1 Уравнения Максвелла

1. Теорема Гаусса: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 4\pi Q$.
2. Закон Фарадея: $\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$,
   $\Phi = \int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
3. Закон Био-Савара-Лапласа: $\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{R}}{R^3}$
4. $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$
5. Закон Ампера: $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \dfrac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$
6. Уравнение неразрывности: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$
7. Сами уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho\\
\operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

2 В среде

1. Поляризация и намагниченность
   $\boldsymbol{P} :: \boldsymbol{j}_{\mathrm{pol}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},\ \rho_{\mathrm{pol}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$,
   $\boldsymbol{M} :: \boldsymbol{j}_{\mathrm{m}} = c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
   $\{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{int}} = \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{pol}} + \{\rho,\boldsymbol{j}\}_{\mathrm{m}}$
2. В сильнопеременных
   $\rho_{\mathrm{int}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}$
   $\boldsymbol{j}_{\mathrm{int}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}$
3. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$
4. Уравнения Максвелла в среде:
   $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ex}$
   $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}_{ex} + \boldsymbol{j}_c)$
5. Материальные уравнения (простейшие)
   $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{j}_c = \sigma\boldsymbol{E}$
6. Дисперсия, варианты
   $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$$
   $$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$$
   f, g — функция отклика.

3 Энергетические соотношения

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$
$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$\dfrac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\sigma E^2 - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_{ex}$
Так что если внешние силы не совершают работы, энергия лишь убывает (за счёт выделения тепла).

4 Потенциал

1. Вид потенциала: $\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi,\ \boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$
2. Калибровочная инвариантность: $\begin{cases}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \nabla\chi\\ \varphi' = \varphi + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \chi}{\partial t}\end{cases}$
3. Калибровка Лоренца: $\dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$[1]
4. Уравнения Максвелла примут вид:
   $\square\,\varphi = \dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho$,
   $\square\,\boldsymbol{A} = \dfrac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}$, где $\square = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla, v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

5 Волновые уравнения

$$\square\,\boldsymbol{E} = 0,\ \square\,\boldsymbol{B} = 0$$

$\square\,\boldsymbol{A} = 0,\ \square\,\varphi = 0 \qquad (\square\,\chi = 0)$
Ещё можно φ занулить, выбрав нужную χ [2]

6 Плоские и сферические волны

1. Одномерное волновое уравнение и его решение:
   $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
   $u = f(x - vt) + g(x + vt)$
2. Плоская волна: $A = A(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$[3]
3. Условие поперечности: $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = \dfrac{c}{v}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$
4. $\boldsymbol{S} = v\,w\,\boldsymbol{n}$.
5. Уравнение сферической волны: $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_r u = 0$
6. Его решение: $u(r,t) = \dfrac{1}{r}\big(f(r - vt) + g(r + vt)\big)$ Если рассматривать монохроматические волны, произвольные функции станут выражаться через функции Бесселя.

7 Монохроматические волны

$$u \propto \cos(-\omega t + \alpha)$$

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{v^2}u = 0,\ \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{v}\boldsymbol{n} \ \Rightarrow\ u = \operatorname{Re}\Big(\boldsymbol{E}_0\,e^{i\,(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}\Big)$$

8 Поляризация монохроматической волны (общий случай)

1. $\alpha, \boldsymbol{b}$
   $\alpha :: \boldsymbol{E}_0^2 = |E_0^2|\,e^{-2i\varphi_0}$
   $\boldsymbol{b} :: \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}\,e^{-i\varphi_0},\ \boldsymbol{b}^2 = |E_0^2|,\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\,\boldsymbol{b}_2$
2. $b^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{b}_2$
3. $\dfrac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_1)^2}{b_1^2} + \dfrac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b}_2)^2}{b_2^2} = 1,\ (\boldsymbol{E}\in\mathbb{R}^3)$.

9 Почти монохроматические волны

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t)\,e^{-i\omega t},\ \langle ?\rangle$

10 Поляризационная матрица, параметры Стокса

$|\overline{\boldsymbol{S}}| = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}^\dagger \boldsymbol{E}}$

$\rho = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,\overline{\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{|E_x|^2} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{|E_y|^2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix}$

1. $\det \rho = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$
2. $\det \rho = 0 \Leftrightarrow E_x^0 \propto E_y^0$ [4]
3. I^2, V^2, U^2+Q^2 — инварианты [5]
4. $I(\psi,\delta) = \overline{|\boldsymbol{S}|} = \boldsymbol{\ell}_\delta^\dagger\,\rho\,\boldsymbol{\ell}_\delta =$
   $\dfrac{1}{2}(I + Q\,\cos 2\psi + U\,\sin 2\psi\,\cos\delta - V\,\sin 2\psi\,\sin\delta)$,
   $\boldsymbol{\ell}_\delta = (\cos\psi,\ \sin\psi\, e^{-i\delta})^\top$, а вот выводится это неприятно.

11 Частные случаи поляризации, параметры поляризации

$I = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2}) = \overline{|\boldsymbol{S}|}$

$Q = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{|E_x|^2} - \overline{|E_y|^2})$

$U = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,(\overline{E_x^* E_y} + \overline{E_x E_y^*}) = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Re}\,\overline{E_x^* E_y}$

$V = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,i(\overline{E_x^* E_y} - \overline{E_x E_y^*}) = \dfrac{\varepsilon v}{8\pi}\,2\,\mathrm{Im}\,\overline{E_x^* E_y}$

1. $Q = U = V = 0$ — белый свет
2. $\det\rho = 0$ — эллиптическая поляризация
   (a) $Q = U = 0$ — круговая поляризация
   (b) $V = 0$ — линейная поляризация

   Ещё всякие величины:
   - $R_d^2 = Q^2 + U^2 + V^2$, $r_d^2 = Q^2 + U^2$
   - $P = {}^{R_d}/_{I}$ — степень поляризации
   - $p = {}^{r_d}/_{I}$ — степень линейной поляризации
   - $p_s = {}^{V}/_{I}$ — степень круговой поляризации
   - $\mathrm{tg}\,2\alpha = {}^{U}/_{D}$, α — угол между базисом и осями эллипса.
3. Частичная поляризация:
   - белый свет + эллитическая
   - сумма 2 ортогональных эллиптических

12 Геометрическая оптика

$$u = u_0 e^{i\psi},\ \psi \text{ — эйконал}^{6}$$

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\psi)^2 = 0$$

$\psi = -\omega t + \dfrac{\omega}{c}\psi_1$, $(\nabla\psi_1)^2 = n^2(\boldsymbol{r})$ — уравнение эйконала.

$$\frac{\omega}{c}\,\psi_1 - \omega t = \mathrm{const} \text{ — волновая поверхность}$$

Здесь торжественно забили на вторые прозводные эйконала.

13 Гадость в неоднородной среде

1. $\varepsilon = \varepsilon(r)$, $\mu = 1$
2. Волновые уравнения поменяются:
   $\square\,\boldsymbol{E} - \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$
   $\square\,\boldsymbol{H} - \nabla(\ln\varepsilon)\times \mathrm{rot}\,H = 0$
3. Монохроматический случай:
   $[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{E} + \nabla\big(\boldsymbol{E}\cdot\nabla(\ln\varepsilon)\big) = 0$
   $[\Delta + k^2(r)]\,\boldsymbol{H} + \nabla(\ln\varepsilon)\times \mathrm{rot}\,H = 0$

14 E,H-волны

$\varepsilon = \varepsilon(z)$

1. $\boldsymbol{E} \upuparrows \mathrm{Oy}$, $E = (0,1,0)\,E(z)e^{i\varkappa x}$ — E-волны
2. $\boldsymbol{H} \upuparrows \mathrm{Oy}$, $H = (0,1,0)\,H(z)e^{i\varkappa x}$ — H-волны

Если переписать волновое уравнение выше:

1. $E''(z) + f(z)\,E(z) = 0$, $f(z) = k^2 - \varkappa^2$
2. $w''(z) + f(z)\,w(z) = 0$, $H(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}\,w(z)$,
   $f(z) = k^2 - \varkappa^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$

15 Метод ВКБ

Метод решения таких уравнений: $\dfrac{1}{s^2}u'' + f\,u = 0$, ${}^1/_{s^2}$ — малый параметр.

1. $z = s\,\tau$, $u = e^{is\psi}$
2. В ряд его: $\psi = \psi_0 + \dfrac{i}{s}\,\psi_1 + \cdots$
3. ВКБ-решения (первое приближение)
   $u_{1,2} = f^{-1/4}\,\exp\left(\pm is\displaystyle\int\sqrt{f}\,\mathrm{d}\tau\right)$
   $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$
4. Условия применимости $\langle ?\rangle$:
   $\left|\dfrac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}\tau}\right|^2 \gg \dfrac{1}{s}\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\psi_0}{\mathrm{d}\tau^2}\right| \Leftrightarrow |f| \gg \dfrac{1}{s}\left|\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{1}{f}}}{\mathrm{d}z}\right| \ll 1$

Для предыдущего параграфа просто $\lambda = \dfrac{2\pi}{\sqrt{f}}$

16 Диспергирующая среда, частотная и пространственная дисперсия

Если пространство однородно (и по времени):

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(t'-t,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}t$

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \displaystyle\int_{\Delta V} g(\boldsymbol{r'}-\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t')\,\mathrm{d}V$

Для монохроматических можно сказать чуть больше:

- $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon(\omega,\boldsymbol{k})E(\boldsymbol{r},t)$
- $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ — частотная дисперсия
- $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{k})$ — пространственная дисперсия
- $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega)$,
  $\omega\to\infty \quad \varepsilon(\omega)\to 0$

17 Что-то про преобразование Фурье

- $\widetilde{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$
- $2\pi\delta(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t$

▷ $\widetilde{f * g} = \widetilde{f} \cdot \widetilde{g}$

18 Материальные уравнения для быстропеременных процессов

▷ $\boldsymbol{D}(\omega) = \varepsilon(\omega)\, \boldsymbol{E}(\omega)$

▷ $\boldsymbol{B}(\omega) = \varepsilon(\omega)\, \boldsymbol{H}(\omega)$

▷ $\varepsilon(\omega) = 1 - \dfrac{4\pi N e^2}{m\omega^2}$

▷ $\mu \sim 1$

▷ ⟨⚒⟩

19 Энергетические соотношения при дисперсии

$\operatorname{div} \boldsymbol{S} = -\dfrac{1}{4\pi} \left(\boldsymbol{E} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right)$
Для монохроматических волн:

▷ $\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\, \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu(\omega)\, \boldsymbol{H}$

▷ $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $\mu(\omega) = \mu_1 + i\mu_2$

▷ $\overline{\operatorname{div} \boldsymbol{S}} = \dfrac{-\omega}{8\pi} \left(\varepsilon_2 \overline{|\boldsymbol{E}|^2} + \mu_2 \overline{|\boldsymbol{H}|^2} \right) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0, \mu_2 > 0$ ⟨?⟩[7]

$\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$ — прозрачная среда. Тогда можно ввести плотность энергии, как-то так:

1. припомнить $\operatorname{div} \boldsymbol{S}$
2. первый член: $\dfrac{1}{16\pi} \left(\boldsymbol{E}\, \dfrac{\partial \boldsymbol{D}^*}{\partial t} + \boldsymbol{E}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right)$
3. $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\, \dfrac{\partial \boldsymbol{E}^0}{\partial t}\, e^{-i\omega t}$
4. $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = -\dfrac{\partial w}{\partial t}$
5. $\overline{w} = \dfrac{1}{8\pi} \left(\dfrac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\, \overline{|\boldsymbol{E}^0|^2} + \dfrac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega}\, \overline{|\boldsymbol{H}^0|^2} \right)$

20 Волны [монохроматические] в диспергирующей среде[8]

Здесь $k := \sqrt{\varepsilon(\omega)\, \mu(\omega)}\, \dfrac{\omega}{c} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2$, $\{\varepsilon, \mu\}_2 \ll \{\varepsilon, \mu\}_1$.

$\boldsymbol{k}_1 \nparallel \boldsymbol{k}_2$ Неоднородная плоская волна:
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, e^{-\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r}}\, e^{i(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}$

$\boldsymbol{k}_1 \upuparrows \boldsymbol{k}_2$ Однородная плоская волна:

1. $k = (n + i\varkappa)\, {}^{\omega}/_{c}$ — показатель преломления и затухания,
2. $E(z, t) = E_0\, e^{-\varkappa\omega z/c}\, e^{-i\omega(t - nz//c)}$
3. $\overline{S(z)} = S_0\, e^{-2\varkappa\omega\, z/c} = S_0 e^{-\alpha z}$, α — к-т поглощения.

21 Групповая скорость

1. $v_{\mathrm{gr}} = \dfrac{\overline{|\boldsymbol{S}|}}{\overline{w}} = \dfrac{c}{\frac{\mathrm{d}n\omega}{\mathrm{d}\omega}}$
2. $v_{\mathrm{gr}} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}} = \dfrac{c}{\frac{\mathrm{d}n\omega}{\mathrm{d}\omega}}$

Отсюда $v_{\mathrm{gr}} = v_\phi \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}}$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} > 0$ — нормальная дисперсия, $v_{\mathrm{gr}} < v_\phi$

▷ $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} < 0$ — аномальная дисперсия, $v_{\mathrm{gr}} > v_\phi$

22 Дисперсия на атоме

1. $m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega_0^2 \boldsymbol{r} + \gamma m \dot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0\, e^{i\omega t} \Rightarrow$
$\boldsymbol{r} = \dfrac{e}{m}\, \dfrac{\boldsymbol{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$
2. $\boldsymbol{P} = ne\, \boldsymbol{r} \Rightarrow \varepsilon(\omega) = 1 + \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$,
$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2\, (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$
$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{\omega_p^2\, \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$
3. $\omega \ll \omega_0$
4. $\omega \gg \omega_0$

23 СТО, событие и интервал

1. Все явления природы одинаковы во всех ИСО
2. $c = \mathrm{const}$

Мировая точка	::	(x, y, z, t)
Событие	::	что-то прозошедшее в мировой точке
Мировая линия	::	траектория точки (в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$)
Интервал	::	$S_{12}^2 = c(t_2 - t_1)^2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2$

▷ $S^2 > 0$ — времениподобный интервал (причинная связь)

▷ $S^2 < 0$ — пространственноподобный интервал

▷ $S^2 = 0$ — светоподобный интервал

24 Преобразования Лоренца

▷ Линейны

▷ Сохраняют интервал

▷ одномерные: $\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(t - \frac{Vx}{c^2}\, x) \end{aligned}$

▷ в общем случае: $\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} - \gamma t\, \boldsymbol{V} + (\gamma - 1)\, \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V}}{V^2}\, \boldsymbol{V} \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}}{c^2}\, x \right) \end{aligned}$
или $\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \gamma(\boldsymbol{r} - t\boldsymbol{V}) + (\gamma - 1)\, \frac{\boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{r})}{V^2} \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}}{c^2}\, x \right) \end{aligned}$

$\Delta\tau = \Delta t \cdot \dfrac{1}{\gamma(V)} \leqslant \Delta t$
τ — собственное время, в той СО, где тело неподвижно. Именно в ней $\Delta \boldsymbol{r} = 0$

25 Лоренцево сокращение и сложение скоростей

В собственной СО $\Delta t' = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r}_\parallel &= \gamma(\Delta \boldsymbol{r}'_\parallel)\\ \Delta \boldsymbol{r}_\perp &= \Delta \boldsymbol{r}'_\perp\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_0 \mapsto V_0/\gamma$$

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{V} + (1 - {}^1/_\gamma)\,\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{V}\times \boldsymbol{v})/V^2}{1-\frac{\boldsymbol{V}\cdot \boldsymbol{v}}{c^2}}$$

1. $\boldsymbol{v} \upuparrows \boldsymbol{V} \Rightarrow v' = \dfrac{v-V}{1 - {}^{vV}/_{c^2}}$
2. $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}\sqrt{1-{}^{V^2}/_{c^2}} - \boldsymbol{V}$, $\gamma(v)=\gamma(V)\,\gamma(v')$

26 Инвариантные объекты в СТО и махинации с ними ⟨⚒⟩

Λ — преобразование Лоренца

1. $a = \mathrm{const}$ /S^2, $\mathrm{d}^4 r$/
2. $a^\alpha = \Lambda^\alpha_\mu a^\mu$ /r, u, ∇ …/
3. $A^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \Lambda^{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{\alpha}}\,\Lambda^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\nu}}\, A^{\boldsymbol{\nu}}_{\boldsymbol{\mu}}$ /F^{ik}, g_{ij}, …/

▷ $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle \\ \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle \\ \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle \\ \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle & \langle⚒\rangle \end{pmatrix}$

▷ $a\cdot b = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$

27 Скорость и импульс в СТО

▷ $u = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \{\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}\}$, $\beta = v/c$

▷ $p = m\,u = \{p_0, \boldsymbol{p}\}$

1. $\boldsymbol{p} = m\,\gamma\,\boldsymbol{v}$, $p_0 = m\,\gamma\,c$
2. $p^2 = m\,c^2 \Rightarrow p_0^2 = m^2\,c^2 + p^2$ (закон сохранения энергии-импульса)
3. $\dfrac{\mathrm{d}p_0 c}{\mathrm{d}t} = m\gamma^3(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{v}\cdot \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$
4. $p_0 = \mathcal{E}/c$ $T(p) = p_0\,c - m\,c^2$

28 Сложение скоростей

$$w = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$$

▷ $w = \gamma^2\left\{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w})\gamma^2, \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{\beta}\gamma^2\right\}$

▷ $w\cdot\beta = 0$ (этакая ортогональность)

▷ $w^2 = \gamma^2\left(-\boldsymbol{w}^2 + (\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{w})^2\right)$

$u_1 = \{\gamma_1 c, \gamma_1 \boldsymbol{v}_1\}$, $u_2 = \{\gamma_2 c, \gamma_2 \boldsymbol{v}_2\}$

1. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_1$
2. $u'_1 = \{c, 0\}$, $u'_2 = \{\gamma_r c, \gamma_r \boldsymbol{v}_r\}$
3. $\gamma_r = \gamma_1\,\gamma_2\,\left(1 - \dfrac{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)}{c^2}\right) = \dfrac{1}{c^2}\,u_1\cdot u_2 = \mathrm{inv}$
4. $\boldsymbol{v}_r = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_r}\,\left(\boldsymbol{v}_2 - \gamma_2\boldsymbol{v}_2 + (\gamma-1)\dfrac{\boldsymbol{v}_1\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)}{\boldsymbol{v}_1^2}\right)$
5. тосковатт

29 Импульс фотона

$k = \left\{\dfrac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right\} = \dfrac{\omega}{c}\{1, \boldsymbol{n}\}$ [9], $p_\gamma = \hbar\,\boldsymbol{k}$

1. Эффект Допплера: $\omega' = \omega\gamma(1 - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n})$
2. Абберация: $\boldsymbol{n}' = \dfrac{\boldsymbol{n} - \gamma\boldsymbol{\beta} + (\gamma-1)\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{\beta}/\beta^2}{\gamma(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}$

▷ $\sin(\alpha'-\alpha) = \sin\alpha\,\dfrac{\beta - (1-\gamma^{-1})\,\cos\alpha)}{1-\beta\,\cos\alpha}$

▷ $\cos\alpha' = \dfrac{\cos\alpha - \beta}{1-\beta\cos\alpha}$

▷ $\sin\alpha' = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{\sin\alpha}{1-\beta\cos\alpha}$

30 4-ток и потенциал

j :: $j = \{c\,\rho, \rho\,\boldsymbol{v}\}$ /$\nabla j = \partial_t\rho + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0 = \mathrm{inv}$/

A :: $A = \{\varphi, \boldsymbol{A}\}$ /$\Box A = \dfrac{4\pi}{c}\,j$/

31 Тензор электромагнитного поля

$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$

▷ $F_{ik} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ -E_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ -E_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}$

▷ $F^{ik} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$

▷ $F_{ik} = -F_{ki}$

▷ $F^{ik}F_{ik} = 2H^2 - 2E^2$

▷ $\dfrac{1}{2}\,e^{prst}F_{pr}F_{st} = -4\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$

▷ $G^{ik} = \dfrac{1}{2}e^{iklm}F_{lm} = (-\boldsymbol{H}, -\boldsymbol{E})$

Уравнения Максвелла:

$$\begin{cases}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F\gamma\alpha + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\dfrac{4\pi}{c}j^\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0\\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\dfrac{4\pi}{c}j^\beta\end{cases}$$

32 Преобразование Лоренца для поля

для $\boldsymbol{\beta}\upuparrows\boldsymbol{i}$ $F' =$

$$\begin{array}{cccc} 0 & F_{0,1} & -\gamma\,(F_{2,1}\beta - F_{0,2}) & \gamma\,(F_{1,3}\beta + F_{0,3}) \\ F_{1,0} & 0 & \gamma\,(F_{0,2}\beta - F_{2,1}) & \gamma\,(F_{0,3}\beta + F_{1,3}) \\ \cdots & \cdots & 0 & -F_{3,2} \\ \cdots & \cdots & F_{3,2} & 0 \end{array}$$

(остальное из антисимметричности) или [10]

$$\begin{array}{cccc} 0 & E_1 & \gamma\,(E_2 - \beta H_3) & \gamma\,(\beta H_2 + E_3) \\ -E_1 & 0 & -\gamma\,(H_3 - \beta E_2) & \gamma\,(H_2 + \beta E_3) \\ \cdots & \cdots & 0 & -H_1 \\ \cdots & \cdots & H_1 & 0 \end{array}$$

▷ $\boldsymbol{E}'_\parallel = \boldsymbol{E}_\parallel$, $\boldsymbol{E}'_\perp = \gamma\,(\boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{H})$

▷ $\boldsymbol{E}' = \gamma\boldsymbol{E} + \dfrac{\gamma}{c}\,\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H} - (\gamma-1)\,\dfrac{\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{E})}{V^2}$

▷ $\boldsymbol{H}' = \gamma\boldsymbol{E} - \dfrac{\gamma}{c}\,\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E} - (\gamma-1)\,\dfrac{\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{H})}{V^2}$ [11]

33 Тензор энегрии-импульса

$$\triangleright\ m\,\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}\,F^i_k\,u^k \Rightarrow \mu\,\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\,F^i_k\,j^k =: f^i_l$$

Поле:

$$T^{ik} := \frac{1}{4\pi}\left(-F^{is}\,F^k_s + \frac{1}{4}\,g^{ik}\,F_{ps}F^{ps}\right)$$

$T = (\omega, S/c, \sigma)$ — плотность энергии, плотность потока энергии (импульс для поля) и плотность потока компоненты импульса. Ещё σ — Максвелловский тензор напряжений.

1. $j = \dfrac{c}{4\pi}\,\nabla\cdot F$ (неоднородные из уравнений Максвелла)
2. $f^i = \dfrac{1}{4\pi}F^i_k\,(\nabla\cdot F)^k$
3. $-\partial_k T^{ik} = (\partial_k F^{is})\,F^k_s + F^{is}\,\partial_k F^k_s + 0 = \big(\{\underbrace{\text{антисим}}_{=0}\} + \{\text{сим}\}\big)F^{is} + F^i_s\,\partial_k F^{ks} = f^i$
4. $\sigma_{ik} = \dfrac{1}{4\pi}\left(-E_iE_k - H_iH_k + \dfrac{1}{2}\delta_{ik}\,(E^2+H^2)\right)$
5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = -f^0 = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$
6. $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial S^i}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i = -f^i_L$

Частицы: $T^{ik}_{(p)} = \dfrac{\mu}{\gamma}\,u^iu^k$, $\nabla(T_{(p)} + T) = 0 \Longrightarrow$

1. $\dfrac{\partial w_0}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S_0} = 0$
2. $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial S^i_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0)_i = 0$

34 Потенциалы точечного заряда

запаздывающие потенциалы:

$\rho(\boldsymbol{r},t) = e\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)) \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t)\,r_0'(t)$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1,t_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_1,t_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}_1$$

$c\,(t - t_1) = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$ — условие запаздывания

35 Вычисление этих потенциалов

$s = R_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}_0$

$$\varphi = \frac{e}{s} \quad \boldsymbol{A} = \frac{e\beta}{s}$$

$$A = \frac{e\,u}{u\cdot R_0}$$

36 Напряжённость поля точечного заряда

Заметки

1 при этом подходят все χ :: $\Box\chi = 0$

2 В предыдущем нельзя, может не оказаться решением

3 вторую волну выкинули, нам обычно хватает какого-то частного решения.

4 В поляризационной матрице все E можно позаменять на E^0 (фазы всё равно сокращаются), а в предпредыдущем пунке у нас как раз $E_x^0 = b_1\, e^{-i\varphi_0}$, $E_y^0 = ib_2\, e^{-i\varphi_0}$

5 Отсюда, кстати, очевидно преобразование параметров Стокса при поворотах

6 ψ_1 — то, что названо эйконалом у Бутикова. Вроде у него правильнее, но $\langle ? \rangle$

7 Тут непонятно что с плотностью энергии. Но, вроде, если амплитуда сохраняется и колебания гармонические, то $\dfrac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} = 0$.

8 Бардак в конспекте, писал по Бутикову

9 Для корректности надо доказать инвариантность фазы, а это следует из преобразований F^{ik} монохроматических волн

10 я это не считал, это всё `maxima`

11 Если мы имеем дело с плоской волной, то $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\beta})$, $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, -\boldsymbol{\beta})$ будут образовывать правые тройки. Так что понятно, почему у $\boldsymbol{V}$ поменялся знак