

§ 1 Оценка приращения дифференциального отображения

Утверждение 1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Тогда формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

не работает.

Е.г. Пусть

$$f(t) := (\cos t, \sin t), b - a = 2\pi$$

Теорема 2 (об оценке приращения отображения). Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, G — выпуклое, f — дифференцируема,

$$\forall x \in G \quad \|f'(x)\| \leq M$$

Тогда $\forall a, b \in G \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\|$

□ «Окружим» исходную функцию:

$$F = \psi \circ f \circ \varphi$$

где

$$\begin{array}{lll} \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m & \varphi(t) := t(b - a) + a, & t \in [0, 1] \\ \psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} & \psi(y) := \langle y, \ell \rangle, & \ell = f(b) - f(a) \end{array}$$

Заметим, что F — обычная вещественнозначная функция. Так что для неё работает формула Лагранжа:

$$\exists c \in [0, 1]: F(1) - F(0) = F'(c)(1 - 0) = F'(c)$$

Тогда из свойств нормы (по ходу дела обозначим $\varphi(c)$ за x):

$$\|F'(c)\| = \|\psi'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(c)\| \leq \|\psi'(f(x))\| \cdot \|f'(x)\| \cdot \|\varphi'(c)\|$$

Здесь тонкость в обозначениях. Производные — вроде матрицы, поэтому их нормы — что-то странное на первый взгляд. На самом деле смысл немного иной.

$$dL(x, h) = f'(x) \cdot h$$

Таким образом, дифференциал — неплохое линейное отображение. А под «нормой производной» имеется в виду норма соответствующего линейного отображения.

Теперь давайте что-нибудь скажем про эти нормы.

1. $\varphi'(t) = (b - a) \Rightarrow \|\varphi'(c)\| = \|b - a\|$
2. $\psi(y) = \langle y, \ell \rangle$, $\|\psi\| = \|\ell\|$

Так что

$$\|F'(c)\| \leq M \cdot \|\ell\| \cdot \|b - a\|$$

С другой стороны:

$$F(1) - F(0) = \psi(f(b)) - \psi(f(a)) = \langle f(b), \ell \rangle - \langle f(a), \ell \rangle = \langle \ell, \ell \rangle = \|\ell\|^2$$

В итоге, совмещая оба выражения, приходим к утверждению теоремы. ■

§ 2 Частные производные высших порядков

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, существуют производные k -го порядка. Тогда

$$\partial_{i_1, \dots, i_{k+1}}^{k+1} f(x) := \partial_{i_{k+1}} (\partial_{i_1, \dots, i_k}^k f)(x)$$

Замечание 1. $C^p(G)$ — класс функций, определённых в G с непрерывной производной до p -го порядка включительно. Функции из C^1 ещё называются гладкими.

Теорема 1 (Зависимость производных p -го порядка от перестановки переменных). Пусть $f \in C^p(G)$, $x \in G$. При этом

$$\begin{aligned} i &= \{i_1, \dots, i_p \mid i_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \{j_1, \dots, j_p \mid j_k \in \{1, \dots, n\}\} \\ j &= \pi(i) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \partial_i^p f(x) = \partial_j^p f(x)$$

Замечание 1. Тут важно, что есть целая окрестность. Одной точки не хватит.

§ 3 «Многомерный» дифференциал высоких порядков

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^p(G)$

$$d^p f(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

Утверждение 1. Если частные производные можно переставлять, то

$$d^p f(x) = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0 \\ \sum \alpha_i = p}} \frac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

§ 4 Формула Тейлора для функций многих переменных

Теорема 1. Пусть $f \in C^p(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $a \in G$. Пусть также $h \in \mathbb{R}^n$: $a + h \in G$. Тогда

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(a, h) + R_p(h)$$

Остаток $R_p(h)$ можно представить несколькими способами:

1. В форме Пеано: $R_p(h) = o(\|h\|^p)$
2. В форме Лагранжа: $R_p(h) = \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(a + \theta h, h)$, $\theta \in (0, 1)$

§ 5 Экстремумы

Определение 1. Пусть $f: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in G$. Тогда говорят, что f имеет в a максимум (нестрогий), если

$$\exists U(a): \forall x \in U \quad f(x) \leq f(a)$$

Когда неравенство строгое, а окрестность проколота, то максимум — строгий. Для минимума нужно \geq .

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). Пусть a внутренняя точка $G \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(a)$. Тогда если f имеет в a экстремум, то

$$df(a) = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad \partial_i f(a) = 0$$

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума). Пусть $a \in G \subset \mathbb{R}^n$, a — внутренняя точка, $f \in C^2(a)$.

1. $df(a) = 0, d^2f(a) > 0 \Rightarrow f$ имеет в a \min
2. $df(a) = 0, d^2f(a) < 0 \Rightarrow f$ имеет в a \max
3. $df(a) = 0, d^2f(a) \leq 0 \Rightarrow$ ничего нет
4. $df(a) = 0, d^2f(a) \leq 0 \Rightarrow f$ не имеет в a \min
5. $df(a) = 0, d^2f(a) \geq 0 \Rightarrow f$ не имеет в a \max

§ 6 Понятие о неявной функции

Определение 1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

Пусть $a = (x_0, y_0)$ удовлетворяет 1, а U — окрестность a : $U = U_x \times U_y$. Тогда будем говорить, что уравнение 1 определяет неявную функцию f в U , если

$$\forall x \in P \exists! y \in Q: F(x, y) = 0 \quad (y = f(x))$$

Теорема 1 (О неявной функции). Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(x_0, y_0)$, а $a = (x_0, y_0)$:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда $\exists P(x_0), Q(y_0)$: в $U = P \times Q$ уравнение 1 задаёт неявную функцию $f: P \rightarrow Q$. При этом

$$f \in C^1 \wedge f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

□

1. (Доказательство существования)

Рассмотрим $\varphi(y) = F(x_0, y)$. Пусть НУО $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда

$$\exists U_\varepsilon(x_0, y_0): \forall x, y \in U \quad F'_y(x, y) > 0$$

Обозначим соответствующие проекции U (шар) на координатные оси за U_x, U_y . Получается, что $\varphi \uparrow U_y = (y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists V_1(x_0): \forall x \in V_1 F(x, y_0 + \varepsilon) &> 0 \\ \exists V_2(x_0): \forall x \in V_2 F(x, y_0 - \varepsilon) &< 0 \\ P &= V_1 \cap V_2 \end{aligned}$$

Тогда из теоремы Больцано-Коши и монотонности φ

$$\forall x \in P \exists! y \in Q = U_y: F(x, y) = 0$$

В итоге получилось определение неявной функции.

2. Непрерывность в (x_0, y_0) вроде очевидна, мы же каждому x из P сопоставили 1 y из Q . Принадлежность классу C можно установить проведя аналогичные рассуждения для $x \in P(x_0)$
3. С гладкостью что-то странное. Можно наверное сделать как в Зориче.
4. $F(x, f(x)) \equiv 0 \Rightarrow F'_x \cdot 1 + F'_y f'(x) = 0$

■

§ 7 Полнота пространства \mathbb{R}^n

§ 8 Теорема о сжимающем отображении

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда отображение $T: X \rightarrow X$ называется сжимающим, если

$$\exists C \in (0, 1) : \forall x', x'' \rho(T(x'), T(x'')) \leq C \cdot \rho(x', x'')$$

Теорема 1 (Банах). Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а отображение $T: X \rightarrow X$ — сжимающее. Тогда $\exists! x_* \in X: Tx_* = x_*$ (неподвижная точка).

Ещё часто ссылаются на следующий факт, появляющийся в процессе доказательства:

$$\forall x_0 \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x_*$$

§ 9 Метод Ньютона

ПОТОМ

§ 10 Теорема об обратном отображении(формулировка)

Пусть $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое. Порассуждаем, когда может существовать F^{-1} .

Рассмотрим, например, линейное отображение.

[illegible]

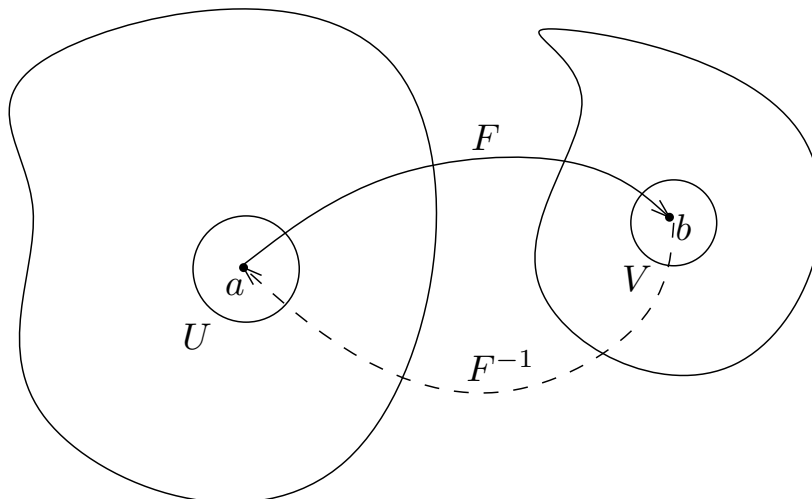
Понятно, что в таком случае задача поиска обратного отображения сводится к поиску обратной матрицы. Тогда из линала ясно, что для того, чтобы у нас всё вышло, нужно

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

Теперь попытаемся обобщить на остальные функции.

Пусть $a \in G$, $b = F(a)$

$$(?)\exists U(a), V(b) : F : U \leftrightarrow V$$



$$\Delta F = F(x) - F(a) = y - b = \Delta y \quad (1)$$

$$\Delta F = F'(a)dx + o(dx) \quad (2)$$

$$dF(a) = dy(b) \quad (3)$$

Условие разрешимости $\mathbf{3} - \det(F'(a)) \neq 0$. Утверждается, что $\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}$
Соответственно, формулировка

Теорема 1. Пусть $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $b = F(a)$. Пусть ещё $F \in C^1$, $\det(F'(a)) \neq 0$
Тогда

$$\exists U(a), V(b) : F: U \leftrightarrow V$$

$$\exists F^{-1}V \rightarrow U, F^{-1} \in C^1$$

§ 11 Доказательство теоремы об обратимости

□ (Теорема об обратимости отображения) Введём обозначения:

$$F'(a) = \Gamma$$

$$\Phi(x) = x - \Gamma^{-1}(F(x) - y)$$

Нетрудно заметить, что x — неподвижная точка Φ (что $\Leftrightarrow F(x) = y$). Очень хотелось бы подогнать всё под теорему Банаха (0.8.1). Тогда отображение в окрестности a будет взаимно-однозначным.

1. Сначала оценим $\|\Phi'\|$.

$$\Phi'(x) = E - \Gamma^{-1}(F'(x)) = \Gamma^{-1}(F'(a) - F'(x))$$

Можно норму оценить

$$\|\Phi'(x)\| = \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|F'(a) - F'(x)\|$$

Последний множитель явно $\xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (так как $F \in C^1$) Тогда и $\|\Phi'(x)\| \rightarrow 0$. А значит найдётся $U_\varepsilon(a)$: $\|\Phi'(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

Тогда по теореме 0.1.2

$$x, x' \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$$

Собственно, почти победа. Осталось лишь выбрать внутри U_ε компакт $\overline{U_{\varepsilon_1}}$ (иначе множество не очень полное).

2. Теперь покажем, что

$$\exists \overline{U}: \Phi(U) \subset U$$

Попутно примем $\|y - b\| < \delta$, это потом поможет доказать непрерывность.

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - a\| &= \|x - a - \Gamma^{-1}(F(x) - y)\| \leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot \|\Gamma(x - a) - F(x) + y + b - b\| \\ &\leq \|\Gamma^{-1}\| \cdot (\underbrace{\|F(x) - F'(a)(x - a) - F(a)\|}_{\alpha} + \|y - b\|) \end{aligned}$$

Выберем произвольный ε : $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Однако мы ещё можем подкрутить ε_1 .

$$\exists U_{\varepsilon_1}: \frac{\|\alpha\|}{\|x - a\|} < \frac{1}{2\|\Gamma^{-1}\|}$$

Это следует из формулы Тейлора (0.4.1), а применять её можно, так как шар — выпуклое множество. Ещё выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|}$. Там правда ε , а не ε_1 .

Тогда цепочка неравенств выше преобразуется к такому виду

$$\dots < \|\Gamma^{-1}\| \cdot \frac{\|x - a\|}{2\|\Gamma^{-1}\|} + \frac{\varepsilon}{2\|\Gamma^{-1}\|} \cdot \|\Gamma^{-1}\|$$

А теперь положим $\|x - a\| \leq \varepsilon$ (неравенство нужно нестрогое для полноты). Тогда

$$x \in \overline{U_\varepsilon}(a) \Rightarrow \Phi(x) \in U_\varepsilon(a) \subset \overline{U_\varepsilon}(a)$$

А теперь по теореме Банаха

$$\exists! x_0 \in \overline{U_\varepsilon}(a) : \Phi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow F(x_0) = y_0$$

Видимо, осталось пересечь окрестность a с прообразом $V(b) : U = F^{-1}(V) \cap U_\varepsilon(a)$

3. Заодно получилась и непрерывность:

$$\forall U \exists V_\delta(b) : F^{-1}(V_\delta) \subset U_\varepsilon$$

■

§ 12 Теорема о дифференцируемости обратного отображения

Теорема 1 (о дифференцируемости F^{-1}). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $F : U \leftrightarrow V$. Пусть также F — дифференцируемо в $a \in U$, $F(a) = b$, $\det F'(a) \neq 0$. Тогда F^{-1} дифференцируемо в b .

□ То, что есть обратное отображение, доказали выше. Пусть $y = F(x)$. Обозначим: $h = x - a$, $k = y - b$. Отображение биективно, значит $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$. Из дифференцируемости F

$$k = y - b = F(x) - F(a) = Ah + \alpha\alpha = o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

$A = F'(a) \neq 0$, следовательно $\exists A^{-1}$

$$A^{-1}k = A^{-1}Ah + A^{-1}\alpha \Rightarrow \Delta F^{-1} = h = A^{-1}k - A^{-1}\alpha$$

Докажем, что $-A^{-1}\alpha =: \beta = o(k) \quad (k \rightarrow 0)$

$$\beta \leq \frac{-\alpha}{\|k\|} = \frac{-\alpha}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

Покажем, что последний член — ограничен

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|h\|}{\|Ah + \alpha\|} \leq \frac{\|h\|}{\| \|Ah\| - \|\alpha\| \| \|} = \frac{1}{\left| \frac{\|Ah\|}{\|h\|} - \frac{\|\alpha\|}{\|h\|} \right|}$$

А последнее выражение ограничено при $\|h\| < \delta$

■

Следствие. $(F^{-1})'(b) = (F'(a))^{-1}$

§ 13 Теорема о гладкости обратного отображения

Теорема 1. Пусть $F: U \leftrightarrow V$, биективна, $\in C^p$. Пусть к тому же $\det F'(x) \neq 0$. Тогда $F^{-1} \in C^p$

□ Введём обозначения (оно всё существует по предыдущим теоремам хоть где-то)

$$F'(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = (a_{ij}) = A$$

$$(F^{-1})'(y) = \left(\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^n = (b_{ij}) = B$$

Вполне ясно, что $B = A^{-1}$. Из алгебры $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$ (здесь \mathcal{A} — алгебраическое дополнение).

Заметим, что из последнего выражения следует, что b_{ij} — рациональная функция от $\{a_{lk}\}$. Следовательно, $\widehat{b_{ij}} = b_{ij}(a_{11}, \dots, a_{kl}, \dots, a_{nn}) \in C^\infty$. С другой стороны

$$b_{ij}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(y) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_j}(F(x)) \Leftrightarrow b_{ij}(y) = \widehat{b_{ij}}(x)$$

Так что $\widehat{b_{ij}} = b_{ij} \circ F$.

Дальше немного магии. Введём ещё одну функцию

$$\overline{b_{ij}}(x) = b_{ij}(a_{11}(x), \dots, a_{kl}(x), \dots, a_{nn}(x))$$

Заметим, что каждая $a_{ij}(x) \in C^{p-1} \Rightarrow \overline{b_{ij}} \in C^{p-1}$. Хорошо, тогда

$$b_{ij}(y) = (\overline{b_{ij}} \circ F^{-1})(y)$$

Раньше доказали, что $F^{-1} \in C^0$. Теперь разматываем цепочку дальше:

$$F^{-1} \in C^i \Rightarrow \overline{b_{ij}} \circ F^{-1} \in C^i \Rightarrow b_{ij} \in C^i$$

Значит, частные производные F^{-1} принадлежат C^i . Тогда сама $F^{-1} \in C^{i+1}$. Таким бобром мы доберёмся до C^p . Дальше не выйдет, так как не хватит гладкости $\overline{b_{ij}}$. ■

§ 14 Гладкая зависимость корней многочлена от его коэффициентов

Теорема 1. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет n корней (x_j^0) , $x_j^0 \in \mathbb{R}$, таких что $\forall i, j \ x_i^0 \neq x_j^0$. Тогда

$$x_i = x_i(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C^\infty$$

□ Пусть $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Вспомним теорему Виета (из алгебры)

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n x_1 \cdots x_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \sum_i \prod_{j \neq i} x_j \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= (-1) \sum_i x_i \end{aligned}$$

Рассмотрим P как отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$.

$$P'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \prod_{i \neq 1} x_i & (-1)^n \prod_{i \neq 2} x_i & \cdots & (-1)^n \prod_{i \neq n} x_i \\ \dots\dots\dots & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\det(F')$. Этот определитель можно рассмотреть как многочлен $\in R[x_1, \dots, x_n]$. Его степень не превосходит $0+1+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что если хоть какая-то пара столбцов равны, то определитель равен нулю. Так что $\det(F')$ делится на всевозможные многочлены вида $x_i - x_j$. А их как раз $\frac{n(n-1)}{2}$ и они неприводимые. Следовательно,

$$\det(F')(x_1, \dots, x_n) = C \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

А значит при условии неравенства корней он ненулевой. ¹

Дальше можно воспользоваться теоремой о гладкости обратного отображения. ■

§ 15 Теорема о неявном отображении

¹Этого, конечно не было в курсе алгебры, но там не используется ничего страшнее теоремы о делении с остатком. Вообще доказать бы надо, но лень.