, нельзя гарантировать гладкость нуль-граничного решения, хотя его график и состоит из точек* $\check{\partial} G^0$, *а значит, тождества* 3_1) *или* 3_2) *выполняются автоматически. Она будет зависеть от гладкости* $\check{\partial} G^0$.

Замечание 2. *Важно, что уравнение симметричной форме (2.1) рассматривается по определению только на множестве* $\widehat{G}^0$ *из (2.3).*

Допустим, например, что функции M *и* N *непрерывны в некоторой области* G *и множество* $\overline{H}$ *— замыкание области* $H\subset\mathbb{R}^2$ *— таково, что* $\overline{H}\subset G$, $M(x,y)=N(x,y)=0$ *для* $\forall\,(x,y)\in\overline{H}$ *и в области* $G^0=G\backslash\overline{H}$ *выполняется условие* (2.2). *Тогда, рассматривая уравнение (2.1) во всей области* G, *в качестве его решений по определению получаем любые дифференцируемые функции, чьи графики лежат в* $\overline{H}$. *А при рассмотрении уравнения (2.1) согласно (2.3) только на множестве* $G^0\cup\check{\partial} G^0$ $(\breve{\partial} G^0=\emptyset)$, *где* $\check{\partial} G^0=\partial H$, *граница* $\check{\partial} G^0$ *параметризуется нуль-граничными решениями, а носитель "странных" решений — область* H *— из рассмотрения исключается.*

Замечание 3. *Граничное решение уравнения в симметричной форме может быть или не быть особым точно так же, как это происходит с граничными решениями уравнения, разрешенного относительно производной. Так, для обоих уравнений, упомянутых в примере 4 гл. I, § 1, п.* 7^0 *и переписанных в симметричном виде, можно дословно повторить все проведенные там рассуждения, касающиеся частных и особых граничных решений.*

Для знакомства с множеством нуль-граничных точек $\breve{\partial}G^0$ продемонстрируем два нетривиальных уравнения в симметричной форме (2.1), обычно предлагаемые студентам на контрольных работах. Нуль-граничные точки одного из них образуют кривую, являющуюся нуль-граничным решением. Второе уравнение имеет только изолированные нуль-граничные точки, одна из которых — внутренняя (существует ее проколотая окрестность, лежащая в области $G^0,$) а другая разделяет граничные решения, лежащие в $\check{\partial}G^0$.

Пример 3. *Рассмотрим уравнение в симметричной форме*

$$(y\ln y - x^2y^5)\,dx + (x^2y^2\ln^{-1/2}y - 2x^3y^4 + 2x\ln y - x)\,dy = 0, \quad (2.5)$$

где функции M и N непрерывны в области $G = \{x \in \mathbb{R}^1,\ y > 1\}$.

Найдем множество нуль-граничных точек $\breve{\partial}G^0$ уравнения (2.5).

Имеем: $M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm y^{-2}\ln^{1/2}y$. Подставляя эти функции в равенство $N(x,y) = 0$, устанавливаем, что $x = y^{-2}\ln^{1/2}y$ является нуль-граничным решением (гладким), разделяющим G на две области $G_1^0 = \{x < y^{-2}\ln^{1/2}y,\ y > 1\}$ и $G_2^0 = \{x > y^{-2}\ln^{1/2}y,\ y > 1\}$, и его график образует $\breve{\partial}G^0$.

Пример 4. *Рассмотрим уравнение в симметричной форме*

$$3x^{1/2}(2y-1)y^2\,dx + (8y - 2 - 4x^{3/2}y^2)\,dy = 0. \quad (2.6)$$

для которого согласно (2.3) $\widehat{G}^0 = G^0 \cup \check{\partial}G^0 \cup \breve{\partial}G^0$, где множество нуль-граничных точек $\breve{\partial}G^0 = \{(0,1/4)\} \cup \{(2^{2/3},1/2)\}$, поскольку только в этих точках функции M и N одновременно обращаются в нуль, множество граничных точек $\check{\partial}G^0 = \{x = 0,\ y \in \mathbb{R}^1 \backslash \{1/4\}\}$ и область $G^0 = \{(x,y)\colon\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}^1\} \backslash \{(2^{2/3},1/2)\}$.

В дополнении 3 приведены: a) подробные решения уравнений (2.5) и (2.6) при помощи нахождения и использования интегрирующего множителя (см. ниже § 3, п. 2^0), b) полные решения ряда характерных задач Коши, c) "портреты" решений поставленных задач Коши, демонстрирующие особенности поведения графиков этих решений.

Отметим еще, что нуль-граничные решения возникают как правило при решении уравнений Лагранжа $y = xu(y') + v(y')$ и уравнений Клеро $y = xy' + v(y')$ (см. напр. [2, гл. I, § 6, п. 3]), являющихся разновидностью уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Замечание 4. *В дальнейшем при обсуждении теоретических вопросов, связанных с решениями уравнения симметричной форме (2.1), оно будет рассматриваться только в области G^0. Использование в качестве носителя непрерывных функций M и N более широкого множества $\widehat{G}^0$ (см. (2.3)) требуется, вообще говоря, только для практического нахождения граничных и нуль-граничных решений.*

3^0. Существование и единственность решения.

Поскольку уравнение (2.1) в некоторой окрестности любой точки из области G^0 сводится к одному из уравнений (2.4), разрешенных относительно производной, то все локальные определения и теоремы главы I остаются верными и для уравнений в симметричной форме. Переформулируем их, начиная с постановки задачи Коши.

Выберем в качестве начальных данных координаты произвольной точки $(x_0, y_0) \in G^0$. Тогда в некоторой окрестности $V(x_0, y_0) \subset G^0$ уравнение (2.1) будет равносильно хотя бы одному из уравнений (2.4), решение задачи Коши которого с начальными данными x_0, y_0 и будет по определению решением задачи Коши для уравнения (2.1).

Теорема (о существовании решения). *Пусть в уравнении* (2.1) *функции* $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *непрерывны в области* G^0 *из* (2.3), *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G^0$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y_0)$, *построенного для первого или второго уравнения* (2.4) *в некоторой окрестности* $V(x_0, y_0) \subset G^0$, *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (2.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $P_h(x_0, y_0)$.

Теорема (о единственности решения, слабая). *Пусть в уравнении* (2.1) $M(x, y)$ *и* $N(x, y)$ *непрерывны в области* G^0 *из* (2.3), *а в области* $\widetilde{G} \subset G^0$ *выполняется хотя бы одно из двух условий:*

a) $N(x, y) \neq 0$, *существуют и непрерывны частные производные* $\partial M(x, y)/\partial y$, $\partial N(x, y)/\partial y$;

b) $M(x, y) \neq 0$, *существуют и непрерывны частные производные* $\partial M(x, y)/\partial x$, $\partial N(x, y)/\partial x$.

Тогда $\widetilde{G}$ *— это область единственности для уравнения* (2.1).

Действительно, при выполнении условия a), например, в $\widetilde{G}$ (2.1) равносильно уравнению (1.1) с $f = -M/N$, и частная производная $\partial f/\partial y = (M\,\partial N/\partial y - N\,\partial M/\partial y)/N^2$ существует и непрерывна, а значит, верна слабая теорема о единственности из гл. I, § 3, п. 3^0.

Следствие *Область G^0 будет областью единственности для уравнения* (2.1), *если найдется открытое покрытие ее областями, для каждой из которых выполняется хотя бы одно из условий a) или b), приведенных в формулировке теоремы.*

4^0. Интегральная кривая.

Через каждую точку области G^0, используя одно из уравнений (2.4), можно провести отрезок поля направлений, построив, тем самым, в G^0 поле направлений уравнения (2.1).

Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой. А именно, интегральной кривой уравнения (2.1) в области G^0 назовем любую гладкую кривую, лежащую в G^0, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

Таким образом, локально дуга интегральной кривой задается или функцией $y = \varphi(x)$, или функцией $x = \psi(y)$.

Например, единичная окружность является одной из интегральных кривых уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому в окрестностях точек $(0, 1)$ или $(0, -1)$, где касательные к ней близки к горизонтальной, интегральная кривая задается функциями $y = (1 - x^2)^{1/2}$ или $y = -(1 - x^2)^{1/2}$, а в окрестности точек $(1, 0)$ или $(-1, 0)$, где касательные близки к вертикальной, — функциями $x = (1 - y^2)^{1/2}$ или $x = -(1 - y^2)^{1/2}$. В окрестностях остальных точек окружность может быть представлена и как функцией x, и как функцией y.

Очевидно, что в области единственности любые две интегральные кривые, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают.

В противном случае для получения противоречия достаточно в качестве начальных данных взять "крайнюю" точку, в которой интегральные кривые совпадают, а в последующих точках уже расходятся. Тогда эта крайняя точка окажется точка неединственности.

§ 2. ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЕ

1^0. **Определение интеграла.**

Для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной $y' = f(x, y)$, или перевернутого уравнения $x' = g(y, x)$ параметризация интегральных кривых функциями $y = \varphi(x)$ или

$x = \psi(y)$, являющихся решениями соответствующих уравнений на максимальном интервале существования, порождена несимметричным вхождением в эти уравнения переменных x и y. Тем самым, интегральные кривые таких уравнений не могут иметь соответственно вертикальных или горизонтальных касательных.

Но интегральная кривая уравнения в симметричной форме может иметь, как было установлено, любые касательные. Параметризуют такие кривые непрерывные неявные функции вида $U(x,y) = 0$.

Именно в таком неявном виде следует искать и записывать решения уравнения (2.1), называя их при этом интегралами.

Дадим строгое определение интеграла уравнения в симметричной форме и опишем в каком виде задавать формулу для всех решений уравнения (2.1), которую будем называть общим интегралом, в отличие от классического общего решения, введенного для уравнения, разрешенного относительно производной, в гл. I, § 1, п. 7^0.

При этом следует иметь в виду, что интеграл и общий интеграл — это обобщения классических понятий решения и общего решения, а значит, они в определенном смысле должны сводиться друг к другу.

Поэтому в первую очередь необходимо потребовать, чтобы неявные функции, задающие интегралы, были разрешимы хотя бы относительно одной из своих переменных.

Выделим для этого специальный класс функций, среди которых только и имеет смысл определять интеграл.

Df. *Непрерывная в области $G^0 \subset \mathbb{R}^2$ функция $U(x,y)$ называется допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G^0$ существует такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ (или $x = \eta(y)$), определенная на интервале (α, β), содержащем точку x_0 (или y_0), что:*

1) $y_0 = \xi(x_0)$ *(или* $x_0 = \eta(y_0)$*)*;

2) $(x, \xi(x)) \in G$ *для* $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$ *(или* $(\eta(y), y) \in G$ *для* $\forall\, y \in (\alpha, \beta)$*)*;

3) $y = \xi(x)$ *(или* $x = \eta(y)$*) — единственное решение уравнения*

$$U(x,y) = U(x_0, y_0), \tag{2.7}$$

т. е. $U(x, \xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$ *или* $U(\eta(y), y) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

В дальнейшем будем всегда предполагать, что G^0 — это область единственности, так как общий интеграл, как и классическое общее решение, может быть построен только в области единственности.

Df. *Допустимая функция $U(x,y)$ называется интегралом уравнения* (2.1) *в области единственности G^0, если для любой точки $(x_0,y_0)\in G^0$ единственная функция $y=\xi(x)$ или $x=\eta(y)$ из определения допустимой функции является решением задачи Коши уравнения* (2.1) *с начальными данными x_0, y_0 на (α,β), т. е. удовлетворяет тождеству $3_1)$ или $3_2)$ из определения решения.*

Замечание 5. *В определении интеграла можно было бы, вообще говоря, отказаться от предположения о том, что G^0 — область единственности. Но тогда в какой-либо точке неединственности $(x_0,y_0)\in G^0$ помимо единственного решения уравнения (2.7), являющегося решением задачи Коши с н. д. x_0, y_0, уравнение (2.1) могло бы иметь еще одно решение той же задачи Коши, отличное от первого и не являющееся решением уравнения (2.7). А в последующих рассуждениях такая ситуация не допустима.*

2^0. Характеристическое свойства интеграла.

В математике часто один и тот же новый объект можно определить различными способами. Тогда один из способов выдают за определение данного объекта, а другой называют характеристическим свойством объекта. При желании их можно менять местами.

Теорема (о характеристическом свойстве интеграла). *Для того чтобы допустимая функция $U(x,y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме* (2.1) *в области единственности G^0, необходимо и достаточно, чтобы $U(x,y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения* (2.1), *т. е. чтобы $U(x,\varphi(x))\overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y=\varphi(x)$, определенного на $\langle a,b\rangle$, и $U(\psi(y),y)\overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x=\psi(y)$, определенного на $\langle a,b\rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Необходимость. Пусть $U(x,y)$ — это интеграл уравнения (2.1) в области единственности G^0 и пусть, например, $y=\varphi(x)$ — какое-либо решение уравнения (2.1), определенное на промежутке $\langle a,b\rangle$.

Возьмем произвольную точку $x_0\in\langle a,b\rangle$ и положим $y_0=\varphi(x_0)$.

По определению решения точка $(x_0,y_0)\in G^0$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (2.7) $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо или относительно x, или относительно y.

Предположим сначала, что (2.7) однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует единственная функция $y = \xi(x)$, определенная на некотором $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такая, что $U(x, \xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

Эта функция по определению интеграла является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_0, y_0.

Поскольку G^0 — область единственности, а $(x_0, y_0) \in G^0$, то по определению единственности решения задачи Коши для решений $y = \varphi(x)$ и $y = \xi(x)$, интегральные кривые которых проходят через точку (x_0, y_0), найдется такой интервал $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subset \langle a, b\,\rangle \cap (\alpha, \beta)$, на котором эти решения тождественно совпадают. Следовательно,

$$U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0). \tag{2.8}$$

Предположим теперь, что уравнение (2.7) однозначно разрешимо относительно x, т. е. существует единственная функция $x = \eta(y)$, определенная на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni y_0$, что $\eta(y_0) = x_0$ и $U(\eta(y), y) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

По определению интеграла $x = \eta(y)$ при $y \in (\alpha, \beta)$ является решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными y_0, x_0.

В результате, единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 имеет два представления: $y = \varphi(x)$ и $x = \eta(y)$.

Поэтому дуга интегральной кривой этого решения в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y = \varphi(x)$, так и функцией $x = \eta(y)$, т. е. эти функции взаимно обратны.

Сказанное означает, что существуют такие интервалы $(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ и $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, что $x_0 \in (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset (a, b)$, $y_0 \in (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subset (\alpha, \beta)$ и $y \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \varphi(\eta(y))$, а $x \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} \eta(\varphi(x))$. Поэтому справедлива цепочка тождеств

$$U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} U(\eta(\varphi(x)), \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(\eta(y), y) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0).$$

Таким образом, при наличии решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1), определенного на $\langle a, b\,\rangle$, в окрестности любой точки $x_0 \in (a, b)$ уравнение (2.7) с $y_0 = \varphi(x_0)$ обязательно однозначно разрешимо относительно y и выполняется тождество (2.8).

Остается показать, что тождество (2.8) справедливо не только на $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, а на всем промежутке $\langle a, b\,\rangle$, если, конечно, $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subsetneqq \langle a, b\,\rangle$.

Ситуация, когда $\widetilde{\beta} = b$, решение $y = \varphi(x)$ определено на $\langle a, b]$, $U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha}, b)}{\equiv} U(x_0, y_0)$, а $U(b, \varphi(b)) \neq U(x_0, y_0)$, невозможна в силу непрерывности функции U.

Действительно, в этой ситуации для $\forall\, \delta > 0$ из непрерывности слева решения $y = \varphi(x)$ следует, что $\exists\, \delta_1 > 0$ $(\delta_1 \leq \delta)$ такое, что для $\forall\, x :\ b - x < \delta_1$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi(b)| < \delta$.

Выберем $x^* = b - \delta_1/2$, тогда точка $(x^*, \varphi(x^*))$ принадлежит произвольно выбранной δ-окрестности точки $(b, \varphi(b))$ и при этом $|U(x^*, \varphi(x^*)) - U(b, \varphi(b))| = |U(x_0, y_0) - U(b, \varphi(b))| = \varepsilon > 0$. Это значит, что функция $U(x, y)$ терпит разрыв в точке $(b, \varphi(b))$.

Допустим теперь, что $\widetilde{\beta} < b$ и $\exists\, x_1, x_2 \in [\widetilde{\beta}, b\rangle$ $(x_1 < x_2)$, что $U(x, \varphi(x)) \overset{(\widetilde{\alpha}, x_1]}{\equiv} U(x_0, y_0)$, $U(x, \varphi(x)) \neq U(x_0, y_0)$ для $\forall\, x \in (x_1, x_2)$.

Пусть $y_1 = \varphi(x_1)$. Тогда из последнего тождества вытекает, что $U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$. По определению решения точка $(x_1, y_1) \in G^0$, поэтому для нее верны все рассуждения, касающиеся точки (x_0, y_0).

В частности, если $y = \xi_1(x)$ — единственное на интервале (α_1, β_1) $(\, x_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (x_0, x_2)\,)$ решение уравнения $U(x, y) = U(x_1, y_1)$ относительно y, т. е. $U(x, \xi_1(x)) \overset{(\alpha_1, \beta_1)}{\equiv} U(x_1, y_1)$, и оно же по определению интеграла является единственным решением задачи Коши уравнения (2.1) с начальными данными x_1, y_1, т. е. $\xi_1(x) \equiv \varphi(x)$ на (α_1, β_1), то $U(x, \varphi(x)) \overset{[x_1, \beta_1)}{\equiv} U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$ — противоречие.

Ситуация с точками $x_1, x_2 \in \langle a, \widetilde{\alpha}]$ рассматривается аналогично.

Достаточность. Пусть допустимая функция $U(x, y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (2.1). Покажем, что тогда $U(x, y)$ — интеграл этого уравнения в области единственности G^0.

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G^0$. По определению допустимой функции уравнение (2.7) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо либо относительно y, либо относительно x.

Так как (x_0, y_0) — это точка единственности, существует единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 вида $y = \varphi(x)$ для $\forall\, x \in (a, b) \ni x_0$ или $x = \psi(y)$ для $\forall\, y \in (a, b) \ni y_0$.

Пусть, например, $x = \psi(y)$ является решением уравнения (2.1). Тогда по условию теоремы $U(\psi(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$ на (a, b). Тем самым, $U(x, y)$ разрешима относительно x и, поскольку она допустима, $x = \psi(y)$ является единственным решением уравнения (2.7).

А если уравнение (2.7) было однозначно разрешимо относительно y, то как и при доказательстве необходимости можно показать, что функция $y = \xi(x)$ — решение уравнения (2.1), поскольку является обратной к решению $x = \psi(y)$.

В результате допустимая функция $U(x, y)$ — это интеграл уравнения (2.1) в области единственности G^0. $\square$

3^0. Характеристическое свойство гладкого интеграла.

Df. *Непрерывную в области G^0 функцию $U(x, y)$ будем называть гладкой и использовать запись: $U(x, y) \in C^1(G^0)$, если в G^0 существуют и непрерывны частные производные U по x и по y.*

Будем для краткости обозначать $\partial U/\partial x = U'_x$ и $\partial U/\partial y = U'_y$.

Df. *Функция $U(x, y)$ называется гладкой допустимой в области G^0, если $(U'_x)^2 + (U'_y)^2 > 0$ для любой точки $(x, y) \in G^0$.*

По теореме о неявной функции для любой точки $(x_0, y_0) \in G^0$ уравнение (2.7) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ с гладкой допустимой функцией U однозначно разрешимо относительно y, если $U'_y \neq 0$, и полученное решение $y = \xi(x)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_0. Аналогично в окрестности точки y_0 имеется единственное гладкое решение уравнения (2.7) $x = \eta(y)$, если $U'_x \neq 0$. Ну, а если в точке $(x_0, y_0) \in G^0$ обе частные производные функции $U(x, y)$ отличны от нуля, то уравнение (2.7) однозначно разрешимо как относительно y, так и относительно x.

Df. *Интеграл $U(x, y)$ уравнения* (2.1) *будем называть гладким, если U — гладкая допустимая функция.*

Теорема (о характеристическом свойстве гладкого интеграла). *Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x, y)$ была гладким интегралом уравнения* (2.1) *в области единственности G^0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$N(x, y)\, U'_x(x, y) - M(x, y)\, U'_y(x, y) \overset{G^0}{\equiv} 0. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Необходимость. Пусть $U(x, y)$ — это интеграл уравнения (2.1). Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G^0$. Тогда согласно (2.3) $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда найдется окрестность $V(x_0, y_0) \subset G^0$, в которой $N(x, y) \neq 0$ и уравнение (2.1) равносильно классическому уравнению (2.4_1).

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 уравнений (2.1), (2.4_1), определенное на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда по определению решения справедливо тождество $\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} -M(x, \varphi(x))/N(x, \varphi(x))$, задающее производную $\varphi(x)$.

По теореме о характеристическом свойстве интеграла имеем:

$$U(x, \varphi(x)) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0, y_0).$$

Продифференцируем это тождество по x :

$$U'_x(x, \varphi(x)) + U'_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

Подставляя сюда $\varphi'(x)$ и домножая на N, получаем:

$$N(x, \varphi(x))\, U'_x(x, \varphi(x)) - M(x, \varphi(x))\, U'_y(x, \varphi(x)) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

Положив $x = x_0$, а тогда $\varphi(x_0) = y_0$, получаем равенство (2.9) для любой точки $(x_0, y_0) \in G^0$.

Достаточность. Пусть в области G^0 выполняется равенство (2.9).

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G^0$, и пусть, например, $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $U'_y(x, y) \neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ и в ней уравнение (2.7) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует и единственна такая функция $y = \xi(x)$, определенная на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $\xi(x_0) = y_0$, $\xi \in C^1(\,(\alpha, \beta)\,)$ и $U(x, \xi(x)) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$.

Продифференцировав это тождество, получаем

$$U'_x(x, \xi(x)) + U'_y(x, \xi(x))\, \xi'(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0 \qquad (\,(x, \xi(x) \in V),$$

а значит, $\xi'(x) \equiv -U'_x(x, \xi(x))/U'_y(x, \xi(x))$.

Покажем, что $y = \xi(x)$ является решением уравнения (2.1), т. е. на интервале (a, b), например, удовлетворяет тождеству $3_1)$ из определения решения. Тогда $U(x, y)$ будет гладким интегралом.

Подставим функцию $\xi(x)$ в $3_1)$: $M(x, \xi(x)) + N(x, \xi(x))\xi'(x) \equiv$ $(M(x, \xi(x))\, U'_y(x, \xi(x)) - N(x, \xi(x))\, U'_x(x, \xi(x)))/U'_y(x, \xi(x)) \overset{(2.9)}{\equiv} 0.$ □

Следствие. *Гладкая допустимая функция* $U(x, y)$ *является гладким интегралом уравнения* (1.1) $y' = f(x, y)$ *в области единственности* G *тогда и только тогда, когда верно тождество* $U'_x(x, y) + f(x, y)U'_y(x, y) \overset{G}{\equiv} 0.$

4^0. Существование интеграла, связь между интегралами.

Итак, в предыдущих пунктах были введены понятия интеграла и гладкого интеграла. Теперь, как обычно, надо ответить на вопрос об их существовании.

Существование только непрерывного интеграла, фактически, вытекает из существования общего решения классического уравнения.

Теорема (о существовании непрерывного интеграла). *Для любой точки* (x_0, y_0) *из области единственности* G^0 *существует окрестность* $A \subset G^0$, *в которой дифференциальное уравнение* (2.1) *имеет интеграл* $U(x, y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (x_0, y_0) — это произвольная точка из области единственности G^0. И пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда найдется окрестность $V(x_0, y_0) \subset G^0$, в которой $N(x, y) \neq 0$, а значит, в ней уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно уравнению (2.4_1) $\quad y' = -M(x, y)/N(x, y)$.

По теореме о существовании общего решения в области $A = \{ (x, y) \,|\, a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \subset V$ существует общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения (2.4_1).

По определению общего решения уравнение $y = \varphi(x, C)$ однозначно разрешимо относительно C для любой точки $(x, y) \in A$, т. е. $C = U(x, y)$, причем $U(x, \varphi(x, C)) \overset{(a,b)}{\equiv} C$.

В результате уравнение $U(x, y) = C$ однозначно разрешимо относительно y, а значит, функция U — допустимая и постоянна вдоль любого решения, график которого лежит в области A.

По теореме о характеристическом свойстве интеграла функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения (2.1) в области A. $\square$

Df. *Пусть* $U(x, y)$ *— интеграл уравнения (2.1) в области единственности* G. *Тогда равенство* $U(x, y) = C$ *называется общим интегралом дифференциального уравнения (2.1).*

Из приведенной теоремы непосредственно вытекает, что общий интеграл задает все решения уравнения (2.1) в неявном виде.

Доказать существование гладкого интеграла уравнения (2.1) при имеющихся предположениях относительно M и N не удается, так как ни откуда не следует что используемое в предыдущей теореме общее решение $y = \varphi(x, C)$ непрерывно дифференцируемо по C.

Теорема (о существовании гладкого интеграла). *Пусть в уравнении* (2.1) *функции* $M(x,y), N(x,y)$ *являются гладкими в некоторой области* G^0 *из* (2.3), *т. е. в* G^0 *определены и непрерывны частные производные* $M'_x(x,y), M'_y(x,y), N'_x(x,y), N'_y(x,y)$. *Тогда для любой точки* $(x_0,y_0)\in G^0$ *найдется окрестность* $A\subset G^0$, *в которой уравнение* (2.1) *имеет гладкий интеграл* $U(x,y)$.

Доказательство. Согласно слабой теореме единственности из п. 3^0 область G^0 является областью единственности.

Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из G^0. И пусть, например, $N(x_0,y_0)\neq 0$, а $V\in G^0$ — окрестность (x_0,y_0), где $N(x,y)\neq 0$ и уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно уравнению (2.4_1) $\;y'=f_0(x,y)$ с $f_0=-M(x,y)/N(x,y)$. При этом по условию теоремы в области V определена и непрерывна $\partial f_0(x,y)/\partial y$.

Пусть $A=\{\,(x,y)\,|\,a<x<b,\ \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$ — окрестность точки (x_0,y_0), лежащая в V, в которой существует общее решение $y=\varphi(x,C)$ уравнения $y'=f_0(x,y)$, задаваемое формулой (1.14) $\varphi(x,C)=y(x,\zeta,C)$, где $\zeta\in(a,b)$ можно выбирать произвольным образом, $(\zeta,C)\in\overline{A}$, т.е. $C\in[\varphi_1(\zeta),\varphi_2(\zeta)]$, а $y(x,\zeta,C)$ — решение задачи Коши с начальными данными ζ, C.

Выберем $\zeta=x_0$, тогда по теореме о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам, которая будет сформулирована и доказана в гл. III, §6, п. 2^0, в окрестности $W=\{\,(x,C):\ a<x<b,\ \varphi_1(x_0)<C<\varphi_2(x_0)\}$ точки (x_0,y_0) существует и непрерывна частная производная $\varphi'_C(x,C)=y'_C(x,x_0,C)$.

При этом $d\varphi(x_0,C)/dC=dy(x_0,x_0,C)/dC=dC/dC=1$ для $\forall\,C\in(\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0))$. Поэтому по теореме о неявной функции уравнение $\varphi(x,C)-y=0$ однозначно разрешимо относительно C и решение $C=U(x,y)$, являющееся, как уже установлено, интегралом дифференциального уравнения (2.1), непрерывно дифференцируемо по y в области W и $dU(x_0,y)/dy|_{y=y_0}=1$.

Остается заметить, что функция $U(x,y)$ является также непрерывно дифференцируемой по x, поскольку таковой по определению общего решения является обратная к ней функция $y=\varphi(x,C)$.

Следовательно $U(x,y)$ — гладкая допустимая функция, а значит, гладкий интеграл дифференциального уравнения первого порядка, записанного в симметричной форме, с гладкими функциями M и N.

Случай, когда $N(x_0, y_0) = 0$, а $M(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично, только уравнение (2.1) сводится к "перевернутому" уравнению (2.4_2) $dx/dy = -N(x,y)/M(x,y)$, в котором потребуется гладкость функций M и N по x, после чего переменные x и y можно поменять местами. $\square$

Ответим теперь на следующие вопросы: как связаны между собой любые два интеграла (непрерывные или гладкие) и как из одного интеграла получить другой.

Теорема (о связи между интегралами). *Пусть* $U(x,y)$ *является интегралом уравнения* (2.1) *в некоторой области* A, *тогда:*

1) Если $U_1(x,y)$ *— еще один интеграл уравнения* (2.1) *в области* A, *то существует функция* $\Phi(z)$ *такая, что*

$$U_1(x,y) \stackrel{A}{\equiv} \Phi(U(x,y)); \tag{2.10}$$

2. Если функция $\Phi(U(x,y))$ *— допустимая, то функция* $U_1(x,y)$, *заданная формулой* (2.10), *есть интеграл уравнения* (2.1) *в* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть интеграл $U(x,y)$ был построен в области A при помощи общего решения $\varphi(x,C)$, тогда $U(x,\varphi(x,C)) \stackrel{(a,b)}{\equiv} C$. Поскольку $U_1(x,y)$ — еще один интеграл в A, для $\forall\, C \in \mathbb{R}^1$ получаем, что $U_1(x,\varphi(x,C)) = \Phi(C)$. Поэтому $U_1(x,\varphi(x,C)) \stackrel{(a,b)}{\equiv} \Phi(U(x,\varphi(x,C))$. При этом точки $(x,\varphi(x,C))$ заполняют всю область A, а значит, выполняется тождество (2.10).

2. Пусть Φ — произвольная вещественная функция такая, что $\Phi(U(x,y))$ оказывается допустимой функцией.

Положим $U_1(x,y) = \Phi(U(x,y))$. Тогда функция U_1 — допустимая и обращается в постоянную вдоль любого решения, поскольку по предположению U — интеграл. Поэтому U_1 — интеграл. $\square$

5^0. Уравнения с разделяющимися переменными.

Одним из важнейших классов дифференциальных уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах, является класс уравнений с разделяющимися переменными. Его особую значимость подчеркивает тот факт, что большинство уравнений, которые возможно проинтегрировать, в ходе решения теми или иными обратимыми заменами сводятся к уравнению с разделяющимися переменными.

Df. *Уравнение* (2.1) *вида*

$$g_1(x)h_2(y)dx + g_2(x)h_1(y)dy = 0, \tag{2.11}$$

где $g_i(x)\in C(\langle a,b\rangle)$, $h_i(y)\in C(\langle c,d\rangle)$ $(i=1,2)$, *называется уравнением с разделяющимися переменными в симметричной форме.*

Пусть для определенности $\langle a,b\rangle = [a,b)$, $\langle c,d\rangle = (c,d\,]$.

Тем самым, $M = g_1(x)h_2(y) \in C(\widehat{G})$, $N = g_2(x)h_1(y) \in C(\widehat{G})$, где множество $\widehat{G} = \{\,(x,y)\colon\ x\in[a,b),\ y\in(c,d\,]\}$.

Для того, чтобы описать связное множество $\widehat{G}^0$ из (2.3), на котором следует рассматривать уравнение в симметричной форме (2.11), введем следующие множества:

$\overline{x}_i^g = \{x\in(a,b)\colon\ g_i(x)=0\}$, $\overline{y}_i^h = \{y\in(c,d)\colon\ h_i(y)=0\}$;

$\overline{H}_i = \{(x,y)\colon\ x\in\overline{x}_i^g,\ y\in\overline{y}_i^h\}$, $H_i = \overline{H}_i\backslash\partial\overline{H}_i\,(=\operatorname{Int}\overline{H}_i)$ $(i=1,2)$.

Разумеется любая компонента связности открытого множества H_i ($\overline{x}_i^g, \overline{y}_i^h, \overline{H}_i$ замкнуты) пуста, если она является точкой или прямой.

Будем всегда предполагать, что в уравнении (2.11)

$$\overline{x}_1^g\cap\overline{x}_2^g=\emptyset \ \text{ и } \ \overline{y}_1^h\cap\overline{y}_2^h=\emptyset. \tag{2.12}$$

В противном случае существует хотя бы одна прямая, состоящая из нуль-граничных точек, разделяющая внутренность прямоугольника $\widehat{G}$ на компоненты связности, и надо сразу рассматривать уравнение (2.11) на каждой из них, добавляя соответствующие границы.

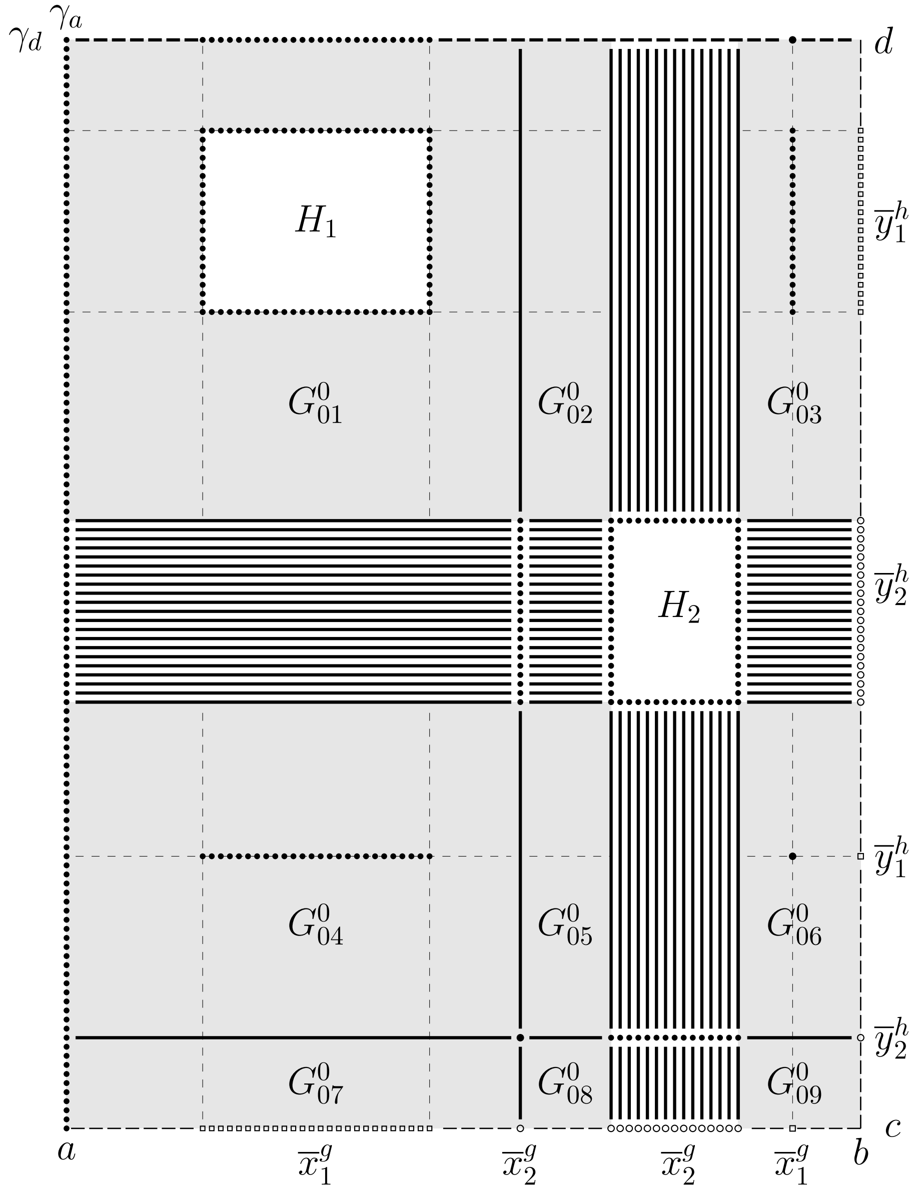
Отметим, что в силу выделения множеств $\overline{x}_i^g$ и $\overline{y}_i^h$ именно из интервалов условие (2.12) не относится к границам множества $\widehat{G}$ $\gamma_a = \{x=a,\ y\in(c,d\,]\}$ и $\gamma_d = \{x\in[a,b),\ y=d\}$, которые могут содержать или не содержать нуль-граничные точки.

Пусть для определенности $g_1(a)=g_2(a)=0$, $h_1^2(d)+h_2^2(d)\neq 0$. Тогда граница γ_a состоит из нуль-граничных точек ($\gamma_a = \check{\gamma}_a$), а γ_d разбита на множества $\breve{\gamma}_d$ и $\check{\gamma}_d$ соответственно граничных и нуль-граничных точек, причем замкнутое множество $\check{\gamma}_d = \{\check{x}^g,\ y=d\}$, где $\check{x}^g = \{\overline{x}_1^g$, если $h_1(d)=0$; $\overline{x}_2^g$, если $h_2(d)=0\}$ ($\breve{\gamma}_d = \gamma_d\backslash\check{\gamma}_d$).

В результате уравнение (2.11) при условии (2.12), гарантирующем, что $\overline{H}_1\cap\overline{H}_2=\emptyset$, рассматриваем на множестве $\widehat{G}^0 = \widehat{G}\backslash(H_1\cup H_2)$.

Согласно (2.3) $\widehat{G}^0 = G^0\cup\breve{\partial}G^0\cup\check{\partial}G^0$, где область $G^0 = \operatorname{Int}\widehat{G}^0$, $\breve{\partial}G^0 = \breve{\gamma}_d$, $\check{\partial}G^0 = \gamma_a\cup\check{\gamma}_d\cup\partial(\overline{H}_1\cup\overline{H}_2)$, причем внутреннее для G^0 множество $\partial(\overline{H}_1\cup\overline{H}_2)$ может содержать как изолированные нуль-граничные точки, так и отрезки прямых из нуль-граничных точек.

Множество $\widehat{G}^0$ $(g_1(a) = g_2(a) = h_1(d) = 0,\ h_2(d) \neq 0)$



Выпишем все граничные и нуль-граничные решения уравнения (2.11), предположив, для определенности, что $h_1(d) = 0$ $(h_2(d) \neq 0)$.

Тогда функция $y(x) \equiv d$ на каждом из интервалов множества $(a, b) \backslash \overline{x}_1^g$ является граничным решением уравнения (2.11) и его график совпадает с $\breve{\gamma}_d$. А функция $x(y) \equiv a$ на промежутке $y \in (c, d]$ является нуль-граничным решением и его график совпадает с γ_a. Также нуль-граничными решениями будут являться функции, параметризующие любые горизонтальные и вертикальные отрезки прямых из нуль-граничных множеств $\breve{\gamma}_d$ и $\partial(\overline{H}_1 \cup \overline{H}_2)$.

Рассмотрим теперь уравнение (2.11) при условии (2.12) в G^0.

Для $\forall\, x_2 \in \overline{x}_2^g$ функция $N(x_2, y) \equiv 0$, поэтому прямая $x(y) = x_2$, $y \in (c, d)$ удовлетворяет уравнению (2.11) так же, как и прямая $y(x) = y_2$, $x \in (a, b)$, поскольку $M(x, y_2) \equiv 0$ для $\forall\, y_2 \in \overline{y}_2^h$. Поэтому указанные прямые являются решениями (2.11) на интервалах, принадлежащих множеству соответственно $(c, d)\backslash\overline{y}_2^h$ или $(a, b)\backslash\overline{x}_2^g$.

Удаляя из области G^0 все описанные выше прямые, получаем семейство прямоугольных областей G_{0k}^0 (на рисунке $k = \overline{1, 9}$).

Выбираем любую из них и для краткости обозначаем G_0^0. Тогда

$$G_0^0 = \{(x, y)\colon\, x \in (a_0, b_0),\, y \in (c_0, d_0)\}$$

и для любой точки $(x, y) \in G_0^0$ имеем:

$$g_2(x) \neq 0, \quad h_2(y) \neq 0, \quad g_1^2(x) + h_1^2(y) \neq 0. \qquad (2.13)$$

Покажем, что G_0^0 — область единственности для уравнения (2.11).

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G_0^0$ и пусть, например, $h_1(y_0) \neq 0$. Тогда существует интервал $(\tilde{c}, \tilde{d}) \subset (c_0, d_0)$ такой, что $h_1(y) \neq 0$ для $\forall y \in (\tilde{c}, \tilde{d})$. Поэтому в области

$$\widetilde{G} = \{(x, y)\colon\, x \in (a_0, b_0),\, y \in (\tilde{c}, \tilde{d})\}$$

уравнение (2.11) эквивалентно уравнению (1.1) вида

$$y' = g(x)h(y), \qquad (2.14)$$

в котором в данном случае $g = -g_1(x)g_2^{-1}(x)$, $h = h_2(y)h_1^{-1}(y) \neq 0$ и $f(x, y) = g(x)h(y)$ непрерывна в прямоугольной области $\widetilde{G}$.

Df. *Уравнение (2.14), в котором $g \in C((a_0, b_0))$, $h \in C((\tilde{c}, \tilde{d}))$, называют уравнением с разделяющимися переменными, разрешенным относительно производной.*

А если бы для точки (x_0, y_0) оказалось, что $h_1(y_0) = 0$, то в силу условий (2.13) $g(x_0) \neq 0$ и уравнение (2.11) было бы эквивалентно "перевернутому" уравнению $x' = \tilde{g}(x)\tilde{h}(y)$ с разделяющимися переменными в соответствующей прямоугольной области.

Покажем, что $\widetilde{G}$ — область единственности для уравнения (2.14). Этого достаточно, чтобы произвольным образом выбранная точка $(x_0, y_0) \in G_0^0$ была точкой единственности уравнения (2.11).

Пусть $H(y) = \int h^{-1}(y)\, dy$ и для определенности $h(y) > 0$ при $y \in (\tilde{c}, \tilde{d})$, тогда $H(y)$ — гладкая строго возрастающая функция.

Сделаем в уравнении (2.14) замену переменных $u = H(y)$. Для этого продифференцируем ее, т. е. тождество $u(x) = H(y(x))$, по x в силу уравнения (2.14), получая $\dfrac{du(x)}{dx} = \dfrac{dH(y(x))}{dy} \cdot \dfrac{dy(x)}{dx} = h^{-1}(y(x)) \cdot g(x) \cdot h(y(x))$.

В результате в переменных x, z (2.14) имеет вид $z' = g(x)$, определено в области $\widetilde{G}_z = \{(x,z)\colon\ x \in (a,b),\ z \in (H(\tilde{c}), H(\tilde{d}))\}$ и его общее решение $z(x,C) = \int g(x)\,dx + C$.

Область $\widetilde{G}_z$ является областью единственности для полученного уравнения $z' = g(x)$, так как интегральные кривые в ней не могут иметь общих точек. Они получены параллельными переносами вдоль оси ординат одной и той же первообразной. А поскольку замена $x = x$, $u = H(y)$ обратимо в силу монотонности функции H, $\widetilde{G}$ оказывается областью единственности для уравнения (2.14).

Итак, установлено, что G_0^0 — область единственности для уравнения (2.11), и в ней (2.11) с учетом (2.13) равносильно так называемому уравнению с разделенными переменными

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}dy = 0. \tag{2.15}$$

Для $\forall\,(x_0, y_0) \in G_0^0$ рассмотрим гладкую в G_0^0 функцию

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{g_1(s)}{g_2(s)}\,ds + \int_{y_0}^{y} \frac{h_1(s)}{h_2(s)}\,ds. \tag{2.16}$$

В силу (2.13) $U'_x(x,y) + U'_y(x,y) \neq 0$ для $\forall\,(x,y) \in G_0^0$, поэтому U — гладкая допустимая функция, и для нее, очевидно, выполняется тождество (2.9), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла $U(x,y)$ является интегралом уравнения (2.15).

В результате оказалась доказана следующая теорема.

Теорема (об интеграле уравнения с разделяющимися переменными). *Область* G_0^0 *при условиях* (2.13) *является областью единственности для уравнения с разделяющимися переменными в симметричной форме* (2.11) *и в ней функция* $U(x,y)$, *введенная в* (2.16), *является гладким интегралом уравнения* (2.11).

Эта теорема завершает описание области задания и решение уравнения с разделяющимися переменными.

§ 3. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ, ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1^0. Уравнение в полных дифференциалах.

Рассмотрим уравнение (2.1) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ в области G^0 из (2.3), тогда $M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$ для $\forall\,(x,y)\in G^0$.

Df. *Уравнение* (2.1) *называется уравнением в полных дифференциалах в области* G^0, *если существует функция* $U(x,y)\in C^1(G^0)$ *такая, что для всякой точки* (x,y), *принадлежащей* G^0,

$$U'_x(x,y)=M(x,y),\quad U'_y(x,y)=N(x,y). \tag{2.17}$$

В этом случае, очевидно, $dU(x,y)\equiv M(x,y)dx+N(x,y)dy$, т. е. дифференциал гладкой функции U для любой точки (x,y) из области G^0 равняется левой части уравнения (2.1).

Как всегда, после введения в рассмотрение нового объекта надо ответить на три стандартных вопроса:

1) зачем нужен объект? 2) существует ли он? 3) как его найти?

Давайте последовательно ответим на эти вопросы.

Теорема (об интеграле уравнения в полных дифференциалах). *Пусть уравнение* (2.1) *является уравнением в полных дифференциалах в области* G^0, *тогда функция* $U(x,y)$, *удовлетворяющая равенствам* (2.17), *— это гладкий интеграл уравнения* (2.1) *в* G^0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует гладкая функция $U(x,y)$, для которой в G^0 выполняются равенства (2.17). Тогда ${U'_x}^2+{U'_y}^2\neq 0$ в силу (2.2), а значит, по определению U — гладкая допустимая функция.

При этом в G^0 очевидным образом выполняется тождество (2.9), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла $U(x,y)$ — гладкий интеграл в G^0.

Остается показать, что G^0 — это область единственности.

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in G^0$ и произвольное решение $y=\varphi(x)$ задачи Коши с н. д. x_0,y_0 уравнения (2.1) на каком-либо интервале $(a,b)\ni x_0$. Тогда $\varphi(x_0)=y_0$ и по определению решения $M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ для $\forall x\in(a,b)$.

Поэтому $d\,U(x,\varphi(x))=U'_x(x,\varphi(x))\,dx+U'_y(x,\varphi(x))\,d\varphi(x)=0$, а значит, на (a,b) справедливо тождество $U(x,\varphi(x))\equiv U(x_0,\varphi(x_0))$.

В результате любое решение поставленной задачи Коши уравнения в полных дифференциалах удовлетворяет уравнению (2.7) в некоторой окрестности точки x_0. А функция U, будучи допустимой, однозначно разрешима, следовательно в G^0 не существует двух различных решений одной и той же задачи Коши. $\Box$

Итак, зная функцию U из определения уравнения в полных дифференциалах, мы знаем его общий интеграл: $U(x,y)=C$.

Проводя параллель с решениями уравнения, разрешенного относительно производной, еще раз убеждаемся в том, что для любой вещественной константы C интеграл $U(x,y)=C$ при подстановке в уравнение обращает последнее в тождество. Действительно, $dC = d\,U(x,y)$ или $0 = U'_x\,dx + U'_y\,dy \overset{(2.10)}{=} M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

На второй и третий вопросы, касающиеся уравнений в полных дифференциалах, дает ответ следующая теорема.

Теорема (об уравнении в полных дифференциалах). *Для того чтобы уравнение* (2.1) *с определенными и непрерывными в односвязной области* G *функциями* M, N, M'_y *и* N'_x *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы*

$$M'_y(x,y) - N'_x(x,y) \overset{G}{\equiv} 0. \tag{2.18}$$

В этом случае интеграл

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \tag{2.19}$$

где (x_0,y_0) *— любая фиксированная точка из* G, *а* $\int$ *— это криволинейный интеграл II рода по любому пути, соединяющему в* G *точку* (x_0,y_0) *с точкой* (x,y). (Доказательство см., напр. в ....).

Замечание 6. *В теореме не требуется выполнения в области* G *условия* (2.2), *поэтому в качестве* G *можно использовать область* G^0, *имеющую внутренние нуль-граничные точки, но при этом* G^0, *принадлежащая линейно-связному пространству* $\mathbb{R}^2$, *должна быть односвязной. Односвязность области означает, что для любой замкнутой непрерывной кривой, лежащей в* G^0, *часть плоскости, ограниченная этой кривой, также принадлежит* G^0.

Выбирая в (2.19) конкретные пути, можно получить различные формулы для нахождения интеграла $U(x,y)$.

Например, если область G^0 содержит прямоугольник с вершинами в точках (x_0, y_0) и (x, y), то справедливы формулы

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\, ds + \int_{y_0}^{y} N(x, s)\, ds \tag{2.19$_1$}$$

или

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\, ds. \tag{2.19$_2$}$$

А если G^0 — выпуклая область и $x \neq x_0$, то можно проинтегрировать по прямой, соединяющей точку (x_0, y_0) с точкой (x, y) :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} (M(s, l(s)) + N(s, l(s))\, ds, \quad l(s) = y_0 + \frac{s - x_0}{x - x_0}(y - y_0).$$

На практике для нахождения интеграла уравнения в полных дифференциалах после проверки выполнения условия (2.18) чаще всего используют формулу (2.19_1) или (2.19_2). Поэтому имеет смысл доказать справедливость этих формул непосредственно, не ссылаясь на приведенную выше общую теорему.

Утверждение 1. *Пусть для уравнения (2.1) с непрерывными* $M'_y(x,y)$ *и* $N'_x(x,y)$ *в области* $G^0 = \{(x,y)\colon\ x \in (a,b),\ y \in (c,d)\}$ *выполняется условие (2.18), тогда (2.1) — это уравнение в полных дифференциалах, а функции, заданные формулами* (2.19_1) *и* (2.19_2), *являются его интегралами.*

Доказательство. Возьмем, например, гладкую функцию $U(x,y)$ из (2.19_1) и покажем, что она удовлетворяет равенствам (2.17) для $\forall\, (x,y) \in G^0$. Этого достаточно для того, чтобы (2.1) было уравнением в полных дифференциалах.

Дифференцируя (2.19_1) сначала по y, а потом по x, получаем

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,s)}{\partial x}\, ds.$$

Теперь во втором равенстве используем тождество (2.18), тогда

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,s)}{\partial y}\, ds = M(x,y).$$

Что и требовалось доказать. $\square$

2^0. Интегрирующий множитель.

Как выяснилось в предыдущем параграфе, найти общий интеграл уравнения уравнения в полных дифференциалах просто. Но что делать, если для уравнения (2.1) не выполняются тождества (2.18)? Нельзя ли превратить исходное уравнение в уравнение в полных дифференциалах, домножив его на некоторую функцию?

Df. *Функция* $\mu(x,y)$, *определенная, непрерывная и не обращающаяся в нуль в области* G^0, *называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения* (2.1), *если уравнение*

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.20}$$

является в G^0 *уравнением в полных дифференциалах.*

Введен новый объект — интегрирующий множитель. Значит, как обычно, надо ответить на стандартные три вопроса.

Необходимость понятия интегрирующего множителя вытекает непосредственно из определения, так как знание функции $\mu(x,y)$, позволяет найти общий интеграл уравнений (2.20) и (2.1).

А когда интегрирующий множитель существует?

Теорема (о существовании интегрирующего множителя). *Если в области единственности* $\widetilde{G} \subset G^0$ *уравнение* (2.1) *имеет гладкий интеграл, тогда в* $\widetilde{G}$ *существует интегрирующий множитель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U(x,y)$ — гладкий интеграл уравнения (2.1) в $\widetilde{G}$. Тогда из тождества (2.9) вытекает, что в $\widetilde{G}$

$$U'_x(x,y)/M(x,y) = U'_y(x,y)/N(x,y),$$

причем числитель и знаменатель в одной из частей равенства могут одновременно обращаться в нуль.

Поэтому функция $\mu(x,y) = U'_x(x,y)/M(x,y) = U'_y(x,y)/N(x,y)$ удовлетворяет определению интегрирующего множителя, так как левая часть уравнения (2.20) равна $dU(x,y)$, а значит, U является дифференциалом (2.20). $\square$

Итак, интегрирующий множитель существует практически всегда. Но найти его в явном виде удается далеко не всегда, что естественно, иначе решалось бы в квадратурах любое дифференциальное уравнение I порядка, разрешенное относительно производной.

Получим сначала дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $\mu(x, y)$.

Предположим, что M'_y, $N'_x \in C(G^0)$. Будем искать $\mu \in C^1(G^0)$.

Если (2.20) — уравнение в полных дифференциалах, то согласно тождеству (2.18) $(\mu M)'_y - (\mu N)'_x = 0$.

После перегруппировки, получаем

$$\mu'_x N - \mu'_y M = (M'_y - N'_x)\mu \tag{2.21}$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение I порядка относительно μ, но только в частных производных.

Получается, что решить в явном виде простейшее уравнение математической физики (2.21) также трудно, как решить произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение (2.1) или (1.1).

Для решения уравнения (2.21) хотелось бы свести его к обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется после разделения переменных. А для этого надо, чтобы $\mu(x, y)$ была функцией только одной переменной, т. е. записать μ в виде сложной функции.

Выберем какую-либо функцию $\omega(x, y)$, например, $\omega = x^2 + y^2$, и будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(\omega(x, y))$.

Теорема (о нахождении интегрирующего множителя). *Пусть нашлась такая* $\omega(x, y) \in C^1(G^0)$, *что непрерывна функция*

$$\psi(\omega) = \frac{M'_y - N'_x}{\omega'_x N - \omega'_y M}, \tag{2.22}$$

тогда дифференциальное уравнение (2.1) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(\omega) = \exp\{\int \psi(\omega)\, d\omega\}$.

Доказательство. Будем искать μ как функцию ω.

В этом случае уравнение (2.21) примет вид

$$\frac{d\mu}{d\omega}\,\omega'_x N - \frac{d\mu}{d\omega}\,\omega'_y M = (M'_y - N'_x)\mu$$

или с учетом предположения (2.22) $\dfrac{d\mu(\omega)}{d\omega} = \psi(\omega)\mu(\omega)$.

Функция $\mu(\omega) = C\exp\{\int \psi(\omega)\, d\omega\}$ является общим решением этого линейного однородного уравнения. Свободную константу в нем обычно выбирают равной единице. $\square$

Искать на практике функцию $\omega(x,y)$ — дело в достаточной степени неблагодарное. Нужно выписать функцию ψ из (9.16), числитель которой отличен от нуля, иначе (2.1) было бы уравнением в полных дифференциалах, и подставлять на место частных производных ω'_x и ω'_y различные функции, стараясь подобрать их так, чтобы после приведения подобных членов ψ оказалась бы функцией только ω.

Первое, что нужно сделать на этом пути, проверить не будет ли интегрирующий множитель μ функцией только x или только y, т. е. выбрать $\omega = x$ или $\omega = y$ и посмотреть не будет ли в (9.16) $\dfrac{M'_y - N'_x}{N} = \psi(x)$ или $\dfrac{M'_y - N'_x}{-M} = \psi(y)$?

Возвращаясь для примера к исследованному в § 2, п. 5^0 уравнению с разделяющимися переменными в симметричной форме (2.11), отметим, что для него интегрирующим множителем в области G_0^0 является функция $\mu(x,y) = (g_2(x)h_2(y))^{-1}$, умножение на которую приводит к уравнению с разделенными переменными (2.15), являющемуся уравнением в полных дифференциалах в G_0^0. Теперь интеграл (2.16) получаем по любой из формул (2.19_1) или (2.19_2).

В заключение применим разработанный выше метод для того, чтобы проинтегрировать в квадратурах (найти в явном виде общее решение с точностью до не берущихся интегралов) важнейший класс обыкновенных дифференциальных уравнений — это линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

4^0. Линейные уравнения.

Df. *Уравнение, разрешенное относительно производной, вида*

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (p(x), q(x) \in C((a,b))), \tag{2.23}$$

называется линейным дифференциальным уравнением I порядка.

Очевидно, что уравнение (2.23) линейное (относительно y), поскольку его слагаемые содержат искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ в первой и нулевой степени.

Таким образом в линейном уравнении (1.1) $f(x,y) = q(x) - p(x)y$ и область существования и единственности $G = (a,b) \times \mathbb{R}^1$, так как в ней f вместе со своей частной производной по y непрерывна.

Найдем общее решение уравнения (2.23) и решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, используя интегрирующий множитель, для чего перепишем (2.23) в симметричной форме:

$$(p(x)y - q(x))\,dx + \,dy = 0. \tag{2.24}$$

Очевидно, в G существуют и непрерывны M'_y, N'_x. Будем искать μ как функцию x $(\omega(x,y) = x)$. Тогда в (9.16) $\psi(x) = p(x)$, и по теореме о нахождении интегрирующего множителя для $\forall\, x_0 \in (a,b)$ $\mu(x) = e^{P(x)} \neq 0$, где $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$. Домножая (2.23) на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$e^{P(x)}(p(x)y - q(x))\,dx + e^{P(x)}\,dy = 0.$$

При $y_0 = 0$ из (2.19_1) находим $U = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,ds + \int_{0}^{y} e^{P(x)}\,ds$ — интеграл уравнения (2.23).

Тогда равенство $e^{P(x)}y - \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,ds = C$ — это общий интеграл уравнения (2.24). Отсюда

$$y = \varphi(x,C) = e^{-P(x)}\Big(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,ds\Big)$$

— это классическое общее решение линейного уравнения (2.24), а

$$y(x,x_0,y_0) = \exp\Big\{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\Big\}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\Big\{\int_{x_0}^{s} p(t)\,dt\Big\}q(s)\,ds\Big)$$

— решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 или формула Коши.

Дополнение 3. Особенности решения уравнений первого порядка в симметричной форме.

Приведем подробные решения двух уравнений в симметричной форме с использованием интегрирующего множителя, включая решение различных задач Коши, позволяющих выделить характерные полные решения, а также "портреты" решений для этих уравнений.

Полезно предварительно постараться решить эти уравнения и поставленные для них задачи Коши самостоятельно, причем второе уравнение является также уравнением Бернулли относительно x.

1) Рассмотрим уравнение в симметричной форме (2.5):

$$(y\ln y - x^2y^5)\,dx + (x^2y^2\ln^{-1/2}y - 2x^3y^4 + 2x\ln y - x)\,dy = 0.$$

Функции M и N непрерывны в области $G = \{x \in \mathbb{R}^1,\ y > 1\}$, так как $\ln y$ должен быть положительным, и непрерывно дифференцируемы по x в ней.

Найдем множество нуль-граничных точек $\check{\partial}G^0$ уравнения (2.5).

Имеем: $M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm y^{-2}\ln^{1/2}y$. Подставляя эти функции в равенство $N(x,y) = 0$, устанавливаем, что $\underline{x = y^{-2}\ln^{1/2}y}$ является нуль-граничным решением (гладким), разделяющее G на две области единственености $G_1^0 = \{x < y^{-2}\ln^{1/2}y,\ y > 1\}$ и $G_2^0 = \{x > y^{-2}\ln^{1/2}y,\ y > 1\}$, а его график образует множество $\check{\partial}G^0$ из (2.3).

Функция $x = -y^{-2}\ln^{1/2}y$ нуль-граничным решением не является, поскольку на ней $N \neq 0$. Эта функция — изоклина с вертикальными отрезками поля направлений на ней для "перевернутого" уравнения $dx/dy = g(x,y)$.

Уравнение (2.5) не является уравнением в полных дифференциалах (см. гл. II, § 3, п. 1^0), так как $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 2 - \ln y + x^2y^4 - 2xy^2\ln^{-1/2}y \not\equiv 0$. Однако, в формуле (9.16) $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N\omega'_x - M\omega'_y} =$

$$\frac{2 - \ln y + x^2y^4 - 2xy^2\ln^{-1/2}y}{(x^2y^2\ln^{-1/2}y - 2x^3y^4 + 2x\ln y - x)\,\omega'_x - (y\ln y - x^2y^5)\,\omega'_y} = -\frac{1}{\omega},$$

если выбрать $\omega = x^2y^3$. А значит, по теореме о нахождении интегрирующего множителя из уравнения $d\mu/d\omega = -\omega^{-1}\mu$ находим интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \omega^{-1} = x^{-2}y^{-3}$.

Умножим обе части уравнения (2.5) на $\mu(x,y) = x^{-2}y^{-3}\,(x,y \neq 0)$, получая уравнение в полных дифференциалах

$$(x^{-2}y^{-2}\ln y - y^2)dx + (y^{-1}\ln^{-1/2}y - 2xy + 2x^{-1}y^{-3}\ln y - x^{-1}y^{-3})dy = 0.$$

Но при умножении теряется решение $\underline{x(y) \equiv 0}$ $(y > 1)$.

Имеем: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M \Rightarrow U(x,y) = \displaystyle\int (x^{-2}y^{-2}\ln y - y^2)\,dx + C(y) =$ $-x^{-1}y^{-2}\ln y - xy^2 + C(y)$.

Из $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N$ находим $C'(y) = y^{-1}\ln^{-1/2} y \Rightarrow C(y) = 2\ln^{1/2} y \Rightarrow$ функция $U(x,y) = 2\ln^{1/2} y - x^{-1}y^{-2}\ln y - xy^2$ — интеграл.

Ответ: $x(y) \equiv 0$, $x = y^{-2}\ln^{1/2} y$ — нуль-граничное решение,
$2\ln^{1/2} y - x^{-1}y^{-2}\ln y - xy^2 = C$ — общий интеграл.

Для удобства решения задач Коши, которые будут поставлены ниже, найдем классическое общее решение $x = \psi(y, C)$.

Имеем: $x^2 - 2(\ln^{1/2} y - C/2)y^{-2}x + y^{-4}\ln y = 0 \Leftrightarrow$
$\underline{x_{\mp}(y,C) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - C/2 \mp \sqrt{D})}$, где $D = C^2/4 - C\ln^{1/2} y \geq 0$.

Если $C = 0$, то получаем граничное решение $x = y^{-2}\ln^{1/2} y$.

Пусть $C \neq 0$. Для $\forall\, y_* > 1$ условие $D = 0 \Leftrightarrow C_* = 4\ln^{1/2} y_* > 0$ $\Leftrightarrow x_{\mp}(y_*, C_*) = -y_*^{-2}\ln^{1/2} y_*$ выделяет точку, лежащую на вышеупомянутой изоклине $x = -y^{-2}\ln^{1/2} y$, и являющуюся вершиной соответствующей "лежачей параболы".

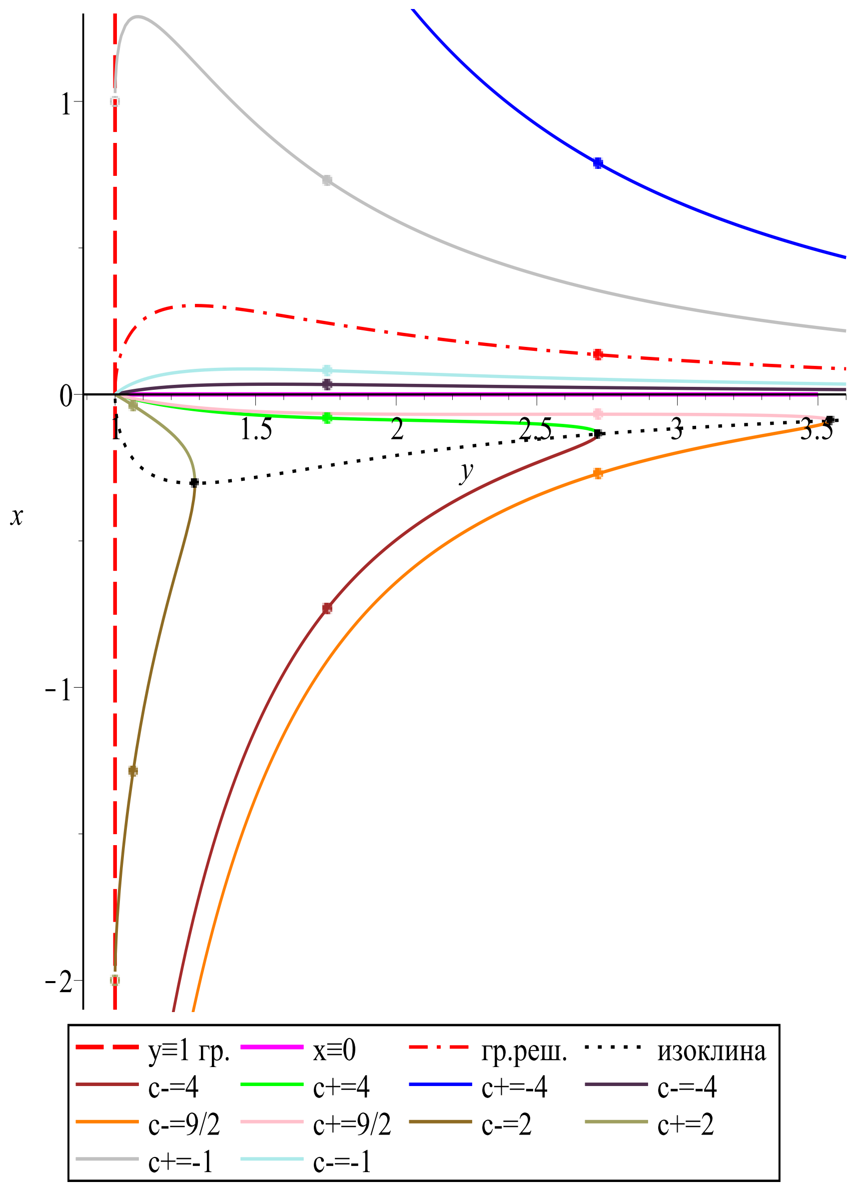
Условие $D > 0 \Leftrightarrow C(4\ln^{1/2} y - C) < 0 \Leftrightarrow y \in \{(1, +\infty)$ при $C < 0$, $(1, e^{C^2/16})$ при $C > 0\}$ задает максимальные интервалы существования классических решений $x_-(y,C)$ и $x_+(y,C)$.

Оценим области изменения функций $x_{\mp}(y,C)$ $(x_- \leq x_+)$.

Пусть $C < 0$. Тогда $x_{\mp}(y,C) - y^{-2}\ln^{1/2} y = -C/2 \mp (C^2/4 - C\ln^{1/2} y$. Поэтому графики решений x_+ лежат выше граничного решения, т. е. в области G_2, а графики x_- лежат в G_1. Кроме того, $x_-(y,C) > 0$ при $y > 1$, так как $\ln^{1/2} y - C/2 > \sqrt{D} \Leftrightarrow \ln y > 0$; $x_+(1,C) = -C$, $x_-(1,C) = 0$ и $x_{\mp}(y,C) \to 0$ при $y \to +\infty$.

Пусть теперь $C > 0$. Тогда $x_+(y,C) < 0$ при $y > 1$, так как $C/2 - \ln^{1/2} y > \sqrt{D} \Leftrightarrow \ln y > 0$ $(D > 0 \Leftrightarrow C/4 - \ln^{1/2} y > 0)$; $x_+(1,C) = 0$, $x_-(1,C) = -C$. Следует понимать, что разрешимость общего интеграла относительно x приводит к ограничениям на правый конец максимального интервала существования. Если бы удалось разрешить общий интеграл относительно y, то для $\forall\, C > 0$ решение $y = y(x,C)$ было бы определено при $x \in (-C, 0)$.

Остается заметить, что частное решение $x(y) \equiv 0$ "разделяет" решения с $C < 0$ и $C > 0$.



> # $x(y,c\mp)=y^{-2}\cdot\left(\ln(y)^{\frac{1}{2}}-\frac{c}{2}\mp \mathrm{sqrt}\left(\frac{c^{\wedge}2}{4}-c\cdot\ln(y)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$

Перейдем к решению конкретных задач Коши, придерживаясь, как обычно, следующей схемы. Сначала начальные данные x_0, y_0 подставляем в общий интеграл и находим вещественную константу C_0, затем вычисляем $x_\mp(y_0, C_0)$ и выбираем знак перед дискриминантом D, при котором $x_-(y_0, C_0)$ или $x_+(y_0, C_0)$ совпадает с x_0. После этого выписываем полученное полное решение задачи Коши и его максимальный интервал существования (см. гл. I, § 1, п. 8^0).

1) $x_0 = -(3 + 2^{3/2})e^{-1/8}/4,\ y_0 = e^{1/16}$.

Тогда $2(1/4) + 4(3 + 2^{3/2})^{-1}/16 + (3 + 2^{3/2})/4 = C_0 \ \Rightarrow\ C_0 = 2 \ \Rightarrow$ $x_-(y, 2) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 1 - (1 - 2\ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((1 - 2\ln^{1/2} y)^{1/2} + 1)^2/2}$, $\ y \in (1, e^{1/4})$.

2) $x_0 = -(3 - 2^{3/2})e^{-1/8}/4,\ y_0 = e^{1/16}$.

Тогда $2(1/4) + 4(3 - 2^{3/2})^{-1}/16 + (3 - 2^{3/2})/4 = C_0 \ \Rightarrow\ C_0 = 2 \ \Rightarrow$ $x_+(y, 2) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 1 + (1 - 2\ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((1 - 2\ln^{1/2} y)^{1/2} - 1)^2/2}$, $\ y \in (1, e^{1/4})$.

При этом решения из 1) и 2) при $D = 0$ соприкасаются в точке $(-e^{-1/2}/2, e^{1/4})$, лежащей на изоклине $x = -y^{-2}\ln^{1/2} y$.

3) $x_0 = 9e^{-9/8}/4,\ y_0 = e^{9/16}$.

Тогда $2(3/4) - (4/9)(9/16) - (9/4) = C_0 \ \Rightarrow\ C_0 = -1 \ \Rightarrow$ $x_-(y, -1) = y^{-2}(\ln^{1/2} y + 1/2 - (1/4 + \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = y^{-2}((1 + 4\ln^{1/2} y)^{1/2} + 1)^2/4}$, $\ y \in (1, +\infty)$.

4) $x_0 = e^{-9/8}/4,\ y_0 = e^{9/16}$.

Тогда $2(3/4) - 4(9/16) - (1/4) = C_0 \ \Rightarrow\ C_0 = -1 \ \Rightarrow$ $x_+(y, -1) = y^{-2}(\ln^{1/2} y + 1/2 + (1/4 + \ln^{1/2} y)^{1/2})$, или $\underline{x = y^{-2}((1 + 4\ln^{1/2} y)^{1/2} - 1)^2/4}$, $\ y \in (1, +\infty)$.

Приведем еще несколько задач Коши, которые указаны выше на "портрете" решений уравнения (2.5).

5) $x_0 = -9e^{-9/8}/4,\ y_0 = e^{9/16}$. Тогда $x_-(y, 4) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 2 - 2(1 - \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((1 - \ln^{1/2} y)^{1/2} + 1)^2}$, $\ y \in (1, e)$.

6) $x_0 = -e^{-9/8}/4,\ y_0 = e^{9/16}$. Тогда $x_+(y, 4) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 2 + 2(1 - \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((1 - \ln^{1/2} y)^{1/2} - 1)^2}$, $\ y \in (1, e)$.

7) $x_0 = (11/4 - \sqrt{7})e^{-9/8},\ y_0 = e^{9/16}$. Тогда $x_-(y, -4) = y^{-2}(\ln^{1/2} y + 2 - 2(1 + \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = y^{-2}((1 + \ln^{1/2} y)^{1/2} - 1)^2}$, $\ y \in (1, +\infty)$.

8) $x_0 = (3 + 2^{3/2})e^{-2},\ y_0 = e$. Тогда $x_+(y, -4) = y^{-2}(\ln^{1/2} y + 2 + 2(1 + \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = y^{-2}((1 + \ln^{1/2} y)^{1/2} + 1)^2}$, $\ y \in (1, +\infty)$.

9) $x_0 = -2e^{-2}$, $y_0 = e$.
Тогда $x_-(y, 9/2) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 9/4 - (81/16 - (9/2)\ \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((9 - 8\ln^{1/2} y)^{1/2} + 3)^2/8}$, $y \in (1, e^{81/64})$.

10) $x_0 = -e^{-2}/2$, $y_0 = e$.
Тогда $x_+(y, 9/2) = y^{-2}(\ln^{1/2} y - 9/4 + (81/16 - (9/2)\ \ln^{1/2} y)^{1/2})$ или $\underline{x = -y^{-2}((9 - 8\ln^{1/2} y)^{1/2} - 3)^2/8}$, $y \in (1, e^{81/64})$.

При этом решения из 5) и 6) при $D = 0$ соприкасаются в точке $(-e^{-2}, e)$, а из 9) и 10) — в точке $(-9e^{81/32}/8, e^{81/64})$.

11) $x_0 = e^{-2}$, $y_0 = e$. Тогда $C_0 = 0$ и получаем нуль-граничное решение $\underline{x = y^{-2}\ln^{1/2} y}$, $y \in (1, +\infty)$.

2) Рассмотрим уравнение в симметричной форме (2.6):

$$3x^{1/2}(2y-1)y^2\,dx + (8y - 2 - 4x^{3/2}y^2)\,dy = 0,$$

для которого согласно (2.3) $\widehat{G}^0 = G^0 \cup \breve{\partial} G^0 \cup \breve{\partial} G^0$, где множество нуль-граничных точек $\breve{\partial} G^0 = \{(0, 1/4)\} \cup \{(2^{2/3}, 1/2)\}$, поскольку только в этих точках функции M и N одновременно обращаются в нуль, множество граничных точек $\breve{\partial} G^0 = \{x = 0,\ y \in \mathbb{R}^1 \backslash \{1/4\}\}$ и область $G^0 = \{(x, y)\colon\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}^1\} \backslash \{(2^{2/3}, 1/2)\}$.

Отметим, что функции M и N имеют непрерывные частные производные по y на всем множестве $\widehat{G}^0$, а также, что кривая $8y - 2 - 4x^{3/2}y^2 = 0$, на которой $N(x, y) = 0$, является изоклиной для вертикальных отрезков поля направлений.

Уравнение (2.6) не является уравнением в полных дифференциалах, так как $\partial M/\partial y - \partial N/\partial x = 6x^{1/2}(4y-1)y \not\equiv 0$. Однако, при выборе $\omega(x, y) \equiv x$ в формуле (9.16) $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} = -2\,\dfrac{4y-1}{(2y-1)y}$.

Поэтому $\dfrac{d\mu}{dy} = -2\,\dfrac{4y-1}{(2y-1)y}\,\mu$, откуда $\mu = \dfrac{1}{(2y-1)^2y^2}$.

Умножая исходное уравнение на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах $\dfrac{3x^{1/2}}{2y-1}\,dx + \left(\dfrac{8y-2}{(2y-1)^2y^2} - \dfrac{4x^{3/2}}{(2y-1)^2)}\right)dy = 0.$

Но при умножении теряются решения $\underline{y \equiv 1/2}$ $(x \neq 2^{2/3})$ и $\underline{y \equiv 0}$.

Имеем: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M \ \Rightarrow\ U(x, y) = 3\displaystyle\int x^{1/2}(2y-1)^{-1}\,dx + C(y) =$ $2x^{3/2}(2y-1)^{-1} + C(y)$; $\quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N \ \Rightarrow\ C'(y) = \dfrac{8y-2}{(2y-1)^2y^2}$, откуда $C(y) = 2y^{-1} - 4(2y-1)^{-1}$.

В результате функция $U(x,y) = \dfrac{2x^{3/2}}{2y-1} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{2y-1}$ — интеграл.

Ответ: $y(x) \equiv 0,\ x > 0;\ \ y(x) \equiv 1/2,\ x \in (0, 2^{2/3})$ или $x > 2^{2/3}$; $\dfrac{x^{3/2}}{2y-1} - \dfrac{1}{y(2y-1)} = C \ \Leftrightarrow\ x^{3/2}y - 1 = Cy(2y-1)$.

Отметим, что приведенная в ответе формула общего интеграла описывает решения, графики которых расположены в трех различных областях, у которых $x > 0$, а y принадлежит одному из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, +\infty)$. Так произошло потому, что для получении уравнения в полных дифференциалах пришлось делить на $y(2y-1)$, выделяя при этом три частных решения.

Для уравнения (2.6) имеется возможность выписать классическое общее решение как в виде $x = \psi(y, C)$, так и в виде $y = \varphi(x, C)$, и найти полные решения задач Коши так же в одном из двух видов. При этом следует обратить внимание на причины того, что графики полных решений $x = \psi_0(y)$ и $y = \varphi_0(x)$ одной и той же задачи Коши могут не совпадать, а также — на различия в примыкании решений к граничным точкам и к нуль-граничной точке.

Итак, $\psi(y, C) = (C(2y-1) + y^{-1})^{2/3}$ при $C(2y-1) + y^{-1} > 0$.

Или $y = x^{-3/2}$, если в общем интеграле $C = 0$, а если $C \neq 0$, то $\varphi_{\mp}(x, C) = \dfrac{x^{3/2} + C \mp ((x^{3/2} + C)^2 - 8C)^{1/2}}{4C}$ при $(x^{3/2} + C)^2 \geq 8C$.

Перейдем к решению конкретных задач Коши с н. д. (x_0, y_0).

1) $(2^{2/3}, -1/8)$, 2) $(1, (7 + \sqrt{113})/32)$. Тогда $C = -8$.

1_x,2_x) $8(2y-1) + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty, (1-\sqrt{2})/4) \cup (0, (1+\sqrt{2})/4)$.

1_x) $\underline{x = (-8(2y-1) + y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (-\infty, (1-\sqrt{2})/4) \ni y_0$.

2_x) $\underline{x = (-8(2y-1) + y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (1/2, (1+\sqrt{2})/4) \ni y_0$, так как нуль-граничная точка $(2^{2/3}, 1/2)$ принадлежит как интервалу $((0, (1+\sqrt{2})/4)$, так и графику функции $x = \psi(y, -8)$.

1_y) $\varphi_{\mp}(2^{2/3}, -8) = (-6 \mp 10)/(-32) \ \Rightarrow\ y = \varphi_+(x, -8) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2} - 8 + ((x^{3/2} - 8)^2 + 64)^{1/2})/(-32),\quad x \in (0, +\infty)}$.

2_y) $\varphi_{\mp}(1, -8) = (-7 \mp \sqrt{113})/(-32) \ \Rightarrow\ y = \varphi_-(x, -8) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2} - 8 - ((x^{3/2} - 8)^2 + 64)^{1/2})/(-32)}$, $x \in (0, 2^{2/3}) \ni x_0$, так как $\varphi_-(2^{2/3}, -8) = 1/2$.

3) $(2^{2/3}, 1/8)$, 4) $(3^{2/3}, (11 + \sqrt{57})/32)$. Тогда $C = 8$.

3_x,4_x) $8(2y-1) + y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y \in (0, 1/4) \cup (1/4, +\infty)$.

3_x) $\underline{x = (8(2y-1)+y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (0,1/4) \ni y_0$.

4_x) $\underline{x = (8(2y-1)+y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (1/2,+\infty) \ni y_0$ $(x(1/2,8) = 2^{2/3})$.

3_y,4_y) Здесь $\varphi_{\mp}(x,8) = (x^{3/2}+8 \mp (x^3+16x^{3/2})^{1/2})/32$, поэтому $y_-(0,8) = y_+(0,8) = 1/2$, т. е. графики обоих решений попадают на границу области в нуль-граничную точку $(0,1/4)$.

3_y) $\varphi_{\mp}(2^{2/3},8) = (10 \mp 6)/32 \;\Rightarrow\; y = \varphi_-(x,8) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2}+8-((x^{3/2}+8)^2-64)^{1/2})/32}$, $x \in (0,+\infty)$.

4_y) $\varphi_{\mp}(3^{2/3},8) = (11 \mp \sqrt{57})/32 \;\Rightarrow\; y = \varphi_+(x,8) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2}+8+((x^{3/2}+8)^2-64)^{1/2})/32}$, $x \in (2^{2/3},+\infty) \ni x_0$, так как $\varphi_-(2^{2/3},8) = 1/2$.

5) $(2^{2/3},9/8)$, 6) $((82/45)^{2/3},5/8)$. Тогда $C = 8/9$.

5_x,6_x) $8(2y-1)/9+y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y > 0$. Но $\psi(1/2,5/8) = 2^{2/3}$ и $9/8 > 5/8 > 1/2$, поэтому обе пары н. д. задают одно и то же полное решение задачи Коши $\underline{x = (8(2y-1)/9+y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (1/2,+\infty)$.

5_y,6_y) $\varphi_{\mp}(x,8/9) = (x^{3/2}+8/9 \mp ((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)$ и $\varphi_{\mp}((8/3)6^{-1/3},8/9) = 3/4$ $(\varphi'_{\mp}(x,8/9) = \infty$ при $x = (8/3)6^{-1/3})$, т. е. графики решений соприкасаются с изоклиной для вертикальных отрезков поля направлений в точке $((8/3)6^{-1/3},3/4)$.

5_y) $\varphi_{\mp}(2^{2/3},8/9) = (26 \mp 10)/32 \Rightarrow y = \varphi_+(x,8/9) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2}+8/9+((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)},$ $x \in ((8/3)6^{-1/3},+\infty) \ni x_0$.

6_y) $\varphi_{\mp}((82/45)^{2/3},8/9) = (122/5 \mp (22/5))/32 \Rightarrow y = \varphi_-(x,8/9)$ $\Leftrightarrow \underline{y = (x^{3/2}+8/9+((x^{3/2}+8/9)^2-64/9)^{1/2})/(32/9)},$ $x \in ((8/3)6^{-1/3},2^{2/3}) \ni x_0$, так как $\varphi_-(2^{2/3},8/9) = 1/2$.

Приведем еще несколько задач Коши, которые указаны ниже на "портрете" решений уравнения (2.6).

7) $(1,1/3)$. Тогда $C = 6$.

7_x) $6(2y-1)+y^{-1} > 0 \Leftrightarrow y > 0$ и $\psi(1/2,6) = 2^{2/3}$, следовательно $\underline{x = (6(2y-1)+y^{-1})^{2/3}}$, $y \in (0,1/2) \ni y_0$.

7_y) $\varphi_{\mp}(1,6) = (7 \mp 1)/24 \;\Rightarrow\; y = \varphi_+(x,6) \Leftrightarrow$ $\underline{y = (x^{3/2}+6+((x^{3/2}+6)^2-48)^{1/2})/24}$, $x \in ((4\sqrt{3}-6)^{2/3},2^{2/3}) \ni x_0$, поскольку $\varphi_+((4\sqrt{3}-6)^{2/3},6) = \sqrt{3}/6$ и $\varphi'_+(x,6) = \infty$ при $x = (4\sqrt{3}-6)^{2/3}$, т. е. график решения соприкасается с изоклиной для вертикальных отрезков поля в точке $((4\sqrt{3}-6)^{2/3},\sqrt{3}/6)$.

8_y) $(2^{1/3},1/2)$. Тогда $\underline{y(x) \equiv 1/2}$, $x \in (0,2^{2/3}) \ni x_0$.

> $y(x, c\mp) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + c \mp \mathrm{sqrt}\left(\left(x^{\frac{3}{2}} + c\right)^2 - 8\,c\right)}{4\,c}$