1. $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r}(t)$, $(x,y,z)(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$.

$\dot{\boldsymbol{r}}$: $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\dot x,\dot y,\dot z)(t)$, $\boldsymbol{\tau}\dot s$.

$\ddot{\boldsymbol{r}}$: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, $(\ddot x,\ddot y,\ddot z)(t)$, $\ddot s\boldsymbol{\tau}+\dot s^2 k_1\boldsymbol{n}$

2. В криволинейных координатах

- $\boldsymbol{e}^k\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{kj}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum\limits_i a^i b_i$
- $\xi_k=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_k=\sum\limits_j \xi^j g_{jk}$,

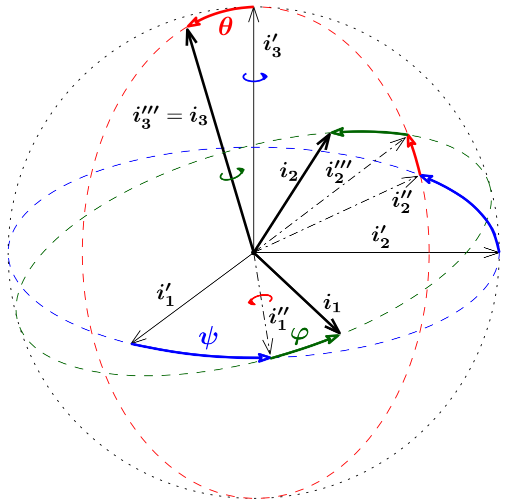
  $\xi^k=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}^k=\sum\limits_j \xi_j g^{jk}$
- $\boldsymbol{e}^k=\sum\limits_j g^{jk}e_j$, $\boldsymbol{e}^k=\sum\limits_j g^{jk}e^j$
- $\sum\limits_i g^{i\ell}g_{ik}=\delta_{\ell k}$

3. Скорость и ускорение

- $\boldsymbol{v}=\sum\limits_k \dot q^k\boldsymbol{e_k}$
- $\boldsymbol{w}=\sum\limits_k \ddot q^k\boldsymbol{e}_k+\sum\limits_{k,i}\dot q^k\dot q^i\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}$
- $w^j=\ddot q^j+\sum\limits_{k,i}\dot q^k\dot q^i\Gamma^j_{ki}$
- $\Gamma_{j,\,ki}=\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}_j$ — I рода
- $\Gamma^j_{ki}\ =\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_k}{\partial q^i}\cdot\boldsymbol{e}^j$ — II рода
- $w_\ell=\dfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left(\dfrac{\partial}{\partial\dot q^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol r}^2}{2}\right)\right)-\dfrac{\mathrm d}{\mathrm dq^\ell}\left(\dfrac{\dot{\boldsymbol r}^2}{2}\right)$

4. Про углы Эйлера

- $\boldsymbol{\omega}=\dot\psi\,\boldsymbol{i}_3'+\dot\theta\,\boldsymbol{i}_1''+\dot\varphi\,\boldsymbol{i}_3$
- $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}_0(t)+\boldsymbol{r}(t)$
- $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r$
- $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{w}_r$



5. Динамика точки и систем точек

- $\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{r}_k(t,\{c_\ell\})$, $k\in 1\,..\,N$, $\ell\in 1\,..\,6N$
- $m_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\boldsymbol{F}_k$, $mw_\ell=Q_\ell$
- $\dfrac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q^\ell}\right)-\dfrac{\mathrm dT}{\mathrm dq^\ell}=Q_\ell$
- $\boldsymbol{r}_c=\dfrac{\sum_k m_k\boldsymbol{r}_k}{\sum_k m_k}$, $\sum\limits_k m_k=M$

6. Закон сохранения импульса

- $\boldsymbol{p}=\sum\limits_k\boldsymbol{p}_k$, $\boldsymbol{p}_k=m_k\boldsymbol{v}_k$
- $\boldsymbol{F}=\sum\limits_k\left(\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\boldsymbol{F}_k^{(i)}\right)$
- $\dfrac{\mathrm d\boldsymbol{p}}{\mathrm dt}=\sum\limits_k\boldsymbol{F}_k^{(e)}$. Все сиды взаимодействия вымерли.

7. Момент импульса

- $\boldsymbol{\ell}=\sum\limits_k\boldsymbol{\ell}_k$, $\boldsymbol{\ell}_k=\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{p}_k$
- $\boldsymbol{L}=\sum\limits_k\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(e)}+\sum\limits_k\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{F}_k^{(i)}$
- $\boldsymbol{F}_{kj}^{(i)}=\lambda(\boldsymbol{r}_{kj})\boldsymbol{r}_{kj}\Rightarrow\dfrac{\mathrm d\boldsymbol{\ell}}{\mathrm dt}=\sum\limits_k\boldsymbol{L}_k^{(e)}$.

8. Энергия

- $T=\sum\limits_k T_k$, $T_k=\dfrac{m_k(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{v}_k)}{2}$
- $\delta A_k=\boldsymbol{F}_k\cdot\mathrm d\boldsymbol{r}_k$, $A=\displaystyle\int_\Gamma\delta A$, а вообще-т интеграл от формы.
- $\mathrm dT=\delta A_k^{(e)}+\delta A_k^{(i)}$
- $\mathrm dE=\mathrm d\left(T+\Pi^{(e)}+\Pi^{(i)}\right)=\delta A_{\text{не пот}}$

9. В поле центральной силы¬

- $u=1/\rho$.
- Формулы Бине
  $$\begin{cases} v^2=c^2\left(\left(\dfrac{\mathrm du}{\mathrm d\varphi}\right)^2+u^2\right)\\ w_\rho=-c^2u^2\left(\dfrac{\mathrm d^2u}{\mathrm d\varphi^2}+u\right)\end{cases}$$
- Невыразимая жжесть

10. ⟨?⟩⟨`:set aflame`⟩Движение твёрдого тела ¬

- $\omega=0$ — поступательное
- $\boldsymbol{v_0},\boldsymbol{w_0}=0,\omega=\dot\varphi\boldsymbol{i_3}$ — вращение вокруг неподвижной оси
- $\boldsymbol{v_0}\upuparrows\boldsymbol{\omega}$ — винт
- Как попало вокруг неподвижной точки[1]¬
  $$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}_1(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)+\\ +\boldsymbol{i}_2(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)+\\ +\boldsymbol{i}_3(\dot\psi\cos\varphi+\dot\varphi)\end{aligned}$$

11. Скорость и ускорение точек твердого тела

- $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$
- $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w_0}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$

12. Сложение движений ТТ

- $\boldsymbol{v_{r_n}}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k\times\boldsymbol{r}_0$, $O_0=O$.
- $\boldsymbol{V}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{\omega}_k\times\overrightarrow{O_kO}\right)$
- $\boldsymbol{\Omega}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\boldsymbol{\omega}_k\quad\Rightarrow\boldsymbol{v_{r_n}}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_0$

13. Кинематический винт

- $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=0$

14. Плоское движение

- $0=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$
- $\boldsymbol{r}_*=\left(-\dfrac{v_{0y}}{\omega},+\dfrac{v_{0x}}{\omega}\right)$ —подвижная центроида
- $\boldsymbol{r}_*'=\boldsymbol{r}_*+\boldsymbol{r}_0$ — неподвижная центроида
- $\omega=\dfrac{|\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A|}{|\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A|}$
- $\omega=\dfrac{|\boldsymbol{v}_a\times\boldsymbol{r}_{A*}|}{r_{A*}^2}$ и то же с B.
- центр ускорений: ⟨?⟩

15. Динамика вращения ТТ[2]

- $M=\displaystyle\int_\tau 1\,\mathrm d\mu(r)$, $\boldsymbol{r}_c=\dfrac{\int_\tau\boldsymbol{r}\,\mathrm d\mu(r)}{\int_\tau 1\,\mathrm d\mu(r)}$
- $\boldsymbol{\ell}=\displaystyle\int_\tau(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\,\mathrm d\mu$, $\boldsymbol{\ell}'=\displaystyle\int_\tau(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm d\mu$
- $\boldsymbol{\ell}'=$ $\boldsymbol{R}_0\times\boldsymbol{v}_0\,M+\boldsymbol{r}_c\times\boldsymbol{v}_0\,M+\boldsymbol{R}_0\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)M+\ell$
- $T=\dfrac12\displaystyle\int_\tau(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})^2\,\mathrm d\mu$, $T'=\dfrac12\displaystyle\int_\tau\boldsymbol{v}^2\,\mathrm d\mu$
- $T'=T+\dfrac12 M\boldsymbol{v}_0^2+M\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c)$
- $\ell_\omega=\omega J_\omega$
- $\boldsymbol{\ell}=\widehat J\boldsymbol{\omega}=\sum\limits_{j,k}J_{jk}\omega_k\,\boldsymbol{i}_j$,

  $J_{ik}=\displaystyle\int_\tau(r^2\delta_{jk}-x_jx_k)\,\mathrm d\mu$
- $T=\dfrac{J_\omega\omega^2}{2}=\dfrac{\widehat J\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}{2}$
- $L=\dfrac{\mathrm d\ell}{\mathrm dt}$
- Динамические уравнения Эйлера ¬
  $$\begin{aligned}L_a&=J_a\dot\omega_a+(J_c-J_b)\,\omega_c\omega_b\\ L_b&=J_b\dot\omega_b+(J_a-J_c)\,\omega_a\omega_c\\ L_c&=J_c\dot\omega_c+(J_b-J_a)\,\omega_b\omega_a\end{aligned}$$
- Кинематические уравнения Эйлера ¬
  $$\begin{aligned}\omega_a&=(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi)\\ \omega_b&=(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi)\\ \omega_c&=(\dot\psi\cos\varphi+\dot\varphi)\end{aligned}$$

16. Вращение вокруг неподвижной оси¬

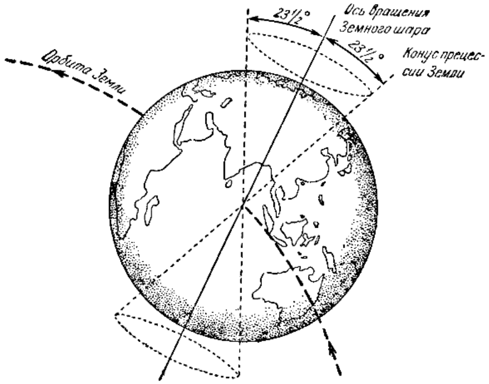
- $m\dfrac{\mathrm d\boldsymbol{v}_c}{\mathrm dt}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}_A+\boldsymbol{N}_B$, $\boldsymbol{v}_c=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c$, $\Rightarrow$

$$m(-\ddot\varphi x_{c_2} + (\dot\varphi)^2 x_{c_1}) = F_1 + N_{A_1} + N_{B_1}$$
$$m(\ddot\varphi x_{c_1} - (\dot\varphi)^2 x_{c_2}) = F_2 + N_{A_2} + N_{B_2}$$
$$0 = F_3 + N_{A_3} + N_{B_3}$$

- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{L} + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) + (\boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{N}_A) \Rightarrow$

$$J_{13}\ddot\varphi - J_{23}(\dot\varphi)^2 = L_1 - r_A N_{A_2} + r_B N_{B_2}$$
$$J_{23}\ddot\varphi + J_{13}(\dot\varphi)^2 = L_2 + r_A N_{A_1} - r_B N_{B_1}$$
$$J_{33}\ddot\varphi = L_3$$

17. $L = 0$



18. Сила всего одна и приложена к центру масс

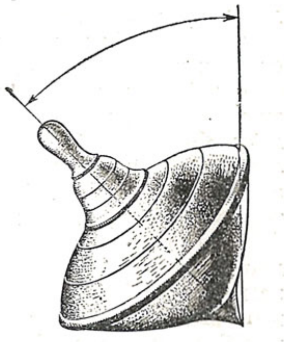
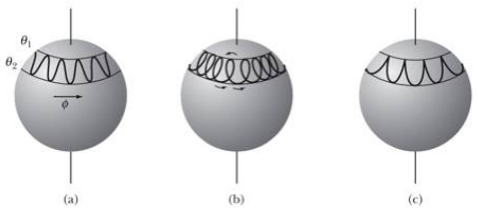


Рис. 10. Волчок.



19. Связи

- ▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \geqslant 0$ (или $= 0$)
- ▷ $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow f(t, \boldsymbol{r}) = 0$ — голономные
- ▷ $\boldsymbol{R}_i = \Lambda_i \nabla' \varphi_i + \boldsymbol{T}_i$,[3]

$$\Lambda_i = -\frac{m\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + m\nabla\varphi_i \boldsymbol{v} + \nabla'\varphi_i \boldsymbol{F}}{|\nabla'\varphi_i|^2}$$

20. По поверхности

- ▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda\nabla f + \boldsymbol{T}$
- ▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
- ▷ $\boldsymbol{F} = 0$, $v^2 = v_0^2 e^{-\alpha(s)}$

21. По кривой

- ▷ $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F} + \Lambda_1\nabla f_1 + \Lambda_2 \nabla f_2 + \boldsymbol{T}$
- ▷ $\boldsymbol{T} = -kN\boldsymbol{\tau}$
- ▷ катится мир к упадку

22. Принцип Даламбера-Лагранжа: Суммарная работа сил инерции и активных сил по виртуальным перемещениям равна нулю: $(M\ddot{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{Y}) \cdot \delta\boldsymbol{y} = 0$

23. При варьировании с фиксированными концами $\left(\delta t_1 = \delta t_0 = 0,\ \begin{matrix} \delta q^\ell|_{t_1} = 0 \\ \delta q^\ell|_{t_2} = 0 \end{matrix}\right)$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

24. Интегральный принцип Лагранжа:

- ▷ $\delta W = \delta \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} 2T$, $T = \frac{M}{2}\displaystyle\sum_{j,k} g_{ij}\dot q^j \dot q^k$
- ▷ $\delta q_0^\ell = \delta q_1^\ell = 0 \Rightarrow \Delta q|_{t_1} = \Delta q|_{t_0}$, $\Delta q^\ell = \delta q^\ell + \dot q^\ell \delta t$ (полная вариация)
- ▷ Лишь при этом условии работает принцип выше

25. $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0$

26. $\begin{cases} \dot q^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot p_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + Q_k \end{cases}$

27. Теорема Якоби

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\ell, \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell}, t\right) = 0, \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial q^l\, \partial a^p}\right) \neq 0 \\ p_\ell = \dfrac{\partial S}{\partial q^\ell},\ b_k = \dfrac{\partial S}{\partial a^k} \\ a_k, b_k - \mathrm{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot q^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot p_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

28. Инварианты

- ▷ Ф. объём: $\displaystyle\int_M \rho\, \mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}\Omega =$ "$\displaystyle\prod_i$"$\mathrm{d}q^i\, \mathrm{d}p_i$
- ▷ Пуанкаре: $\displaystyle\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k$
- ▷ Пуанкаре-Картане: $\displaystyle\oint_C p_k\, \mathrm{d}q^k - H \mathrm{d}t$

Здесь
M — сечение фазовой трубки,
C — охватывающий её контур.

29. Канонические преобразования

Когда нету зависимости от времени

- ▷ $p_k = p_k(\widetilde p, \widetilde q)$, $q^k = q^k(\widetilde p, \widetilde q)$, $\widetilde H(t, \widetilde p, \widetilde q) = H\big(t, p(\widetilde p, \widetilde q), q(\widetilde p, \widetilde q)\big)$

Когда есть порождающая функция V.

- 0* $\widetilde L = L + \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$
- 1* $V_1(t, q, \widetilde q) = V$
- 2* $V_2(t, p, \widetilde q) = V + \displaystyle\sum_k p_k q^k$
- 3* $V_3(t, \widetilde p, q) = V - \displaystyle\sum_k \widetilde p_k \widetilde q^k$
- 4* $V_4(t, p, \widetilde p) = V + \displaystyle\sum_k p_k q^k - \sum_k \widetilde p_k \widetilde q^k$

При этом

$$\langle 1\rangle\ \ \widetilde p_k = +\frac{\partial V_1}{\partial \widetilde q^k},\ p_k = +\frac{\partial V_1}{\partial q^k},\ \widetilde H = H - \frac{\partial V_1}{\partial t}$$
$$\langle 2\rangle\ \ \widetilde p_k = +\frac{\partial V_2}{\partial \widetilde q^k},\ q^k = -\frac{\partial V_2}{\partial p_k},\ \widetilde H = H - \frac{\partial V_2}{\partial t}$$
$$\langle 3\rangle\ \ \widetilde q^k = -\frac{\partial V_3}{\partial \widetilde p_k},\ p_k = -\frac{\partial V_3}{\partial q^k},\ \widetilde H = H - \frac{\partial V_3}{\partial t}$$
$$\langle 4\rangle\ \ \widetilde q^k = -\frac{\partial V_4}{\partial \widetilde p_k},\ q^k = +\frac{\partial V_4}{\partial p_k},\ \widetilde H = H - \frac{\partial V_4}{\partial t}$$

Выглядит не очень, но бывают вещи и похуже

Заметки

[1] У нас тут вроде косяк, а дальше снова как здесь ⟨ᵔᴗᵔ⟩

[2] Здесь по-хорошему надо меру на многообразии вводить

[3] Здесь вообще градиенты, но жирная набла выглядит некрасиво: $\boldsymbol{\nabla}\varphi$