

ТЕОРИЯ МАТЕМАТИКА

и тщетные попытки понять что-нибудь из вышеперечисленного

Лектор: Р. С. Пусев
Записал :taxus

27 февраля 2017 г.

Оглавление

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Элементарная теория вероятностей | 3 |
| § 1 | Аксиоматическое определение вероятности | 3 |
| § 2 | Формула полной вероятности | 4 |
| § 3 | Теорема Байеса | 5 |
| § 4 | Независимые события | 5 |
| § 5 | Случайные величины и их распределения | 6 |
| § 6 | Моменты случайных величин | 7 |
| § 7 | Характеристическая функция | 8 |
| § 8 | Теорема Муавра-Лапласа | 9 |
| 2 | Матстатистика | 9 |
| § 9 | Случайные векторы | 9 |
| § 10 | Функция от случайного вектора | 11 |
| § 11 | Матожидание и дисперсия суммы случайных величин | 12 |
| § 12 | Матожидание функции случайной величины | 14 |
| § 13 | Неравенство Шварца | 14 |
| § 14 | Характеристическая функция суммы случайных величин | 15 |
| § 15 | Суммирование большого числа случайных величин | 15 |
| § 16 | Центральная предельная теорема | 17 |
| § 17 | Обобщённая теорема Муавра-Лапласа | 17 |
| § 18 | Метод моментов | 18 |
| § 19 | Метод максимального правдоподобия | 20 |
| § 20 | Лемма Фишера | 21 |
| § 21 | Доверительные интервалы нормального распределения | 23 |
| § 22 | Проверка гипотез по параметрам нормального распределения | 24 |
| § 23 | Линейная регрессия | 25 |
| § 24 | Теорема Гаусса-Маркова | 26 |
| § 25 | Оценка дисперсии погрешностей | 28 |
| § 26 | Критерий согласия Пирсона | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| § 27 | Непараметрические критерии | 29 |
| 3 | Случайные процессы | 30 |
| § 28 | Процессы с независимыми приращениями | 30 |
| § 29 | Стационарные процессы | 31 |
| § 30 | Цепи Маркова | 31 |
| § 31 | Марковские процессы | 33 |
| A | Обозначения | 34 |
| B | Стандартные распределения | 35 |
| | Литература | 35 |

Глава 1: Элементарная теория вероятностей

§ 1 Аксиоматическое определение вероятности

Определение 1 (σ -алгебра). Алгеброй \mathcal{A} подмножеств множества Ω называется такой набор его подмножеств с заданными операциями объединения, пересечения и дополнения множеств, что

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{X} \in \mathcal{A}$
3. $X_1, X_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow X_1 \cup X_2$

Сигма-алгеброй подмножеств называется всё тоже самое, только можно объединять счётное число подмножеств.

Определение 2 (Вероятностное пространство). Рассмотрим упорядоченную тройку (Ω, \mathcal{F}, P) , где

Ω — Множество (элементарных исходов). Чисел, например.

\mathcal{F} — σ — алгебра подмножеств Ω

P — Собственно, вероятность

Определение 3 (Вероятность). $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

1. $\forall A \ F(A) \geq 0$
2. $\forall \{A_i\}: A_i \cap A_j = \emptyset \ P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
3. $P(\Omega) = 1$

Как видно, сильно похоже на площадь. Что впрочем неслучано, вероятность — нормированная мера. Последнее условие как раз и означает нормированность.

Определение 4 (Тривиальные события). \emptyset, Ω .

Утверждение 1. Свойства вероятности:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$

$$3. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$4. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

А это очень важное и будет в отдельном утверждении.

Утверждение 2 (Непрерывность меры). Пусть $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, $\bigcup_i A_i = A$. Тогда $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.



Пусть

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

.....

Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i; \quad A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

Следовательно,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Всё работает, потому что в σ -алгебре можно объединять счётное число множеств.



§ 2 Формула полной вероятности

ну мы же делим, надо убедиться что ненуль

Определение 1 (Условная вероятность). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. Тогда

$$P(B | A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Утверждение 1. Пусть $\{A_i, H\} \subset \mathcal{F}$ и

$$1. P(A_i) > 0$$

$$2. A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$3. \bigcup_i A_i = \Omega$$

(полная группа/система событий). Тогда

$$P(H) = \sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)$$

§ 3 Теорема Байеса

Теорема 1. Пусть A_i — полная система событий, $H \in \mathcal{F}: P(H) > 0$. Тогда

$$P(A_k | H) = \frac{P(A_k) \cdot P(H | A_k)}{\sum_i P(A_i) \cdot P(H | A_i)}$$

§ 4 Независимые события

Определение 1. Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Они называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Утверждение 1. События A, B независимы $\Leftrightarrow P(A | B) = P(A) \vee P(B | A) = P(B)$ (в зависимости от того, что определено, вдруг там ноль где-нибудь).

Утверждение 2. Если A, B несовместны, то нетривиальные A, B — зависимы.

Определение 2. Случайные события $\{A_i\}$ попарно независимы, если

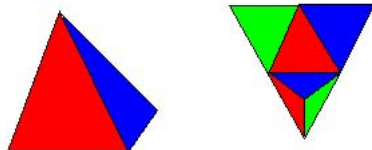
$$\forall i, j \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

.

Определение 3. Случайные события $\{A_i\}_{i=1}^n$ независимы по совокупности, если

$$\forall \{i_k \mid i_k, k \in (\mathbb{Z} \cap [1; n])\} \quad P\left(\bigcap_{i_k} A_{i_k}\right) = \prod_{i_k} P(A_{i_k})$$

Замечание 1. Определения 1.4.3 и 1.4.3 правда разные. Конечно попарная независимость следует из независимости по совокупности, но обратное неверно.



Пример 1. Тетраэдр Бернштейна:
попарные — $1/8$

. Здесь вероятность выпадения всех 3 цветов — $1/4$, а через

§5 Случайные величины и их распределения

Определение 1 (Случайная величина). Случайной величиной назовём произвольное хорошее отображение $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Тут нужно бы сказать про измеримость, это потребуется, чтобы говорить о вероятности попадания в интервал на прямой. Так что

$$X: (X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}) \in \mathcal{F},$$

где B — борелевское множество

Определение 2. Пусть $B \subset \mathbb{R}$, B — промежуток, или дополнение в нему (борелевское множество).

$$P(X \in B) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\})$$

Определение 3. Случайная величина называется дискретной, если

$$\exists (\{a_i\} \sim \mathbb{N}): \left(\sum_i P(X = a_i) = 1 \right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i, \quad p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists (f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): \left(P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx \right)$$

Определение 5 (Распределение случайной величины). $F(B) = P(X \in B)$

Пример 1 (К непрерывному распределению). Пусть $X(\omega) = \omega$, $B = (0, 1)$, $\Omega = (-1; 1)$. Выберем $f_X \equiv \frac{1}{2}$.

$$F(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \mid \omega \in (0, 1)\}) = P((0, 1)) = \frac{1-0}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$F(B) = \int_{(0,1)} \frac{1}{2} dx = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

Это всё верно, потому что на множестве интервалов вероятность — нормированная длина интервала.

Определение 6 (Функция распределения).

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]: F_X(x) = P(X < x) = P(\{\omega \mid X(\omega) < x\})$$

Утверждение 1. Про $F(x)$ верно следующее:

тут вроде концы могут входить, так что точка — тоже борелевское множество.

1. $F \uparrow \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$

Утверждение 2. Верно и обратное: если существует функция с указанными свойствами, под неё найдётся случайная величина.

Замечание. Если рассматривать обобщённые функции, то любое распределение запишется как

$$\int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

§ 6 Моменты случайных величин

Определение 1. Пусть X — случайная величина,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

Тогда

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x} \equiv M X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Утверждение 1. Свойства математического ожидания:

1. $M < \infty$
2. $M(aX + bY) = a M X + b M Y$
3. $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow M X \geq 0$
4. $\begin{cases} P(X \geq 0) = 1 \\ M X = 0 \end{cases} \Rightarrow P(X = 0) = 1$
5. если X, Y — независимы, то $M(XY) = M X \cdot M Y$

Определение 2. Момент k -ого порядка относительно начала a :

$$\lambda_{k,a} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k f(x) dx$$

(если есть абсолютная сходимость)

Определение 3. Начальный момент: $\nu_k = \lambda_{k,0}$

Определение 4. Центральный момент: $\mu_k = \lambda_{k,\bar{x}}$

Утверждение 2. $\nu_k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i \lambda_{k-i,a}$

Определение 5 (Дисперсия). $D X = M(X - M X)^2$, $\sigma = \sqrt{D X}$ — среднеквадратичное отклонение.

Утверждение 3.

$$D(aX + bY) = a^2 D X + b^2 D Y$$

если X, Y — независимы, то $D(XY) = D X \cdot D Y$

$$D(X + C) = D X$$

§ 7 Характеристическая функция

Определение 1 (Характеристическая функция). $\Phi(t) = M e^{itx}$

Утверждение 1. Свойства характеристической функции:

1. Всегда существует и $|\Phi(t)| \leq 1$.

$$2. f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Phi(t) dt$$

$$3. \Phi_{a+Xb}(t) = e^{ita} \Phi_X(tb)$$

4. Если X, Y — независимы, то $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$

5. Если $M |X|^n < \infty$, то $\Phi^{(k)}(0) = i^k M X^k$

Определение 2 (Сходимость по распределению). $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x)$

Теорема 2 (О непрерывном соответствии). $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \Phi_{X_n}(t) \xrightarrow{t} \Phi_X(t)$. Здесь на самом деле всё сложно. В разных книжках пишут равномерную сходимость на разных интервалах. У нас вроде было на всей вещественной прямой, но тогда это слишком сильное утверждение. К слову так же в [1] и [2]. А вот в [3] требуют только сходимости в каждом конечном интервале. Можно взять экспоненту, и понять, что эти условия разные.

Глава 2: Матстатистика

§ 9 Случайные векторы

Определение 1 (Случайный вектор). Случайным вектором назовём произвольное хорошее отображение $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. См. примечание про измеримость в § 5. Борелевские множества можно рассматривать и в \mathbb{R}^n , как наименьшую сигма-алгебру, содержащую все полуоткрытые параллелепипеды.

Так же можно считать, что случайный вектор — набор случайных величин.

Определение 2 (Функция распределения).

$$F_X: \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]: F_X(x) = P(X^1 < x^1, \dots, X^n < x^n)$$

То есть вероятность попадания в параллелепипед, уходящий в бесконечность.

Замечание 1. Тут как раз используется, что борелевские множества «прямоугольные».

Утверждение 1. Про $F(x)$ верно следующее:

1. F не убывает по каждому аргументу.
2. $\lim_{\exists i \ x_i \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{\forall i \ x_i \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ (по совокупности переменных). Это просто следует из непрерывности меры.

тоже важно, так что отдельно

Утверждение 2. Пусть $a^1 < b^1, \dots, a^n < b^n$, тогда работает формула включений и исключений

$$F(b^1, \dots, b^n) - \sum_i F(b^1, \dots, a^i, \dots, b^n) + \dots + F(a^1, \dots, a^n) = P(x \in [a^1, b^1] \times [a^n, b^n))$$

По сути следствие формулки про вероятность объединения.

Замечание 1. Если для многомерной функции верны 3 свойства и ещё вероятность попасть в прямоугольничек вообще определена как вероятность ($P \in [0, 1]$).

Определение 3. Векторная случайная величина называется дискретной, если

$$\exists (\{a_i \mid a_i \in \mathbb{R}^n\} \sim A \subset \mathbb{N}) : \left(\sum_i P(X = a_i) = 1 \right)$$

то есть

$$P(X \in B) = \sum_{\{i \mid a_i \in B\}} p_i, \quad p_i = P(X = a_i)$$

Определение 4. Векторная случайная величина называется непрерывной, если

$$\exists (f_X : B \rightarrow \mathbb{R}) : \left(P(X \in B) = \int_B p_X(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \right)$$

Замечание 1. Для функций распределения:

$$F(x^1, \dots, x^n) = \int_{-\infty}^{x^n} \dots \int_{-\infty}^{x^1} p_X(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$$

Утверждение 3. $p(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$

▼

Покажем, что $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = p_X(x)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx &= F(x, +\infty) = P(X < x, Y < +\infty) \\ &= P(\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x), Y \in \mathbb{R}\}) \\ &= P(X < x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx \end{aligned}$$

Опять-таки интервал можно сжать как угодно, правда снова проблемы с непрерывностью.

▲

Определение 5 (Независимые случайные величины). Случайные величины $\{X_i\}$ независимые, если

$$\forall \{B_i\} \quad P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n)$$

Утверждение 4. Пусть X, Y — независимы. Тогда $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$



По определению функции распределения

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x, y) dx dy$$

Из независимости X, Y

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= P(X < x, Y < y) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty; x)\} \cap \{\omega \mid Y(\omega) \in (-\infty; y)\}) \\ &= P(\{\omega \mid X(\omega) \in (-\infty; x)\}) \cdot P(\{\omega \mid Y(\omega) \in (-\infty; y)\}) \\ &= P(X < x) \cdot P(Y < y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \end{aligned}$$

А тогда из независимости подынтегральных функций

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_X(x) \cdot p_Y(y) dx dy$$

А дальше можно заметить, что нам неважно по какому множеству интегрировать.

$$\int_B (p(x, y) - p_X(x) \cdot p_Y(y)) dx dy = 0$$

Здесь правда всё ломается на отсутствии непрерывности у p . Но если она есть, то дальше стандартное рассуждение в окрестности точки где не 0.



§ 10 Функция от случайного вектора

Определение 1 (Функция от случайного вектора). $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Здесь нужно снова говорить про измеримость g — прообраз борелевского множества должен быть борелевским множеством. Иначе $g(X)$ может не получиться случайной величиной. Но всякие мерзкие отображения всё равно никому не нужны ☺.

Утверждение 1. Пусть X — дискретная случайная величина, f — обратима, $Y = g(X)$, $b_j = f(a_j)$. Тогда $P(Y^i = b_j^i) = P(X^i = a_j^i)$.



$$P(Y^i = b_j^i) = P(f(X^i) = f(a_j^i)) = P(\omega \mid f(X^i(\omega)) = f(a_j^i))$$

Поскольку f — обратима, она биективна. Значит $f(X) = f(a_j) \Leftrightarrow X = a_j$. Собственно, всё.



Утверждение 2. Пусть X — непрерывная случайная величина, f — обратима, $Y = g(X)$, $f^{-1} = g$. Тогда $p_Y(y) = p_X(g(y)) \left| \frac{dg}{dy} \right|$.



Пусть $D = f(B)$. Тогда $P(Y \in D) = P(X \in B)$ опять-таки в силу биективности f . Ну, ничего нового туда попасть не может и у всего есть прообраз. Так что (здесь будем рисовать один значок интеграла и дифференциала из экономии размера пдф-ки, хотя в этом замечании данных может и больше)

$$\int_D p_Y(y) dy = \int_B p_X(x) dx = \int_D p_X(g(y)) \left| \frac{dg}{dy} \right|$$

Якобиан тут под модулем, так как множество неориентированное. Я верю, что нам ещё про это расскажут на матане.



§ 11 Матожидание и дисперсия суммы случайных величин

Утверждение 1. Пусть $X, Y, n \in (A \sim \mathbb{N})$ — две дискретные независимые случайные величины. Тогда

$$P(X + Y = n) = \sum_{k \in A} P(X = n - k) \cdot P(Y = k)$$



Из формулы полной вероятности ($Y = k, k \in A$ правда полная группа)

$$P(X + Y = n) = \sum_{k \in A} P(X + Y = n \mid Y = k) \cdot P(Y = k) = \sum_{k \in A} P(X = n - k \mid Y = k) \cdot P(Y = k)$$

А вот тут уже поможет независимость X, Y .

$$\dots = P(X = n - k) \cdot P(Y = k)$$



Утверждение 2. Пусть $X_1, X_2, n \in \mathbb{R}$ — две непрерывные независимые случайные величины. Тогда

$$p_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} p_1(y-t)p_2(t) dt$$

▼

Пусть $Y = X_1 + X_2$. Тут видно, что нет биекции, придется руками что-то делать.

$$F_Y(y) = \iint_{x_1+x_2 \leq y} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} p(x_1, x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^y p(x_1, u-x_1) du$$

слишком много раз пользовались на физике, так что оставим на 4 семестр

Переменные независимы, так что можно поменять местами интегралы (ещё же по области интегрируем, неважно как)
А тогда, убирая внешний интеграл из определения функции распределения, получаем

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, y-t) dt$$

Поскольку X_1, X_2 независимы, то $p(t, y-t) = p_1(t) \cdot p_2(y-t)$. Нумерация никого не интересует, так что

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y-t) \cdot p_2(t) dt$$

▲

Теперь можно перейти и к содержанию билета

Утверждение 3. $M(\sum_i X_i) = \sum_i M X_i$. Да и вообще оно линейно.

▼

Пусть $f(X, Y) = X + Y$

$$\begin{aligned} M(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y p(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx \right) dy \\ &= M X + M Y \end{aligned}$$

Часть про константу слишком очевидна, не будем её доказывать.

▲

Утверждение 4 (Дисперсия суммы). $D(\sum_i X_i) = \sum_i D X_i$



Сначала заметим, что $D X = M(X - M X)^2$, $M(X - M X) = M X - M X = 0$

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M(X + Y - M(X + Y))^2 = M((X - M X) + (Y - M Y))^2 \\ &= M(X - M X)^2 + M(Y - M Y)^2 + 2 M(X - M X) M(Y - M Y) \\ &= D X + D Y \end{aligned}$$



Утверждение 5. Если X, Y — независимы, то $M X Y = M X M Y$

§ 12 Матожидание функции случайной величины

Определение 1 (\sim). Пусть $f(X)$ — функция от случайной величины. Тогда $M f(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x) dx$. В случае чего он многомерный, просто прикидывается. Существует, если есть абсолютная сходимость.

Замечание. я ещё подумаю, может это всё же утверждение.

Утверждение 1. Матожидание функции линейно

Утверждение 2. Если X, Y — независимы, то $M f_1(X_1)f_2(X_2) = M f_1(X_1) M f_2(X_2)$

§ 13 Неравенство Шварца

Утверждение 1. $(M X Y)^2 \leq M X^2 M Y^2$



$M(X + tY)^2 = t^2 M Y^2 + 2t M X Y + M X^2 \geq 0$ из свойств матожидания. Ну там и подынтегральная функция положительна. Тогда квадратное уравнение в правой части может иметь не более одного корня.

$$(2 M X Y)^2 - 4 M X^2 M Y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (M X Y)^2 \leq M X^2 M Y^2$$



§ 14 Характеристическая функция суммы случайных величин

Утверждение 1. Пусть X, Y — независимые случайные величины. Тогда

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$$

▼

Из 2.11.3

$$\Phi_{X+Y}(t) = M e^{itX} e^{itY} = M e^{itX} \cdot M e^{itY} = \Phi_X(t) \cdot \Phi_Y(t)$$

▲

Следствие 1. Если все величины одинаково распределены, то $\Phi_{X_1+\dots+X_n}(t) = (\Phi(t))^n$,

$$p_{X_1+\dots+X_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(t))^n dt$$

§ 15 Суммирование большого числа случайных величин

:set aflame💩🐼

Теорема 1 (ЦПТ Линдберга-Леви-Агеяна 🐼). Пусть X_1, \dots, X_n — независимые одинаково распределённые случайные величины. Пусть к тому же $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $0 < D X_k < \infty$. Пусть $M X_k = a$, $D X_k = \sigma$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ $Z_n \sim N(0, 1)$, в вариации из Агеяна $S_n \sim N(na, n\sigma^2)$

□ Пусть $M X_k = a$, $D X_k = \sigma^2$. Рассмотрим характеристическую функцию $\Phi(t) = M e^{itX_k}$. Введём замену (которая z-преобразование.):

$$Z_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}}$$

Давайте ещё немного схитрим и положим $X_k \leftarrow X_k - a$. А то потом будет много возни с бедным a . При этом $z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$
Тогда

$$\Phi_{Z_n}(t) = M \left(e^{\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}} \right) = \left(\Phi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n$$

А характеристическая функция дифференцируема дважды из существования дисперсии.

$$\Phi'(0) = 0$$

$$\Phi''(0) = -\sigma^2$$

$$\Phi \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \Phi(0) + \Phi'(0) \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \Phi''(0) \frac{t^2}{2\sigma^2 n} + o \left(\frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$$

А при $n \rightarrow \infty$

$$\Phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow e^{-t^2/2}$$

Здесь сходимость есть на любом конечном интервале, но вот про всю прямую этого уже не скажешь. Так что снова поднимается вопрос какой теоремой о непрерывном соответствии пользоваться. Но если ей воспользоваться (тут потихому применили обратное преобразование Фурье), то

$$p_{Z_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \frac{-s^2 + s^2 - 2its - t^2}{2} = \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(- \underbrace{\left(\frac{t + is}{\sqrt{2}} \right)^2}_{\eta} \right) d\eta = \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$F_{Z_n}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$$

Дальше — вариация из Агеяна. Используя утверждение [2.10.2](#) про замену переменной как раз получаем нормальное распределение. Только тут нужно поменять в процессе σ

$$Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$F_{S_n}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 n}} du$$

Вернёмся обратно к ненулевому a

$$S_n = S_n - na$$

$$F_{S_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-na)^2}{2\sigma^2 n}} du$$

$$S_n \sim N(na, n\sigma^2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

■

§ 16 Центральная предельная теорема

Теорема 1 (ЦПТ Ляпунова). Пусть $\{X_k\}$ — независимые случайные величины (тут нет одинаковости распределений!). Введём горю обозначений:

$$S_n = \sum_i x_i$$

$$a_k = M X_k$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sigma_k^2 = D X_k$$

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

$$\gamma_k = M |X_k - a_k|^3$$

$$C_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k$$

Тогда

$$\frac{C_n}{B_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \frac{S_n - A_n}{B_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Замечание. Тут какая-то жесть. Она мало где формулируется и нигде не доказывается. Что-то есть тут: [3], а здесь [1] так другую теорему обозвали

:set aflame

§ 17 Обобщённая теорема Муавра-Лапласа

Определение 1. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и независимы. Тогда говорят, что случайная величина $\chi_n^2 = \sum_{k=1}^n X_k^2$ имеет распределение χ^2 с n степенями свободы.

Утверждение 1. $p_{\chi_b}(z) = \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$

▼

Характеристическая функция χ может быть найдена из 1. Найдём сначала характеристическую функцию X_k^2 . Для этого было бы недурно найти плотность соответствующего распределения

$$\begin{aligned} P(y < X^2 < y + dy) &= P(\sqrt{y} < X < \sqrt{y + dy}) + P(-\sqrt{y} > X > -\sqrt{y + dy}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y+dy}} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-y/2}}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

А теперь можно и фурье-образ найти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y/2}}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y/2}}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-\eta^2(1-2it)}{2}\right) d\eta = (1-2it)^{-1/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Вспомогая про коэффициент получим $\Phi_k(t) = (1 - 2it)^{-1/2}$.

$$\Phi_X(t) = (\Phi_k(t))^n = (1 - 2it)^{-n/2}$$

Тогда

$$p_X(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - 2it)^{-n/2} e^{-itz} dt$$

Дальше немного жеств

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - 2it)^{-n/2} e^{-itz} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-l} \left(1 - 2\frac{l}{z}\right)^{-n/2} \frac{1}{iz} dl = 2 \cdot \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2}} \int_0^{\infty} s^{-n/2} e^{-s} ds \\ &= 2 \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2}} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

Из правила отражения для Γ -функции $\Gamma(1 - n/2) \Gamma(n/2) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi n}{2}}$. А это почти что надо. ✂там надо интеграл поаккуратнее брать.

▲

Теорема 2 (Обобщённая теорема Муавра-Лапласа). Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины с дискретным распределением:

$$X_k: \frac{1}{p_1} \mid \dots \mid \frac{r}{p_r}$$

Рассмотрим $\nu_k = \#\{1 \leq i \leq n \mid X_i = k\}$, $1 \leq k \leq r$. Тогда

$$\sum_{k=1}^r \left(\frac{\nu_k - np_k}{\sqrt{np_k}} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_{r-1}^2$$

§ 18 Метод моментов

Здесь походу нужно все статистические определения в одном параграфе :set aflame

Вводные слова В отличие от теорвера, матстатистике неизвестно распределение случайной величины. И нужно придумать, как его восстановить по конкретной реализации. Пусть X — та самая величина, про распределение которой очень хочется узнать

Главная героиня матстатистики — выборка

Определение 1. Выборка объёма n —

1. n независимых случайных величин, распределённых так же, как и X
2. набор чисел $X_i(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — какой-то исход. Ещё называется реализацией выборки.

Собственно, первое определение — это до испытания, а второе — уже после.

Основные задачи Пусть $X_1, \dots, X_n \sim F(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ — множество параметров.

1. Оценивание параметров:

- Точечные оценки: $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$
- Доверительные интервалы: $P_\alpha(T_1 < \hat{\theta} < T_2) = \alpha$

2. Проверка гипотез

Пусть $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$. А мы хотим узнать чему принадлежит θ .

H_0 : $\theta \in \Theta_0$ — основная гипотеза

H_1 : $\theta \in \Theta_1$ — альтернативная гипотеза

Выборочные характеристики Выберем реализацию случайной величины (выборку во втором смысле) X_1, \dots, X_n . Рассмотрим новую случайную величину:

$$\tilde{X}: \begin{array}{c|c|c} X_1 & \dots & X_n \\ \hline \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{array}$$

Ну а дальше все выборочные характеристики определяются уже для этой случайной величины. Напомним следующее

Определение 2 (Индикатор). $I_A(X) = \begin{cases} 1, & X \in A \\ 0, & X \notin A \end{cases}$, $I(X < x) = \begin{cases} 1, & X < x \\ 0, & X \geq x \end{cases}$

Определение 3. Если X_1, \dots, X_n можно упорядочить, то $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ называется вариационным рядом.

✂Свойства оценок

1. Несмещённость: $M \hat{\theta} = \theta$

2. Асимптотическая несмещённость: $M \hat{\theta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$

Метод моментов

Определение 4. Пусть $F(x, \theta)$ — семейство распределений, $m(x) = M g(X)$ — какой-то момент этого распределения. Пусть известно, что $h(\theta) = m(x)$. Тогда собственно сам метод состоит в том, чтобы оценить θ как решение уравнения выше.

$$\hat{\theta} = h^{-1}(m), \quad m — эмпирический момент$$

В случае чего там векторы, но особо не страшно.

Пример 1. <+примеры про непрерывные распределения+>

| Генеральная совокупность | | Выборка | |
|---------------------------------|------------------------------------|---|-------------------------|
| Матожидание | MX | $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_k X_k$ | Выборочное среднее |
| Дисперсия | DX | $S^2 = \frac{1}{n} \sum_k (X_k - \bar{X})^2$ | Выборочная дисперсия |
| Момент порядка l | MX^l | $m_l = \frac{1}{n} \sum_k X_k^l$ | |
| Коварияция | $M(X - MX)(Y - MY)$ | $\frac{1}{n} \sum_k (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})$ | |
| Ассиметрия (γ_3) | $M(X - MX)^3 / \sigma^3$ | $\frac{1}{n} \sum_k (X_k - \bar{X})^3 / S^3$ | |
| Эксцесс (γ_4) | $\frac{M(X - MX)^4}{\sigma^4} - 3$ | $\frac{1}{n} \sum_k (X_k - \bar{X})^4 / S^4 - 3$ | |
| Функция распределения | $P(X < x)$ | $\frac{1}{n} \sum_k I(X_k < y)$ | эмпирическая |
| Квантиль порядка $p \in (0; 1)$ | $\sup\{x \mid F(x) \leq p\}$ | $X_{([pn]+1)}$ | член вариационного ряда |

§ 19 Метод максимального правдоподобия

Определение 1. За $p(x, \theta)$ обозначим плотность функции распределения $F(x, \theta)$ в точке x в случае непрерывного распределения и $P(X = x)$ в случае дискретного.

Определение 2. Пусть $\{X_k\}$ — n независимых случайных величин. Тогда $L(\theta) := \prod_{k=1}^n p(X_k, \theta)$ — функция правдоподобия.

Ещё берут её логарифм.

Определение 3. Сам метод состоит в следующем:

$$\hat{\theta}: L(\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(\theta)$$

Однако проще искать максимум у $\ln L(\theta)$. Так можно в силу монотонности логарифма.

$$(\ln L(\theta))' = \frac{L'(\theta)}{L(\theta)}$$

<+гора примеров+>

§* Эффективные оценки

Утверждение 1 (Неравенство Рао-Крамера). Пусть $\theta, \hat{\theta}$ — параметр и его оценка, $b(\theta) = M(\hat{\theta} - \theta)$ — смещение оценки, $I(\theta)$ — информация Фишера, $F(x, \theta)$ — параметрическое семейство распределений.

$$I(\theta) = M \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(X, \theta) \right)^2,$$

где $p(X, \theta)$ из определения 2.19.1. Если выполнены условия регулярности

1. Существует $C \subset \mathbb{R} : \forall \theta \in \Theta P(X_1 \in C) = 1$ и $\forall y \in C \sqrt{p(X, \theta)} \in C_\theta^1(\Theta)$

2. $I(\theta) \in C_\theta(\Theta), I \geq 0$

и $D\hat{\theta}$ ограничена на любом компакте $\subset \Theta$,
то

$$M(\hat{\theta} - \theta)^2 \geq \frac{(1 + b'(\theta))}{nI(\theta)} + b^2(\theta)$$

Замечание 1. Всякая регулярность нужна, чтобы можно было законно записывать производную по параметру по интегралу.

Определение 4. Оценка называется эффективной, если для неё неравенство Рао-Крамера обращается в равенство.

§ 20 Лемма Фишера

Определение 1. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Тогда $\sum_i X_i^2$ имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Ещё так обозначается: K_n

Утверждение 1. Плотность распределения χ_n^2 ищется по формуле

$$k_n = \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Определение 2. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0, 1)$. Тогда $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_i X_i^2}}$ имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы.

Утверждение 2. Плотность распределения T_n ищется по формуле

$$t_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Определение 3. Пусть $C: V_1 \rightarrow V_1$. Тогда C — ортогональный, если $CC^T = E$

Следствие 1. $\det C = 1$

Следствие 2. $\|Cx\| = \|x\|$

Утверждение 3. Оператор ортогональный \Leftrightarrow строки его матрицы (как векторы линейного пространства наборов чисел) образуют ортонормированный базис.

Утверждение 4. Пусть $\{X_i\} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, C — ортогональный линейный оператор. Тогда и $Y = CX \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



Докажется через утверждение о преобразовании плотности при замене переменных 2.10.2 и следствие 2. Независимость получится просто из того, что вышло нормальное распределение. А σ -у можно сначала засунуть в случайные величины, а потом вытащить обратно.



Лемма 5 (Фишера). Пусть X_1, \dots, X_n независимы и $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Тогда

$$1. \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$2. \bar{X}, S^2 \text{ независимы}$$

$$3. \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$4. \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \theta}{S} \sim t_{n-1}$$

□

1. Заменяем $Z_i = \frac{X_i - \theta}{\sigma}$, $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Найдем распределение $\sum_i Z_i = \Sigma$.

$$\Phi_{Z_i}(t) = e^{-t^2/2}$$

$$\Phi_{\Sigma}(t) = \exp\left(-n \frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{n} t}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \Rightarrow p_{\Sigma}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{z^2}{2n}\right)$$

$$\frac{S_n - n\theta}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{n}) \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

2. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Первая строка как вектор имеет норму 1. А значит можно вспомнить процесс Грамма-Шмидта и набрать ортонормированный базис. Тогда C будет ортогональным. Пусть $Y = CX$. Из горы утверждений выше мы получим:

$$Y_1 = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} = \bar{X}\sqrt{n}$$

$$\|Y\| = \|X\| \Rightarrow \sum_i X_i^2 = \sum_i Y_i^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_i X_i^2 - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n Y_i^2$$

Здесь смещённая дисперсия

А дальше надо честно посчитать $\text{cov}\left(\frac{Y_1}{\sqrt{n}}, \sum_{i=2}^n Y_i^2\right)$. Правда ноль получается. Если что,

$$\text{cov}(X, Y) = M(X - M X)(Y - M Y) = M(XY) - M X M Y$$

$$3. \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 = \chi_{n-1}^2$$

4. Из всего предыдущего

$$\sqrt{n-1} \frac{\bar{X}}{S} = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{n}{n(n-1)} \sum_{i=2}^n Y_i}} = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i}} \sim t_{n-1}$$



§ 21 Доверительные интервалы нормального распределения

Здесь собственно перешли к более интересной части — от точечных оценок параметров к построению для доверительных интервалов.

Определение 1. (T_1, T_2) — доверительный интервал уровня γ , если $P(T_1 < \theta < T_2) = \gamma$

Дальше всюду ведутся рассуждения про доверительные интервалы (уровня γ) параметров нормального распределения.

Утверждение 1. Доверительный интервал для θ при известном σ равен $\left(\bar{X} - \sigma \frac{z_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \sigma \frac{z_{(1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right)$



Интервал ищем явно симметричный, так что посчитаем

$$P\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{X} - \theta|}{\sigma} < z\right)$$

Поскольку величина внутри подчиняется стандартному нормальному распределению,

$$P\left(-z < \sqrt{n} \frac{(\bar{X} - \theta)}{\sigma} < z\right) = F_n(z) - F_n(-z) = 2F_n(z) - 1 = \gamma$$

По дороге сделали замену переменной, не пугайтесь. А дальше $z = F_n\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$, что как раз соответствует определению $\frac{1+\gamma}{2}$ квантили. Ну а дальше всё уже очевидно из преобразования неравенства выше. Мы умеем это делать, можно порассматривать $\{\omega \mid X(\omega) \cdots\}$ как уже делали раньше.



Утверждение 2. Доверительный интервал для θ при неизвестном σ равен $\left(\bar{X} - S \frac{t_{n-1, (1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + S \frac{t_{n-1, (1+\gamma)/2}}{\sqrt{n}}\right)$



аналогично [2.21.4](#), только пользуемся 4 пунктом леммы Фишера [2.20.5](#).



Утверждение 3. Доверительный интервал для σ^2 при неизвестном θ равен $\left(\frac{nS^2}{v^2}; \frac{nS^2}{u}\right)$. Чиселки u, v определяются с помощью χ^2 .

Утверждение 4. Доверительный интервал для σ^2 при неизвестном θ нормально не выражается. Проще численно.

1. $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$

2. $\frac{n(\bar{X} - \theta)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$

§ 22 Проверка гипотез по параметрам нормального распределения

Будем рассматривать здесь простую гипотезу:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

1. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 известно. Примем $H_0: \theta = \theta_0$. Но тогда

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

из 1 пункта леммы Фишера ([2.20.5](#)).

Рассмотрим α — уровень значимости — какое-нибудь маленькое число. Часто берут 0.05.

$$P\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{X} - \theta_0|}{\sigma} > z\right) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{n} \frac{|\bar{X} - \theta_0|}{\sigma} > z_{1-\alpha/2}$$

Таким образом можно найти границы критической области.

Если H_0 верна, то $P\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{X} - \theta_0|}{\sigma} > z_{1-\alpha/2}\right)$ мала. Можно выбрать, меньше чего мы хотим её сделать, и объявить сие критерием проверки. Собственно, так и делали на практике.

2. σ^2 неизвестна. Здесь всё то же самое, только с распределением Стьюдента.

А здесь такую

$$H_0: \theta_1 = \theta_2$$

$$H_1: \theta_1 \neq \theta_2$$

Будем считать, что X_i, Y_i независимы, и нормально распределены:

$$X_1, \dots, X_{n_1} \sim \mathcal{N}(\theta_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim \mathcal{N}(\theta_2, \sigma_2^2)$$

1. σ_1^2, σ_2^2 — известны.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, но не известны

$$\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sim S_{n_1 + n_2 - 2}$$

Это как раз тот самый t-тест

3. σ_1^2, σ_2^2 неизвестны. Тут вообще ничего не понятно. (Проблемы Беренса-Фишера)

§ 23 Линейная регрессия

Определение 1 (Регрессия). Пусть Y, X_1, \dots, X_m — случайные векторы. Тогда если определено уравнение $y(x_1, \dots, x_m) = M(Y | X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m)$, то y называется регрессией Y по X_1, \dots, X_m .

Определение 2 (Линейная регрессия). Пусть Y, X_1, \dots, X_m — случайные векторы. Тогда если определено уравнение $y(x) = M(Y | X_i = x_i \forall i)$, и $y(x) = x \cdot \theta$ то y называется линейной регрессией Y по X .

Здесь x — матрица $n \times m$, $\theta \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$

Замечание 1. Можно с тем же успехом написать $Y = y(X) + \varepsilon$, если $M\varepsilon = 0$

Определение 3. Y называется откликом, X — регрессоры (предикторы), ε — шум, θ — параметры.

Основной метод поиска оптимальных параметров, если шумы нормальные — по функции максимального правдоподобия. Если не сильно расписывать, то это выльется в $\arg \min_{\hat{\theta}} (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta})$

А если расписывать, то получается следующее: если все ε_i независимы и нормально распределены, то функция максимального правдоподобия будет выглядеть так:

$$L(\theta_1, \dots, \theta_m) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (y_j - \sum_{k=1}^m x_{jk}\theta_k)^2 \right)$$

Как видно, условие максимума такой функции совпадает с минимумом суммы квадратов.

При этом нужны условия Гаусса-Маркова:

1. $X^T X$ обратима
2. $M \varepsilon_i = 0$, $D \varepsilon_i = \sigma^2$, $\text{cov } \varepsilon_i \varepsilon_j = 0$

Утверждение 1. Явное выражение для $\hat{\theta}$ при минимизации выражения выше выглядит так: $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

▼

Пусть

$$Q(\theta) = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta) = Y^T Y - \theta^T X^T Y - Y^T X \theta + \theta^T X^T X \theta \in \mathbb{R}$$

В координатах это перепишется так (как обычно, суммирование по повторяющимся индексам)

$$Q(\theta) = y_i y_i - 2 y_j \theta_i X_{ji} + (X_{si} \theta_i) (X_{sj} \theta_j)$$

Тогда можно и продифференцировать

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \theta_j} &= 2X_{si} X_{sj} \theta_j - 2X_{ji} y_j = 0 \Leftrightarrow 2X^T X \theta - 2X^T Y = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= X_{si} X_{sj} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Как видно, там и правда минимум. Здесь второй дифференциал просто сразу приведён к диагональному виду, и все числа на диагонали его матрицы положительны.

▲

§ 24 Теорема Гаусса-Маркова

Определение 1. Ковариационная матрица случайных векторов X , Y — матрица ковариаций их компонент

$$\text{cov}(X, Y)_{ij} = \text{cov}(X_i, Y_j) = M(X - M X)(Y - M Y)^T$$

Определение 2. $\text{cov } X = \text{cov}(X, X)$

Определение 3 (Эффективность оценок). Оценка параметра $\hat{\theta}_1$ эффективнее оценки $\hat{\theta}_2$, если матрица $\text{cov } \hat{\theta}_1 - \text{cov } \hat{\theta}_2$ отрицательно определена.

Теорема 1. Пусть

1. $X^T X$ обратима
2. $M \varepsilon_i = 0$, $D \varepsilon_i = \sigma^2$, $\text{cov } \varepsilon_i \varepsilon_j = 0$

Тогда

1. $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ — несмещённая оценка θ ,
2. $\hat{\theta}$ — наиболее эффективная среди линейных несмещённых оценок

□

1. $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T (X\theta + \varepsilon) = \theta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$. Так как $M \varepsilon = 0$, ε не зависит от X , последнее слагаемое обращается в ноль. Ну $M \hat{\theta} = M \theta = \theta$, ибо θ — константа.
2. Пусть $\tilde{\theta} = HY$. Такая оценка тоже будет несмещённой, если $HX = E$. Ну для несмещённости,

$$M HY = M H(X\theta + \varepsilon) = M HX\theta = \theta$$

а это как раз единичность этой матрицы. Тогда

$$\text{cov } HY = M(HY - \theta)(HY - \theta)^T = M(\underbrace{(HX - E)}_0 \theta + H\varepsilon)(\underbrace{(HX - E)}_0 \theta + H\varepsilon)^T = M H\varepsilon \varepsilon^T H^T = \sigma^2 H H^T$$

Для изначальной оценки $H_0 = (X^T X)^{-1} X^T$, так что $H_0 H_0^T = (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1}$.

Покажем, что матрица $H H^T - (X^T X)^{-1}$ положительно определена. Пусть $C = H - (X^T X)^{-1} X^T$. Тогда

$$\begin{aligned} CX &= HX - E = 0 \\ HH^T &= (C + (X^T X)^{-1} X^T)(C^T + X(X^T X)^{-1}) = CC^T + (X^T X)^{-1} \end{aligned}$$

А матрицы вида CC^T обычно (над \mathbb{R}) положительно определены.

■

§ 25 Оценка дисперсии погрешностей

Теорема 1. Пусть $S^2 = \frac{1}{n-m}(Y - X\hat{\theta})(Y - X\hat{\theta})^T$. Тогда S^2 — несмещённая оценка σ^2

□

$$Y - X\hat{\theta} = Y - (E_n - X(X^T X)^{-1} X^T)(X\theta + \varepsilon) = (E_n - X(X^T X)^{-1} X^T)\varepsilon = B\varepsilon$$

Тогда $S^2 = \frac{1}{n-m}\varepsilon^T B^T B \varepsilon$, причём B — симметрична. Так что $B^T B = B^2 = B$ (лень расписывать). Так что

$$M S^2 = \frac{1}{n-m} M(\varepsilon^T B \varepsilon) = \frac{\sigma^2}{n-m} \text{Tr } B$$

потому что всё, что не на главной диагонали обратится в ноль в силу независимости ε_i .

Осталось доказать, что $\text{Tr}(X(X^T X)^{-1} X^T) = m$. Покажем, что след произведения матриц не зависит от порядка сомножителей.

$$\text{Tr } AB = (ab)_i = a_{is} b_{si} = b_{si} a_{is} = (ba)_s$$

Так что просто переставим X^T в самое начало и получим E_m . ■

§ 26 Критерий согласия Пирсона

Определение 1. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim F$. Будем проверять гипотезу

$$H_0: F = F_0 \quad H_1: F \neq F_0$$

Пусть существует функция $\rho(X)$, такая что

1. H_0 верна $\Rightarrow \rho(X) \xrightarrow{d} G$, G — некоторое непрерывное распределение.
2. если H_0 неверна, то $|\rho(X)| \xrightarrow{p} \infty$

Выберем критическую область по распределению G из равенства $P(|g| \geq C) = \gamma$, $g \sim G$. Тогда критерий введём так: будем отвергать H_0 , если $|\rho(X)| \geq C$.

Определение 2 (Критерий согласия Пирсона). Разобьём всю область значений X_i на интервалы I_i , с заданными вероятностями — p_i , $\sum_i p_i = 1$. Будем проверять гипотезу $\forall i \quad P(X_1 \in I_i) = p_i$. Этакая дискретизация распределения.

Ещё обозначим $\nu_k = \#\{i \mid X_i \in I_k\}$. Пусть

$$\rho = \sum_{k=1}^r \frac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}$$

А сам критерий основывается на сходимости распределения выше к распределению χ^2 , и критическая область выбирается из этого распределения.

Теорема 1. При справедливости H_0 $\rho(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \chi_{r-1}^2$.

§ 27 Непараметрические критерии

Условия на X_1, \dots, X_n те же

Утверждение 1 (Критерий Колмогорова-Смирнова). Пусть F_n — эмпирическая функция распределения,

$$D_n^+ = \sup_x (F_n(x) - F_0(x))$$

$$D_n^- = \sup_x (F_0(x) - F_n(x))$$

$$\text{Тогда } P(\sqrt{n}D_n^+ < z) \rightarrow \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Здесь функция $\rho = \sqrt{n}D_n^+$. Чтобы доказать, что она — критерий согласия, можно воспользоваться теоремой Гливленко-Кантелли

$$P(|F_n(x) - F_0(x)| \rightarrow 0) = 1$$

Распределение в котором всё сошлось — распределение Колмогорова.

Утверждение 2 (Критерий Смирнова). $\rho = \sqrt{n} \max(D_n^+, D_n^-)$

Утверждение 3 (Критерий Койгера). $\rho = \sqrt{n}(D_n^+ + D_n^-)$

Утверждение 4 (Критерий Крамера-фон-Мизеса). $\rho = \omega^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 dF_0(x)$

Утверждение 5 (Критерий Андерсона-Дарлинга). $\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_n(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x)$

Покажем, что эти критерии не зависят от распределения F .

Лемма 6. Пусть F — функция распределения X , F непрерывна, $\exists F^{-1}$. Тогда $F(X) \sim U[0, 1]$.

▼

Посмотрим на распределение $F(X)$. Тут правда применяют распределение к самой случайной величине

$$P(F(X) < x) = P(X < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$$

А это как раз равномерное распределение.

▲

Теорема 7. Пусть F — функция распределения X , F_0 непрерывна и обратима. Тогда при выполнении H_0 статистики не зависят от F_0 .

□ Поскольку гипотеза выполняется, то $F = F_0$.

$$\sup_x |F_n(x) - F_0(x)| = \sup_y |F_n(F_0^{-1}(y)) - y|$$

Из непрерывности F_0

$$F_n(F_0^{-1}(y)) = \frac{1}{n} \#\{k \mid X_k < F_0^{-1}(y)\} = \frac{1}{n} \#\{k \mid F_0(X_k) < y\}$$

Раз X_k независимы, то $F_0(X_k)$ тоже независимы. Тогда по лемме $F_0(X_k)$ — выборка из равномерного распределения. Так что

$$\sup_x |F_n(x) - F_0(x)| = \sup_y \left| \frac{1}{n} \#\{k \mid U(X_k) < y\} - y \right|$$

А значит, не столь важно какая F_0 , ведь изначально предположения на неё были весьма широкие. ■

Глава 3: Случайные процессы

§ 28 Процессы с независимыми приращениями

Определение 1. Случайный процесс — измеримое отображение $X: \Omega \rightarrow L(T)$, $L(T)$ — пространство функций над T

Пример 1. $T = t_0$, тогда X — случайная величина

Определение 2. X — процесс с независимыми приращениями, если $\forall t_0 < \dots < t_n \in T$ случайные величины

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

Пример 1. $T = \mathbb{N}$, а сам независимый процесс $X(n) = \sum_{i=1}^n Y_i$, Y_i — независимы.

Определение 3. Пусть $T = \mathbb{R}$ (время) и при этом:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(t) - X(s) &\sim \text{П}(\lambda(t-s)) \\ X &\text{ — процесс с независимыми приращениями} \end{aligned}$$

Определение 4 (Винеровский процесс (броуновское движение)). Пусть $T = \mathbb{R}$ (время) и при этом:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(t) - X(s) &\sim \mathcal{N}(0, t-s) \\ X &\text{ — процесс с независимыми приращениями} \end{aligned}$$

§ 29 Стационарные процессы

Определение 1 (Стационарные в узком смысле). $X(t)$ называется стационарным в узком смысле, если

$$\begin{aligned} \forall t_1, \dots, t_n \in T, \forall \tau > 0 \quad (t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau \in T) \\ \Rightarrow (X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n)) \end{aligned}$$

Короче, можно двигать начало отсчёта времени, распределение не изменится.

Следствие 1.

$$\begin{aligned} m(t) &= M X(t) = \text{const} \\ \sigma^2(t) &= D X(t) = \text{const} \\ \text{cov}(X(s), X(t)) &= \text{cov}(X(0), X(t-s)) =: R(t-s) \end{aligned}$$

Здесь определена величина $R(t-s)$, если что.

Определение 2 (Стационарные в широком смысле). $X(t)$ называется стационарным в широком смысле, если $M X(t) = \text{const}$ и $\text{cov}(X(s), X(t)) = R(t-s)$.

Сделаем теперь из процессов (пока любых) линейное пространство со скалярным произведением.

$$H_0 = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k X(t_k) \mid n \in \mathbb{N}, t_i \in T, c_i \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.1)$$

$$\langle X(s), X(t) \rangle = \text{cov}(X(s), X(t)) \quad (3.2)$$

Теперь сделаем из него гильбертово пространство, дополнив по метрике, соответствующей скалярному произведению. Дальше надо бы доказать, что оно вообще расстояние

<+Здесь дальше какая-то жёсть про спектральную меру. Я её не понимаю+>

§ 30 Цепи Маркова

Определение 1. Пусть \mathcal{X} — дискретное множество состояний. Тогда ξ_i образуют цепь Маркова, если

$$P(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_1 = i_1) = P(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1})$$

(Цепь помнит только свое предыдущее состояние)

Определение 2. Если известны $q_i = P(\xi_1 = i)$ и ${}^n p_{ij} = P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i)$, то цепь называется полностью определённой. $P = (p_{ij})$ ещё называется стохастической матрицей.

Определение 3. Если ${}^n p_{ij}$ не зависит от n , то цепь называется однородной.

Определение 4. $p_{ij}^{(n)} = P(\xi_{k+n} = j \mid \xi_k = k)$ (вероятность перейти за n шагов).

Утверждение 1. Для однородной цепи:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)} \Rightarrow P^{(n)} = P^n$$

Оно всё следует из независимости от старых состояний и формулы полной вероятности 1.2.1.

Пример 1. Если ξ_i независимы, то они образуют цепь Маркова

Пример 2. Если ξ_i независимы, то η_n : $\eta_n = f(\eta_{n-1}, \xi_n)$ образуют цепь Маркова.

Определение 5 (Случайные блуждания). Случайное блуждание — процесс с дискретным временем вида $\eta_0 + \sum_i \xi_i$, где $\xi_n \in \mathbb{R}^d$ — независимые случайные величины, ξ_k принимает значения $\pm e_i$ — ортонормированный базис \mathbb{Z}^d

Случайные блуждания тоже можно считать цепью Маркова

Определение 6. $f_{ii}^{(n)} = P(\xi_{n+1} = i \mid \xi_n \neq i, \dots, \xi_2 \neq i, \xi_1 = i)$. Состояние i возвратное, если $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \infty$ и невозвратное иначе.

Но надо ещё подумать над вероятностью вернуться в какое-то состояние, идя не важно как.

$$p_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(n)} + f_{ii}^{(n-1)} p_{ii} + \dots + f_{ii}^{(1)} p_{ii}^{(n-1)}$$

С таким можно разобраться при помощи производящих функций

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n, \quad p_{ii}(0) = 1$$

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n$$

$$P(z) = P(z)F(z) + 1$$

Получить последнюю формулу можно честно перемножив два ряда. Только нужно ещё не забыть, что один из них начинается с z^1 . А дальше член при z^n как раз и оказывается суммой выше

Утверждение 2 (Критерий возврата). i — возвратное $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

▼

Из формулы выше

$$P(z) = \frac{1}{1 - F(z)}$$

а $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = F(1) = 1$ в случае возвратного состояния.

▲

Определение 7. Состояния i, j сообщаются, если $\exists n: p_{ij}^{(n)} > 0$.

Замечание 1. Это отношение эквивалентности

Утверждение 3. Если состояние связанные, то они имеют одинаковую возвратность.

Теорема 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}}$

§ 31 Марковские процессы

Здесь будем брать и сурово строить сигма-алгебры на заданных множествах.

Определение 1. $\sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ — наименьшая сигма-алгебра, относительно которой Y_i измеримы. Короче, порождённая набором $\{Y_i\}$.

Замечание. Индекс i может быть и непрерывным: $\sigma(X(t) \mid t \in T)$

Пример 1. $F_a^b = \sigma(X(t), t \in [a, b])$ — сигма-алгебра интервала.

Пример 2. $F_{-\infty}^t = \sigma(X(\zeta), \zeta \in (-\infty, t])$ — сигма-алгебра прошлого. Можно так же и будущего. И настоящего ($\zeta \in \{t\}$).

Определение 2 (Марковский процесс). $X(t)$ — марковский процесс, если

$$\forall A \in F_{-\infty}^t, B \in F_t^{\infty} \quad P(AB) = P(A)P(B)$$

Короче говоря, прошлое не зависит от будущего.

Глава А: Обозначения

✂ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

□...■ — начало и конец доказательства теоремы

▼...▲ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

↪ — кривоватая формулировка

:set aflame — набирающему зело не нравится билет

<+что-то+> — тут будет что-то, но попозже

$a..b$ — для $a, b \in \mathbb{Z}$ это просто $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

\equiv — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

Глава В: Стандартные распределения

| Распределение | Плотность |
|--|--|
| Бернулли | $P(x = 1) = p, P(x = 0) = 1 - p$ |
| Пуассона ($P(\lambda)$) | $P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k \in \mathbb{N} \cup 0$ |
| Биномиальное ($Bi(n, p)$) | $P(x = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ |
| Равномерное $U(a, b)$ | $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$ |
| Нормальное $\mathcal{N}(\alpha, \sigma)$ | $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\alpha)^2/2}$ |
| Коши $K(a, b)$ | $p(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)}$ |

Литература

- [1] Чернова Н.И. Теория вероятностей.
- [2] Ширяев А.Н. *Вероятность*. М.: Наука, 1980.
- [3] Пономаренко Л.С. Прохоров Ю.В. *Лекции по теории вероятности и математической статистике*. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство Московского университета, 2012.