

Функциональный анализ– I

Михаил Пирогов

Аннотация

Конспект курса А. Д. Баранова, прочитанного в осеннем семестре 2017 года.

1 Топологические векторные пространства

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} , снабжённое топологией τ . Пару (X, τ) называют *топологическим векторным пространством*, если сложение и умножение на скаляр непрерывны относительно τ , и каждая точка является замкнутым множеством.

Пример 1.1. Нормированное пространство со стандартной топологией – ТВП, а прямая с топологией Зарисского – нет, ибо в ней $U + V = \mathbb{R}$ для любых двух открытых множеств (ведь их дополнения конечны).

Утверждение 1.1. Параллельный перенос T_a и растяжение M_λ – гомеоморфизмы ТВП X в себя. При T_a локальная база переходит в локальную базу.

Определение 1.2. ТВП называют *локально выпуклым*, если в нём есть база в нуле, состоящая из выпуклых множеств.

Определение 1.3. Множество $E \subset X$ называют *уравновешенным*, если для любого α такого, что $|\alpha| \leq 1$ верно, что $\alpha E \subset E$.

Определение 1.4. Множество $E \subset X$ называют *ограниченным*, если для любой окрестности нуля U

$$\exists t: \forall s > t \ sU \supset E.$$

Утверждение 1.2. Легко видеть, что при растяжении ограниченное множество переходит в ограниченное множество. Позже мы докажем, что это происходит с ним при любом непрерывном линейном отображении (то есть и при параллельном переносе).

Определение 1.5. ТВП X называют *локально ограниченным*, если в нём существует база в нуле из ограниченных множеств.

Утверждение 1.3. Существования всего одной ограниченной окрестности нуля достаточно, чтобы ТВП было локально ограничено.

Теорема 1.1. ТВП (X, τ) метризуемо \Leftrightarrow есть счётная база в нуле.

Теорема 1.2 (Колмогоров). ТВП нормируемо \Leftrightarrow оно локально ограничено и локально выпукло.

1.2 Топология, порождённая счётным семейством полунорм

Определение 2.1. Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} . Функцию $p: X \rightarrow [0, \infty)$ называют *полунормой*, если выполняются следующие условия:

1. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$,
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Пример 2.1. На $C((-1, 1))$ полунормой является

$$\|f\| = \max_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Определение 2.2. Семейство полунорм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на ВП X называют *определяющим*, если

$$\forall n \ p_n(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Определение 2.3. Топологией, порождённой семейством полунорм, называют самую грубую топологию, относительно которой все они непрерывны.

Утверждение 2.1. Базой этой топологии являются множества вида

$$V_{\varepsilon, i_1, \dots, i_n}(x_0) = \{x \in X \mid \forall k \ p_{i_k}(x - x_0) < \varepsilon\}.$$

Утверждение 2.2. Семейство полунорм определяющее \Leftrightarrow топология, порождённая им, хаусдорфова.

Утверждение 2.3. Векторное пространство с топологией, порождённой определяющим семейством полунорм – локально выпуклое ТВП.

Теорема 2.1. Топология τ , порождённая определяющим семейством полунорм p_n , задаётся метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, p_n(x - y))}{2^n}.$$

Доказательство.

1. Очевидно, что ряд сходится, причём $\rho(x, y) \geq 0$.
2. Если $\rho(x, y) = 0$, то все слагаемые нулевые, поэтому $x = y$.
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
4. Если верно неравенство

$$\forall a, b \geq 0 \quad \min(1, a + b) \leq \min(1, a) + \min(1, b),$$

то

$$\min(1, p_n(x - z)) \leq \min(1, p_n(x - y) + p_n(y - z)) \leq \min(1, p_n(x - y)) + \min(1, p_n(y - z)),$$

откуда сразу следует искомый результат.

5. Неравенство довольно просто доказать.
6. Осталось лишь понять, что этой метрикой задаётся нужная топология. Для этого достаточно доказать, что

$$\forall B_{\delta}(0) \exists V_{\varepsilon, i_1, \dots, i_n}(0): V_{\varepsilon} \subset B_{\delta}$$

и, напротив,

$$\forall V_{\varepsilon, i_1, \dots, i_n}(0) \exists B_{\delta}(0): B_{\delta} \subset V_{\varepsilon}.$$

Докажем сначала первое включение. Найдётся такое N , что

$$\forall N' > N \quad \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall x \in B_{\delta} \quad \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{\min(1, p_n(x))}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ и $n = N$. Тогда

$$x \in V_{\varepsilon} \Rightarrow \forall k \leq N \quad p_k(x) < \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^N \frac{\min(1, p_n(x))}{2^n} \leq \sum_{n=1}^N \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

Таким образом получаем, что из того, что $x \in V_{\varepsilon}$, следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, p_n(x))}{2^n} < \delta \Rightarrow x \in B_{\delta}.$$

7. Докажем теперь второе включение. Не умаляя общности, положим $\varepsilon < 1$. Пусть $\max(i_1, \dots, i_n) = N$. Возьмём

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Если $x \in B_{\delta}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \forall n \leq N \quad p_n(x) < \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $x \in V_{\varepsilon}$.

□

Теорема 2.2. Пусть X – ТВП с топологией τ , порождённой определяющим семейством полунорм p_n .

1. $x_k \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \forall n \ p_n(x_k - x_0) \rightarrow 0$,
2. $E \subset X$ ограничено $\Leftrightarrow \forall n \ p_n$ ограничены на E .

Доказательство.

1. \Rightarrow : Пусть $x_k \rightarrow x_0$. Это означает, что $\rho(x_k, x_0) \rightarrow 0$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1, p_n(x_k - x_0))}{2^n} \rightarrow 0 \Rightarrow \forall n \ p_n(x_k - x_0) \rightarrow 0.$$

\Leftarrow : Пусть все p_n стремятся к нулю. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Пусть N таково, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\rho(x_k, x_0) < \sum_{n=1}^N \frac{\min(1, p_n(x_k - x_0))}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая достаточно большое k , первую сумму можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

2. \Rightarrow : Пусть множество E ограничено. Фиксируем некоторую полунорму p_n из семейства; рассмотрим окрестность $V_{\varepsilon, n}(0)$. Т.к. V является окрестностью нуля, $E \subset kV$ для некоторого k . Но тогда $p_n(x) < k$ для любого x из E .

\Leftarrow : Пусть теперь все полунормы ограничены на E . Возьмём U – произвольную окрестность нуля, и $V_{\varepsilon, i_1, \dots, i_n}(0) \subset U$. Найдутся M_i такие, что $\forall x \in E \ p_i(x) < M_i$. Отсюда следует, что $E \in nU$, если $n > M_i n_i$ для всех i . Поэтому E ограничено. Если умножить V на число, превосходящее M_{i_1}, \dots, M_{i_n} , то получится окрестность, содержащая E .

□

Пример 2.2. Примеры – $C((a, b))$, $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. На $C^\infty(\Omega)$ нужно построить последовательность компактов K_n такую, что $K_n \subset \text{Int } K_{n+1}$ и $\bigcup K_n = \Omega$. После этого полунорма p_n определяется следующим образом:

$$p_n(f) = \max_{x \in K_n, |\alpha| \leq n} |D^\alpha f(x)|.$$

Оба этих пространства полны.

Простой пример – множество последовательностей комплексных чисел $\{x_n\}$, в котором p_n возвращает модуль x_n . Его обозначают \mathbb{C}^∞ .

Гораздо больше написано в параграфе «Примеры» первой главы книжки Рудина.

1.3 Функционал Минковского

Определение 3.1. Пусть X – ТВП, $A \subset X$. A называют *поглощающим*, если

$$\forall x \in X \ \exists t > 0: x \in tA.$$

Замечание 3.1. Если A поглощающее, то $0 \in A$.

Утверждение 3.1. Любая окрестность нуля – поглощающее множество.

Доказательство. Это можно вывести, например, из того, что ноль – ограниченное множество, а точка – ноль после параллельного переноса. Параллельный перенос, как непрерывное линейное отображение, сохраняет ограниченность.

Иначе это можно увидеть так: понятно, что $x \cdot 0 = 0$, а из непрерывности умножения следует, что

$$\forall U(0) \ \exists V(x), W_\varepsilon(0): VW_\varepsilon \subset U.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t} \in W_\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{t} \in U \Rightarrow x \in tU.$$

□

Определение 3.2. Пусть A – поглощающее множество. Тогда

$$\mathfrak{m}_A(x) = \inf \left\{ t \mid \frac{x}{t} \in A \right\} \text{ – функционал Минковского.}$$

Замечание 3.2. Если A выпукло и содержит ноль, то из того, что $\frac{x}{t} \in A$, следует, что $\frac{x}{s} \in A$ для любого $s > t$.

Утверждение 3.2. Пусть A – выпуклое и поглощающее, и $t > \mathfrak{m}_A(x)$. Тогда $\frac{x}{t} \in A$.

Теорема 3.1. Пусть A – выпуклое поглощающее множество. Тогда:

1. $\forall t > 0 \mathfrak{m}_A(tx) = t\mathfrak{m}_A(x)$ (положительная однородность),
2. $\mathfrak{m}_A(x + y) \leq \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_A(y)$ (полуаддитивность),
3. Если A уравновешенное, \mathfrak{m}_A – полунорма.

Доказательство.

1.

$$\mathfrak{m}_A(tx) = \inf \left\{ s \mid \frac{tx}{s} \in A \right\} = t \inf \left\{ \frac{s}{t} \mid \frac{tx}{s} \in A \right\} = t\mathfrak{m}_A(x).$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся s и t такие, что

$$s - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(x) < s, \quad \frac{x}{s} \in A \text{ и } t - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(y) < t \text{ и } \frac{y}{t} \in A.$$

Распишем частное сумм:

$$\frac{x + y}{s + t} = \frac{s}{s + t} \frac{x}{s} + \frac{t}{s + t} \frac{y}{t}.$$

По выпуклости это частное лежит в A , поэтому

$$\mathfrak{m}_A(x + y) \leq s + t < \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_A(y).$$

3. Не хватает возможности умножать на любую константу из \mathbb{C} . Пусть $\alpha = r\beta$, $r \geq 0$, $|\beta| = 1$.

$$\mathfrak{m}_A(\alpha x) = \inf \left\{ s \mid \frac{\alpha r x}{s} \in A \right\} = \inf \left\{ s \mid \frac{r x}{s} \in \underbrace{\alpha^{-1} A}_{=A} \right\} = \mathfrak{m}_A(rx) = r\mathfrak{m}_A(x) = |\alpha|\mathfrak{m}_A(x).$$

□

1.4 Теорема о нормируемости

Лемма 4.1.

1. Любая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность;
2. любая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность.

Доказательство.

1. Пусть U – окрестность нуля. По непрерывности умножения, существуют $V(0)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что если $|\alpha| < \varepsilon$, то $\alpha V \subset U$. Объединение αV по всем α и есть искомая окрестность.
2. Пусть U – выпуклая окрестность нуля. Положим $A = \cap \alpha U$ по всем α на единичной окружности. Пусть W – окрестность из предыдущего пункта. Очевидно, что $W \subset A$. Отсюда следует, что внутренность $\text{Int } A$ является окрестностью нуля, лежащей в U . Выпуклость и уравновешенность внутренней следуют из выпуклости и уравновешенности A .

□

Теорема 4.1 (Колмогоров). Следующие условия равносильны:

1. X нормируемо;
2. X локально выпукло и локально ограничено.

Доказательство.

1 \Rightarrow 2: Очевидно.

2 \Rightarrow 1: Пусть $\{U_\alpha\}$ – база в нуле из выпуклых окрестностей, V – ограниченная окрестность. Найдётся α такое, что $U_\alpha \subset V \Rightarrow U_\alpha$ ещё и ограниченная. Выпуклая окрестность нуля U_α содержит выпуклую уравновешенную U ; таким образом, U – выпуклое ограниченное уравновешенное поглощающее множество, окрестность нуля. Введём норму следующим образом:

$$\|x\| = m_U(x).$$

По теореме 3.1 $\|\cdot\|$ – полунорма.

Докажем, что это норма. Возьмём $x \neq 0$. Все точки замкнуты, поэтому существует окрестность нуля, не содержащая x . Т.к. U ограничена, найдётся $r > 0$ такое, что rU лежит в этой окрестности. Значит, есть r такое, что

$$x \notin rU \Rightarrow \forall s \in (0, r) \frac{x}{s} \notin U \Rightarrow m_U(x) \geq r > 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0.$$

Осталось доказать, что эта норма задаёт нужную топологию. Для этого достаточно показать, что

$$rU = \{x \mid \|x\| < r\};$$

отсюда будет следовать совпадение локальных баз. Докажем это равенство.

Обозначим множество справа через B_r . Заметим, что

$$x \in rU \Rightarrow \frac{x}{r} \in U \Rightarrow \|x\| \leq r.$$

Отсюда $rU \subset \overline{B_r}$. Т.к. rU открытое, $rU \subset B_r$.

Докажем обратное включение.

$$\|x\| < r \Rightarrow \exists s < r: \frac{x}{s} \in U.$$

Поскольку U выпукло

$$\frac{x}{r} \in U \Rightarrow x \in rU.$$

□

1.5 Примеры ненормируемых пространств

Утверждение 5.1. Пусть на локально ограниченном X топология задана определяющим семейством полунорм $\{p_n\}$. Тогда найдётся окрестность нуля $V_{\varepsilon, 1, \dots, n}(0)$ такая, что на ней все полунормы ограничены.

Доказательство. Пусть X локально ограничено. Тогда найдётся ограниченная $V_{\varepsilon, 1, \dots, n}(0)$. По теореме 2.2 это как раз и значит, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \sup_V p_i < \infty.$$

□

Пример 5.1. Легко видеть, что для пространств $C^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$, \mathbb{C}^∞ это всегда не так.

Определение 5.1. Говорят, что ТВП X обладает свойством Гейне-Бореля, если любое замкнутое и ограниченное множество в нём компактно.

Замечание 5.1. Из теоремы Рисса следует, что любое нормированное пространство, обладающее этим свойством, конечномерно.

Утверждение 5.2. C^∞ обладает свойством Гейне-Бореля.

Доказательство. Поскольку C^∞ метризуемо, в нём компактность равносильна секвенциальной компактности. Её и будем проверять.

Пусть $x^k = (x_n^k)_{n=1}^\infty$ – элементы \mathbb{C}^∞ . Тогда сходимость x^k к x^0 просто означает, что

$$\forall n \ x_n^k \rightarrow x_n^0.$$

Пусть E – замкнутое и ограниченное подмножество X , $x^k \in E$. E ограничено $\Rightarrow \forall n \ p_n(x^k) = |x_n^k|$ ограничены. Поэтому можно выделить $x^{k,1}$ – подпоследовательность в $\{x^k\}$ такую, что $x_n^{k,1}$ сходится. Продолжая диагональным методом, получим то, что нужно. □

Замечание 5.2. $C^\infty(\mathbb{R})$ обладает свойством Гейне-Бореля, а $C(\mathbb{R})$ нет. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ обладает свойством Гейне-Бореля.

1.6 Теорема о непрерывности линейных отображений

Определение 6.1. Линейное отображение ТВП называют *ограниченным*, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные.

Лемма 6.1.

1. Если d – инвариантная относительно сдвига метрика на пространстве X , то для любого $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0).$$

2. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся к 0 последовательность точек метризуемого ТВП, то существуют такие положительные скаляры γ_n , что $\gamma_n \rightarrow \infty$ и $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.

Доказательство.

- 1.

$$d(nx, 0) = d((n-1)x, -x) \leq d((n-1)x, 0) + \underbrace{d(0, -x)}_{=d(x, 0)}.$$

Продолжая эту деятельность, по индукции получаем наше утверждение.

2. Мы знаем, что раз X метризуемо, в нём можно ввести инвариантную метрику, совместимую с топологией. Построим такую возрастающую последовательность целых чисел n_k , что $d(x_n, 0) < k^{-2}$ при $n \geq n_k$ и положим $\gamma_n = 1$ при $n < n_1$ и $\gamma_n = k$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Посмотрим, как ведёт себя последовательность $\gamma_n x_n$:

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < k^{-1}.$$

Поэтому $\gamma_n x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

□

Лемма 6.2. Следующие два свойства подмножества E топологического векторного пространства эквивалентны:

1. E ограничено;
2. если $\{x_n\}$ – любая последовательность точек из E , а α_n – такая последовательность скаляров, что $\alpha_n \rightarrow 0$, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Доказательство.

1 \Rightarrow 2: Пусть E ограничено, а U – произвольная окрестность нуля. По определению ограниченности

$$(\exists t > 0: \forall s > t \ E \subset sU) \Rightarrow (\exists t > 0: \forall s > t \ \forall n \ \frac{x_n}{s} \in U).$$

Поскольку $\gamma_n \rightarrow 0$, с некоторого момента будет выполнено неравенство $\gamma_n < \frac{1}{t} \Rightarrow \gamma_n x_n \in U$. По определению предела отсюда следует, что $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.

2 \Rightarrow 1: Пусть теперь E не ограничено. Тогда найдётся окрестность нуля U и последовательность скаляров $r_n \rightarrow \infty$ такие, что $E \not\subset r_n U$. Выберем x_n такими, что $x_n \notin r_n U$, а γ_n положим равным r_n^{-1} . Тогда $\gamma_n x_n$ ни при каком n не попадает в U , а значит, и к нулю не сходится. □

Теорема 6.1. Пусть X и Y – ТВП, а $L: X \rightarrow Y$ – линейное отображение. Рассмотрим следующие утверждения:

1. L непрерывно;
2. L ограничено;
3. если $x_n \rightarrow 0$, то $\{Lx_n\}$ – ограниченное множество;
4. $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow Lx_n \rightarrow 0$.

Импликация 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 выполняется всегда; импликация 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 выполняется, если X метризуемо.

Доказательство.

1 \Rightarrow 2: Пусть $E \subset X$ – ограниченное множество, W – окрестность нуля в Y . Из непрерывности L следует, что $L^{-1}(W)$ открыто в X .

Найдётся окрестность нуля V такая, что $V \subset L^{-1}(W) \Rightarrow L(V) \subset W$. E ограничено, поэтому существует t такое, что $\forall s > t \ E \subset sV \Rightarrow L(E) \subset L(sV) = sL(V) \subset sW$.

Таким образом, для произвольной окрестности $W \subset Y$ мы нашли t такое, что при $s > t \ L(E) \subset sW$. Отсюда следует ограниченность $L(E)$.

$2 \Rightarrow 3$: Для этого нужно только доказать, что сходящаяся к нулю последовательность ограничена. Сходимость x_n к 0 значит, что

$$\forall U(0) \exists N: \forall n > N \ x_n \in U.$$

Возьмём произвольную окрестность U и в ней выберем уравновешенную окрестность V . Из только что написанного определения следует, что вне неё находится лишь конечное количество точек последовательности; обозначим их $\{x_{i_k}\}_{k=1}^K$. Поскольку любая окрестность нуля – поглощающее множество, для любого k найдётся n_k такое, что $x_{i_k} \in n_k V$. Легко видеть, что

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset V \cup \bigcup_{k=1}^K n_k V.$$

Т.к. V – уравновешенное множество, то и $(\max_{k \in 1 \dots K} n_k) V$ тоже. Поэтому

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset \left(\max_{k \in 1 \dots K} n_k \right) \cdot V \subset \left(\max_{k \in 1 \dots K} n_k \right) \cdot U.$$

Отсюда и следует искомая ограниченность.

$4 \Rightarrow 1$: С этого места мы предполагаем, что X метризуемо. Пусть (1) неверно, то есть отображение L не непрерывно. Легко видеть, что оно тогда не непрерывно в нуле (для этого надо рассмотреть определение непрерывности в точке через окрестности и вспомнить, что параллельный перенос – автоморфизм). Это значит, что найдётся окрестность нуля $U \subset Y$ такая, что $L^{-1}(U)$ не содержит ни одной окрестности нуля.

Поскольку X метризуемо, в нём есть счётная локальная база, причём в каждом её элементе есть точка, которая не попадает в U . Из этих точек можно составить сходящуюся к нулю последовательность, образ которой с U вовсе не пересекается. Это противоречит (3).

$3 \Rightarrow 4$: Пусть X метризуемо и L обладает свойством (3). Пусть $x_n \rightarrow 0$. По лемме 6.1 найдётся последовательность положительных скаляров γ_n такая, что $\gamma_n \rightarrow \infty$ и $\gamma_n x_n \rightarrow 0$. Тогда $\{L\gamma_n x_n\}$ – ограниченное множество.

По лемме 6.2 выходит, что

$$\underbrace{\frac{1}{\gamma_n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{L(\gamma_n x_n)}_{\text{огранич.}} \rightarrow 0 \Rightarrow Lx_n \rightarrow 0.$$

□

1.7 Равностепенно непрерывные семейства, теорема Банаха-Штейнгауза, следствия

Определение 7.1. Подмножество топологического пространства называют *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность. Говорят, что множество относится к *первой категории* (или *худое*), если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. Все остальные множества относят ко *второй категории* (их называют ещё *тучными*).

Свойство 7.1.

1. Если $A \subset B$ и B первой категории, то A тоже первой категории.
2. Счётное объединение множеств первой категории – множество первой категории.
3. Замкнутое в S множество $E \subset S$ с пустой внутренностью является множеством первой категории в S .
4. Если h – гомеоморфизм пространства S на себя, то множества E и $h(E)$ имеют одну категорию в S .

Теорема 7.1. (Бэр) Пусть S либо

1. полное метрическое пространство, либо
2. локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение любого счётного семейства всюду плотных множеств всюду плотно в S .

Следствие 7.1. Полные метрические пространства и локально компактные хаусдорфовы пространства являются множествами второй категории в себе.

Определение 7.2. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – некоторое семейство отображений из X в Y . Назовём Γ *равностепенно непрерывным*, если для любой $U(0) \subset Y$ найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$ (т.е. $\forall \Lambda \in \Gamma \Lambda(V) \subset U$).

Лемма 7.1. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – равностепенно непрерывное семейство линейных отображений. Тогда если E – ограниченное множество в X , то $\Gamma(E)$ тоже ограничено.

Доказательство. Рассмотрим произвольную U – окрестность нуля в Y . Поскольку Γ равностепенно непрерывно, найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$. Ограниченность E означает, что

$$\exists t: \forall s > t \ E \subset sV.$$

Отсюда

$$\Gamma(E) \subset s\Gamma(V) \subset sU,$$

что и даёт ограниченность $\Gamma(E)$. □

Теорема 7.2 (Теорема Банаха-Штейнгауза, принцип равномерной ограниченности). Пусть X и Y – ТВП, Γ – некоторое семейство непрерывных линейных отображений из X в Y , а B – множество всех таких точек $x \in X$, что их орбиты $\Gamma(x)$ ограничены. Если B – множество второй категории в X , то $B = X$ и семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Выберем в Y такие уравновешенные окрестности нуля U и W , что $\overline{U} + \overline{U} \subset V$, и положим

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Если $x \in B$, $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого натурального n , так что $x \in nE$. Поэтому

$$B \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE.$$

Хотя бы одно из множеств nE является множеством второй категории в X , ибо B таково. Поскольку умножение на n – гомеоморфизм, само E тоже относится ко второй категории. Но E замкнуто, как пересечение замкнутых множеств; поэтому в нём есть внутренняя точка x_0 . Множество $E - x_0$ содержит некоторую окрестность нуля V , причём

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(E) - \Lambda(x_0) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

для любого $\Lambda \in \Gamma$.

Отсюда следует, что Γ равностепенно непрерывно. По лемме 7.1 Γ ещё и равномерно ограничено, в частности, все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Поэтому $B = X$. □

Следствие 7.2. Пусть Γ – семейство непрерывных линейных отображений F -пространства¹ X в ТВП Y , причём все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 7.3. Пусть X и Y – ТВП, а $\{\Lambda_n\}$ – последовательность непрерывных линейных отображений из X в Y .

1. Пусть C – множество $x \in X$, для которых $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y . Если C – множество второй категории в X , то $C = X$.
2. Пусть L – множество всех $x \in X$ таких, что для них существует предел

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x.$$

Если Y – F -пространство, а L – множество второй категории в X , то $L = X$ и отображение Λ непрерывно.

Доказательство.

1. Так как каждая последовательность Коши ограничена (для сходящихся это доказано в теореме 6.1; для последовательностей Коши доказательство идейно похоже²), по теореме 7.2 Банаха-Штейнгауза семейство Λ_n равностепенно непрерывно.

Можно проверить, что C – подпространство X . Его замыкание \overline{C} всюду плотно (если бы это было не так, \overline{C} было бы собственным подпространством X , поэтому у него не было бы внутренних точек и C было бы первой категории).

¹ F -пространство – ТВП, в котором топология порождается полной инвариантной метрикой.

² В ТВП можно назвать последовательность $\{x_n\}$ *последовательностью Коши*, если для любой окрестности нуля U найдётся такое N , что при $n, m > N$ точка $x_n - x_m$ лежит в U . Для пространств, на которых можно ввести **инвариантную** метрику (на самом деле, все метризуемые таковы), это определение совпадает с обычным. Отсюда, кстати, следует, что две эквивалентные инвариантные метрики задают одинаковые последовательности Коши и полны одновременно.

Зафиксируем $x \in X$ и $W(0) \subset Y$. Из равностепенной непрерывности $\{\Lambda_n\}$ следует, что есть симметричная окрестность $V(0) \subset X$ такая, что $\Lambda_n(V) \subset W$ для всех n . Раз C всюду плотно, найдётся точка $x' \in C \cap (x + V)$.

Пусть n и m столь велики, что

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W.$$

Тожество

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x - x')$$

показывает, что $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Поэтому $\{\Lambda_n x\}$ – последовательность Коши в Y , и $x \in C$.

- Из полноты Y следует, что $L = C$. Пусть V и W обозначают то же самое, что и в пункте (1); тогда $\Lambda_n(V) \subset V$ для всех n . Поэтому $\Lambda(V) \subset \bar{V}$. Из этого и регулярности любого ТВП (и Y в том числе) следует непрерывность Λ .

□

Замечание 7.1. Идея доказательства пункта (1) выражается всего в трёх утверждениях:

- C – подпространство, и его вторая категория требует, чтобы оно было всюду плотным.
- То, что Λ_n равностепенно непрерывно, позволяет из того, что для x' последовательность $\Lambda_n(x)$ сходится в себе, заключить это для близкой к ней x .
- То, что C всюду плотно, позволяет взять эту самую x' достаточно близко к x .

Теорема 7.4. Пусть $\{\Lambda_n\}$ – семейство непрерывных линейных отображений из F -пространства X в ТВП Y , причём в каждом x существует предел

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x.$$

Тогда отображение Λ непрерывно.

Доказательство. Из следствия 7.2 получится, что семейство Λ_n равностепенно непрерывно. Дальнейшее рассуждение эквивалентно пункту (2) предыдущей теоремы. □

Теорема 7.5. Пусть X и Y – ТВП, $K \subset X$ – компактное выпуклое подмножество, а Γ – такое семейство непрерывных отображений из X в Y , что для всех x $\Gamma(x)$ – ограниченное множество. Тогда $\Gamma(K)$ ограничено.

1.8 Теорема об открытом отображении

Теорема 8.1. Пусть X – F -пространство, Y – топологическое векторное пространство, а $\Lambda: X \rightarrow Y$ – такое непрерывное линейное отображение, что его образ является множеством второй категории в Y . Тогда верны следующие утверждения:

- $\Lambda(X) = Y$;
- Λ – открытое отображение;
- Y является F -пространством.

Доказательство. Подробно изложено в [1, с. 58–60]. □

Следствие 8.1 (Теорема Банаха). Если $\Lambda: X \rightarrow Y$ – непрерывная линейная биекция, а X и Y – F -пространства, то Λ – гомеоморфизм.

Доказательство. По теореме 8.1 об открытом отображении отображение Λ открыто. Из этого сразу следует непрерывность обратного к нему. □

1.9 Теорема о замкнутом графике

Определение 9.1. Пусть X, Y – множества, $f: X \rightarrow Y$ – отображение. Тогда графиком f называют множество

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}.$$

Утверждение 9.1. Пусть X, Y – топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, Y хаусдорфово. Тогда Γ_f замкнут в топологии произведения.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку (x, y) не на графике; пусть $f(x) = y_0$. Так как Y хаусдорфово, существуют непесекающиеся окрестности $U(y)$ и $V(y_0)$. Так как f непрерывно, существует окрестность $W(x)$ такая, что $f(W) \subset V$. Легко видеть, что

$$W \times U \cap \Gamma_f \subset W \times U \cap W \times V = \emptyset.$$

Таким образом, дополнение Γ_f открыто, поэтому оно замкнуто. \square

Теорема 9.1. Пусть $A: X \rightarrow Y$ – линейное отображение двух F -пространств. Если график A замкнут, то оно непрерывно.

Доказательство. Операции векторного пространства на $X \times Y$ можно определить просто покомпонентно. Пусть d_X и d_Y – полные инвариантные метрики пространств X и Y соответственно. Метрику на $X \times Y$ можно определить следующим образом:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2).$$

Можно проверить, что она будет совместима с топологией произведения, полна и инвариантна, а всё это вместе будет F -пространством, но это не очень интересно.

Поскольку отображение A линейно, его график будет линейным пространством. Так как он замкнут, он тоже будет F -пространством.

Определим отображения $\pi_1(x, Ax) = x$ и $\pi_2(x, y) = y$ из графика в соответствующие пространства. Тогда π_1 будет непрерывной биекцией между F -пространствами, а по теореме Банаха 8.1 мы знаем, что тогда и обратное к нему непрерывно. Но $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, поэтому и оно непрерывно, как композиция непрерывных отображений. \square

Утверждение 9.2. Пусть $A: X \rightarrow Y$ – линейное отображение двух F -пространств. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ точек из X такую, что существуют пределы

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ и } y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Если для любой такой последовательности $y = Ax$, то график A замкнут.

Доказательство. Поскольку все пространства метризуемы, можно говорить о замкнутости на языке последовательностей. Если график не замкнут, то существует последовательность точек графика (x_n, y_n) , сходящаяся к точке, на нём не лежащей (полнота гарантирует, что она не сходится к «дырке»). Так как сходимость в $X \times Y$ с определённой нами метрикой покомпонентная, это прямое противоречие. \square

1.10 Теорема Хана-Банаха

Определение 10.1. Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} . Отображение $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ называют выпуклым функционалом на X , если

$$\forall \lambda \in [0, 1] \ p(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda p(x_1) + (1 - \lambda)p(x_2).$$

Определение 10.2. Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} . Отображение $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ называют положительно однородным, если

$$\forall \alpha \geq 0 \ p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Утверждение 10.1. Пусть p – выпуклый, положительно однородный. Тогда $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$.

Утверждение 10.2. Пусть p – выпуклый, положительно однородный и неотрицительный. Тогда он является функционалом Минковского для множества

$$A = \{x \in X \mid p(x) < 1\}.$$

Теорема 10.1 (Вещественная теорема Хана-Банаха). Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} , p – положительно однородный выпуклый функционал на X , X_0 – подпространство X .

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0 . Если $f_0(x) \leq p(x)$ на X_0 , то найдётся функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

1. $f|_{X_0} = f_0$,
2. $f(x) \leq p(x)$ на X .

Теорема 10.2 (Комплексная теорема Хана-Банаха). Пусть X – векторное пространство над \mathbb{C} , p – полуорма на X , X_0 – подпространство X .

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0 . Если $|f_0(x)| \leq p(x)$ на X_0 , то найдётся функционал $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что

1. $f|_{X_0} = f_0$,
2. $|f(x)| \leq p(x)$ на X .

1.11 Первая теорема об отделимости

Определение 11.1. Пусть X – векторное пространство над \mathbb{R} , $E, F \subset X$ – непустые множества. Говорят, что E и F *отделимы*, если есть линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\forall x \in E \forall y \in F \quad f(x) \leq f(y).$$

Другими словами, $f(E) \leq f(F)$. Говорят, что f *разделяет* E и F .

Утверждение 11.1. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – линейный функционал. Тогда

$$\exists a \in X: \{\alpha a + x \mid \alpha \in \mathbb{R}, x \in \text{Ker } f\} = X.$$

Определение 11.2. Подпространство $Y \neq X$ такое, что есть $a \in X: \text{Lin}(a, Y) = X$ называют *гиперподпространством*.

Утверждение 11.2. Y – гиперподпространство в $X \Rightarrow$ есть линейный функционал f такой, что $\text{Ker } f = Y$.

Определение 11.3. *Гиперплоскость* – множество вида $x_0 + Y$, где Y – гиперподпространство.

Замечание 11.1. Понятно, что уравнение $f(x) = \alpha$ задаёт гиперплоскость. Пусть $\sup_E f = \alpha$. Тогда эта самая гиперплоскость разделяет множества E и F в обычном геометрическом смысле.

Определение 11.4. Говорят, что E и F *строго отделимы*, если существует линейный функционал f такой, что

$$\sup_E f < \inf_F f.$$

Теорема 11.1. Пусть X – ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, $\text{Int } E \neq \emptyset$ и $F \cap \text{Int } E = \emptyset$. Тогда найдётся **непрерывный** линейный функционал, разделяющий E и F .

Доказательство. Введём обозначение $\overset{\circ}{E} = \text{Int } E$. $f(x) - f(y) \leq 0 \Leftrightarrow f(E - F) \leq 0$, поэтому можно просто отделять $E - F$ от нуля.

Не умаляя общности, предположим, что $0 \in \overset{\circ}{E}$ (в противном случае можно было бы сдвинуть всё на какой-нибудь вектор). Зафиксируем $y_0 \in F$. Отделимость $E - F$ и $\{0\}$ равносильна отделимости $E - F + y_0$ и $\{y_0\}$. Введём $K = \overset{\circ}{E} - F + y_0$ и докажем сначала отделимость K и $\{y_0\}$.

Множество K – выпуклая окрестность нуля. Поэтому оно поглощающее \Rightarrow можно рассмотреть на нём функционал Минковского. Заметим, что

$$\overset{\circ}{E} \cap F = \emptyset \Rightarrow 0 \notin \overset{\circ}{E} - F,$$

а значит, $y_0 \notin K$. Отсюда получаем, что $m_K(y_0) \geq 1$ (здесь мы пользуемся ещё выпуклостью K).

Рассмотрим $X_0 = \text{Lin}(y_0)$. На нём можно задать функционал f_0 такой, что

$$\alpha y_0 \mapsto \alpha m_K(y_0).$$

Легко видеть, что $f_0 \leq m_K$ на X_0 , ведь

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \Rightarrow m_K(\alpha y_0) = \alpha m_K(y_0) = f_0(\alpha y_0) \\ \alpha < 0 \Rightarrow f_0(\alpha y_0) < 0, m_K(\alpha y_0) \geq 0. \end{cases}$$

По теореме Хана-Банаха f_0 можно продолжить на всё пространство X и получить линейный функционал f . Понятно, что f разделяет K и y_0 , ведь

$$x \in K \Rightarrow p(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1$$

и $f(y_0) = f_0(y_0) = p(y_0) \geq 1$.

Мы доказали, что f разделяет $\overset{\circ}{E}$ и F . Почему он разделяет E и F ? Пусть $x \in E$. Нетрудно доказать³, что тогда

$$\forall \varepsilon \in [0, 1) \quad (1 - \varepsilon)x \in \overset{\circ}{E}.$$

Мы уже знаем, что $(1 - \varepsilon)f(x) = f((1 - \varepsilon)x) \leq f(y)$ при $y \in F$. Предельным переходом в неравенстве получаем искомое.

Осталось доказать непрерывность f . Ноль лежит в $\overset{\circ}{E}$, поэтому можно выбрать уравновешенную $V(0) \subset \overset{\circ}{E}$. Зафиксируем какой-нибудь $y \in F$.

$$\forall x \in V \quad f(x) \leq f(y) = a.$$

Если x лежит в V , то и $-x$ лежит в V , поэтому $f(-x) \leq a$. Отсюда следует, что $a > 0$. Заметим, что

$$f(V) \subset (-2a, 2a) \Rightarrow V \subset f^{-1}((-2a, 2a)) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2a}V \subset f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)).$$

Вот и получили непрерывность. □

1.12 Вторая теорема об отделимости

Лемма 12.1. Каждая окрестность нуля W содержит симметричную окрестность U такую, что $U + U \subset W$.

Доказательство. Существование двух окрестностей V_1 и V_2 таких, что $V_1 + V_2 \subset W$ следует из непрерывности сложения. Полагая

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

получим окрестность нуля U , обладающую нужными свойствами. □

Замечание 12.1. Понятно, что опираясь на эту лемму, можно сделать и три, и четыре, и сколько угодно таких окрестностей.

Лемма 12.2. Пусть K и C – подмножества ТВП X , причём K компактно, C замкнуто и $K \cap C = \emptyset$. Тогда найдётся окрестность нуля V такая, что

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Доказательство. Если множество K пусто, то утверждение тривиально. Поэтому рассмотрим $x \in K$. По только что доказанной лемме 12.1, найдётся окрестность $V_x(0)$ такая, что $x + V_x + V_x + V_x$ не пересекается с C ; из симметричности V_x следует, что

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset.$$

Поскольку K компактно, в нём найдётся множество точек x_1, \dots, x_n такое, что

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Положим $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Тогда

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subset K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

а ни одно из множеств в последнем объединении не пересекает $C + V$. □

Теорема 12.1. Пусть X – локально выпуклое ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, причём E компактно, а F замкнуто, $E \cap F = \emptyset$. Тогда E и F строго отделимы.

Доказательство. Лемма 12.2 позволяет отделить E и F непересекающимися окрестностями, а локальная выпуклость позволяет сделать их выпуклыми. После этого можно просто сослаться на первую теорему об отделимости 11.1. □

³Нужно рассмотреть множество $(1 - \varepsilon)x + \varepsilon \overset{\circ}{E}$ и использовать выпуклость.

Определение 12.1. Если X – комплексное ТВП, то говорят, что непустые E и F *отделимы*, если существует линейный функционал f такой, что

$$f(E) \leq f(F).$$

Утверждение 12.1. Для \mathbb{C} формулировки теорем в точности такие же.

Доказательство. Нужно сослаться на доказанные теоремы, рассмотрев комплексное пространство, как вещественное. Функционал f определится через вещественный, как

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix).$$

□

Определение 12.2. Пусть X – ТВП. Тогда двойственное к нему X^* – пространство всех **непрерывных** линейных функционалов на X .

Следствие 12.1. Если X – локально выпуклое пространство, и $x \neq y$, то найдётся непрерывный линейный функционал такой, что $f(x) \neq f(y)$ (другими словами, X^* *разделяет точки пространства* X).

1.13 Теорема Крейна-Мильмана

Определение 13.1. Пусть X – ТВП, $E \subset X$ – выпуклый непустой компакт. Тогда говорят, что $S \subset E$ – *крайнее* для E , если

$$x, y \in E; y \notin S; t \in (0, 1) \Rightarrow tx + (1 - t)y \notin S.$$

Определение 13.2. Если крайнее множество состоит из одной точки, эта точка называется *крайней*.

Теорема 13.1 (Крейна-Мильмана). Пусть X – ТВП, E – выпуклый непустой компакт. Пусть $\text{Ext } E$ – множество крайних точек E . Тогда

$$E = \overline{\text{Conv}(\text{Ext } E)}$$

1.14 Слабые топологии

Определение 14.1. Пусть X – множество, Y – топологическое пространство, \mathcal{F} – семейство отображений из X в Y . Обозначим через $\tau_{\mathcal{F}}$ топологию, состоящую из всех объединений всех конечных пересечений множеств вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y , а $f \in \mathcal{F}$.

Замечание 14.1. Легко видеть, что эта конструкция действительно даёт топологию.

Утверждение 14.1. $\tau_{\mathcal{F}}$ – самая слабая топология, относительно которой все $f \in \mathcal{F}$ непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим произвольную такую топологию τ . Множества вида $f^{-1}(U)$ в ней открыты по определению непрерывного отображения, а их объединения и конечные пересечения – по определению топологии. Поэтому $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$. □

Утверждение 14.2. Если пространство Y хаусдорфово, и семейство \mathcal{F} разделяет точки X , то $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ тоже хаусдорфово.

Доказательство. Рассмотрим две различные точки x_1 и x_2 в X . Раз \mathcal{F} их разделяет, существует $f \in \mathcal{F}$ такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. У точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ есть непересекающиеся окрестности, раз Y хаусдорфово, и их прообразы – окрестности точек x_1 и x_2 – тоже не пересекаются. □

1.15 Топология, порождённая подпространством в пространстве функционалов

Лемма 15.1. Пусть X_n – векторное пространство, f_1, \dots, f_n, f – линейные функционалы на X ; пусть

$$N = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$;
2. $\exists M: \forall x \in X |f(x)| \leq M \cdot \max |f_i(x)|$;
3. $f|_N = 0$.

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ очевидна. Докажем $3 \Rightarrow 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Pi: X &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)); \end{aligned}$$

пусть $Y = \Pi X$. Возьмём произвольный $y = \Pi x \in Y$; определим $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$F(y) = f(x).$$

Для корректности нужно проверить, что если $\Pi x = \Pi x'$, то и $f(x) = f(x')$. Это так:

$$\Pi(x) = \Pi(x') \Rightarrow \Pi(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \in N \Rightarrow f(x) = f(x').$$

F – линейный функционал на подпространстве \mathbb{C}^n , его всегда можно продолжить на всё \mathbb{C}^n , просто отправив всё лишнее в ноль, и записать в координатах:

$$F(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \Rightarrow f(x) = F(\Pi x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x).$$

□

Теорема 15.1. Пусть X – векторное пространство, X' – подпространство пространства линейных функционалов на X , X' разделяет точки X . Тогда X с топологией, порождённой X' – локально выпуклое ТВП, а $X^* = X'$.

Доказательство. Мы уже знаем, что пространство $(X, \tau_{X'})$ хаусдорфово. Рассмотрим множества вида

$$V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0) = \left\{ x \in X \mid \forall i |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, f_i \in X' \right\}.$$

Нетрудно проверить, что любая точка в пересечении двух множеств такого типа содержится вместе с третьим множеством того же типа. Поэтому они образуют базу некоторой топологии τ .

Из непрерывности f_i в $\tau_{X'}$ следует открытость множеств $V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0)$. Это значит, что $\tau \subset \tau_{X'}$. Однако

$$\forall f \in X' f^{-1}(B_\varepsilon(x_0)) \in \tau,$$

поэтому f непрерывно относительно τ . Поскольку $\tau_{X'}$ самая слабая, $\tau = \tau_{X'}$.

Непрерывность сложения, умножения на скаляр и выпуклость доказываются довольно просто теперь, когда у нас есть удобная база.

Осталось лишь увидеть, что нет никаких непрерывных функционалов не из X' . Пусть f непрерывен в $(X, \tau_{X'})$. Тогда найдётся окрестность вида $V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(0)$ такая, что

$$\forall x \in V |f(x)| < 1.$$

Возьмём $y \in N$ в обозначениях предыдущей леммы 15.1:

$$f_i(y) = 0 \Rightarrow f_i(\alpha y) = 0 \Rightarrow \alpha y \in V$$

для любого скаляра α . Но

$$|f(\alpha y)| < 1 \Rightarrow \forall \alpha |\alpha| |f(y)| \leq 1.$$

Отсюда следует, что $f(y) = 0$. Пользуясь леммой, получаем искомое. □

1.16 Слабая топология и слабая сходимост

Определение 16.1. Пусть X – нормированное пространство. Тогда *слабой топологией* на нём называют самую слабую топологию, в которой все функционалы из X^* непрерывны. Её обозначают через $\sigma(X, X^*)$.

Утверждение 16.1. Слабая сходимост $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что $\forall f \in X^* f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Доказательство. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ означает, что

$$\forall V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0) \exists N: n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Если рассмотреть окрестность типа $V_{\varepsilon, f}$, получится в точности то, что справа.

Докажем теперь обратно. Для всех $f \in X^*$ выполняется

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \Leftrightarrow \forall V_{\varepsilon, f}(x_0) \exists N: n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Рассмотрим окрестность общего вида $V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}(x_0)$. Если записать последнее утверждение для всех окрестностей $V_{\varepsilon, f_i}(x_0)$ и выбрать наибольшее из полученных N , оно станет верным и для окрестности общего вида. \square

Теорема 16.1. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. для всех f в некотором всюду плотном множестве $E \subset X^*$ $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Доказательство. Пусть f – произвольный непрерывный линейный функционал на X . Поскольку E всюду плотно, найдётся функционал $f_0 \in E$ такой, что $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Заметим, что

$$f(x_n - x_0) = f_0(x_n - x_0) + (f - f_0)(x_n - x_0),$$

поэтому

$$|f(x_n - x_0)| \leq |f_0(x_n - x_0)| + |(f - f_0)(x_n - x_0)| \leq |f_0(x_n - x_0)| + \|f - f_0\|(\|x_n\| + \|x_0\|).$$

Используя ограниченность, окончательно пишем

$$|f(x_n - x_0)| \leq |f_0(x_n - x_0)| + M\|f - f_0\|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, а второе можно сделать сколь угодно малым, верно выбрав f_0 . Успех! \square

Пример 16.1. Пусть $x_n \in l^p$. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. $x_n^k \rightarrow x_0^k$.

Доказательство. Мы знаем, как устроено пространство, двойственное к l^p – это просто l^q , где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Линейная оболочка векторов вида

$$e_k = (0, \dots, \underbrace{1}_k, 0, \dots)$$

образует всюду плотное множество в l^q . При этом, если рассмотреть их как функционалы, то

$$e_k(x) = x^k \Rightarrow e_k(x_n) \rightarrow e_k(x_0).$$

При линейных комбинациях векторов это, конечно, не ломается, поэтому можно спокойно использовать только что доказанную теорему. \square

Пример 16.2. Пусть $x_n \in C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. $\forall t \in K \ x_n(t) \rightarrow x_0(t)$.

Доказательство. Мы знаем, как устроены функционалы и на $C(K)$ – любой из них имеет вид

$$\varphi(x) = \int_K x \, d\mu,$$

где μ – некоторая регулярная борелевская комплексная мера. По теореме Лебега об ограниченной сходимости из условий теоремы следует, что

$$\int_K x_n \, d\mu \rightarrow \int_K x_0 \, d\mu,$$

поскольку борелевская мера компактного множества конечна⁴.

В обратную сторону доказательство тривиально: надо в качестве функционала взять значение в точке. \square

Теорема 16.2. Пусть H – гильбертово пространство. Следующие утверждения равносильны:

1. $x_n \rightarrow x_0$;
2. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ и $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$.

Доказательство. Доказывать надо только $2 \Rightarrow 1$. Распишем норму разности:

$$\|x_n - x_0\|^2 = \|x_n\|^2 + (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + \|x_0\|^2.$$

Вторые два слагаемых стремятся к квадрату нормы x_0 из-за слабой сходимости (они ведь непрерывные линейные функционалы по сути!) Первое стремится к квадрату нормы x_0 . \square

1.17 Слабая ограниченность, теорема Мазура

Теорема 17.1. Пусть X – нормированное пространство, $E \subset X$. Следующие условия равносильны:

1. E ограничено в слабой топологии;
2. $f(E)$ ограничено для любого непрерывного на X функционала;
3. E ограничено по норме.

Доказательство.

$3 \Rightarrow 2$: Очевидно.

$2 \Rightarrow 3$: Пусть π_x – функционал на X^* , который переводит f в $f(x)$ (он, конечно, непрерывный). Ограниченность $f(E)$ означает, что множество $\{\pi_x(f) \mid x \in E\}$ ограничено, а это орбита f ! Поскольку X^* – F -пространство, можно воспользоваться теоремой Банаха-Штейнгауза 7.2 и получить, что семейство π_x равномерно непрерывно, а потому и равномерно ограничено, т.е. $\sup \|\pi_x\| < \infty$, а $\|\pi_x\| = \|x\|$.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $f \in X^*$. Рассмотрим $V_{1,f}(0)$. Из ограниченности E следует, что

$$\exists s > 0: \forall t > s \ E \subset tV \Rightarrow \sup |f(E)| < t.$$

$2 \Rightarrow 1$: Пусть U – окрестность нуля в слабой топологии. Не умаляя общности, $U = V_{\varepsilon, f_1, \dots, f_n}$. Найдутся M_i такие, что $|f_i(x)| \leq M_i$ для всех x из E . Пусть $M = \max M_i$; тогда при $t > \frac{M}{\varepsilon}$ $E \subset tU$. \square

Теорема 17.2 (Мазура). Пусть X – нормированное пространство, а $E \subset X$ непусто и выпукло. Тогда замкнутость E в слабой и в обычной топологии равносильны.

Доказательство. Если E слабо замкнуто, то оно и по норме замкнуто, ибо топология нормы сильнее. Интересно в обратную сторону.

Пусть множество E замкнуто по норме. Предположим, что существует точка $x_0 \notin E$, которая попала в слабое замыкание E . По второй теореме отделимости 12.1 точку можно отделить от замкнутого множества E функционалом $f \in X^*$ так, что

$$\operatorname{Re} f(x_0) > M > \sup_{x \in E} \operatorname{Re} f(x).$$

Пусть

$$U = \{x \mid \operatorname{Re} f(x) > M\}.$$

f непрерывен в слабой топологии, поэтому $\operatorname{Re} f$ непрерывен в ней, а значит, U в ней открыто. $x_0 \in U$ и U не пересекает E , что даёт противоречие. \square

⁴Это требование, кажется, не всегда включают в определение борелевской меры.

1.18 *-слабая топология

В принципе, можно было бы рассмотреть слабую топологию на пространстве линейных функционалов. Однако она оказывается довольно бесполезной, потому что второе двойственное зачастую слишком большое. Вместо этого поступают иначе.

Определение 18.1. Пусть X – нормированное пространство. Рассмотрим отображение $\pi: X^* \rightarrow X^{**}$, которое точку x переводит в функционал на пространстве X^* , сопоставляющий $f \in X^*$ его значение $f(x)$. *-слабой топологией называют самую слабую топологию, относительно которой непрерывны все функционалы из множества $\pi(X)$. Вместо $\pi(x)$ иногда пишут π_x .

Утверждение 18.1 (Корректность). Функционал π_x действительно непрерывен, его норма не превосходит $\|x\|$.

Доказательство.

$$|\pi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|\pi_x\| = \sup_x \frac{|\pi_x(f)|}{\|f\|} \leq \|x\|.$$

Это значит, что π_x ограничен \Rightarrow непрерывен, причём его норма не превосходит $\|x\|$. \square

Теорема 18.1. Пусть X – нормированное пространство.

1. Рассмотрим $X_0 \subset X$ – линейное подпространство, $f_0: X_0 \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывный линейный функционал. Тогда найдётся непрерывный линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.
2. Для любой ненулевой точки $x_0 \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $p(x) = \|f_0\| \|x\|$. Это полунорма на X (а если $f_0 \neq 0$), даже норма. Понятно, что $p(x)$ ограничивает f_0 . Поэтому по теореме Хана-Банаха существует линейный функционал f на X такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $f(x) \leq \|f_0\| \|x\|$. Это сразу же даёт нам ограниченность f и то, что его норма не превосходит $\|f_0\|$. При этом меньше она тоже никак быть не может.
2. Пусть $X_0 = \text{Lin}(x_0)$. Положим $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$. По первому пункту теоремы всё получается. \square

Теорема 18.2. Отображение $\pi: X \rightarrow X^{**}$ – изометрия.

Доказательство. Теперь мы знаем, что по любой точке x можно пострить функционал f такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Это значит, что

$$\frac{|\pi_x(f)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

Поэтому верхняя оценка из утверждения 18.1 достигается и $\|\pi_x\| = \|x\|$, что и значит, что отображение π – изометрия. \square

Определение 18.2. Если каноническое вложение π – изоморфизм, пространство X называют рефлексивным.

Пример 18.1. Рефлексивны все гильбертовы пространства (потому что они изоморфны своим двойственным). Рефлексивно также L^p при $1 < p < \infty$, потому что двойственное к нему L^q , а к нему снова L^p . То, что именно π задаёт этот изоморфизм, строго говоря, надо проверять, но это довольно просто. А вот L^1 , L^∞ и $C(K)$ не являются рефлексивными.

Утверждение 18.2. База *-слабой топологии состоит из множеств вида

$$V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f_0) = \{f \in V^* \mid \forall i \in 1 \dots n \mid f(x_i) - f_0(x_i) < \varepsilon\}.$$

Утверждение 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow \forall x \pi_x(f_n) \rightarrow \pi_x(f_0)$, то есть, *-слабая сходимость – по сути поточечная сходимость.

Теорема 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow$ выполнению двух условий:

1. $\sup \|f_n\| < \infty$.
2. Найдётся E – всюду плотное множество в X такое, что $f_n(x) \rightarrow f_0(x)$ для всех $x \in E$.

Всё это делается аналогично обычной слабой топологии.

Пример 18.2. Если X рефлексивно, то *-слабая и слабая топологии на X^* совпадают.

1.19 Теорема Банаха-Алаоглу

Теорема 19.1. Пусть X – нормированное пространство. Единичный шар \overline{B}^* в пространстве X^* компактен и секвенциально компактен в $*$ -слабой топологии.

Доказательство в предположении, что X сепарабельно. Доказывать будем в два этапа:

1. Сужение $*$ -топологии на \overline{B}^* метризуемо,
2. \overline{B}^* секвенциально компактен.

Начнём с первого.

1. Пусть x_n – счётное всюду плотное множество в X . $p_n(f) = |f(x_n)|$ – полунормы в X^* . Поскольку x_n всюду плотно, если $p_n(f) = 0$, то и в любой точке f обратится в ноль из-за его непрерывности. Поэтому семейство p_n определяющее. Значит, топология τ , которую порождает это семейство, метризуема.

Докажем, что

$$\sigma^*|_{\overline{B}^*} = \tau|_{\overline{B}^*}.$$

База топологии τ состоит из множеств вида

$$V_{\varepsilon, i_1, \dots, i_n}(f_0) = \left\{ f \in X^* \mid \forall k \in 1 \dots n \mid f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k}) < \varepsilon \right\},$$

а база топологии σ^* – из множеств вида

$$V_{\varepsilon, y_1, \dots, y_n}(f_0) = \left\{ f \in X^* \mid \forall k \in 1 \dots n \mid |f(y_k) - f_0(y_k)| < \varepsilon \right\}, \quad x_k \in X.$$

Отсюда сразу очевидно, что $\tau \subset \sigma^*$. Базы топологий, суженных на \overline{B}^* , получаются из этих просто пересечением с \overline{B}^* . Хотелось для них получить обратное включение, а для этого хочется доказать, что

$$\forall y_1, \dots, y_n \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_1, \dots, i_n: U_{\delta, i_1, \dots, i_n}(f_0) \cap \overline{B}^* \subset V_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(f_0).$$

Поскольку множество $\{x_n\}$ плотное, для каждого y_k найдётся x_{i_k} такой, что

$$\|y_k - x_{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{3(1 + \|f_0\|)}.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ и рассмотрим $f \in U_{\delta} \cap \overline{B}^*$. Проверим, лежит ли f в V_{ε} :

$$\begin{aligned} |f(y_k) - f_0(y_k)| &= |f(y_k) - f(x_{i_k}) + f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k}) + f_0(x_{i_k}) - f_0(y_k)| \leq \\ &\leq |f(y_k) - f(x_{i_k})| + |f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k})| + |f_0(x_{i_k}) - f_0(y_k)| \leq \\ &\leq \underbrace{\|f\| \|y_k - x_{i_k}\|}_{< \frac{\varepsilon}{3(1 + \|f_0\|)}} + \underbrace{|f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k})|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_0\| \|x_{i_k} - y_k\|}_{< \frac{\varepsilon}{3(1 + \|f_0\|)}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Успех!

2. Пусть теперь $\{f_n\} \in \overline{B}^*$, $\{x_n\}$ – всюду плотное множество в X . Заметим, что

$$|f_n(x_1)| \leq \|f_n\| \|x_1\| \leq \|x_1\|,$$

поэтому $\{f_n(x_1)\}$ ограничена в \mathbb{C} . Это значит, что можно выбрать подпоследовательность $f_n^{(1)}$ такую, что $f_n^{(1)}(x_1)$ сходится. Продолжая эту деятельность и используя диагональный метод, получаем последовательность $f_n^{(n)}$, сходящуюся во всех точках x_n . Но раз $\{x_n\}$ всюду плотно, оно и в каждой точке X будет.

□

1.20 Банаховы алгебры

Определение 20.1. Пусть A – алгебра над \mathbb{C} , т.е. линейное пространство с дистрибутивным ассоциативным умножением, коммутирующим с умножением на константу. A называют банаховой, если

1. На A есть норма, относительно которой A – банахово пространство;
2. $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$;

3. в алгебре есть единица e , причём $\|e\| = 1$.

Свойство 20.1. Умножение непрерывно относительно нормы, то есть если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $x_n y_n \rightarrow xy$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\|xy - x_n y_n\| &= \|xy - xy_n + xy_n - x_n y_n\| = \|x(y - y_n) + y_n(x - x_n)\| \leq \\ &\leq \|x\| \|y - y_n\| + \|y_n\| \|x - x_n\|.\end{aligned}$$

Правая часть стремится к нулю. □

Свойство 20.2.

$$\|x^n\| \leq \|x\|^n.$$

Пример 20.1.

1. $C(K)$,
2. $C^1([a, b])$, $\|f\| = \max |f| + \max |f'|$,
3. $L^\infty(X, \mu)$,
4. непрерывные операторы на банаховом пространстве,
5. алгебра матриц,
6. $l^1(\mathbb{Z})$ с умножением

$$z_n = \sum x_k y_{n-k},$$

7. $L^1(X)$ со свёрткой,
8. диск-алгебра $A(D)$ – алгебра аналитических функций на единичном круге в \mathbb{C} ,
9. алгебра H^∞ аналитических и ограниченных функций на единичном круге.

Замечание 20.1. В алгебре может не быть единицы, как, например, в L^1 (δ -функция). Её можно добавить с помощью общей конструкции: если есть алгебра A , рассмотреть алгебру \tilde{A} из пар (x, α) , где $x \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Норму надо определить, как

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|,$$

а умножение, как

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (xy + \alpha x + \beta y, \alpha\beta).$$

Единица будет $(0, 1)$.

1.21 Обратимые элементы

Определение 21.1. Пусть A – банахова алгебра. Элемент $a \in A$ называют *обратимым*, если есть $a^{-1} \in A$ такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Утверждение 21.1. a^{-1} единственен.

Теорема 21.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$, $\|x\| < 1$. Тогда элемент $e - x$ обратим, причём

$$(e - x)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} x^i.$$

Доказательство. Докажем сначала, что ряд из формулировки вообще сходится. Поскольку пространство банахово, она будет следовать из сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^i.$$

Но норма x меньше единицы, поэтому он сходится.

Теперь надо понять, почему он обратный. Рассмотрим произведение

$$(e - x)S_n = (e - x) \sum_{i=1}^n x^i = e - x^{n+1}.$$

Правая часть стремится к e , а левая часть стремится к $e - x$ по свойству 20.1. С другой стороны будет то же самое, ибо многочлены коммутируют. Успех! □

Теорема 21.2. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$ обратим, а $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Тогда элемент $x - h$ обратим, причём

$$\|(x - h)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|^{-1}}{1 - \|h\|\|x^{-1}\|}.$$

и

$$\|(x - h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \frac{\|h\|\|x^{-1}\|^2}{1 - \|h\|\|x^{-1}\|}.$$

Доказательство. Более-менее простые выкладки. □

Следствие 21.1. Множество U обратимых элементов открыто; отображение $x \mapsto x^{-1}$ является гомеоморфизмом U на U .

1.22 Спектр, его непустота, теорема Гельфанда-Мазура

С этого момента все банаховы алгебры над \mathbb{C} .

Определение 22.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. Тогда *спектром* элемента x называется множество

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ необратим}\}.$$

Дополнение спектра $\rho(x)$ называют *множеством регулярных точек* или *резольвентным множеством*; ρ из него называют *резольвентой*.

Теорема 22.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. Тогда $\sigma(x)$ – непустой компакт.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\|\lambda\| > \|x\|$. Рассмотрим $\lambda e - x$:

$$\lambda e - x = \lambda \left(e - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Поскольку

$$\left\| \frac{x}{\lambda} \right\| < 1,$$

элемент $\lambda e - x$ обратим, и λ – резольвента. Поэтому

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|x\|\}.$$

Пусть $\lambda \in \rho(x)$. Рассмотрим μ такое, что

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda e - x)^{-1}\|}.$$

Докажем, что $\mu \in \rho(x)$:

$$\|(\mu e - x) - (\lambda e - x)\| = \|(\mu - \lambda)e\| = |\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda e - x)^{-1}\|}.$$

По теореме 21.1 $\mu \in \rho(x)$. Отсюда следует открытость ρ и замкнутость σ , поэтому σ компактен (как замкнутое и ограниченное множество в \mathbb{C}).

Нужно ещё доказать непустоту. Тут нам всерьёз понадобится комплексность A . Для начала запишем *тождество Гильберта*:

$$(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}.$$

Его легко угадать, если представить себе, что это всё числа и заменить отрицательную степень на дробь. Доказательство не сильно сложнее.

Предположим, что $\sigma(x)$ пуст. Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ найдётся $(\lambda e - x)^{-1}$. Пусть $\varphi \in A^*$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \varphi((\lambda e - x)^{-1})$$

и докажем, что она целая:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{\varphi((\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1})}{\lambda - \mu} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} -\varphi((\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}) = -\varphi((\mu e - x)^{-2}). \end{aligned}$$

Теперь докажем, что f ограничена. Пусть $|\lambda| > \|x\| + 1$. Тогда

$$(\lambda e - x)^{-1} = \left(\lambda \left(e - \frac{x}{\lambda} \right) \right)^{-1} = \lambda^{-1} \left(e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Поэтому (оценка нормы обратного – по теореме 21.2)

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \leq 1.$$

При этом

$$|f(\lambda)| \leq \|\varphi\| \|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \|\varphi\|.$$

Таким образом, f – целая и ограниченная, а из теоремы Лиувилля – постоянная.

Записав ту же оценку более точно, имеем

$$|f(\lambda)| \leq \frac{\|\varphi\|}{|\lambda| - \|x\|} \Rightarrow |f(\lambda)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f = 0.$$

Раз все непрерывные линейные функционалы обращаются в ноль на $(\lambda e - x)^{-1}$, оно тоже должно быть равно нулю (например, по второму пункту теоремы 18.1). Но такого не может быть, ведь у нуля нет обратного! Поэтому $\sigma(x)$ непуст. \square

Теорема 22.2 (Гельфанда-Мазура). Пусть A – банахова алгебра, и в ней все ненулевые элементы обратимы. Тогда она изометрически изоморфна \mathbb{C} .

Доказательство. Для каждого $x \in A$ спектр непуст, поэтому есть $\lambda(x)$ такое, что $x - \lambda(x)e$ необратим, а необратим лишь ноль, поэтому $x = \lambda(x)e$. Изоморфизм задаётся так, чтобы $x \mapsto \lambda(x)$. \square

1.23 Спектральный радиус

Определение 23.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. Спектральным радиусом элемента x называют

$$r(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Замечание 23.1. Поскольку $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, $r(x) \leq \|x\|$.

Теорема 23.1 (О спектральном радиусе).

$$r(x) = \max_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через R . По теореме об отображении спектра если $\lambda \in \sigma(x)$, то $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Мы знаем, что элементы спектра y лежат в замкнутом круге с радиусом $\|y\|$, поэтому

$$|\lambda^n| \leq \|x^n\| \Rightarrow |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|x^n\|} \Rightarrow |\lambda| \leq r(x) \Rightarrow R \leq r(x).$$

Как доказать неравенство в обратную сторону? Возьмём $\varphi \in A^*$ и рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \varphi((\lambda e - x)^{-1})$$

для λ не из спектра. Так же, как в теореме 22.1, доказывается аналитичность f ; поэтому она аналитична вне круга с радиусом R .

Разложим её в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda^n}.$$

Если $|\lambda| > \|x\|$,

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \Rightarrow f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Поэтому при $n > 0$ получается, что $c_{n+1} = \varphi(x^n)$.

С другой стороны,

$$c_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=r_0} \lambda^n f(\lambda) d\lambda, \quad r_0 > R.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x^n) = |c_{n+1}| \leq r_0^{n+1} M.$$

По теореме 18.1 найдётся такой функционал φ , что $\|\varphi\| = 1$, причём $\varphi(x^n) = \|x^n\|$, поэтому

$$\|x^n\| \leq M r_0^{n+1} \Rightarrow \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r_0 \Rightarrow r(x) \leq R.$$

\square

1.24 Примеры вычисления спектров операторов

Определение 24.1. Пусть X – банахово пространство, $U: X \rightarrow X$ – непрерывный оператор. Тогда ненулевой вектор $x \in X$ называют *собственным вектором* X , если существует λ такое, что $Ux = \lambda x$. В такой ситуации λ называют *собственным числом* оператора U .

Замечание 24.1. Существование у оператора собственных чисел и векторов равносильно тому, что он не инъективен. В конечномерном случае это равносильно его необратимости; в бесконечномерном оператор бывает инъективен, но не сюръективен.

Определение 24.2. Множество собственных чисел U называют *точечным спектром* U , а оставшуюся часть спектра – *непрерывным спектром* U . Первый обозначают как $\sigma_p(U)$, а второй – как $\sigma_c(U)$.

Пример 24.1. Рассмотрим $l^2(\mathbb{N})$ и оператор S на нём такой, что

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots).$$

Это так называемый *оператор сдвига*. Для него

$$\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{|\lambda| \leq 1\}.$$

Доказательство. Поищем сначала собственные числа. В координатах условие $Ux = \lambda x$ выглядит, как

$$\begin{cases} 0 &= \lambda x_1, \\ x_1 &= \lambda x_2, \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda x_{n+1}, \\ &\vdots \end{cases}$$

Отсюда понятно, что может подойти лишь $\lambda = 0$, но ядро оператора S пусто. Поэтому у него нет собственных чисел, и он инъективен.

Пусть теперь $\lambda \in \rho(S)$, тогда для любого $y \in l^2$ найдётся единственный $x \in l^2$ такой, что

$$\begin{cases} -\lambda x_1 &= y_1, \\ x_1 - \lambda x_2 &= \lambda y_2, \\ &\vdots \\ x_n - \lambda x_{n+1} &= \lambda y_{n+1}, \\ &\vdots \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$x_n = -\frac{y_1}{\lambda^n} - \dots - \frac{y_n}{\lambda}.$$

При $|\lambda| < 1$ и, например, $y = e_1$, x просто не попадает в l^2 , поэтому этот круг лежит в спектре; поскольку спектр компактен, там лежит и круг $|\lambda| \leq 1$. При этом спектральный радиус ограничен сверху $\|S\| = 1$, поэтому все остальные точки лежат в резольвентном множестве. \square

Пример 24.2. Можно рассмотреть очень похожий оператор S^* – сдвиг в обратную сторону. Для него всё делается похожим путём, но получается даже проще:

$$\sigma(S) = \{|\lambda| \leq 1\} \text{ и } \sigma_p(S) = \{|\lambda| < 1\}.$$

Пример 24.3. Рассмотрим оператор M на $C(K)$, где K – компакт в \mathbb{C} , который переводит функцию $f(z)$ в $zf(z)$. Его называют *оператором умножения на независимую переменную*. Для него

$$\sigma(M) = K \text{ и } \sigma_p(M) = \{\text{изол. точки } K\}.$$

Доказательство. Выясним, какие у S собственные числа. Нужно, чтобы выполнялось условие

$$zf(z) = \lambda f(z) \Rightarrow (z - \lambda)f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

всюду, кроме точки λ . Если λ – предельная точка K , то f просто совсем ноль, это не годится. А вот если λ – изолированная точка K , то λ – собственное число.

Теперь посмотрим на резольвентное множество. Пусть $\lambda \in \rho(M)$, тогда для любой $g \in C(K)$ найдётся $f \in C(K)$ такая, что

$$(z - \lambda)f(z) = g(z).$$

Если λ не в K , то можно просто поделить, поэтому $\rho(M) \subset K$. Но вот если λ в K , то ничего не выйдет, ибо всегда можно положить $g(z) = 1$, а тогда и $g(\lambda) = 1$. Поэтому $\sigma(M) = K$. \square

Пример 24.4. Пусть μ – конечная борелевская мера на $K \subset \mathbb{C}$. Тогда можно рассмотреть такую же задачу для $L^2(K)$. Собственными числами окажутся *атомы* меры μ – точки с ненулевой мерой. А вот весь спектр совпадёт с *замкнутым носителем меры* μ – наименьшим замкнутым множеством $F \subset K$ таким, что $\mu(\mathbb{C} \setminus F) = 0$.

1.25 Теорема об отображении спектра, спектр сопряжённого оператора

Теорема 25.1 (Теорема об отображении спектра). Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$,

$$p(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j \text{ – многочлен.}$$

Тогда $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda e - x$ необратим. Заметим, что

$$p(\lambda)e - p(x) = (\lambda e - x)q(x),$$

где $q(x)$ – многочлен (по теореме Безу). Предположим, что $p(\lambda e - p(x))$ обратим, и

$$v = (p(\lambda)e - p(x))^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что $xv = vx$ (домножить надо), поэтому $qv = vq$.

$$v(\lambda e - x)q = (\lambda e - x)qv = e = qv(\lambda e - x),$$

поэтому qv обратный к $\lambda e - x$. Поэтому $p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x))$.

Пусть теперь $\mu \in \sigma(p(x))$. Рассмотрим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни уравнения $p(\lambda) = \mu$. Ясно, что

$$p(z) - \mu = c(\lambda_1 - z) \dots (\lambda_n - z)$$

и

$$p(x) - \mu e = c(\lambda_1 e - x) \dots (\lambda_n e - x).$$

Если λ_i не лежит в спектре, то правая часть обратима, что ведёт к противоречию. □

Определение 25.1. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , а U – оператор на H . *Сопряжённым* к U называют оператор U^* , удовлетворяющий соотношению

$$(U(x), y) = (x, U(y)).$$

Он существует и единственен для любого ограниченного оператора, это доказано, например, в [2, с. 393–394].

Утверждение 25.1. $\sigma(U^*) = \overline{\sigma(U)}$.

Доказательство.

$$\lambda \in \rho(U) \Leftrightarrow U - \lambda I \text{ обратим} \Leftrightarrow (U - \lambda I)^* = U^* - \bar{\lambda} I \text{ обратим} \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(U^*).$$

□

1.26 Спектр унитарного и самосопряжённого оператора

Определение 26.1. Ограниченный линейный оператор U на гильбертовом пространстве H называют *унитарным*, если он обратим и $U^* = U^{-1}$.

Определение 26.2. Линейный оператор U на гильбертовом пространстве H называют *самосопряжённым*, если $U^* = U$.

Замечание 26.1. Из самосопряжённости оператора можно вывести его непрерывность с помощью теоремы о замкнутом графике.

Утверждение 26.1. Пусть U – унитарный оператор на H . Тогда

$$\sigma(U) \subset \{|\lambda| = 1\}.$$

Доказательство. Поскольку U унитарный, $\|Ux\| = \|x\|$, поэтому $\|U\| = 1$ и модуль λ не может быть больше 1. Если $|\lambda| < 1$, то оператор

$$U - \lambda I = U(I - \lambda U^{-1})$$

обратим по теореме 21.1. □

Теорема 26.1. Пусть U – самосопряжённый оператор. Тогда $\sigma(U) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Возьмём какое-нибудь $M > \|U\|$. Понятно, что тогда $iM \in \rho(U)$ и оператор $U + iMI$ обратим. Рассмотрим

$$V = (U - iMI)(U + iMI)^{-1}.$$

Докажем, что оператор V унитарен. Очевидно, что он обратим, причём

$$V^{-1} = (U + iMI)(U - iMI)^{-1}.$$

Найдём сопряжённый к V :

$$V^* = ((U + iMI)^{-1})^* (U - iMI)^* = (U - iMI)^{-1} (U + iMI).$$

Равенство нужных нам выражений получается тривиально.

На минуту представим, что корректно равенство

$$V = \frac{U - iMI}{U + iMI},$$

и рассмотрим отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, которое действует следующим образом:

$$\mu \mapsto i \frac{1 + \mu}{1 - \mu} = w.$$

Это отображение переводит единичный круг в верхнюю полуплоскость, а единичную окружность – в вещественную ось. Для любого $\lambda \notin \mathbb{R}$ найдётся единственное μ , которое в него перейдёт и $|\mu| \neq 1$. В этой ситуации $\mu \in \rho(V)$ и оператор $V - \mu I$ обратим.

Из этого следует, что обратимы операторы

$$(U - iMI) - \mu(U + iMI) \Rightarrow U(1 - \mu) - iM(1 + \mu)I \Rightarrow U - iM \frac{1 + \mu}{1 - \mu} I.$$

Поэтому $M\lambda \in \rho(U)$, но тогда и $\lambda \in \rho(U)$. Успех! □

1.27 Компактные операторы и их простейшие свойства

Определение 27.1. Пусть X и Y – нормированные пространства, $U \in L(X, Y)$, и пусть B^X – замкнутый единичный шар в X . Линейный оператор U называют *компактным*, если $U(B^X)$ – предкомпактное множество в Y .

Утверждение 27.1. U компактен \Leftrightarrow образ любого ограниченного множества E относительно компактен в U .

Доказательство.

$$\forall x \in E \ \|x\| \leq M \Rightarrow E \subset MB^X \Rightarrow U(E) \subset MU(B^X).$$

Умножение на M – гомеоморфизм Y в себя, поэтому $MU(B^X)$ предкомпактно. Однако любое подмножество предкомпактного множества предкомпактно. □

Утверждение 27.2. U компактен $\Leftrightarrow \forall x_n \in X, \|x_n\| \leq 1 \ \exists x_{n_k}: Ux_{n_k}$ сходится в Y .

Доказательство. В нормированном пространстве компактность и секвенциальная компактность совпадают. □

Замечание 27.1. Любой компактный оператор является ограниченным, а поэтому и непрерывным.

Теорема 27.1. Пусть X и Y – нормированные пространства, а U и V – линейные компактные операторы из X в Y . Тогда $\alpha U + \beta V$ компактен.

Доказательство. Следует без труда из секвенциального определения компактности оператора. □

Теорема 27.2. Пусть $U: X \rightarrow Y$ и $V: Y \rightarrow Z$ – компактные операторы. Тогда если один из них компактен, то и композиция компактна.

Замечание 27.2. Компактные операторы образуют в пространстве операторов двусторонний идеал.

Следствие 27.1. Пусть X, Y – нормированные и бесконечномерные. Тогда никакой обратимый оператор $X \rightarrow Y$ не компактен.

Доказательство. Это так, потому что иначе был бы компактен тождественный оператор в одном из пространств. \square

Теорема 27.3. Пусть X, Y – нормированные пространства, U_n, U – операторы из X в Y , причём U_n компактны и $\|U_n - U\| \rightarrow 0$. Тогда и U компактен (другими словами, множество компактных операторов замкнуто).

Доказательство. Рассмотрим $x_n \in X: \|x_n\| \leq 1$. Найдётся подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}$ такая, что её образ при U_1 сходится. Продолжив выделять и используя диагональный метод, получим $\{x_k^{(k)}\}$ такую, что её образ сходится при любом U_n .

Докажем, что $Ux_k^{(k)}$ сходится, проверим фундаментальность:

$$\begin{aligned} \|Ux_k^{(k)} - Ux_l^{(l)}\| &= \|Ux_k^{(k)} - U_jx_k^{(k)} + U_jx_k^{(k)} - U_jx_l^{(l)} + U_jx_l^{(l)} - Ux_l^{(l)}\| \leq \\ &\leq \|U - U_j\| \|x_k^{(k)}\| + \|U_j(x_k^{(k)} - x_l^{(l)})\| + \|U_j - U\| \|x_l^{(l)}\|. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $U_jx_k^{(k)}$ сходится, можно выбрать такое N , что при $k, l > N$ второе слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Пользуясь тем, что $x_k^{(k)}$ ограничены единицей по норме, и тем, что $\|U_j - U\| \rightarrow 0$, можно выбрать такое M , что при $j > M$ первое и третье слагаемые в сумме меньше $\frac{2\varepsilon}{3}$. Таким образом, получаем фундаментальность. **Почему из фундаментальности следует сходимость?**

Не должен ли образ быть банаховым? \square

Следствие 27.2. Отсюда, в частности, следует, что если оператор можно приблизить операторами конечного ранга, он будет компактен, потому что любой ограниченный оператор конечного ранга компактен.

1.28 Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве

Теорема 28.1. Пусть H – гильбертово пространство, A – оператор из H в H . Следующие условия равносильны:

1. A компактен;
2. $\forall x_n \in H: x_n \xrightarrow{w} x_0$ верно, что $Ax_n \rightarrow Ax_0$.

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть x_n – такая последовательность, что $\|x_n\| \leq 1$. По теореме Банаха-Алаоглу 19.1 найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$, а из этого следует, что $Ax_{n_k} \rightarrow Ax_0$.

$1 \Rightarrow 2$: Предположим, что Ax_n не сходится к Ax_0 . Тогда найдётся x_{n_k} и $\delta > 0$ такие, что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geq \delta$.

Поскольку x_{n_k} слабо сходится, $\sup_{n_k} \|x_{n_k}\| < \infty$. Раз A компактен, найдётся $Ax_{n_{k_j}} \rightarrow z$. Докажем, что $z = Ax_0$. Пусть $y \in H$, тогда $(Ax_{n_{k_j}}, y) \rightarrow (z, y)$. С другой стороны,

$$(Ax_{n_{k_j}}, y) = (x_{n_{k_j}}, A^*y) \rightarrow (x_0, A^*y) = (Ax_0, y) \Rightarrow (z, y) = (Ax_0, y) \Rightarrow z = Ax_0.$$

Но такого не может быть, потому что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geq \delta$! Успех. \square

1.29 Примеры компактных интегральных операторов

Определение 29.1. Пусть U – интегральный оператор с ядром K :

$$(Uf)(s) = \int_T K(s, t)f(t) d\mu(t).$$

Ядро K называют *вырожденным*, если

$$K(s, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(s)\beta_j(t).$$

Пример 29.1. Интегральный оператор с вырожденным ядром на L^p компактен.

Пример 29.2. Если ядро непрерывно на замыкании области определения, то оператор тоже компактен.

1.30 Собственные числа компактного оператора

Теорема 30.1. Пусть X – нормированное пространство, и $A: X \rightarrow X$ – компактный линейный оператор. Для любого $\delta > 0$ множество собственных чисел A таких, что $|\lambda| \geq \delta$ конечно. При этом собственное подпространство любого $\lambda \neq 0$ конечномерно.

Доказательство. Пусть есть бесконечно много собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ таких, что $|\lambda_k| \geq \delta$. Пусть x_k – собственный вектор λ_k . Как собственные вектора разных собственных чисел, x_k линейно независимы; пусть

$$X_m = \text{Lin}(x_1, \dots, x_m).$$

Возьмём $y_m \in X_m$ такой, что $\|y_m\| = 1$ и

$$\rho(y_m, X_{m-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Это возможно по лемме о почти перпендикуляре. Докажем, что $A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)$ не содержит сходящейся подпоследовательности.

Пусть $y_m = \alpha_m x_m + \underbrace{\tilde{y}_m}_{\in X_{m-1}}$. Тогда

$$A \frac{y_m}{\lambda_m} = \frac{\alpha_m \lambda_m x_m}{\lambda_m} + \frac{A \tilde{y}_m}{\lambda_m} = \alpha_m x_m + \underbrace{\frac{1}{\lambda_m} A \tilde{y}_m}_{\in X_{m-1}} = y_m - \tilde{y}_m + \frac{1}{\lambda_m} A \tilde{y}_m.$$

Таким образом,

$$A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) = y_m + z_m,$$

где $z_m \in X_{m-1}$. Поэтому

$$\left\| A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) - A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) \right\| = \|y_m + \underbrace{z_m - y_n - z_n}_{\in X_{m-1}}\| \geq \frac{1}{2},$$

поэтому сходящейся подпоследовательности не выделить.

Аналогично доказывается отсутствие бесконечномерных собственных подпространств. \square

1.31 Теорема Гильберта-Шмидта

Теорема 31.1. Пусть A – компактный и самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Тогда существует ортогональный базис $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, состоящий из собственных векторов A .

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $Q(x) = (Ax, x)$. Поскольку A самосопряжённый,

$$\overline{Q(x)} = (x, A(x)) = Q(x).$$

Лемма 31.1.

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow Q(x_n) \rightarrow Q(x_0).$$

Доказательство.

$$|Q(x_n) - Q(x_0)| = |(Ax, x) - (Ax_0, x_0)| \leq |(Ax, x) - (Ax_0, x)| + |(Ax_0, x) - (Ax_0, x_0)|.$$

Второе слагаемое очевидно стремится к нулю, а первое – по теореме 28.1. \square

Лемма 31.2. Пусть

$$M = \sup_{\|x\| \leq 1} |Q(x)|.$$

Тогда найдётся x_0 такой, что $\|x_0\| = 1$ и $M = |Q(x_0)|$.

Доказательство. Можно выбрать последовательность x_n такую, что $\|x_n\| \leq 1$ и $Q(x_n) \rightarrow M$. По теореме Банаха-Алаоглу 19.1 можно выделить

$$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0.$$

По предыдущей лемме $Q(x_n) \rightarrow Q(x_0)$. □

Лемма 31.3. Пусть $x \in H$, $\|x_0\| = 1$ и

$$|Q(x_0)| = \max_{\|x\| \leq 1} |Q(x)|.$$

Пусть y перпендикулярен к x_0 . Тогда $(y, Ax_0) = 0$.

Доказательство. Не умаляя общности, положим $\|y\| = 1$, рассмотрим

$$\tilde{x} = \frac{x_0 + ry}{\sqrt{1 + |r|^2}}, \quad r \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $\|\tilde{x}\| = 1$. Найдём $Q(\tilde{x})$:

$$Q(\tilde{x}) = \frac{1}{1 + |r|^2} \left(Q(x_0) + 2 \operatorname{Re} (r \overline{(y, Ax_0)}) + |r|^2 Q(y) \right).$$

Пусть $(Ax_0, y) = |(Ax_0, y)|e^{i\theta}$, и пусть $r = he^{i\theta}$, где h – некоторое малое число. Заметим, что

$$r \overline{(Ax_0, y)} = h |(Ax_0, y)|.$$

Из написанного выше следует, что

$$Q(\tilde{x}) = Q(x_0) + 2h |(Ax_0, y)| + o(h^2).$$

Пусть $|(Ax_0, y)| > 0$. Если $Q(x_0) > 0$, берём $h > 0$ и $Q(\tilde{x}) > Q(x_0)$. С отрицательным наоборот. □

Следствие 31.1. x_0 – собственный вектор оператора A , отвечающий $\lambda = Q(x_0)$.

Доказательство. Разложим Ax_0 по $\operatorname{Lin} x_0$ и x_0^\perp : пусть $Ax_0 = \lambda x_0 + y$, где $y \perp x_0$. По лемме $y \perp Ax_0$, поэтому

$$0 = (Ax_0, y) = (y, y) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0.$$

При этом

$$Q(x_0) = (Ax_0, x_0) = \lambda.$$

□

Определение 31.1. Пусть T – линейный оператор на X , X нормируемо, X_0 – замкнутое подпространство в X . Говорят, что X_0 инвариантно, если $TX_0 \subset X_0$.

Утверждение 31.1. Пусть H – гильбертово пространство, T – линейный оператор, H_0 инвариантно для T . Тогда H_0^\perp инвариантно относительно T^* .

Следствие 31.2. Если H_0 инвариантно относительно самосопряжённого A , то и H_0^\perp тоже.

Возьмём $x_1 \in H$ такой, что $\|x_1\| = 1$ и

$$|Q(x_0)| = \max_{\|x\| \leq 1} |Q(x)|.$$

Мы знаем, что x_1 – собственный вектор, а $\lambda_1 = Q(x_1)$ – собственное число. Можно взять $H_1 = \operatorname{Lin}(x_1)$, это A -инвариантное подпространство, его ортогональное дополнение, значит, тоже. Поэтому можно сузить всю задачу на H_1^\perp и продолжать.

Какие есть возможные концовки?

1. Найдётся k такое, что $Q(x) = 0$ на всём H_k^\perp ,
2. это будет продолжаться до бесконечности.

Рассмотрим эти случаи.

1. Если $Q(x) = 0$ на H_k^\perp , то мы знаем, что $\forall x \in H_k (x, Ax) = 0$. Воспользуемся 31.3:

$$(x, Ax) = 0 \Rightarrow \|x\|^2 \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{Ax}{\|x\|} \right) = 0,$$

и, положив

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \text{ и } y = \frac{Ax}{\|x\|},$$

получим

$$(Ax, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0.$$

Поэтому $H_k^\perp \in \text{Ker } A$.

2. Предположим, что нашёлся x такой, что он перпендикулярен всем x_k . Докажем, что $x \in \text{Ker } A$, предположим, не умаляя общности, что $\|x\| \leq 1$.

Введём обозначение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_k^\perp = (\text{Lin}\{x_k\})^\perp = \tilde{H},$$

ясно, что $x \in \tilde{H}$.

$$\forall k \ x \in H_k^\perp \Rightarrow |Q(x)| \leq \max_{\|z\| \leq 1, z \in H_k^\perp} |Q(z)| = |Q(x_{k+1})| = |\lambda_{k+1}| \rightarrow 0,$$

а потому $\forall x \in \tilde{H} Q(x) = 0$.

Аналогичным рассуждением, используя 31.3, получаем, что $\tilde{H} \subset \text{Ker } A$.

В случае 1 пространство H_k – конечномерно. Поэтому оно полное, а значит, замкнутое, а потому $H = H_k \oplus H_k^\perp$. Поскольку $H_k^\perp \subset \text{Ker } A$, можно выбрать там базис Шаудера из элементов ядра, а в H_k есть базис из собственных векторов. Таким образом, во всём H получится базис из собственных векторов.

В случае 2 ясно, что

$$(\overline{\text{Lin}\{x_k\}})^\perp \subset (\text{Lin } B)^\perp \subset \text{Ker } A.$$

При этом

$$H = (\overline{\text{Lin}\{x_k\}})^\perp \oplus \overline{\text{Lin}\{x_k\}},$$

$\{x_k\}$ является базисом Шаудера в $\overline{\text{Lin}\{x_k\}}$ и в $\overline{\text{Lin}\{x_k\}}$ можно выбрать базис Шаудера из элементов ядра.

□

1.33 Компактность сопряжённого оператора

Определение 33.1. Пусть X, Y – банаховы пространство, $A: X \rightarrow Y$ – непрерывный линейный оператор. Тогда банаховым сопряжённым оператором A^{b*} называют оператор из Y^* в X^* такой, что

$$f \mapsto f \circ A.$$

Замечание 33.1. Легко видеть, что оператор A^{b*} ограничен, потому что

$$\frac{\|f \circ A\|}{\|f\|} \leq \|A\|.$$

Определение 33.2. Пусть H и K – гильбертовы пространства, A – непрерывный оператор из H в K . Тогда гильбертовым сопряжённым оператором называют оператор A^{h*} из K в H такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xleftarrow{A^{h*}} & K \\ I \downarrow & & \downarrow J \\ H^* & \xleftarrow{A^{b*}} & K^* \end{array}$$

где I и J – сопряжённо-линейные унитарные изоморфизмы, доставляемые теоремой Рисса.

Утверждение 33.1. Гильбертов сопряжённый оператор линеен и ограничен.

Доказательство. Явное выражение для него имеет вид $I^{-1}A^{b*}J$, поэтому его линейность следует из линейности A^{b*} и сопряжённой линейности I и J . Ограниченность же следует из того, что

$$\frac{\|I^{-1}A^{b*}J(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{b*}J(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{b*}\| \|J(x)\|}{\|x\|} = \|A^{b*}\|.$$

□

Утверждение 33.2. Гильбертов сопряжённый оператор из H в H является сопряжённым в обычном смысле.

Доказательство. Проведём прямое вычисление:

$$y = A^{h*}(x) = I^{-1}A^{b*}I(x) = I^{-1}\left((A(\cdot), x)\right) \Rightarrow (\cdot, y) = (A(\cdot), x).$$

Отсюда для любого t выполняется

$$(t, A^{h*}x) = (At, x).$$

□

Теорема 33.1. Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X . Тогда банахово сопряжённый к нему оператор компактен.

Доказательство. Будем доказывать, что A^{b*} переводит B^{X*} в предкомпактное множество. Рассмотрим элементы из X^* как функции только на компакте \overline{AS} – замыкании образа открытого единичного шара. Оказывается, что множество Φ функций, отвечающих функционалам из B^{X*} , равномерно ограничено и равномерно непрерывно. Действительно, если $\|\varphi\| \leq 1$, то

$$\sup_{x \in \overline{AS}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in AS} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \sup_S \|Ax\| \leq \|A\|$$

и

$$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq \|\varphi\| \|x' - x''\| \leq \|x' - x''\|.$$

Поэтому множество Φ предкомпактно в $C(\overline{AS})$ по теореме Арцела-Асколи.

С другой стороны, Φ с метрикой из $C(\overline{AS})$ изометрично множеству $A^{b*}B^{X*}$ с нормой. Это так, поскольку

$$\begin{aligned} \|A^{b*}g_1 - A^{b*}g_2\| &= \sup_{x \in S} |(A^{b*}g_1 - A^{b*}g_2)(x)| = \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2)A(x)| = \sup_{z \in AS} |(g_1 - g_2)z| = \\ &= \sup_{z \in \overline{AS}} |(g_1 - g_2)z| = \rho(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Раз Φ предкомпактно, оно вполне ограничено; но тогда вполне ограничено и изометричное ему множество $A^{b*}B^{X*}$. Поэтому $A^{b*}B^{X*}$ предкомпактно. □

Следствие 33.1. Если оператор на гильбертовом пространстве компактен, то и сопряжённый к нему компактен.

Доказательство. Это следует из изометричности биекций I и J из теоремы Рисса. □

1.34 Лемма о замкнутости образа и ортогональные представления пространства

Сформулируем для начала теорему, которую будем доказывать три пункта.

Теорема 34.1. Пусть A – компактный оператор на гильбертовом пространстве H , и $T = I - A$.

1. Уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f , которые ортогональны каждому решению уравнения $T^*\psi_0 = 0$.
2. Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ ровно одно решение, либо уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.
3. Уравнения $T\varphi = f$ и $T\varphi_0 = 0$ имеют одно и то же, притом конечное, число линейно независимых решений.

А теперь начнём доказывать.

Лемма 34.1. Образ оператора T замкнут.

Доказательство. Пусть $y_n \in \text{Im } T$ и $y_n \rightarrow y$. Найдутся векторы $x_n \in H$ такие, что

$$y_n = x_n - Ax_n,$$

причём можно выбрать их так, чтобы $x_n \perp \text{Ker } T$.

На самом деле, ещё можно считать, что $\|x_n\|$ ограничены в совокупности, ибо в противном случае можно было бы перейти к подпоследовательности, в которой $\|x_n\| \rightarrow \infty$. Для неё выполнялось бы

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{Ax_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0.$$

Компактность оператора A позволяет считать последовательность

$$\frac{Ax_n}{\|x_n\|}$$

сходящейся, поэтому и

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow z.$$

Ясно, что $\|z\| = 1$ и $z \in \text{Ker } T$.

С другой стороны мы считали все x_n ортогональными к $\text{Ker } T$, поэтому и $z \perp \text{Ker } T \Rightarrow z = 0$. Но тогда у него не единичная норма!

Поскольку $\|x_n\|$ ограничены в совокупности, последовательность $\{Ax_n\}$ можно считать сходящейся, а поэтому сходится и последовательность $\{x_n\}$. Понятно, что предел этой последовательности и есть прообраз y . \square

Лемма 34.2. Пространство H является прямой суммой замкнутых подпространств $\text{Ker } T$ и $\text{Im } T^*$.

Доказательство. Мы уже знаем, что оба этих подпространства замкнуты. Ещё они ортогональны, поскольку

$$h \in \text{Ker } T \Leftrightarrow Th = 0 \Rightarrow ((T^*x, h) = (x, Th) = 0).$$

Предположим, например, что $(\text{Ker } T)^\perp \neq \text{Im } T^*$, то есть найдётся вектор $y \notin \text{Im } T^*$ такой, что $y \perp \text{Ker } T$. Поскольку образ T^* замкнут, можно вычесть из y его проекцию на этот образ и получить вектор, ортогональный сразу $\text{Ker } T$ и $\text{Im } T^*$, не лежащий в них.

Раз $y \perp \text{Im } T^*$, для любого $x \in H$ имеем

$$0 = (T^*x, y) = (x, Ty) \Rightarrow (Ty, Ty) = 0 \Rightarrow y \in \text{Ker } T.$$

Противоречие.

Таким образом, образ является ортогональным дополнением замкнутого ядра, и их прямая сумма равна H . \square

Отсюда следует первое утверждение теоремы Фредгольма: образ T и есть ортогональное дополнение ядра T^* .

1.35 Второе утверждение АФ и спектр компактного оператора

Положим $H^k = \text{Im } T^k$. Ясно, что

$$H^1 \supset H^2 \supset \dots \supset H^k \supset \dots;$$

по лемме 34.1 все они замкнуты⁵. При этом $T(H^k) = H^{k+1}$.

Лемма 35.1. Существует такое j , что $H^{k+1} = H^k$ при $k \geq j$.

⁵Потому что если A и B компактны, то

$$(I - A)(I - B) = I - A - B + AB,$$

и оператор $AB - A - B$, конечно, компактен, поскольку

$$(AB - A - B)x_n = ABx_n - Ax_n - Bx_n,$$

и можно выбрать сходящуюся подпоследовательность для первого слагаемого, потом из неё для второго, а потом для третьего.

Доказательство. Если такого j нет, то все H^k различны. По теореме о перпендикуляре можно построить ортонормированную последовательность $\{x_k\}$ такую, что $x_k \in H^k$ и $x_k \perp H^{k+1}$.

Пусть $l > k$. Тогда

$$Ax_l - Ax_k = -x_k + \underbrace{(x_l + Tx_k - Tx_l)}_{\in H^{k+1}} \Rightarrow \|Ax_l - Ax_k\| \geq 1,$$

поскольку $\|x_k\| = 1$. Поэтому из $\{x_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A . \square

Лемма 35.2. Если $\text{Ker } T = \{0\}$, то $\text{Im } T = H$.

Доказательство. Поскольку $\text{Ker } T = \{0\}$, он инъективен, а значит, у него есть левое теоретико-множественное обратное отображение. Применяя его к равенству $H^k = H^{k+1}$ k раз, получаем $H = T(H)$. \square

Лемма 35.3. Если $\text{Im } T = H$, то $\text{Ker } T = \{0\}$.

Доказательство. По лемме 34.2 мы знаем, что раз $\text{Im } T = H$, $\text{Ker } T^* = \{0\}$. Отсюда по предыдущей лемме $\text{Im } T^* = H$, и, опять по лемме 34.2, $\text{Ker } T = \{0\}$. \square

Две последние леммы и дают второе утверждение теоремы Фредгольма.

1.36 Теорема об индексе (третье утверждение в АФ)

Пусть пространство $\text{Ker } T$ бесконечномерно. Тогда в нём найдётся бесконечная ортонормированная система $\{x_k\}$. При этом $Ax_k = x_k$, а потому при $k \neq l$ имеем

$$\|Ax_k - Ax_l\| = \sqrt{2}.$$

Но тогда из последовательности $\|Ax_k\|$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит компактности оператора A .

Пусть теперь μ – размерность $\text{Ker } T$ и ν – размерность $\text{Ker } T^*$. Пусть $\mu < \nu$, а $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\mu\}$ – ортонормированный базис в $\text{Ker } T$ и $\{\psi_1, \dots, \psi_\nu\}$ – ортонормированный базис в $\text{Ker } T^*$. Пусть

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{\mu} (x, \varphi_i) \psi_i.$$

Поскольку оператор S отличается от T на конечномерный оператор, для него будет всё точно также.

Покажем, что уравнение $Sx = 0$ имеет только тривиальное решение. Предположим противное:

$$Tx + \sum_{i=1}^{\mu} (x, \varphi_i) \psi_i = 0.$$

В силу леммы 34.2 ψ_j ортогональны всем векторам вида Tx , а поэтому $Tx = 0$ и

$$(x, \varphi_j) = 0 \text{ при } 1 \leq j \leq \mu.$$

Таким образом, x должен быть одновременно линейной комбинацией векторов φ_j и ортогонален им, поэтому $x = 0$. По второму пункту теоремы Фредгольма 34.1 существует y такой, что

$$Ty + \sum_{i=1}^{\mu} (y, \varphi_i) \psi_i = \psi_{\mu+1}.$$

Список литературы

[1] У. Рудин «Функциональный анализ», Лань, 2005

[2] А. Я. Хелемский «Лекции по функциональному анализу», МЦНМО, 2014