<матан, 4 сем>

Лектор: А. А. Лодкин
Записал :taxus

1 июня 2017 г.

Оглавление

Глава 1: Теория меры и интегралы по мере

§ 1 Системы множеств

Определение 1. Пусть здесь (и дальше) X — произвольное множество. Тогда $\mathcal{P}(X) \equiv 2^X$ — множество всех подмножеств X.

E.g. $X = \{1 \,..\, n\} \Rightarrow \#\mathcal{P}(X) = 2^n$ (это количество элементов, если что)

Определение 2 (Алгебра)**.** Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — алгебра множеств, если

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

Замечание. Заметим, что в алгебре пересечение (или объединение) *конечного* числа её элементов лежит в алгебре. Это можно доказать простой индукцией. А вот для бесконечных объединений пользоваться индукцией уже нельзя, ведь $\infty \notin \mathbb{N}$.

Определение 3 (σ-алгбера)**.** Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$. Тогда $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ — алгебра
2. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Определение 4. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathcal{A} \supset \mathcal{E}\}$$

эта конструкция — сигма-алгебра, просто аксиомы проверить.

§ 2 Борелевская сигма-алгебра

Определение 1. Пусть $\mathcal{O}$ — все открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Ячейка в $\mathbb{R}^n$)**.** Обозначать её будем Δ^n, по размерности соответствующего пространства.

$$\Delta^1 = \begin{cases} [a; b) \\ (-\infty; b) \\ [a; +\infty) \\ (-\infty; +\infty) \end{cases} \qquad \forall\, n \;\; \Delta = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k^1$$

Ещё введём алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{C}ell_n = \{A \mid A = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Delta_k\}$

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(X)$*,* $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \mathcal{E}_2$*. Тогда* $\sigma(\mathcal{E}_1) \supset \sigma(\mathcal{E}_2)$

Теорема 2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{C}ell_n)$*.*

Пример 1. Все множества нижё — борелевские.

⟨1⟩ $\mathcal{O}$.

⟨2⟩ $\mathcal{F} = \{A \mid \overline{A} \in \mathcal{O}\}$.

⟨3⟩ $\left(A = \bigcap\limits_{\substack{k=1 \\ G_k \in \mathcal{O}}}^{\infty} G_k\right) \in G_\delta$.

⟨4⟩ $\left(B = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ F_k \in \mathcal{F}}}^{\infty} F_k\right) \in F_\sigma$.

⟨5⟩ $\left(C = \bigcup\limits_{\substack{k=1 \\ A_k \in G_\delta}}^{\infty} A_k\right) \in G_{\delta\sigma}$.

У всех этих множеств со сложными индексами δ — пересечение, σ — объединение, G — операция над открытыми в самом начале, F — над замкнутыми.

§ 3 Мера

Определение 1. Пусть задано X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $A_k \in \mathcal{A}$. Тогда $\mu\colon \mathcal{A} \to [0; +\infty]$ — мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)}_{\in \mathcal{A}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Здесь никто не обещает, что будет именно σ-алгебра.

Множества $A \in \mathcal{A}$ в таком случае называются μ-измеримыми.

Пример 1. $a \in X$, $\mu(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$ — δ-мера Дирака.

Пример 2. $a_k \in x$, $m_k \geqslant 0$, $\mu(a) := \sum\limits_{k\colon a_k \in a} m_k$ — «молекулярная» мера.

Пример 3. $\mu(A) = \#A$ — считающая мера. [1]

§ 4 Свойства меты

Здесь всюду будем рассматривать тройку $(X, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \mu)$

Утверждение 1 (Монотонность меры). *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$.
Тогда $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Утверждение 2. *Пусть* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(B) < +\infty$.
Тогда $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Утверждение 3 (Усиленная монотонность). *Пусть* $A_{1..n}, B \in \mathcal{A}$, $A_{1..n} \subset B$ *и дизъюнктны.*
Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu B$

Утверждение 4 (Полуаддитивность меры). *Пусть* $B_{1..n}, A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$.

Тогда $\mu A \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(B_k)$.

[1] она считает, не считывает ⌣̈

▼

Сделать B_k дизъюнктными: $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_k$. Затем представить A как дизъюнктное объединение D_k: $D_k = C_k \cap A$. Так можно сделать, потому что

$$A = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = A \cap \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap C_k$$

Ну а тогда

$$\mu(A) = \sum_k \mu D_k \leqslant \sum_k \mu C_k \leqslant \sum_k \mu B_k$$

▲

Утверждение 5 (Непрерывность меры снизу)**.** *Пусть* $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

[1]

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$

Утверждение 6 (Непрерывность меры сверху)**.** *Пусть* $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu A_1 < +\infty$.

Тогда $\mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$

`<+Тут будет картинка про метод исчерпывания Евдокса+>`

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Тогда μ — полная, если

$$\forall \in \mathcal{A} \colon \mu A = 0 \, \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} \, :: \, \mu B = 0$$

Определение 2. Мера μ на $\mathcal{A}$ называется σ-конечной, если

$$\exists X_n \in \mathcal{A}, \mu X_n < +\infty \, :: \, \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры подмножеств X, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mu_1 \colon A_1 \to [0; +\infty]$, $\mu_2 \colon A_2 \to [0; +\infty]$. Тогда μ_2 называется продолжением μ_1.

Теорема 7 (Лебега-Каратеодора)**.** *Пусть μ — сигма-конечная мера на $\mathcal{A}$. Тогда*

1. *Существуют её полные сигма-конечные продожения*

2. *Среди них есть наименьшее: $\overline{\mu}$. Её ещё называют стандартным продолжением.*

`<+идея доказательства+>` Пока надо запомнить, что стандратное продолжение — сужение внешней «меры» на хорошо разбивающие множества.

§ 5 Объём в $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега

Определение 1. Пусть $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$, $\Delta_k = [a_k, b_k)$. Тогда

$$v_1 \Delta_k \equiv |\Delta_k| := \begin{cases} b_k - a_k, & a_k \in \mathbb{R} \wedge b_k \in \mathbb{R} \\ \infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$v\Delta \overset{(\in R^n)}{\equiv} v_n \Delta := |\Delta_1| \cdots |\Delta_n|$$

Для всего, что $\in \mathcal{C}ell_n$, представим его в виде дизъюнктного объединения Δ_j. Тогда $vA := \sum_{j=1}^{q} v\Delta_j$.

[1] Опять-таки никто не сказал, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра.

Замечание. Здесь радикально всё равно, входят ли концы — у них мера ноль.

Теорема 1. v — *конечно-аддитивен, то есть*

$$\forall A, A_{1..p} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k \ \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{p} vA_k$$

Теорема 2. v — *счётно-аддитивен, то есть*

$$\forall A, A_{1..} \in \mathcal{Cell}, A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \ \Rightarrow vA = \sum_{k=1}^{\infty} vA_k$$

□ Здесь в конспекте лишь частный случай про ячейки. ■

Определение 2 (Мера Лебега)**.** $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{Cell}_n$. Тогда $\lambda_n = \overline{v_n}$, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{A}}$ — мера Лебега и алгебра множеств, измеримых по Лебегу, соответственно.

Свойства меры Лебега

(1) ▷ $\lambda\{x\} = 0$

(2) ▷ $\lambda\big(\{x_k\}_k\big) = 0$

(3) ▷ $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

(4) ▷ $L \subset \mathbb{R}^m, m < n \Rightarrow \lambda_n L = 0$

А это уже целая теормема.

Теорема 3 (Регулярность меры Лебега)**.** *Пусть* $A \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\exists G \in \mathcal{O}, F \in \mathcal{F} \ :: \ F \subset A \subset G \wedge \begin{cases} \lambda(G \setminus A) < \varepsilon \\ \lambda(A \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

□ куча скучных оценок квадратиками. ■

`<+Пример неизмеримого множества на окружности+>`

§ 6 Измеримые функции

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$. Пусть ещё $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда f называется измеримой относительно $\mathcal{A}$, если

$$\forall \Delta \subset \mathbb{R} \ :: \ f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$$

Теорема 1. *Пусть f измеримо относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы и следующие (Лебеговы) множества*

1 типа $\{x \in X \mid f(x) < a\} \equiv X[f < a]$

2 типа $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\} \equiv X[f \leqslant a]$

3 типа $\{x \in X \mid f(x) > a\} \equiv X[f > a]$

4 типа $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\} \equiv X[f \geqslant a]$

При этом верно и обратное: если измеримы множества какого-то отдного типа, то f измерима.

Теорема 2. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ измеримы относительно $\mathcal{A}$ и $g\colon \mathbb{R}^n \to R$ непрерывна. Тогда измерима и $\varphi(x) = g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$.*

Замечание. В частности, $f_1 + f_2$ измерима.

Теорема 3. *Пусть $f_1, f_2, \ldots$ измеримы относительно $\mathcal{A}$. Тогда измеримы* $\sup f_n, \inf f_n, \liminf f_n, \limsu$ *Последний, правда, может не существовать.*

$\square$ Следует из непрерывности меры. $\blacksquare$

Определение 2. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — измерима. Тогда она называется простой, если принимает конечное множество значений.

Определение 3 (Индикатор множества)**.**

$$E \subset X, \mathbb{1}_E := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Он, как видно совсем простая функция.

Утверждение 4. f *— простая* $\Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{E_k}$

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $f \geqslant 0$. Тогда*

$$\exists\,(\varphi_n)\colon 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \;::\; \varphi_n \nearrow f \;\textit{(поточечно)}$$

§ 7 Интеграл по мере

Определение 1. Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}_\sigma, \mu)$, f — измерима.

[1] f — простая.

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{p} c_k \mu E_k$$

[2] $f \geqslant 0$.

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{ \int\limits_X g\,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; g\text{-простая}, 0 \leqslant g \leqslant f \right\}$$

[3] f общего вида.

$$f_+ = \max\{f(x), 0\}$$
$$f_- = \max\{-f(x), 0\}$$
$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f_+\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_X f_-\,\mathrm{d}\mu$$

Здесь нужно, чтобы хотя бы один из интегралов в разности существовал.

Замечание 1. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu := \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \mu(E_k \cap A)$

Замечание 2. Дальше измеримость и неотрицательность или суммируемость f будет периодически называться «обычными» условиями.

Утверждение 1. $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \cdot \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu.$

Свойства интеграла от неотрицательных функций Здесь всюду функции неотрицательны и измеримы, что не лишено отсутствия внезапности.

$\boxed{\text{A}_1}$ $0 \leqslant f \leqslant g$. Тогда $\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{A}_2}$ $A \subset B \subset X$, $A, B \in \mathcal{A}$, $f \geqslant 0$, измерима. Тогда $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu$

$\boxed{\text{A}_3}$ см теорему 1.8.1.

$\boxed{\text{A}_4}$ $\int\limits_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}mu + \int\limits_X g \,\mathrm{d}mu$

$\boxed{\text{A}_5}$ $\int\limits_X (\lambda g) \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}mu$

§ 8 Теорема Беппо Лéви

Теорема 1. *Пусть* (f_n) *— измеримы на* X*,* $0 \leqslant f_1 \leqslant \cdots$*,* $f = \lim_n f_n$*. Тогда*

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

§ 9 Свойства интеграла от суммируемых функций

Определение 1. f — суммируемая (на X, μ), если $\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Весь класс суммируемых (на X, μ) функций обозначается через $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Здесь всюду функции $\in \mathcal{L}$

$\boxed{\text{B}_1}$ $f \leqslant g \Rightarrow \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{B}_2}$ $\int\limits_X (f \pm g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu \pm \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{B}_3}$ $\int\limits_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{B}_4}$ $|f| \leqslant g \Rightarrow \left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X g \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{B}_5}$ $\left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

$\boxed{\text{B}_6}$ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$

$\boxed{\text{B}_7}$ $|f| \leqslant M \leqslant +\infty \Rightarrow \left|\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant M\mu X$

§ 10 Счётная аддитивность интеграла

Теорема 1. *Пусть задана тройка* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, f *— измерима и* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}$. *Пусть к тому же*

$$A, A_{1..} \subset X, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Тогда

$$\int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu$$

§ 11 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 1. *Пусть* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \;::\; \forall A \in \mathcal{A}, A \subset X \colon \mu A < \delta \;::\; \left| \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon$$

§ 12 Интеграл от непрерывной функции по мере Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \in C([a; b])$, λ *— мера Лебега на* $X = [a; b]$. *Тогда*

$$f \in \mathcal{L}, \int\limits_{[a;b]} f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_a^b f = F(b) - F(a),$$

где F *— первообразная* f.

§ 13 Сравнение подходов Римана и Лебега

Сначала вспомним определения того, о чём собираемся рассуждать.

Определение 1 (Интеграл Римана)**.** Пусть $f \in C([a; b])$ $a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Тогда

- $\tau = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ — разбиение отрезка $[a; b]$
- $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение разбиения τ
- $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длина i-го отрезка
- $r = r(\tau) = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$ — ранг разбиения
- $\sigma = \sigma(\tau, \xi, f) := \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ — сумма Римана

Сам интеграл определяется как-то так

$$\int\limits_a^b f \, \mathrm{d}x = \lim_{r(\tau) \to 0} \sigma(\tau, \xi, f)$$

Определение 2 (Интеграл Лебега)**.** см. 1.7.1. В качестве множества X понятное дело, отрезок $[a; b]$.

Пример 1. Пусть $X = [0; 1]$. Тогда $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, но не по Риману.

`<+картиночка с обоими интегралами+>`

§ 14 Сравнение несобственного интеграла и интеграла Лебега

Теорема 1. *Пусть* $f \geqslant 0 \vee f \in \mathcal{L}\big([a;b), \lambda\big)$. *Тогда* $\displaystyle\int\limits_{[a;b)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{a}^{\to b} f$.

□ ⟨⚒⟩ Свести к собственному, а дальше непрерывность меры. ■

§ 15 Интеграл по дискретной мере и мере, задаваемой плотностью

Теорема 1. *Пусть* $\mu = \sum_k m_k \delta_{a_k}$, $\{a_k\} \in X$ *и* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ *или* $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. *Тогда*

$$\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_k f(a_k) \cdot \underbrace{m_k}_{\mu\{a_k\}}$$

□ ⟨⚒⟩ Счётная аддитивность интеграла поможет. 1.10.1 ■

Пример 1. Пусть $\mu A = \# A$. Тогда

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} = \int\limits_{\mathbb{N}^2} f(m,n) \,\mathrm{d}\mu$$

Причем условия суммируемости [1] ряда такие же, как у интеграла Лебега:

$$\left[\begin{array}{l} \forall\, m, n \in \mathbb{N} \;::\; a_{m,n} \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty \end{array}\right.$$

Определение 1. Пусть задана пара [2] (X, μ), $\rho\colon X \to \mathbb{R}$, измерима, $\rho \geqslant 0$. Тогда

- $\nu(E) := \displaystyle\int\limits_E \rho \,\mathrm{d}\mu$ — мера, задаваемая плотностью ρ
- ρ — плотность меры ν относительно меры μ.

Замечание. Она правда мера, интеграл счётно-аддитивен.

Теорема 2. *Пусть выполнены «обычные» условия на* f. *Тогда* $\displaystyle\int\limits_X f \,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X f\rho \,\mathrm{d}\mu$.

§ 16 Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл по распределению

Определение 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $F\colon I \to \mathbb{R}$, $F \nearrow$, $F(x) = F(x-0)$ (непрерывна слева).[3]. Рассмотрим порождённую полуинтервалами $[a;b) \subset I$ σ-алгебру. Введём «объём» $\nu_F\colon \nu([a;b)) = F(b) - F(a)$.

Тогда мера Лебега-Стилтьеса μ_F — стандартное продолжение ν_F на некоторую σ-алгебру $\mathcal{M}_F$.

Замечание 1. Здесь надо доказывать *счётную* аддитивность, а то как продолжать ν, если она — не мера?

---

[1] здесь объявим бесконечность приличным значением суммы ряда

[2] тройка, но все же поняли, что сигма-алгебра имелась в виду

[3] А можно и без. Тогда $\nu([a;b)) = F(b-0) - F(a-0)$, см. **??**

Свойства мемы Лебега-Стилтьеса

Утверждение 1. *Пусть* $\Delta = [a; b]$. *Тогда* $\mu\Delta = F(b+0) - F(a)$.

Утверждение 2. *Пусть* $\Delta = \{a\}$. *Тогда* $\mu\Delta = F(a+0) - F(a)$.

Утверждение 3. *Пусть* $\Delta = (a; b)$. *Тогда* $\mu\Delta = F(b) - F(a+0)$.

Лемма 4. *Пусть* $F \in C(I)$, $\Delta \subset I$. *Тогда* $\mu_F(\Delta) = \int\limits_{\Delta} F'(t)\,\mathrm{d}\lambda$.

Теорема 5. *Пусть* $F \nearrow$, *кусочно-гладка на* $I \subset \mathbb{R}$, *а для* f *выполнены обычные условия* ($X = \mathcal{B}$, $\mu = \mu_F$)*. Промежутки гладкости* F *обозначим за* (c_k, c_{k+1})*. Тогда*

$$\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu_F = \sum_k \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} fF'\,\mathrm{d}\lambda + \sum_k f(c_k)\underbrace{\Delta_{c_k}F}_{\text{скачок в } c_k}$$

Определение 2 (Образ мемы)**.** Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мемой, $f\colon X \to Y$. Превратим и Y в пространство с мемой.

1. $\mathcal{A}' = \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mu' \equiv \nu = \mu \circ f^{-1}$.

Теорема 6. *Пусть для* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *выполнены обычные условия* ($\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $\mu = \nu$)*. Тогда* $\int\limits_Y g\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_X (g \circ f)\,\mathrm{d}\mu$.

Определение 3 (Функция распределения)**.** Пусть задано (X, μ), $\mu X < +\infty$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Тогда $F(t) := \mu X[f < t]$. Как видно, она возрастает и непрерывна слева.

Теорема 7. *Пусть задано* (X, μ), $\mu X < +\infty$, *выполнены обычные условия для* f. *Тогда* $\int\limits_X f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}\mu_F$.

§ 17 Интеграл Эйлера-Пуассона

Утверждение 1. $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\lambda_2 = \pi$

§ 18 Вероятностный смысл мемы

`<+Табличка с соответствием+>`

§ 19 Геометрический смысл меры Лебега. Принцип Кавальери

Определение 1. Пусть задано (X, μ), $P(x)$ — предикат. Говорят, что $P(x) = 1$ почти везде (п.в.), если $\mu\{x \mid P(x) = 0\} = 0$.

Определение 2. $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ п.в. .

Лемма 1 (Беппо-Леви для рядов)**.** *Пусть заданы* (X, μ), $u_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, u_n *измеримы,* $u_n \geqslant 0$. *Тогда* *a)* $\displaystyle\int\limits_x \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_x u_n \,\mathrm{d}\mu.$

b) Если эти числа конечны, то ряд $\sum_n u_n$ *сх п.в.*

Лемма 2 (Беппо-Леви «вверх ногами»)**.** *Пусть задано* (X, μ), (f_n), *измеримы,* $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$. *Пусть ещё* $f_1 \in \mathcal{L}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

`<+Здесь была ещё пара лемм, но они не особо используются дальше. Вроде+>`

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_{m+n}$.

- ▷ $E_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in E\}$ — «срез»
- ▷ $\Pi_1(E) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid E_x \neq \varnothing\}$ — «проекция»

`<+картиночка для` $\mathbb{R}^2$`+>`

Теорема 3. *Пусть* $E \in \mathcal{M}_{m+n}$, $E_x \in \mathcal{M}_n$ *п.в.* x, $\varphi(x) = \lambda_n(E_x)$ *измерима относительно* $\mathcal{M}_m$. *Тогда*

$$\lambda_{m+n}(E) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E_x) \,\mathrm{d}\lambda_m$$

`<+много букв+>`

Определение 4 (График)**.** $\Gamma^f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = f(x)\}$.

Определение 5 (Подграфик)**.** $\Gamma^f_- = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leqslant t \leqslant f(x)\}$.

Определение 6 (Надграфик)**.** $\Gamma^f_+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \geqslant f(x)\}$.

Теорема 4 (Геометрический смысл интеграла)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *измерима,* $\geqslant 0$. *Тогда*

1. Γ^f_- *измеримо.*
2. $\lambda_{n+1}\Gamma^f_- = \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n$ *измеримо.*

§ 20 Сведение кратного интеграла к повторному

Будем в дальнейшем обозначать интегрирование по мере через $\mathrm{d}x$ (ну или $\mathrm{d}y$), размерность определяется из размерности x. Еще обозначим $\mathrm{d}(x, y)$ через $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Теорема 1 (Тонелли)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, *измерима,* $\geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \,\mathrm{d}y$$

Теорема 2 (Фубини)**.** *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, *измерима,* $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{m+n})$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \,\mathrm{d}y$$

§ 21 Мера Лебега и аффинные преобразования

Главные герои этого параграфа:

- ◯ Сдвиг: $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Tx = x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$.
- ◯ Поворот с растяжением: $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, L — линейный император.

Утверждение 1. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow T(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow L(E) \in \mathcal{M}$.

Утверждение 3. *Пусть* $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *линейно. Тогда*

$$\exists\, C \geqslant 0 \forall\, E \in \mathcal{M} \;::\; \lambda L(E) = C\lambda E$$

Теорема 4. *C из прошлой теоремы равно* $\left|\det[L]\right|$.

`<+тут декомпозиция на ортогональный и диагональные операторы и 2 леммы+>`

§ 22 Мера образа при гладком отображении

Обозначение. $J_F(x) \equiv \det F'(x)$

Теорема 1. *Пусть* $E \in \mathcal{M}$, $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, *гладкая биекция. Тогда* $F(E) \in \mathcal{M}$ *и* $\lambda F(E) = \int\limits_E |\det F'(x)| \mathrm{d}x$.

$\square$ ⟨☹⟩ ⟨⚒⟩ $\blacksquare$

§ 23 Глакая замена переменной в интеграле

Теорема 1. *Пусть* $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \to R^n$, *гладкая биекция. Пусть к тому же* $E \subset F(G) \in \mathcal{M}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ *с обычными условиями.*

Тогда

$$\int\limits_E f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{F^{-1}(E)} f(F(x)) \cdot |J_F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Пример 1 (Полярные координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r$

Пример 2 (Сферические координаты)**.** ⟨⚒⟩ $|J| = r^2 \cos\psi$

§ 24 Предельный переход под знаком интеграла

Определение 1 (Всякие сходимости)**.** Пусть $(f_n)\colon X \to \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, μ — мера на X.

$$\begin{array}{lll}
f_n \to f & := & \forall\, x \in X \;::\; f_n(x) \to f(x) \\
f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f & := & \sup\limits_X |f_n - f| \to 0 \\
f_n \to f \text{ п.в.} & := & \exists\, N \subset X\colon \mu(N) = 0 \;::\; \forall\, x \in X \setminus N \;::\; f_n(x) \to f(x). \\
f_n \overset{\mu}{\to} f & := & \forall\, \sigma > 0 \;::\; \mu X[|f_n - f| \geqslant \sigma] \to 0
\end{array}$$

Замечание 1. $f \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f \Rightarrow f_n \to f$ п.в. .

Замечание 2. Пусть $\mu X < \infty$, тогда $f_n \to f$ п.в. $\Rightarrow f_n \overset{\mu}{\to} f$.

Замечание 3 (Теорема Рисса). $f_n \overset{\mu}{\to} f$ п.в. $\Rightarrow \exists\,(n_k) \;::\; f_{n_k} \to f$ п.в. .

Теорема 1. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f, \mu X < \infty \Rightarrow \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int\limits_X f$

Теорема 2. *см теорему Беппо-Леви (1.8.1) или её вариацию 1.19.2.*

Теорема 3 (Фату)**.** *Пусть заданы (X, μ), $f_n \geqslant 0$, измеримы. Тогда*

$$\int\limits_X \underline{\lim}\, f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

§ 25 Теорема Лебега об ограниченной сходимости

Теорема 1. *Пусть снова заданы (X, μ), (f_n) измерима, $f_n \to f$ п.в. . К тому же*

$$\exists\, \varphi \in \mathcal{L} \,::\, \forall\, n \,::\, |f_n| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L})$ — условия теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 1. *Пусть $f\colon T \times X \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^k$, $f_t \xrightarrow[t\to t_0]{} f$ п.в. , и*

$$\exists\, V(t^0), \varphi \in \mathcal{L} \,::\, \forall\, t \in \overset{\circ}{V} \cap T \,::\, |f_t| \leqslant |\varphi|$$

Тогда

$$\int\limits_X f_t \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[t\to t_0]{} \int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu$$

Обозначение. $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ — условия локальной теормемы Лебега об ограниченной сходимости.

Следствие 2. *Непрерывность интеграла по параметру при выполнении $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$ и непрерывности f_t.*

§* Интеграл по меме с параметром

Здесь часто придётся подчёркивать, что является параметром, а что — определяет функцию В таких случаях параметр будет записан, как индекс

Определение 1 (Собственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$, $f_t(x) \in \mathcal{L}([a, b], \mu)\ \forall\, t \in T$. Тогда,

$$I(t) = \int\limits_a^b f(x, t) \,\mathrm{d}x$$

Мы здесь определяем некоторую функцию от t, как видно $\mathcal{D}_I = T$.

По идее, надо здесь переформулировать все-все-все утверждения про последовательности функций. Надо бы узнать, что с этим делать. ⟨`:set aflame`⟩У нас в конспекте этот кусок почему-то написан про несобственные интегралы, но всюду полагается $(\mathcal{L}_{\mathrm{loc}})$. Так что по сути они — просто интегралы по меме.

Здесь тоже есть непрерывность, дифференциируемость и интегрирование по параметру, но все тривиально[1] следует из 1.25.1 и 1.20.2.

[1] ну..

§ 26 Равномерная сходимость несобственного параметрического интеграла. Признаки

Определение 1 (Несобственный интеграл с параметром)**.** Пусть $f\colon X\times T \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}([a,B],\mu)\ \forall\, B < b$. Тогда,

$$I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x := \lim_{B\to b-0} \int\limits_a^{B} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to b-0} I^B(t)$$

Предполагается, что $\forall\, t \in T$ интеграл сходится поточечно. А вот суммируемость никто не обещал.

Определение 2. Говорят, что $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t)$ (сходится равномерно относительно $t, t \in T$), если [1]

$$\sup_{t\in T} \left| \int\limits_B^{\to b} f(x,t) \right| \xrightarrow[B\to b]{} 0$$

Здесь дальше всюду предполагается поточечная сходимость интеграла $\forall\, t \in T$.

Теорема 1 (Признак Больцано-Коши)**.**

$$I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(t) \Leftrightarrow \sup_T \left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x,t)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow[B_1,B_2\to b]{} 0$$

Теорема 2 (Признак Вейерштрасса)**.** *Пусть* $\exists\, \varphi \in \mathcal{L}([a;b))\ ::\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(x)\ \forall\, t$*. Тогда* $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$*.*

Теорема 3 (Признак Дирихле)**.** *Пусть* $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $f(x,t) \overset{T}{\rightrightarrows} 0,\ f(x,t) \searrow^{x}\ (x\to b-0)$

b) $G(x,t) = \int\limits_a^{x} g(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi$

$$\exists\, M\colon \forall\, x \in [a;b), t\in T\ ::\ |G(x,t)| \leqslant M$$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$*.*

Теорема 4 (Признак Абеля)**.** *Пусть* $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ *и*

a) $\exists\, M\colon \forall\, t\in T\ ::\ f(x,t) \leqslant M,\ f(x,t) \searrow^{x}$*.*

b) $\int\limits_a^{B} g(x,t)\,\mathrm{d}x \underset{B\to b}{\overset{T}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^{\to b} g(x,t)\,\mathrm{d}x$

Тогда $I^B(t) \overset{T}{\rightrightarrows} I(T)$*.*

[1] Никто же не любит ε-δ-определения?

§ 27 Несобственные интегралы с параметром и операции анализа над параметром ⟨⚒⟩

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \to f(x,t_0)$ *для п.в.* $x \in [a;b)$ *и* $I^B(t) \overset{V(t^0)}{\rightrightarrows} I(t)$. [1] *Тогда* $I \xrightarrow[t\to t_0]{} I(t_0)$.

Теорема 2. *Пусть для п.в.* $x \; \exists \, f'_t(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,*

a) $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *сходится* $\forall\, t \in T$

b) $\int\limits_a^{\to b} f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда $\exists \, I'(t_0) = \int\limits_a^{\to b} f'_t(x,t_0)\,\mathrm{d}x$

Замечание. Здесь нужна сходимость I, чтобы хоть где-то были конечные значения $I(t)$, нам их разность считать.

Теорема 3. *Пусть для п.в.* $x \; \exists \, f(x,t)$, *непрерывна на* $[a;b) \times \underbrace{[c;d)}_{T}$. *Допустим,* $I(t) = \int\limits_a^{\to b} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ *равномерно сходится относительно* $t \in T$

Тогда

$$\int\limits_c^d I(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^{\to b} \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

§ 28 Γ-функция Эйлера

Определение 1. $\Gamma(t) = \int\limits_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Свойства

1° Определена для всех $t > 0$.

2° $\Gamma(1) = 1$

3° $\forall\, t \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

4° $n \in \mathbb{N} \; \Gamma(n+1) = n!$

5° Γ-выпукла

6° $\Gamma \sim \frac{1}{t}$ при $t \to 0$

7° $\Gamma(t+1) \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{t}t^t e^{-t}$ при $t \to \infty$.

8° $\Gamma(t) \cdot \Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin \pi t}$. (формула отражения)

Гамма-функцию можно продолжить на отрицательную область, через формулу отражения. И на комплексную, там будет сходимость при $\operatorname{Im} z > 0$.

[1] Это не очень докажется без конечности меры $V(t_0)$,а то интеграл может сходится, а функция не быть суммируемой

§ 29 B-функция

Определение 1. $B(y,z) = \int\limits_0^1 x^{y-1}(1-x)^{z-1}\,\mathrm{d}x.$

Свойства

1° $B(y,z) = B(z,y)$.

2° $B(y,z) = \dfrac{\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(y+z)}$.

§ 30 Объём n-мерного шара

Теорема 1. *Пусть* $B_n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant R\}$ *– n-мерный шар. Тогда*

$$\lambda_n B_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$$

Глава A: Обозначения

Обозначения с лекции

$a := b$ — определение a.

$\bigsqcup\limits_k A_k$ — объединение дизъюнктных множеств.

$\mathscr{A}$ Алгебра множеств

Нестандартные обозначения

⟨⚒⟩ — ещё правится. Впрочем, относится почти ко всему.

$\square \cdots \blacksquare$ — начало и конец доказательства теоремы

$\blacktriangledown \cdots \blacktriangle$ — начало и конец доказательства более мелкого утверждения

$\langle \ddot{\sim} \rangle$ — кривоватая формулировка

⟨`:set aflame`⟩ — набирающему зело не нравится билет

`<+что-то+>` — тут будет `что-то`, но попозже

$a \mathinner{..} b$ — $[a; b] \cap \mathbb{Z}$

$\equiv$ — штуки эквивалентны. Часто используется в этом смысле в определениях, когда вводится два разных обозначения одного и того же объекта.

$::$ В кванторах, «верно, что»

$\mathscr{A}_\sigma$ Сигма-алгебра множеств