Функциональный анализ-1

Михаил Пирогов записал курс Антона Дмитриевича Баранова

Оглавление

1 Топологические векторные пространства

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, снабжённое топологией τ. Пару (X, τ) называют *топологическим векторным пространством,* если сложение и умножение на скаляр непрерывны относительно τ, и каждая точка является замкнутым множеством.

Пример 1.1. Нормированное пространство со стандартной топологией – ТВП, а прямая с топологией Зарисского – нет, ибо в ней $U + V = \mathbb{R}$ для любых двух открытых множеств (ведь их дополнения конечны).

Утверждение 1.1. Параллельный перенос T_a и растяжение M_λ – гомеоморфизмы ТВП X в себя. При T_a локальная база переходит в локальную базу.

Определение 1.2. ТВП называют *локально выпуклым,* если в нём есть база в нуле, состоящая из выпуклых множеств.

Определение 1.3. Множество $E \subset X$ называют *уравновешенным,* если для любого α такого, что $|\alpha| \leqslant 1$ верно, что $\alpha E \subset E$.

Определение 1.4. Множество $E \subset X$ называют *ограниченным,* если для любой окрестности нуля U

$$\exists\, t\colon \forall s > t\ sU \supset E.$$

Утверждение 1.2. Легко видеть, что при растяжении ограниченное множество переходит в ограниченное множество. Позже мы докажем, что это происходит с ним при любом непрерывном линейном отображении (то есть и при параллельном переносе).

Определение 1.5. ТВП X называют *локально ограниченным,* если в нём существует база в нуле из ограниченных множеств.

Утверждение 1.3. Существования всего одной ограниченной окрестности нуля достаточно, чтобы ТВП было локально ограничено.

Теорема 1.1. ТВП (X, τ) метризуемо $\Leftrightarrow$ есть счётная база в нуле.

Теорема 1.2 (Колмогоров)**.** ТВП нормируемо $\Leftrightarrow$ оно локально ограничено и локально выпукло.

1.2 Топология, порождённая счётным семейством полунорм

Определение 2.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функцию $p\colon X \to [0, \infty)$ называют *полунормой*, если выполняются следующие условия:

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Пример 2.1. На $C\big((-1, 1)\big)$ полунормой является

$$\|f\| = \max_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Определение 2.2. Семейство полунорм $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на ВП X называют *определяющим,* если

$$\forall n\; p_n(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Определение 2.3. Топологией, *порождённой* семейством полунорм, называют самую грубую топологию, относительно которой все они непрерывны.

Утверждение 2.1. Базой этой топологии являются множества вида

$$V_{\varepsilon,\, i_1,\,\dots,i_n}(x_0) = \bigl\{x \in X \,\big|\, \forall k\; p_{i_k}(x - x_0) < \varepsilon\bigr\}.$$

Утверждение 2.2. Семейство полунорм определяющее $\Leftrightarrow$ топология, порождённая им, хаусдорфова.

Утверждение 2.3. Векторное пространство с топологией, порождённой определяющим семейством полунорм – локально выпуклое ТВП.

Теорема 2.1. Топология τ, порождённая определяющим семейством полунорм p_n, задаётся метрикой

$$\rho(x,\, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1,\, p_n(x-y))}{2^n}.$$

Доказательство.

1. Очевидно, что ряд сходится, причём $\rho(x,\, y) \geqslant 0$.
2. Если $\rho(x,\, y) = 0$, то все слагаемые нулевые, поэтому $x = y$.
3. $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$.
4. Если верно неравенство

   $$\forall a,\, b \geqslant 0\;\; \min(1,\, a+b) \leqslant \min(1,\, a) + \min(1,\, b),$$

   то

   $$\min(1,\, p_n(x-z)) \leqslant \min\bigl(1,\, p_n(x-y) + p_n(y-z)\bigr) \leqslant \min(1,\, p_n(x-y)) + \min(1,\, p_n(y-z)),$$

   откуда сразу следует искомый результат.
5. Неравенство довольно просто доказать.
6. Осталось лишь понять, что этой метрикой задаётся нужная топология. Для этого достаточно доказать, что

   $$\forall B_\delta(0)\; \exists\, V_{\varepsilon,\, i_1,\,\dots,\, i_n}(0)\colon V_\varepsilon \subset B_\delta$$

   и, напротив,

   $$\forall V_{\varepsilon,\, i_1,\,\dots,\, i_n}(0)\; \exists\, B_\delta(0)\colon B_\delta \subset V_\varepsilon.$$

   Докажем сначала первое включение. Найдётся такое N, что

   $$\forall N' > N\;\; \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall x \in B_\delta\;\; \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{\min\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

   Возьмём $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ и $n = N$. Тогда

   $$x \in V_\varepsilon \Rightarrow \forall k \leqslant N\; p_k(x) < \frac{\delta}{2}.$$

   Поэтому

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{\min\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

   Таким образом получаем, что из того, что $x \in V_\varepsilon$, следует, что

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} < \delta \Rightarrow x \in B_\delta.$$

7. Докажем теперь второе включение. Не умаляя общности, положим $\varepsilon < 1$. Пусть $\max(i_1, \ldots, i_n) = N$. Возьмём
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^N}.$$
Если $x \in B_\delta$, то
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \forall n \leqslant N \; p_n(x) < \varepsilon.$$
Отсюда получаем, что $x \in V_\varepsilon$.

□

Теорема 2.2. Пусть X – ТВП с топологией τ, порождённой определяющим семейством полунорм p_n.

1. $x_k \to x_0 \Leftrightarrow \forall n \; p_n(x_k - x_0) \to 0$,
2. $E \subset X$ ограничено $\Leftrightarrow \forall n \; p_n$ ограничены на E.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$: Пусть $x_k \to x_0$. Это означает, что $\rho(x_k, x_0) \to 0$, т.е.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\big(1, \, p_n(x_n - x_0)\big)}{2^n} \to 0 \Rightarrow \forall n \; p_n(x_k - x_0) \to 0.$$
$\Leftarrow$: Пусть все p_n стремятся к нулю. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Пусть N таково, что
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Тогда
$$\rho(x_k, x_0) < \sum_{n=1}^{N} \frac{\min\big(1, \, p_n(x_k - x_0)\big)}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Выбирая достаточно большое k, первую сумму можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.
2. $\Rightarrow$: Пусть множество E ограничено. Фиксируем некоторую полунорму p_n из семейства; рассмотрим окрестность $V_{\varepsilon, n}(0)$. Т.к. V является окрестностью нуля, $E \subset kV$ для некоторого k. Но тогда $p_n(x) < k$ для любого x из E.

   $\Leftarrow$: Пусть теперь все полунормы ограничены на E. Возьмём U – произвольную окрестность нуля, и $V_{\varepsilon, i_1, \ldots, i_n}(0) \subset U$. Найдутся M_i такие, что $\forall x \in E \; p_i(x) < M_i$. Отсюда следует, что $E \in nU$, если $n > M_i n_i$ для всех i. Поэтому E ограничено. Если умножить V на число, превосходящее $M_{i_1}, \ldots M_{i_n}$, то получится окрестность, содержащая E.

□

Пример 2.2. Примеры – $C\big((a, b)\big)$, $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. На $C^\infty(\Omega)$ нужно построить последовательность компактов K_n такую, что $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ и $\cup K_n = \Omega$. После этого полунорма p_n определяется следующим образом:
$$p_n(f) = \max_{x \in K_n, \, |\alpha| \leqslant n} \big| D^\alpha f(x) \big|.$$
Оба этих пространства полны.

Простой пример – множество последовательностей комплексных чисел $\{x_n\}$, в котором p_n возвращает модуль x_n. Его обозначают $\mathbb{C}^\infty$.

Гораздо больше написано в параграфе «Примеры» первой главы книжки Рудина.

1.3 Функционал Минковского

Определение 3.1. Пусть X – ТВП, $A \subset X$. A называют *поглощающим*, если

$$\forall x \in X\ \exists t > 0\colon x \in tA.$$

Замечание 3.1. Если A поглощающее, то $0 \in A$.

Утверждение 3.1. Любая окрестность нуля – поглощающее множество.

Доказательство. Это можно вывести, например, из того, что ноль – ограниченное множество, а точка – ноль после параллельного переноса. Параллельный перенос, как непрерывное линейное оторбажение, сохраняет ограниченность.

Иначе это можно увидеть так: понятно, что $x \cdot 0 = 0$, а из непрерывности умножения следует, что

$$\forall U(0)\ \exists V(x),\ W_\varepsilon(0)\colon VW_\varepsilon \subset U.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t} \in W_\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{t} \in U \Rightarrow x \in tU.$$

□

Определение 3.2. Пусть A – поглощающее множество. Тогда

$$\mathfrak{m}_A(x) = \inf\left\{t \mid \frac{x}{t} \in A\right\} \text{ – функционал Минковского.}$$

Замечание 3.2. Если A выпукло и содержит ноль, то из того, что $\frac{x}{t} \in A$, следует, что $\frac{x}{s} \in A$ для любого $s > t$.

Утверждение 3.2. Пусть A – выпуклое и поглощающее, и $t > \mathfrak{m}_A(x)$. Тогда $\frac{x}{t} \in A$.

Теорема 3.1. Пусть A – выпуклое поглощающее множество. Тогда:

1. $\forall t > 0\ \mathfrak{m}_A(tx) = t\mathfrak{m}_A(x)$ (положительная однородность),
2. $\mathfrak{m}_A(x+y) \leqslant \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_A(y)$ (полуаддитивность),
3. Если A уравновешенное, $\mathfrak{m}_A$ – полунорма.

Доказательство.

1. $$\mathfrak{m}_A(tx) = \inf\left\{s \mid \frac{tx}{s} \in A\right\} = t\inf\left\{\frac{s}{t} \mid \frac{tx}{s} \in A\right\} = t\mathfrak{m}_A(x).$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся s и t такие, что

   $$s - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(x) < s,\ \frac{x}{s} \in A \text{ и } t - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(y) < t \text{ и } \frac{y}{t} \in A.$$

   Распишем частное сумм:
   $$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t}.$$
   По выпуклости это частное лежит в A, поэтому

   $$\mathfrak{m}_A(x+y) \leqslant s + t < \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_B(y).$$

3. Не хватает возможности умножать на любую константу из $\mathbb{C}$. Пусть $\alpha = r\beta$, $r \geqslant 0$, $|\beta| = 1$.

   $$\mathfrak{m}_A(\alpha x) = \inf\left\{s \mid \frac{\alpha r x}{s} \in A\right\} = \inf\left\{s \mid \frac{rx}{s} \in \underbrace{\alpha^{-1}A}_{=A}\right\} = \mathfrak{m}_A(rx) = r\mathfrak{m}_A(x) = |\alpha|\mathfrak{m}_A(x).$$

□

1.4 Теорема о нормируемости

Лемма 4.1.

1. Любая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность;

2. любая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность.

Доказательство.

1. Пусть U – окрестность нуля. По непрерывности умножения, существуют $V(0)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что если $|\alpha| < \varepsilon$, то $\alpha V \subset U$. Объединение αV по всем α и есть искомая окрестность.

2. Пусть U – выпуклая окрестность нуля. Положим $A = \cap \alpha U$ по всем α на единичной окружности. Пусть W – окрестность из предыдущего пункта. Очевидно, что $W \subset A$. Отсюда следует, что внутренность Int A является окрестностью нуля, лежащей в U. Выпуклость и уравновешенность внутренности следуют из выпуклости и уравновешенности A.

□

Теорема 4.1 (Колмогоров)**.** Следующие условия равносильны:

1. X нормируемо;

2. X локально выпукло и локально ограничено.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$: Очевидно.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть $\{U_\alpha\}$ – база в нуле из выпуклых окрестностей, V – ограниченная окрестность. Найдётся α такое, что $U_\alpha \subset V \Rightarrow U_\alpha$ ещё и ограниченная. Выпуклая окрестность нуля U_α содержит выпуклую уравновешенную U; таким образом, U – выпуклое ограниченное уравновешенное поглощающее множество, окрестность нуля. Введём норму следующим образом:

$$\|x\| = \mathfrak{m}_U(x).$$

По теореме 3.1 $\|\cdot\|$ – полунорма.

Докажем, что это норма. Возьмём $x \neq 0$. Все точки замкнуты, поэтому существует окрестность нуля, не содержащая x. Т.к. U ограничена, найдётся $r > 0$ такое, что rU лежит в этой окрестности. Значит, есть r такое, что

$$x \notin rU \underset{\text{вып.}}{\Rightarrow} \forall s \in (0, r)\ \frac{x}{s} \notin U \Rightarrow \mathfrak{m}_U(x) \geqslant r > 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0.$$

Осталось доказать, что эта норма задаёт нужную топологию. Для этого достаточно получить, что

$$rU = \left\{x \,\middle|\, \|x\| < r\right\};$$

отсюда будет следовать совпадение локальных баз. Докажем это равенство.

Обозначим множество справа через B_r. Заметим, что

$$x \in rU \Rightarrow \frac{x}{r} \in U \Rightarrow \|x\| \leqslant r.$$

Отсюда $rU \subset \overline{B_r}$. Т.к. rU открытое, $rU \subset B_r$.

Докажем обратное включение.

$$\|x\| < r \Rightarrow \exists\, s < r\colon \frac{x}{s} \in U.$$

Поскольку U выпукло

$$\frac{x}{r} \in U \Rightarrow x \in rU.$$

□

1.5 Примеры ненормируемых пространств

Утверждение 5.1. Пусть на локально ограниченном X топология задана определяющим семейством полунорм $\{p_n\}$. Тогда найдётся окрестность нуля $V_{\varepsilon, 1, \ldots, n}(0)$ такая, что на ней все полунормы ограничены.

Доказательство. Пусть X локально ограничено. Тогда найдётся ограниченная $V_{\varepsilon, 1, \ldots, n}(0)$. По теореме 2.2 это как раз и значит, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \ \sup_V p_i < \infty.$$

□

Пример 5.1. Легко видеть, что для пространств $C^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$, $\mathbb{C}^\infty$ это всегда не так.

Определение 5.1. Говорят, что ТВП X обладает *свойством Гейне-Бореля,* если любое замкнутое и ограниченное множество в нём компактно.

Замечание 5.1. Из теоремы Рисса следует, что любое нормированное пространство, обладающее этим свойством, конечномерно.

Утверждение 5.2. C^∞ обладает свойством Гейне-Бореля.

Доказательство. Поскольку C^∞ метризуемо, в нём компактность равносильна секвенциальной компактности. Её и будем проверять.

Пусть $x^k = \left(x_n^k\right)_{n=1}^\infty$ – элементы $\mathbb{C}^\infty$. Тогда сходимость x^k к x^0 просто означает, что

$$\forall n \ x_n^k \to x_n^0.$$

Пусть E – замкнутое и ограниченное подмножество X, $x^k \in E$. E ограничено $\Rightarrow \forall n \ p_n(x^k) = |x_n^k|$ ограничены. Поэтому можно выделить $x^{k,1}$ – подпоследовательность в $\{x^k\}$ такую, что $x_n^{k,1}$ сходится. Продолжая диагональным методом, получим то, что нужно. □

Замечание 5.2. $C^\infty(\mathbb{R})$ обладает свойством Гейне-Бореля, а $C(\mathbb{R})$ нет. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ обладает свойством Гейне-Бореля.

1.6 Теорема о непрерывности линейных отображений

Определение 6.1. Линейное отображение ТВП называют *ограниченным,* если оно переводит ограниченные множества в ограниченные.

Лемма 6.1.

1. Если d – инвариантная относительно сдвига метрика на пространстве X, то для любого $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$
$$d(nx, 0) \leqslant nd(x, 0).$$
2. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся к 0 последовательность точек метризуемого ТВП, то существуют такие положительные скаляры γ_n, что $\gamma_n \to \infty$ и $\gamma_n x_n \to 0$.

Доказательство.

1. $$d(nx, 0) = d\big((n-1)x, -x\big) \leqslant d\big((n-1)x, 0\big) + \underbrace{d(0, -x)}_{=d(x, 0)}.$$

   Продолжая эту деятельность, по индукции получаем наше утверждение.

2. Мы знаем, что раз X метризуемо, в нём можно ввести инвариантную метрику, совместимую с топологией. Построим такую возрастающую последовательность целых чисел n_k, что $d(x_n, 0) < k^{-2}$ при $n \geqslant n_k$ и положим $\gamma_n = 1$ при $n < n_1$ и $\gamma_n = k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Посмотрим, как ведёт себя последовательность $\gamma_n x_n$:

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leqslant kd(x_n, 0) < k^{-1}.$$

Поэтому $\gamma_n x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

□

Лемма 6.2. Следующие два свойства подмножества E топологического векторного пространства эквивалентны:

1. E ограничено;
2. если $\{x_n\}$ – любая последовательность точек из E, а α_n – такая последовательность скаляров, что $\alpha_n \to 0$, то $\alpha_n x_n \to 0$.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$: Пусть E ограничено, а U – произвольная окрестность нуля. По определению ограниченности

$$\Big(\exists\, t > 0\colon \forall s > t\ E \subset sU\Big) \Rightarrow \Big(\exists\, t > 0\colon \forall s > t\ \forall n\ \frac{x_n}{s} \in U\Big).$$

Поскольку $\gamma_n \to 0$, с некоторого момента будет выполнено неравенство $\gamma_n < \frac{1}{t} \Rightarrow \gamma_n x_n \in U$. По определению предела отсюда следует, что $\gamma_n x_n \to 0$.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть теперь E не ограничено. Тогда найдётся окрестность нуля U и последовательность скаляров $r_n \to \infty$ такие, что $E \not\subset r_n U$. Выберем x_n такими, что $x_n \notin r_n U$, а γ_n положим равным r_n^{-1}. Тогда $\gamma_n x_n$ ни при каком n не попадает в U, а значит, и к нулю не сходится. □

Теорема 6.1. Пусть X и Y – ТВП, а $L\colon X \to Y$ – линейное отображение. Рассмотрим следующие утверждения:

1. L непрерывно;
2. L ограничено;
3. если $x_n \to 0$, то $\{Lx_n\}$ – ограниченное множество;
4. $x_n \to 0 \Rightarrow Lx_n \to 0$.

Импликация $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ выполняется всегда; импликация $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ выполняется, если X метризуемо.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2$: Пусть $E \subset X$ – ограниченное множество, W – окрестность нуля в Y. Из непрерывности L следует, что $L^{-1}(W)$ открыто в X.

Найдётся окрестность нуля V такая, что $V \subset L^{-1}(W) \Rightarrow L(V) \subset W$. E ограничено, поэтому существует t такое, что $\forall s > t\ E \subset sV \Rightarrow L(E) \subset L(sV) = sL(V) \subset sW$.

Таким образом, для произвольной окрестности $W \subset Y$ мы нашли t такое, что при $s > t$ $L(E) \subset sW$. Отсюда следует ограниченность $L(E)$.

$2 \Rightarrow 3$: Для этого нужно только доказать, что сходящаяся к нулю последовательность ограничена. Сходимость x_n к 0 значит, что

$$\forall U(0)\ \exists\, N\colon \forall n > N\ x_n \in U.$$

Возьмём произвольную окрестность U и в ней выберем уравновешенную окрестность V. Из только что написанного определения следует, что вне неё находится лишь конечное количество точек последовательности; обозначим их $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{K}$. Поскольку любая окрестность нуля – поглощающее множество, для любого k найдётся n_k такое, что $x_{i_k} \in n_k V$. Легко видеть, что

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V \cup \bigcup_{k=1}^{K} n_k V.$$

Т.к. V – уравновешенное множество, то и $(\max_{k\in 1\ldots K} n_k) V$ тоже. Поэтому

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \left(\max_{k\in 1\ldots K} n_k\right) \cdot V \subset \left(\max_{k\in 1\ldots K} n_k\right) \cdot U.$$

Отсюда и следует искомая ограниченность.

$4 \Rightarrow 1$: С этого места мы предполагаем, что X метризуемо. Пусть (1) неверно, то есть отображение L не непрерывно. Легко видеть, что оно тогда не непрерывно в нуле (для этого надо рассмотреть определение непрерывности в точке через окрестности и вспомнить, что параллельный перенос – автоморфизм). Это значит, что найдётся окрестность нуля $U \subset Y$ такая, что $L^{-1}(U)$ не содержит ни одной окрестности нуля.

Поскольку X метризуемо, в нём есть счётная локальная база, причём в каждом её элементе есть точка, которая не попадает в U. Из этих точек можно составить сходящуюся к нулю последовательность, образ которой с U вовсе не пересекается. Это противоречит (3).

$3 \Rightarrow 4$: Пусть X метризуемо и L обладает свойством (3). Пусть $x_n \to 0$. По лемме 6.1 найдётся последовательность положительных скаляров γ_n такая, что $\gamma_n \to \infty$ и $\gamma_n x_n \to 0$. Тогда $\{L\gamma_n x_n\}$ – ограниченное множество.

По лемме 6.2 выходит, что

$$\underbrace{\frac{1}{\gamma_n}}_{\to 0} \underbrace{L(\gamma_n x_n)}_{\text{огранич.}} \to 0 \Rightarrow Lx_n \to 0.$$

□

1.7 Равностепенно непрерывные семейства, теорема Банаха-Штейнгауза, следствия

Определение 7.1. Подмножество топологического пространства называют *нигде не плотным,* если его замыкание имеет пустую внутренность. Говорят, что множество относится к *первой категории* (или *худое*), если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. Все остальные множества относят ко *второй категории* (их называют ещё *тучными*).

Свойство 7.1.

1. Если $A \subset B$ и B первой категории, то A тоже первой категории.
2. Счётное объединение множеств первой категории – множество первой категории.
3. Замкнутое в S множество $E \subset S$ с пустой внутренностью является множеством первой категории в S.
4. Если h – гомеоморфизм пространства S на себя, то множества E и $h(E)$ имеют одну категорию в S.

Теорема 7.1. (Бэр) Пусть S либо

1. полное метрическое пространство, либо
2. локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение любого счётного семейства всюду плотных множеств всюду плотно в S.

Следствие 7.1. Полные метрические пространства и локально компактные хаусдорфовы пространства являются множествами второй категории в себе.

Определение 7.2. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – некоторое семейство отображений из X в Y. Назовём Γ *равностепенно непрерывным,* если для любой $U(0) \subset Y$ найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$ (т.е. $\forall \Lambda \in \Gamma\ \Lambda(V) \subset U$).

Лемма 7.1. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – равностепенно непрерывное семейство линейных отображений. Тогда если E – ограниченное множество в X, то $\Gamma(E)$ тоже ограничено.

Доказательство. Рассмотрим произвольную U – окрестность нуля в Y. Поскольку Γ равностепенно непрерывно, найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$. Ограниченность E означает, что

$$\exists\, t\colon \forall s > t\ E \subset sV.$$

Отсюда

$$\Gamma(E) \subset s\Gamma(V) \subset sU,$$

что и даёт ограниченность $\Gamma(E)$. □

Теорема 7.2 (Теорема Банаха-Штейнгауза, принцип равномерной ограниченности)**.** Пусть X и Y – ТВП, Γ – некоторое семейство непрерывных линейных отображений из X в Y, а B – множество всех таких точек $x \in X$, что их орбиты $\Gamma(x)$ ограничены. Если B – множество второй категории в X, то $B = X$ и семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Выберем в Y такие уравновешенные окрестности нуля U и W, что $\overline{U} + \overline{U} \subset V$, и положим

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Если $x \in B$, $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого натурального n, так что $x \in nE$. Поэтому

$$B \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nE.$$

Хотя бы одно из множеств nE является множеством второй категории в X, ибо B таково. Поскольку умножение на n – гомеоморфизм, само E тоже относится ко второй категории. Но E замкнуто, как пересечение замкнутых множеств; поэтому в нём есть внутренняя точка x_0. Множество $E - x_0$ содержит некоторую окрестность нуля V, причём

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(E) - \Lambda(x_0) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

для любого $\Lambda \in \Gamma$.

Отсюда следует, что Γ равностепенно непрерывно. По лемме 7.1 Γ ещё и равномерно ограничено, в частности, все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Поэтому $B = X$. □

Следствие 7.2. Пусть Γ – семейство непрерывных линейных отображений F-пространства[1] X в ТВП Y, причём все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 7.3. Пусть X и Y – ТВП, а $\{\Lambda_n\}$ – последовательность непрерывных линейных отображений из X в Y.

1. Пусть C – множество $x \in X$, для которых $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y. Если C – множество второй категории в X, то $C = X$.

2. Пусть L – множество всех $x \in X$ таких, что для них существует предел

   $$\Lambda x = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n x.$$

   Если Y – F-пространство, а L – множество второй категории в X, то $L = X$ и отображение Λ непрерывно.

Доказательство.

1. Так как каждая последовательность Коши ограничена (для сходящихся это доказано в теореме 6.1; для последовательностей Коши доказательство идейно похоже[2]), по теореме 7.2 Банаха-Штейнгауза семейство Λ_n равностепенно непрерывно.

[1] F-пространство – ТВП, в котором топология порождается полной инвариантной метрикой.

[2] В ТВП можно назвать последовательность $\{x_n\}$ *последовательностью Коши*, если для любой окрестности нуля U найдётся такое N, что при n, $m > N$ точка $x_n - x_m$ лежит в U. Для пространств, на которых можно ввести **инвариантную** метрику (на самом деле, все метризуемые таковы), это определение совпадает с обычным. Отсюда, кстати, следует, что две эквивалентные инвариантные метрики задают одинаковые последовательности Коши и полны одновременно.

Можно проверить, что C – подпространство X. Его замыкание $\overline{C}$ всюду плотно (если бы это было не так, $\overline{C}$ было бы собственным подпространством X, поэтому у него не было бы внутренних точек и C было бы первой категории).

Зафиксируем $x \in X$ и $W(0) \subset Y$. Из равностепенной непрерывности $\{\Lambda_n\}$ следует, что есть симметричная окрестность $V(0) \subset X$ такая, что $\Lambda_n(V) \subset W$ для всех n. Раз C всюду плотно, найдётся точка $x' \in C \cap (x + V)$.

Пусть n и m столь велики, что

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W.$$

Тождество

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x - x')$$

показывает, что $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Поэтому $\{\Lambda_n x\}$ – последовательность Коши в Y, и $x \in C$.

2. Из полноты Y следует, что $L = C$. Пусть V и W обозначают то же самое, что и в пункте (1); тогда $\Lambda_n(V) \subset V$ для всех n. Поэтому $\Lambda(V) \subset \overline{V}$. Из этого и регулярности любого ТВП (и Y в том числе) следует непрерывность Λ.

□

Замечание 7.1. Идея доказательства пункта (1) выражается всего в трёх утверждениях:

1. C – подпространство, и его вторая категория требует, чтобы оно было всюду плотным.
2. То, что Λ_n равностепенно непрерывно, позволяет из того, что для x' последовательность $\Lambda_n(x)$ сходится в себе, заключить это для близкой к ней x.
3. То, что C всюду плотно, позволяет взять эту самую x' достаточно близко к x.

Теорема 7.4. Пусть $\{\Lambda_n\}$ – семейство непрерывных линейных отображений из F-пространства X в ТВП Y, причём в каждом x существует предел

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Тогда отображение Λ непрерывно.

Доказательство. Из следствия 7.2 получется, что семейство Λ_n равностепенно непрерывно. Дальнейшее рассуждение эквивалентно пункту (2) предыдущей теоремы. □

Теорема 7.5. Пусть X и Y – ТВП, $K \subset X$ – компактное выпуклое подмножество, а Γ – такое семейство непрерывных отображений из X в Y, что для всех x $\Gamma(x)$ – ограниченное множество. Тогда $\Gamma(K)$ ограничено.

1.8 Теорема об открытом отображении

Теорема 8.1. Пусть X – F-пространство, Y – топологическое векторное пространство, а $\Lambda\colon X \to Y$ – такое непрерывное линейное отображение, что его образ является множеством второй категории в Y. Тогда верны следующие утверждения:

1. $\Lambda(X) = Y$;
2. Λ – открытое отображение;
3. Y является F-пространством.

Доказательство. Подробно изложено в [1, с. 58–60]. □

Следствие 8.1 (Теорема Банаха)**.** Если $\Lambda\colon X \to Y$ – непрерывная линейная биекция, а X и Y – F-пространства, то Λ – гомеоморфизм.

Доказательство. По теореме 8.1 об открытом отображении отображение Λ открыто. Из этого сразу следует непрерывность обратного к нему. □

1.9 Теорема о замкнутом графике

Определение 9.1. Пусть X, Y – множества, $f\colon X \to Y$ – отображение. Тогда *графиком* f называют множество

$$\Gamma_f = \left\{(x,\, f(x)) \in X \times Y \,\middle|\, x \in X\right\}.$$

Утверждение 9.1. Пусть X, Y – топологические пространства, $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение, Y хаусдорфово. Тогда Γ_f замкнут в топологии произведения.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(x,\, y)$ не на графике; пусть $f(x) = y_0$. Так как Y хаусдорфово, существуют непересекающиеся окрестности $U(y)$ и $V(y_0)$. Так как f непрерывно, существует окрестность $W(x)$ такая, что $f(W) \subset V$. Легко видеть, что

$$W \times U \cap \Gamma_f \subset W \times U \cap W \times V = \varnothing.$$

Таким образом, дополнение Γ_f открыто, поэтому оно замкнуто. □

Теорема 9.1. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейное отображение двух F-пространств. Если график A замкнут, то оно непрерывно.

Доказательство. Операции векторного пространства на $X \times Y$ можно определить просто покомпонентно. Пусть d_X и d_Y – полные инвариантные метрики пространств X и Y соответственно. Метрику на $X \times Y$ можно определить следующим образом:

$$d\big((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\big) = d_X(x_1,\, x_2) + d_Y(y_1,\, y_2).$$

Можно проверить, что она будет совместима с топологией произведения, полна и инвариантна, а всё это вместе будет F-пространством, но это не очень интересно.

Поскольку отображение A линейно, его график будет линейным пространством. Так как он замкнут, он тоже будет F-пространством.

Определим отображения $\pi_1(x,\, \Lambda x) = x$ и $\pi_2(x,\, y) = y$ из графика в соответствующие пространства. Тогда π_1 будет непрерывной биекцией между F-пространствами, а по теореме Банаха 8.1 мы знаем, что тогда и обратное к нему непрерывно. Но $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, поэтому и оно непрерывно, как композиция непрерывных отображений. □

Утверждение 9.2. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейное отображение двух F-пространств. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ точек из X такую, что существуют пределы

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Если для любой такой последовательности $y = Ax$, то график A замкнут.

Доказательство. Поскольку все пространства метризуемы, можно говорить о замкнутости на языке последовательностей. Если график не замкнут, то существует последовательность точек графика $(x_n,\, y_n)$, сходящаяся к точке, на нём не лежащей (полнота гарантирует, что она не сходится к «дырке»). Так как сходимость в $X \times Y$ с определённой нами метрикой покомпонентная, это прямое противоречие. □

1.10 Теорема Хана-Банаха

Определение 10.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называют *выпуклым функционалом* на X, если

$$\forall \lambda \in [0,\, 1]\; p\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda p(x_1) + (1-\lambda)p(x_2).$$

Определение 10.2. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называют *положительно однородным*, если

$$\forall \alpha \geqslant 0\; p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Утверждение 10.1. Пусть p – выпуклый, положительно однородный. Тогда $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$.

Утверждение 10.2. Пусть p – выпуклый, положительно однородный и неотрицительный. Тогда он является функционалом Минковского для множества

$$A = \{x \in x \,|\, p(x) < 1\}.$$

Теорема 10.1 (Вещественная теорема Хана-Банаха)**.** Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$, p – положительно однородный выпуклый функционал на X, X_0 – подпространство X.

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0. Если $f_0(x) \leqslant p(x)$ на X_0, то найдётся функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ такой, что

1. $f|_{x_0} = f_0$,
2. $f(x) \leqslant p(x)$ на X.

Теорема 10.2 (Комплексная теорема Хана-Банаха)**.** Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{C}$, p – полунорма на X, X_0 – подпространство X.

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0. Если $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ на X_0, то найдётся функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ такой, что

1. $f|_{x_0} = f_0$,
2. $|f(x)| \leqslant p(x)$ на X.

1.11 Первая теорема об отделимости

Определение 11.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$, E, $F \subset X$ – непустые множества. Говорят, что E и F *отделимы*, если есть линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\forall x \in E \;\forall y \in F \;\; f(x) \leqslant f(y).$$

Другими словами, $f(E) \leqslant f(F)$. Говорят, что f *разделяет* E и F.

Утверждение 11.1. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ – линейный функционал. Тогда

$$\exists\, a \in X\colon \{\alpha a + x \,|\, \alpha \in \mathbb{R},\; x \in \operatorname{Ker} f\} = X.$$

Определение 11.2. Подпространство $Y \neq X$ такое, что есть $a \in X$: $\operatorname{Lin}(a, Y) = X$ называют *гиперподпространством*.

Утверждение 11.2. Y – гиперподпространство в $X \Rightarrow$ есть линейный функционал f такой, что $\operatorname{Ker} f = Y$.

Определение 11.3. *Гиперплоскость* – множество вида $x_0 + Y$, где Y – гиперподпространство.

Замечание 11.1. Понятно, что уравнение $f(x) = \alpha$ задаёт гиперплоскость. Пусть $\sup\limits_E f = \alpha$. Тогда эта самая гиперплоскость разделяет множества E и F в обычном геометрическом смысле.

Определение 11.4. Говорят, что E и F *строго отделимы,* если существует линейный функционал f такой, что

$$\sup_E f < \inf_F f.$$

Теорема 11.1. Пусть X – ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$ и $F \cap \operatorname{Int} E = \varnothing$. Тогда найдётся **непрерывный** линейный функционал, разделяющий E и F.

Доказательство. Введём обозначение $\overset{\circ}{E} = \operatorname{Int} E$. $f(x) - f(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(E - F) \leqslant 0$, поэтому можно просто отделять $E - F$ от нуля.

Не умаляя общности, предположим, что $0 \in \overset{\circ}{E}$ (в противном случае можно было бы сдвинуть всё на какой-нибудь вектор). Зафиксируем $y_0 \in F$. Отделимость $E - F$ и $\{0\}$ равносильна отделмиости $E - F + y_0$ и $\{y_0\}$. Введём $K = \overset{\circ}{E} - F + y_0$ и докажем сначала отделимость K и $\{y_0\}$.

Множество K – выпуклая окрестность нуля. Поэтому оно поглощающее $\Rightarrow$ можно рассмотреть на нём функционал Минковского. Заметим, что

$$\overset{\circ}{E} \cap F = \varnothing \Rightarrow 0 \notin \overset{\circ}{E} - F,$$

а значит, $y_0 \notin K$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{m}_K(y_0) \geqslant 1$ (здесь мы пользуемся ещё выпуклостью K).

Рассмотрим $X_0 = \text{Lin}(y_0)$. На нём можно задать функционал f_0 такой, что

$$\alpha y_0 \mapsto \alpha \mathfrak{m}_K(y_0).$$

Легко видеть, что $f_0 \leqslant \mathfrak{m}_K$ на X_0, ведь

$$\begin{cases} \alpha \geqslant 0 \Rightarrow \mathfrak{m}_K(\alpha y_0) = \alpha \mathfrak{m}_K(y_0) = f_0(\alpha y_0) \\ \alpha < 0 \Rightarrow f_0(\alpha y_0) < 0, \ \mathfrak{m}_A(\alpha y_0) \geqslant 0. \end{cases}$$

По теореме Хана-Банаха f_0 можно продолжить на всё пространство X и получить линейный функционал f. Понятно, что f разделяет K и y_0, ведь

$$x \in K \Rightarrow p(x) \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 1$$

и $f(y_0) = f_0(y_0) = p(y_0) \geqslant 1$.

Мы доказали, что f разделяет $\overset{\circ}{E}$ и F. Почему он разделяет E и F? Пусть $x \in E$. Нетрудно доказать[3], что тогда

$$\forall \varepsilon \in [0, 1) \ (1-\varepsilon)x \in \overset{\circ}{E}.$$

Мы уже знаем, что $(1-\varepsilon)f(x) = f\big((1-\varepsilon)x\big) \leqslant f(y)$ при $y \in F$. Предельным переходом в неравенстве получаем искомое.

Осталось доказать непрерывность f. Ноль лежит в $\overset{\circ}{E}$, поэтому можно выбрать уравновешенную $V(0) \subset \overset{\circ}{E}$. Зафиксируем какой-нибудь $y \in F$.

$$\forall x \in V \ f(x) \leqslant f(y) = a.$$

Если x лежит в V, то и $-x$ лежит в V, поэтому $f(-x) \leqslant a$. Отсюда следует, что $a > 0$. Заметим, что

$$f(V) \subset (-2a, 2a) \Rightarrow V \subset f^{-1}\big((-2a, 2a)\big) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2a} V \subset f^{-1}\big((-\varepsilon, \varepsilon)\big).$$

Вот и получили непрерывность.

□

1.12 Вторая теорема об отделимости

Лемма 12.1. Каждая окрестность нуля W содержит симметричную окрестность U такую, что $U + U \subset W$.

Доказательство. Существование двух окрестностей V_1 и V_2 таких, что $V_1 + V_2 \subset W$ следует из непрерывности сложения. Полагая

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

получим окрестность нуля U, обладающую нужными свойствами. □

Замечание 12.1. Понятно, что опираясь на эту лемму, можно сделать и три, и четыре, и сколько угодно таких окрестностей.

Лемма 12.2. Пусть K и C – подмножества ТВП X, причём K компактно, C замкнуто и $K \cap C = \varnothing$. Тогда найдётся окрестность нуля V такая, что

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing.$$

[3]Нужно рассмотреть множество $(1-\varepsilon)x + \varepsilon \overset{\circ}{E}$ и использовать выпуклость.

Доказательство. Если множество K пусто, то утверждение тривиально. Поэтому рассмотрим $x \in K$. По только что доказанной лемме 12.1, найдётся окрестность $V_x(0)$ такая, что $x+V_x+V_x+V_x$ не пересекается с C; из симметричности V_x следует, что

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing.$$

Поскольку K компактно, в нём найдётся множество точек $x_1, \ldots x_n$ такое, что

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \ldots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Положим $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Тогда

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subset K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

а ни одно из множеств в последнем объединении не пересекает $C + V$. □

Теорема 12.1. Пусть X – локально выпуклое ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, причём E компактно, а F замкнуто, $E \cap F = \varnothing$. Тогда E и F строго отделимы.

Доказательство. Лемма 12.2 позволяет отделить E и F непересекающимися окрестностями, а локальная выпуклость позволяет сделать их выпуклыми. После этого можно просто сослаться на первую теорему об отделимости 11.1. □

Определение 12.1. Если X – комплексное ТВП, то говорят, что непустые E и F *отделимы,* если существует линейный функционал f такой, что

$$f(E) \leqslant f(F).$$

Утверждение 12.1. Для $\mathbb{C}$ формулировки теорем в точности такие же.

Доказательство. Нужно сослаться на доказанные теоремы, рассмотрев комплексное пространство, как вещественное. Функционал f определится через вещественный, как

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix).$$

□

Определение 12.2. Пусть X – ТВП. Тогда *двойственное* к нему X^* – пространство всех **непрерывных** линейных функционалов на X.

Следствие 12.1. Если X – локально выпуклое пространство, и $x \neq y$, то найдётся непрерывный линейный функционал такой, что $f(x) \neq f(y)$ (другими словами, X^* *разделяет точки пространства* X).

1.13 Теорема Крейна-Мильмана

Определение 13.1. Пусть X – ТВП, $E \subset X$ – выпуклый непустой компакт. Тогда говорят, что $S \subset E$ – *крайнее* для E, если

$$x,\, y \in E;\; y \notin S;\; t \in (0,\, 1) \Rightarrow tx + (1-t)y \notin S.$$

Определение 13.2. Если крайнее множество состоит из одной точки, эта точка называется *крайней*.

Теорема 13.1 (Крейна-Мильмана)**.** Пусть X – ТВП, E – выпуклый непустой компакт. Пусть $\operatorname{Ext} E$ – множество крайних точек E. Тогда

$$E = \overline{\operatorname{Conv}(\operatorname{Ext} E)}$$

1.14 Слабые топологии

Определение 14.1. Пусть X – множество, Y – топологическое пространство, $\mathcal{F}$ – семейство отображений из X в Y. Обозначим через $\tau_{\mathcal{F}}$ топологию, состоящую из всех объединений всех конечных пересечений множеств вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y, а $f \in \mathcal{F}$.

Замечание 14.1. Легко видеть, что эта конструкция действительно даёт топологию.

Утверждение 14.1. $\tau_{\mathcal{F}}$ – самая слабая топология, относительно которой все $f \in \mathcal{F}$ непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим произвольную такую топологию τ. Множества вида $f^{-1}(U)$ в ней открыты по определению непрерывного отображения, а их объединения и конечные пересечения – по определению топологии. Поэтому $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$. □

Утверждение 14.2. Если пространство Y хаусдорфово, и семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки X, то $(X, \tau_{\mathcal{F}})$ тоже хаусдорфово.

Доказательство. Рассмотрим две различные точки x_1 и x_2 в X. Раз $\mathcal{F}$ их разделяет, существует $f \in \mathcal{F}$ такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. У точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ есть непересекающиеся окрестности, раз Y хаусдорфово, и их прообразы – окрестности точек x_1 и x_2 – тоже не пересекаются. □

1.15 Топология, порождённая подпространством в пространстве функционалов

Лемма 15.1. Пусть X_n – векторное пространство, $f_1, \ldots, f_n, f$ – линейные функционалы на X; пусть

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} f_i.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \colon f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$;
2. $\exists\, M \colon \forall x \in X\ |f(x)| \leqslant M \cdot \max |f_i(x)|$;
3. $f|_N = 0$.

Доказательство. Импликация $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ очевидна. Докажем $3 \Rightarrow 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Pi \colon X &\to \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big); \end{aligned}$$

пусть $Y = \Pi X$. Возьмём произвольный $y = \Pi x \in Y$; определим $F \colon Y \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$F(y) = f(x).$$

Для корректности нужно проверить, что если $\Pi x = \Pi x'$, то и $f(x) = f(x')$. Это так:

$$\Pi(x) = \Pi(x') \Rightarrow \Pi(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' \in N \Rightarrow f(x) = f(x').$$

F – линейный функционал на подпространстве $\mathbb{C}^n$, его всегда можно продолжить на всё $\mathbb{C}^n$, просто отправив всё лишнее в ноль, и записать в координатах:

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Rightarrow f(x) = F(\Pi x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x).$$

□

Теорема 15.1. Пусть X – векторное пространство, X' – подпространство пространства линейных функционалов на X, X' разделяет точки X. Тогда X с топологией, порождённой X' – локально выпуклое ТВП, а $X^* = X'$.

Доказательство. Мы уже знаем, что пространство $(X,\, \tau_{X'})$ хаусдорфово. Рассмотрим множества вида

$$V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0) = \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall i \, \bigl|f_i(x - x_0)\bigr| < \varepsilon,\ f_i \in X' \right\}.$$

Нетрудно проверить, что любая точка в пересечении двух множеств такого типа содержится вместе с третьим множеством того же типа. Поэтому они образуют базу некоторой топологии τ.

Из непрерывности f_i в $\tau_{X'}$ следует открытость множеств $V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0)$. Это значит, что $\tau \subset \tau_{X'}$. Однако

$$\forall f \in X' \ f^{-1}\bigl(B_\varepsilon(x_0)\bigr) \in \tau,$$

поэтому f непрерывно относительно τ. Поскольку $\tau_{X'}$ самая слабая, $\tau = \tau_{X'}$.

Непрерывность сложения, умножения на скаляр и выпуклость доказываются довольно просто теперь, когда у нас есть удобная база.

Осталось лишь увидеть, что нет никаких непрерывных функционалов не из X'. Пусть f непрерывен в $(X,\, \tau_{X'})$. Тогда найдётся окрестность вида $V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(0)$ такая, что

$$\forall x \in V \ \bigl|f(x)\bigr| < 1.$$

Возьмём $y \in N$ в обозначнениях предыдущей леммы 15.1:

$$f_i(y) = 0 \Rightarrow f_i(\alpha y) = 0 \Rightarrow \alpha y \in V$$

для любого скаляра α. Но

$$\bigl|f(\alpha y)\bigr| < 1 \Rightarrow \forall \alpha \ |\alpha|\bigl|f(y)\bigr| \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $f(y) = 0$. Пользуясь леммой, получаем искомое. □

1.16 Слабая топология и слабая сходимость

Определение 16.1. Пусть X – нормированное пространство. Тогда *слабой топологией* на нём называют самую слабую топологию, в которой все функционалы из X^* непрерывны. Её обозначают через $\sigma(X,\, X^*)$.

Утверждение 16.1. Слабая сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что $\forall f \in X^* \ f(x_n) \to f(x_0)$.

Доказательство. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ означает, что

$$\forall V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0) \ \exists N \colon n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Если рассмотреть окрестность типа $V_{\varepsilon,\, f}$, получится в точности то, что справа.

Докажем теперь обратно. Для всех $f \in X^*$ выполняется

$$f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow \forall V_{\varepsilon,\, f}(x_0) \ \exists N \colon n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Рассмотрим окрестность общего вида $V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0)$. Если записать последнее утверждение для всех окрестностей $V_{\varepsilon,\, f_i}(x_0)$ и выбрать наибольшее из полученных N, оно станет верным и для окрестности общего вида. □

Теорема 16.1. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. для всех f в некотором всюду плотном множестве $E \subset X^* \ f(x_n) \to f(x_0)$.

Доказательство. Пусть f – произвольный непрерывный линейный функционал на X. Поскольку E всюду плотно, найдётся функционал $f_0 \in E$ такой, что $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Заметим, что

$$f(x_n - x_0) = f_0(x_n - x_0) + (f - f_0)(x_n - x_0),$$

поэтому

$$\bigl|f(x_n - x_0)\bigr| \leqslant \bigl|f_0(x_n - x_0)\bigr| + \bigl|(f - f_0)(x_n - x_0)\bigr| \leqslant \bigl|f_0(x_n - x_0)\bigr| + \|f - f_0\|\bigl(\|x_n\| + \|x_0\|\bigr).$$

Используя ограниченность, окончательно пишем

$$\left|f(x_n - x_0)\right| \leqslant \left|f_0(x_n - x_0)\right| + M\|f - f_0\|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, а второе можно сделать сколь угодно малым, верно выбрав f_0. Успех! □

Пример 16.1. Пусть $x_n \in l^p$. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. $x_n^k \to x_0^k$.

Доказательство. Мы знаем, как устроено пространство, двойственное к l^p – это просто l^q, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Линейная оболочка векторов вида

$$e_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots)$$

образует всюду плотное множество в l^q. При этом, если рассмотреть их как функционалы, то

$$e_k(x) = x^k \Rightarrow e_k(x_n) \to e_k(x_0).$$

При линейных комбинациях векторов это, конечно, не ломается, поэтому можно спокойно использовать только что доказанную теорему. □

Пример 16.2. Пусть $x_n \in C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. $\sup \|x_n\| < \infty$,
2. $\forall t \in K \ x_n(t) \to x_0(t)$.

Доказательство. Мы знаем, как устроены функционалы и на $C(K)$ – любой из них имеет вид

$$\varphi(x) = \int\limits_K x \, \mathrm{d}\mu,$$

где μ – некоторая регулярная борелевская комплексная мера. По теореме Лебега об ограниченной сходимости из условий теоремы следует, что

$$\int\limits_K x_n \, \mathrm{d}\mu \to \int\limits_K x_0 \, \mathrm{d}\mu,$$

поскольку борелевская мера компактного множества конечна[4].

В обратную сторону доказательство тривиально: надо в качестве функционала взять значение в точке. □

Теорема 16.2. Пусть H – гильбертово пространство. Следующие утверждения равносильны:

1. $x_n \to x_0$;
2. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Доказательство. Доказывать надо только $2 \Rightarrow 1$. Распишем норму разности:

$$\|x_n - x_0\|^2 = \|x_n\|^2 + (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + \|x_0\|^2.$$

Вторые два слагаемых стремятся к квадрату нормы x_0 из-за слабой сходимости (они ведь непрерывные линейные функционалы по сути!) Первое стремится к квадрату нормы x_0. □

[4]Это требование, кажется, не всегда включают в определение борелевской меры.

1.17 Слабая ограниченность, теорема Мазура

Теорема 17.1. Пусть X – нормированное пространство, $E \subset X$. Следующие условия равносильны:

1. E ограничено в слабой топологии;
2. $f(E)$ ограничено для любого непрерывного на X функционала;
3. E ограничено по норме.

Доказательство.

$3 \Rightarrow 2$: Очевидно.

$2 \Rightarrow 3$: Пусть π_x – функционал на X^*, который переводит f в $f(x)$ (он, конечно, непрерывный). Ограниченность $f(E)$ означает, что множество $\{\pi_x(f) \mid x \in E\}$ ограничено, а это орбита f! Поскольку X^* – F-пространство, можно воспользоваться теоремой Банаха-Штейнгауза 7.2 и получить, что семейство π_x равностепенно непрерывно, а потому и равномерно ограничено, т.е. $\sup \|\pi_x\| < \infty$, а $\|\pi_x\| = \|x\|$.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $f \in X^*$. Рассмотрим $V_{1,\, f}(0)$. Из ограниченности E следует, что

$$\exists\, s > 0\colon \forall t > s\ E \subset tV \Rightarrow \sup |f(E)| < t.$$

$2 \Rightarrow 1$: Пусть U – окрестность нуля в слабой топологии. Не умаляя общности, $U = V_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n}$. Найдутся M_i такие, что $|f_i(x)| \leqslant M_i$ для всех x из E. Пусть $M = \max M_i$; тогда при $t > \frac{M}{\varepsilon}$ $E \subset tU$. □

Теорема 17.2 (Мазура)**.** Пусть X – нормированное пространство, а $E \subset X$ непусто и выпукло. Тогда замкнутость E в слабой и в обычной топологии равносильны.

Доказательство. Если E слабо замкнуто, то оно и по норме замкнуто, ибо топология нормы сильнее. Интересно в обратную сторону.

Пусть множество E замкнуто по норме. Предположим, что существует точка $x_0 \notin E$, которая попала в слабое замыкание E. По второй теореме отделимости 12.1 точку можно отделить от замкнутого множества E функционалом $f \in X^*$ так, что

$$\operatorname{Re} f(x_0) > M > \sup_{x \in E} \operatorname{Re} f(x).$$

Пусть

$$U = \{x \mid \operatorname{Re} f(x) > M\}.$$

f непрерывен в слабой топологии, поэтому $\operatorname{Re} f$ непрерывен в ней, а значит, U в ней открыто. $x_0 \in U$ и U не пересекает E, что даёт противоречие. □

1.18 $*$-слабая топология

В принципе, можно было бы рассмотреть слабую топологию на пространстве линейных функционалов. Однако она оказывается неудобной, потому что второе двойственное зачастую слишком большое. Вместо этого поступают иначе.

Определение 18.1. Пусть X – нормированное пространство. Рассмотрим отображение $\pi\colon X^* \to X^{**}$, которое точку x переводит в функционал на пространстве X^*, сопоставляющий $f \in X^*$ его значение $f(x)$. $*$-*слабой топологией* называют самую слабую топологию, относительно которой непрерывны все функционалы из множества $\pi(X)$. Вместо $\pi(x)$ иногда пишут π_x.

Утверждение 18.1 (Корректность)**.** Функционал π_x действительно непрерывен, его норма не превосходит $\|x\|$.

Доказательство.

$$\left|\pi_x(f)\right| = \left|f(x)\right| \leqslant \|f\|\|x\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|\pi_x\| = \sup_x \frac{\left|\pi_x(f)\right|}{\|f\|} \leqslant \|x\|.$$

Это значит, что π_x ограничен $\Rightarrow$ непрерывен, причём его норма не превосходит $\|x\|$. □

Теорема 18.1. Пусть X – нормированное пространство.

1. Рассмотрим $X_0 \subset X$ – линейное подпространство, $f_0\colon X_0 \to \mathbb{C}$ – непрерывный линейный функционал. Тогда найдётся непрерывный линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.

2. Для любой ненулевой точки $x_0 \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $p(x) = \|f_0\|\|x\|$. Это полунорма на X (а если $f_0 \neq 0$), даже норма. Понятно, что $p(x)$ ограничивает f_0. Поэтому по теореме Хана-Банаха существует линейный функционал f на X такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $f(x) \leqslant \|f_0\|\|x\|$. Это сразу же даёт нам ограниченность f и то, что его норма не превосходит $\|f_0\|$. При этом меньше она тоже никак быть не может.

2. Пусть $X_0 = \mathrm{Lin}(x_0)$. Положим $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. По первому пункту теоремы всё получается.

□

Теорема 18.2. Отображение $\pi\colon X \to X^{**}$ – изометрия.

Доказательство. Теперь мы знаем, что по любой точке x можно пострить функционал f такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Это значит, что

$$\frac{\left|\pi_x(f)\right|}{\|f\|} = \|x\|.$$

Поэтому верхняя оценка из утверждения 18.1 достигается и $\|\pi_x\| = \|x\|$, что и значит, что отображение π – изометрия. □

Определение 18.2. Если каноническое вложение π – изоморфизм, пространство X называют *рефлексивным*.

Пример 18.1. Рефлексивны все гильбертовы пространства (потому что они изоморфны своим двойственным). Рефлексивно также L^p при $1 < p < \infty$, потому что двойственное к нему L^q, а к нему снова L^p. То, что именно π задаёт этот изоморфизм, строго говоря, надо проверять, но это довольно просто. А вот L^1, L^∞ и $C(K)$ не являются рефлексивными.

Утверждение 18.2. База $*$-слабой топологии состоит из множеств вида

$$V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f_0) = \left\{ f \in V^* \,\middle|\, \forall i \in 1 \ldots n \, \left|f(x_i) - f_0(x_i)\right| < \varepsilon \right\}.$$

Утверждение 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow \forall x \ \pi_x(f_n) \to \pi_x(f_0)$, то есть, $*$-слабая сходимость – по сути поточечная сходимость.

Теорема 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow$ выполнению двух условий:

1. $\sup \|f_n\| < \infty$.

2. Найдётся E – всюду плотное множество в X такое, что $f_n(x) \to f_0(x)$ для всех $x \in E$.

Всё это делается аналогично обычной слабой топологии.

Пример 18.2. Если X рефлексивно, то $*$-слабая и слабая тополгии на X^* совпадают.

1.19 Теорема Банаха-Алаоглу

Теорема 19.1. Пусть X – нормированное пространство. Единичный шар $\overline{B}^*$ в пространстве X^* компактен и секвенциально компактен в $*$-слабой топологии.

Доказательство в предположении, что X сепарабельно. Доказывать будем в два этапа:

1. Сужение $*$-топологии на $\overline{B}^*$ метризуемо,
2. $\overline{B}^*$ секвенциально компактен.

Начнём с первого.

1. Пусть x_n – счётное всюду плотное множество в X. $p_n(f) = \left|f(x_n)\right|$ – полунормы в X^*. Поскольку x_n всюду плотно, если $p_n(f) = 0$, то и в любой точке f обратится в ноль из-за его непрерывности. Поэтому семейство p_n определяющее. Значит, топология τ, которую порождает это семейство, метризуема.

   Докажем, что
   $$\sigma^*|_{\overline{B}^*} = \tau|_{\overline{B}^*}.$$
   База топологии τ состоит из множеств вида
   $$V_{\varepsilon,\, i_1,\, \ldots,\, i_n}(f_0) = \left\{ f \in X^* \;\middle|\; \forall k \in 1 \ldots n \; \left|f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k})\right| < \varepsilon \right\},$$
   а база топологии σ^* – из множеств вида
   $$V_{\varepsilon,\, y_1,\, \ldots,\, y_n}(f_0) = \left\{ f \in X^* \;\middle|\; \forall k \in 1 \ldots n \; \left|f(y_1) - f_0(y_n)\right| < \varepsilon \right\},\ x_k \in X.$$
   Отсюда сразу очевидно, что $\tau \subset \sigma^*$. Базы топологий, суженных на $\overline{B}^*$, получаются из этих просто пересечением с $\overline{B}^*$. Хочется для них получить обратное включение, а для этого хочется доказать, что
   $$\forall y_1,\, \ldots,\, y_n \in X\; \forall \varepsilon > 0\; \exists\, i_1,\, \ldots,\, i_n \colon U_{\delta,\, i_1,\, \ldots,\, i_n}(f_0) \cap \overline{B}^* \subset V_{\varepsilon,\, x_1,\, \ldots,\, x_n}(f_0).$$
   Поскольку множество $\{x_n\}$ плотное, для каждого y_k найдётся x_{i_k} такой, что
   $$\|y_k - x_{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{3\bigl(1 + \|f_0\|\bigr)}.$$
   Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ и рассмотрим $f \in U_\delta \cap \overline{B}^*$. Проверим, лежит ли f в V_ε:
   $$\begin{aligned}\left|f(y_k) - f_0(y_k)\right| &= \left|f(y_k) - f(x_{i_k}) + f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k}) + f_0(x_{i_k}) - f_0(y_k)\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|f(y_k) - f(x_{i_k})\right| + \left|f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k})\right| + \left|f_0(x_{i_k}) - f_0(y_k)\right| \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{\|f\|\, \|y_k - x_{i_k}\|}_{<\frac{\varepsilon}{3(1+\|f_0\|)}} + \underbrace{\left|f(x_{i_k}) - f_0(x_{i_k})\right|}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{3}} + \|f_0\|\, \underbrace{\|x_{i_k} - y_k\|}_{<\frac{\varepsilon}{3(1+\|f_0\|)}} < \varepsilon.\end{aligned}$$
   Успех!

2. Пусть теперь $\{f_n\} \in \overline{B}^*$, $\{x_n\}$ – всюду плотное множество в X. Заметим, что
   $$\left|f_n(x_1)\right| \leqslant \|f_n\|\, \|x_1\| \leqslant \|x_1\|,$$
   поэтому $\bigl\{f_n(x_1)\bigr\}$ ограничена в $\mathbb{C}$. Это значит, что можно выбрать подпоследовательность $f_n^{(1)}$ такую, что $f_n^{(1)}(x_1)$ сходится. Продолжая эту деятельность и используя диагональный метод, получаем последовательность $f_n^{(n)}$, сходящуюся во всех точках x_n. Но раз $\{x_n\}$ всюду плотно, оно и в каждой точке X будет.

$\square$

2 Спектры компактных операторов

2.20 Банаховы алгебры

Определение 20.1. Пусть A – алгебра над $\mathbb{C}$, т.е. линейное пространство с дистрибутивным ассоциотивным умножением, коммутирующим с умножением на константу. A называют *банаховой,* если

1. На A есть норма, относительно которой A – банахово пространство;
2. $\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$;
3. в алгебре есть единица e, причём $\|e\| = 1$.

Свойство 20.1. Умножение непрерывно относительно нормы, то есть если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n y_n \to xy$.

Доказательство.

$$\|xy - x_n y_n\| = \|xy - xy_n + xy_n - x_n y_n\| = \big\|x(y - y_n) + y_n\|x - x_n\|\big\| \leqslant \\ \leqslant \|x\| \, \|y - y_n\| + \|y_n\| \, \|x - x_n\|.$$

Правая часть стремится к нулю. □

Свойство 20.2.

$$\|x^n\| \leqslant \|x\|^n.$$

Пример 20.1.

1. $C(K)$,
2. $C^1\big([a, b]\big)$, $\|f\| = \max|f| + \max|f'|$,
3. $L^\infty(X, \mu)$,
4. непрерывные операторы на банаховом пространстве,
5. алгебра матриц,
6. $l^1(\mathbb{Z})$ с умножением
$$z_n = \sum x_k y_{n-k},$$
7. $L^1(X)$ со свёрткой,
8. диск-алгебра $A(D)$ – алгебра аналитических функций на единичном круге в $\mathbb{C}$,
9. алгебра H^∞ аналитических и ограниченных функций на единичном круге.

Замечание 20.1. В алгебре может не быть единицы, как, например, в L^1 (δ-функция). Её можно добавить с помощью общей конструкции: если есть алгебра A, рассмотреть алгебру $\tilde{A}$ из пар (x, α), где $x \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Норму надо определить, как

$$\big\|(x, \alpha)\big\| = \|x\| + |\alpha|,$$

а умножение, как

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) = (xy + \alpha x + \beta y, \alpha\beta).$$

Единица будет $(0, 1)$.

2.21 Обратимые элементы

Определение 21.1. Пусть A – банахова алгебра. Элемент $a \subset A$ называют *обратимым,* если есть $a^{-1} \in A$ такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Утверждение 21.1. a^{-1} единственен.

Теорема 21.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$, $\|x\| < 1$. Тогда элемент $e - x$ обратим, причём

$$(e - x)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} x^n.$$

Доказательство. Докажем сначала, что ряд из формулировки вообще сходится. Поскольку пространство банахово, она будет следовать из сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x\|^n.$$

Но норма x меньше единицы, поэтому он сходится.

Теперь надо понять, почему он обратный. Рассмотрим произведение

$$(e - x)S_n = (e - x)\sum_{i=1}^{N} x^i = e - x^{N+1}.$$

Правая часть стремится к e, а левая часть стремится к $e - x$ по свойству 20.1. С другой стороны будет то же самое, ибо многочлены коммутируют. Успех! □

Теорема 21.2. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$ обратим, а $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$. Тогда элемент $x - h$ обратим, причём

$$\left\|(x - h)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|x\|^{-1}}{1 - \|h\|\|x^{-1}\|}.$$

и

$$\left\|(x - h)^{-1} - x^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|h\|\|x^{-1}\|^2}{1 - \|h\|\|x^{-1}\|}.$$

Доказательство. Более-менее простые выкладки. □

Следствие 21.1. Множество U обратимых элементов открыто; отображение $x \mapsto x^{-1}$ является гомеоморфизмом U на U.

2.22 Спектр, его непустота, теорема Гельфанда-Мазура

С этого момента все банаховы алгебры над $\mathbb{C}$.

Определение 22.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. Тогда *спектром* элемента x называется множество

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ необратим}\}.$$

Дополнение спектра $\rho(x)$ называют *множеством регулярных точек* или *резольвентным множеством;* α из него называют *резольвентой*.

Теорема 22.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. Тогда $\sigma(x)$ – непустой компакт.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\|\lambda\| > \|x\|$. Рассмотрим $\lambda e - x$:

$$\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Поскольку

$$\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1,$$

элемент $\lambda e - x$ обратим, и λ – резольвента. Поэтому

$$\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|x\|\}.$$

Пусть $\lambda \in \rho(x)$. Рассмотрим μ такое, что

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\big\|(\lambda e - x)^{-1}\big\|}.$$

Докажем, что $\mu \in \rho(x)$:

$$\big\|(\mu e - x) - (\lambda e - x)\big\| = \big\|(\mu - \lambda)e\big\| = |\mu - \lambda| < \frac{1}{\big\|(\lambda e - x)^{-1}\big\|}.$$

По теореме 21.1 $\mu \in \rho(x)$. Отсюда следует открытость ρ и замкнутость σ, поэтому σ компактен (как замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{C}$).

Нужно ещё доказать непустоту. Тут нам всерьёз понадобится комплексность A. Для начала запишем *тождество Гильберта:*

$$(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}.$$

Его легко угадать, если представить себе, что это всё числа и заменить отрицательную степень на дробь. Доказательство не сильно сложнее.

Предположим, что $\sigma(x)$ пуст. Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ найдётся $(\lambda e - x)^{-1}$. Пусть $\varphi \in A^*$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \varphi\big((\lambda e - x)^{-1}\big)$$

и докажем, что она целая:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \mu} \frac{f(\lambda - f(\mu))}{\lambda - \mu} &= \lim_{\lambda \to \mu} \frac{\varphi\big((\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}\big)}{\lambda - \mu} = \\ &= \lim_{\lambda \to \mu} -\varphi\big((\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1}\big) = -\varphi\big((\mu e - x)^{-2}\big).\end{aligned}$$

Теперь докажем, что f ограничена. Пусть $|\lambda| > \|x\| + 1$. Тогда

$$(\lambda e - x)^{-1} = \left(\lambda \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right) = \lambda^{-1}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Поэтому (оценка нормы обратного – по теореме 21.2)

$$\big\|(\lambda e - x)^{-1}\big\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \leqslant 1.$$

При этом

$$\big|f(\lambda)\big| \leqslant \|\varphi\| \; \big\|(\lambda e - x)^{-1}\big\| \leqslant \|\varphi\|.$$

Таким образом, f – целая и ограниченная, а из теоремы Лиувилля – постоянная.

Записав ту же оценку более точно, имеем

$$\big|f(\lambda)\big| \leqslant \frac{\|\varphi\|}{|\lambda| - \|x\|} \Rightarrow |f(\lambda)| \xrightarrow{|x| \to \infty} 0 \Rightarrow f = 0.$$

Раз все непрерывные линейные функционалы обращаются в ноль на $(\lambda e - x)^{-1}$, оно тоже должно быть равно нулю (например, по второму пункту теоремы 18.1). Но такого не может быть, ведь у нуля нет обратного! Поэтому $\sigma(x)$ непуст. $\square$

Теорема 22.2 (Гельфанда-Мазура)**.** Пусть A – банахова алгебра, и в ней все ненулевые элементы обратимы. Тогда она изометрически изоморфна $\mathbb{C}$.

Доказательство. Для каждого $x \in A$ спектр непуст, поэтому есть $\lambda(x)$ такое, что $x - \lambda(x)e$ необратим, а необратим лишь ноль, поэтому $x = \lambda(x)e$. Изоморфизм задаётся так, чтобы $x \mapsto \lambda(x)$. $\square$

2.23 Спектральный радиус

Определение 23.1. Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$. *Спектральным радиусом* элемента x называют

$$r(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Замечание 23.1. Поскольку $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$, $r(x) \leqslant \|x\|$.

Теорема 23.1 (О спектральном радиусе)**.**

$$r(x) = \max_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda|.$$

Доказательство. Обозначим правую часть через R. По теореме об отображении спектра если $\lambda \in \sigma(x)$, то $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Мы знаем, что элементы спектра y лежат в замкнутом круге с радиусом $\|y\|$, поэтому

$$|\lambda^n| \leqslant \|x^n\| \Rightarrow |\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|} \Rightarrow |\lambda| \leqslant r(x) \Rightarrow R \leqslant r(x).$$

Как доказать неравенство в обратную сторону? Возьмём $\varphi \in A^*$ и рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \varphi\big((\lambda e - x)^{-1}\big)$$

для λ не из спектра. Так же, как в теореме 22.1, доказывается аналитичность f; поэтому она аналитична вне круга с радиусом R.

Разложим её в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{\lambda^n}.$$

Если $|\lambda| > \|x\|$,

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \Rightarrow f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

Поэтому при $n > 0$ получается, что $c_{n+1} = \varphi(x^n)$.

С другой стороны,

$$c_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft\, |\lambda|=r_0} \lambda^n f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda,\ r_0 > R.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x^n) = |c_{n+1}| \leqslant r_0^{n+1} M.$$

По теореме 18.1 найдётся такой функционал φ, что $\|\varphi\| = 1$, причём $\varphi(x^n) = \|x^n\|$, поэтому

$$\|x^n\| \leqslant M r_0^{n+1} \Rightarrow \sqrt[n]{\|x^n\|} \leqslant r_0 \Rightarrow r(x) \leqslant R.$$

□

2.24 Примеры вычисления спектров операторов

Определение 24.1. Пусть X – банахово пространство, $U\colon X \to X$ – непрерывный оператор. Тогда ненулевой вектор $x \in X$ называют *собственным вектором* X, если существует λ такое, что $Ux = \lambda x$. В такой ситуации λ называют *собственным числом* оператора U.

Замечание 24.1. Существование у оператора собственных чисел и векторов равносильно тому, что он не инъективен. В конечномерном случае это равносильно его необратимости; в бесконечномерном оператор бывает инъективен, но не сюръективен.

Определение 24.2. Множество собственных чисел U называют *точечным спектром* U, а оставшуюся часть спектра – непрерывным спектром U. Первый обозначают как $\sigma_p(U)$, а второй – как $\sigma_c(U)$.

Пример 24.1. Рассмотрим $l^2(\mathbb{N})$ и оператор S на нём такой, что

$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, \ldots).$$

Это так называемый *оператор сдвига*. Для него

$$\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{|\lambda| \leqslant 1\}.$$

Доказательство. Поищем сначала собственные числа. В координатах условие $Ux = \lambda x$ выглядит, как

$$\begin{cases} 0 &= \lambda x_1, \\ x_1 &= \lambda x_2, \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda x_{n+1}, \\ &\vdots \end{cases}$$

Отсюда понятно, что может подойти лишь $\lambda = 0$, но ядро оператора S пусто. Поэтому у него нет собственных чисел, и он инъективен.

Пусть теперь $\lambda \in \rho(S)$, тогда для любого $y \in l^2$ найдётся единственный $x \in l^2$ такой, что

$$\begin{cases} -\lambda x_1 &= y_1, \\ x_1 - \lambda x_2 &= \lambda y_2, \\ &\vdots \\ x_n - \lambda x_{n+1} &= \lambda y_{n+1}, \\ &\vdots \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$x_n = -\frac{y_1}{\lambda^n} - \ldots - \frac{y_n}{\lambda}.$$

При $|\lambda| < 1$ и, например, $y = e_1$, x просто не попадает в l^2, поэтому этот круг лежит в спектре; поскольку спектр компактен, там лежит и круг $|\lambda| \leqslant 1$. При этом спектральный радиус ограничен сверху $\|S\| = 1$, поэтому все остальные точки лежат в резольвентном множестве. □

Пример 24.2. Можно рассмотреть очень похожий оператор S^* – сдвиг в обратную сторону. Для него всё делается похожим путём, но получается даже проще:

$$\sigma(S) = \{|\lambda \leqslant 1|\} \text{ и } \sigma_p(S) = \{|\lambda| < 1\}.$$

Пример 24.3. Рассмотрим оператор M на $C(K)$, где K – компакт в $\mathbb{C}$, который переводит функцию $f(z)$ в $zf(z)$. Его называют *оператором умножения на независимую переменную*. Для него

$$\sigma(M) = K \text{ и } \sigma_p(M) = \{\text{изол. точки } K\}.$$

Доказательство. Выясним, какие у S собственные числа. Нужно, чтобы выполнялось условие

$$zf(z) = \lambda f(z) \Rightarrow (z - \lambda) f(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$$

всюду, кроме точки λ. Если λ – предельная точка K, то f просто совсем ноль, это не годится. А вот если λ – изолированная точка K, то λ – собственное число.

Теперь посмотрим на резольвентное множество. Пусть $\lambda \in \rho(M)$, тогда для любой $g \in C(K)$ найдётся $f \in C(K)$ такая, что

$$(z - \lambda) f(z) = g(z).$$

Если λ не в K, то можно просто поделить, поэтому $\rho(M) \subset K$. Но вот если λ в K, то ничего не выйдет, ибо всегда можно положить $g(z) = 1$, а тогда и $g(\lambda) = 1$. Поэтому $\sigma(M) = K$. □

Пример 24.4. Пусть μ – конечная борелевская мера на $K \subset \mathbb{C}$. Тогда можно рассмотреть такую же задачу для $L^2(K)$. Собственными числами окажутся *атомы* меры μ – точки с ненулевой мерой. А вот весь спектр совпадёт с *замкнутым носителем меры* μ – наименьшим замкнутым множеством $F \subset K$ таким, что $\mu(\mathbb{C} \setminus F) = 0$.

2.25 Теорема об отображении спектра, спектр сопряжённого оператора

Теорема 25.1 (Теорема об отображении спектра)**.** Пусть A – банахова алгебра, $x \in A$,

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j \text{ – многочлен.}$$

Тогда $\sigma\big(p(x)\big) = p\big(\sigma(x)\big)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda e - x$ необратим. Заметим, что

$$p(\lambda)e - p(x) = (\lambda e - x)q(x),$$

где $q(x)$ – многочлен (по теореме Безу). Предположим, что $p(\lambda e - p(x))$ обратим, и

$$v = \big(p(\lambda)e - p(x)\big)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что $xv = vx$ (домножить надо), поэтому $qv = vq$.

$$v(\lambda e - x)q = (\lambda e - x)qv = e = qv(\lambda e - x),$$

поэтому qv обратный к $\lambda e - x$. Поэтому $p\big(\sigma(x)\big) \subset \sigma\big(p(x)\big)$.

Пусть теперь $\mu \in \sigma\big(p(x)\big)$. Рассмотрим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корни уравнения $p(\lambda) = \mu$. Ясно, что

$$p(z) - \mu = c(\lambda_1 - z)\ldots(\lambda_n - z)$$

и

$$p(x) - \mu e = c(\lambda_1 e - x)\ldots(\lambda_n e - x).$$

Если λ_i не лежит в спектре, то правая часть обратима, что ведёт к противоречию. □

Определение 25.1. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а U – оператор на H. *Сопряжённым* к U называют оператор U^*, удовлетворяющий соотношению

$$\big(U(x),\, y\big) = \big(x,\, U(y)\big).$$

Он существует и единственен для любого ограниченного оператора, это доказано, например, в [2, с. 393–394].

Утверждение 25.1. $\sigma(U^*) = \overline{\sigma(U)}$.

Доказательство.

$$\lambda \in \rho(U) \Leftrightarrow U - \lambda I \text{ обратим} \Leftrightarrow (U - \lambda I)^* = U^* - \overline{\lambda} I \text{ обратим} \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(U^*).$$

□

2.26 Спектр унитарного и самосопряжённого оператора

Определение 26.1. Ограниченный линейный оператор U на гильбертовом пространстве H называют *унитарным*, если он обратим и $U^* = U^{-1}$.

Определение 26.2. Линейный оператор U на гильбертовом пространстве H называют *самомопряжённым*, если $U^* = U$.

Замечание 26.1. Из самосопряжённости оператора можно вывести его непрерывность с помощью теоремы о замкнутом графике.

Утверждение 26.1. Пусть U – унитарный оператор на H. Тогда

$$\sigma(U) \subset \{|\lambda| = 1\}.$$

Доказательство. Поскольку U унитарный, $\|Ux\| = \|x\|$, поэтому $\|U\| = 1$ и модуль λ не может быть больше 1. Если $|\lambda| < 1$, то оператор

$$U - \lambda I = U\left(I - \lambda U^{-1}\right)$$

обратим по теореме 21.1. □

Теорема 26.1. Пусть U – самосопряжённый оператор. Тогда $\sigma(U) \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Возьмём какое-нибудь $M > \|U\|$. Понятно, что тогда $iM \in \rho(U)$ и оператор $U + iMI$ обратим. Рассмотрим

$$V = (U - iMI)(U + iMI)^{-1}.$$

Докажем, что оператор V унитарен. Очевидно, что он обратим, причём

$$V^{-1} = (U + iMI)(U - iMI)^{-1}.$$

Найдём сопряжённый к V:

$$V^* = \left((U + iMI)^{-1}\right)^*(U - iMI)^* = (U - iMI)^{-1}(U + iMI).$$

Равенство нужных нам выражений получается тривиально.

На минуту представим, что корректно равенство

$$V = \frac{U - iMI}{U + iMI},$$

и рассмотрим отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, которое действует следующим образом:

$$\mu \mapsto i\frac{1+\mu}{1-\mu} = w.$$

Это отображение переводит единичный круг в верхнюю полуплоскость, а единичную окружность – в вещественную ось. Для любого $\lambda \notin \mathbb{R}$ найдётся единственное μ, которое в него перейдёт и $|\mu| \neq 1$. В этой ситуации $\mu \in \rho(V)$ и оператор $V - \mu I$ обратим.

Из этого следует, что обратимы операторы

$$(U - iMI) - \mu(U + iMI) \Rightarrow U(1\ \mu) - iM(1+\mu)I \Rightarrow U - iM\frac{1+\mu}{1-\mu}I.$$

Поэтому $M\lambda \in \rho(U)$, но тогда и $\lambda \in \rho(U)$. Успех! □

2.27 Компактные операторы и их простейшие свойства

Определение 27.1. Пусть X и Y – нормированные пространства, $U \in L(X, Y)$, и пусть B^X – замкнутый единичный шар в X. Линейный оператор U называют *компактным*, если $U(B^X)$ – предкомпактное множество в Y.

Утверждение 27.1. U компактен $\Leftrightarrow$ образ любого ограниченного множества E относительно компактен в U.

Доказательство.

$$\forall x \in E\ \|x\| \leqslant M \Rightarrow E \subset MB^X \Rightarrow U(E) \subset MU(B^X).$$

Умножение на M – гомеоморфизм Y в себя, поэтому $MU(B^X)$ предкомпактно. Однако любое подмножество предкомпактного множества предкомпактно. □

Утверждение 27.2. U компактен $\Leftrightarrow \forall x_n \in X,\ \|x_n\| \leqslant 1\ \exists\, x_{n_k}\colon Ux_{n_k}$ сходится в Y.

Доказательство. В нормированном пространстве компактность и секвенциальная компактность совпадают. □

Замечание 27.1. Любой компактный оператор является ограниченным, а поэтому и непрерывным.

Теорема 27.1. Пусть X и Y – нормированные пространства, а U и V – линейные компактные операторы из X в Y. Тогда $\alpha U + \beta V$ компактен.

Доказательство. Следует без труда из секвенциального определения компактности оператора. □

Теорема 27.2. Пусть $U\colon X \to Y$ и $V\colon Y \to Z$ – компактные операторы. Тогда если один из них компактен, то и композиция компактна.

Замечание 27.2. Компактные операторы образуют в пространстве операторов двусторонний идеал.

Следствие 27.1. Пусть X, Y – нормированные и бесконечномерные. Тогда никакой обратимый оператор $X \to Y$ не компактен.

Доказательство. Это так, потому что иначе был бы компактен тождественный оператор в одном из пространств. □

Теорема 27.3. Пусть X, Y – нормированные пространства, U_n, U – операторы из X в Y, причём U_n компактны и $\|U_n - U\| \to 0$. Тогда и U компактен (другими словами, множество компактных операторов замкнуто).

Доказательство. Рассмотрим $x_n \in X\colon \|x_n\| \leqslant 1$. Найдётся подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}$ такая, что её образ при U_1 сходится. Продолжив выделять и использовав диагональный метод, получим $\{x_k^{(k)}\}$ такую, что её образ сходится при любом U_n.

Докажем, что $Ux_k^{(k)}$ сходится, проверим фундаментальность:

$$\left\|Ux_k^{(k)} - Ux_l^{(l)}\right\| = \left\|Ux_k^{(k)} - U_jx_k^{(k)} + U_jx_k^{(k)} - U_jx_l^{(l)} + U_jx_l^{(l)} - Ux_l^{(l)}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U - U_j\| \left\|x_k^{(k)}\right\| + \left\|U_j\left(x_k^{(k)} - x_l^{(l)}\right)\right\| + \|U_j - U\| \left\|x_l^{(l)}\right\|.$$

Пользуясь тем, что $U_jx_k^{(k)}$ сходится, можно выбрать такое N, что при $k, l > N$ второе слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{3}$. Пользуясь тем, что $x_k^{(k)}$ ограничены единицей по норме, и тем, что $\|U_j - U\| \to 0$, можно выбрать такое M, что при $j > M$ первое и третье слагаемые в сумме меньше $\frac{2\varepsilon}{3}$. Таким образом, получаем фундаментальность. □

Следствие 27.2. Отсюда, в частности, следует, что если оператор можно приблизить операторами конечного ранга, он будет компактен, потому что любой ограниченный оператор конечного ранга компактен.

2.28 Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве

Теорема 28.1. Пусть H – гильбертово пространство, A – оператор из H в H. Следующие условия равносильны:

1. A компактен;
2. $\forall x_n \in H\colon x_n \xrightarrow{w} x_0$ верно, что $Ax_n \to Ax_0$.

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть x_n – такая последовательность, что $\|x_n\| \leqslant 1$. По теореме Банаха-Алаоглу 19.1 найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$, а из этого следует, что $Ax_n \to Ax_0$.

$1 \Rightarrow 2$: Предположим, что Ax_n не сходится к Ax_0. Тогда найдётся x_{n_k} и $\delta > 0$ такие, что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant \delta$.

Поскольку x_{n_k} слабо сходится, $\sup\limits_{n_k} \|x_{n_k}\| < \infty$. Раз A компактен, найдётся $Ax_{n_{k_j}} \to z$. Докажем, что $z = Ax_0$. Пусть $y \in H$, тогда $(Ax_{n_{k_j}},\, y) \to (z,\, y)$. С другой стороны,

$$(Ax_{n_{k_j}},\, y) = (x_{n_{k_j}},\, A^*y) \to (x_0,\, A^*y) = (Ax_0,\, y) \Rightarrow (z,\, y) = (Ax_0,\, y) \Rightarrow z = Ax_0.$$

Но такого не может быть, потому что $\|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geqslant \delta$! Успех. $\square$

2.29 Примеры компактных интегральных операторов

Определение 29.1. Пусть U – интегральный оператор с ядром K:

$$(Uf)(s) = \int\limits_T K(s,\, t) f(t)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Ядро K называют *вырожденным,* если

$$K(s,\, t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(s)\beta_j(t).$$

Пример 29.1. Интегральный оператор с вырожденным ядром на L^p компактен.

Пример 29.2. Если ядро непрерывно на замыкании области определения, то оператор тоже компактен.

2.30 Собственные числа компактного оператора

Теорема 30.1. Пусть X – нормированное пространство, и $A\colon X \to X$ – компактный линейный оператор. Для любого $\delta > 0$ множество собственных чисел A таких, что $|\lambda| \geqslant \delta$ конечно. При этом собственное подпространство любого $\lambda \neq 0$ конечномерно.

Доказательство. Пусть есть бесконечно много собственных чисел $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \ldots$ таких, что $|\lambda_k| \geqslant \delta$. Пусть x_k – собственный вектор λ_k. Как собственные вектора разных собственных чисел, x_k линейно независимы; пусть

$$X_m = \mathrm{Lin}(x_1,\, \ldots,\, x_m).$$

Возьмём $y_m \in X_m$ такой, что $\|y_m\| = 1$ и

$$\rho(y_m,\, X_{m-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Это возможно по лемме о почти перпендикуляре. Докажем, что $A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)$ не содержит сходящейся подпоследовательности.

Пусть $y_m = \alpha_m x_m + \underbrace{\tilde{y}_m}_{\in X_{m-1}}$. Тогда

$$A\frac{y_m}{\lambda_m} = \frac{\alpha_m \lambda_m x_m}{\lambda_m} + \frac{A\tilde{y}_m}{\lambda_m} = \alpha_m x_m + \underbrace{\frac{1}{\lambda_m} A\tilde{y}_m}_{\in X_{m-1}} = y_m - \tilde{y}_m + \frac{1}{\lambda_m} A\tilde{y}_m.$$

Таким образом,

$$A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) = y_m + z_m,$$

где $z_m \in X_{m-1}$. Поэтому

$$\left\| A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) - A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) \right\| = \|y_m + \underbrace{z_m - y_n - z_n}_{\in X_{m-1}}\| \geqslant \frac{1}{2},$$

поэтому сходящейся подпоследовательности не выделить.

Аналогично доказывается отсутствие бесконечномерных собственных подпространств. $\square$

2.31 Теорема Гильберта-Шмидта

Теорема 31.1. Пусть A – компактный и самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда существует ортогональный базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, состоящий из собственных векторов A.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $Q(x) = (Ax,\, x)$. Поскольку A самосопряжённый,

$$\overline{Q(x)} = \big(x,\, A(x)\big) = Q(x).$$

Лемма 31.1.

$$x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow Q(x_n) \to Q(x_0).$$

Доказательство.

$$\big|Q(x_n) - Q(x_0)\big| = \big|(Ax,\, x) - (Ax_0,\, x_0)\big| \leqslant \big|(Ax,\, x) - (Ax_0,\, x)\big| + \big|(Ax_0,\, x) - (Ax_0,\, x_0)\big|.$$

Второе слагаемое очевидно стремится к нулю, а первое – по теореме 28.1. □

Лемма 31.2. Пусть

$$M = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \big|Q(x)\big|.$$

Тогда найдётся x_0 такой, что $\|x_0\| = 1$ и $M = |Q(x_0)|$.

Доказательство. Можно выбрать последовательность x_n такую, что $\|x_n\| \leqslant 1$ и $Q(x_n) \to M$. По теореме Банаха-Алаоглу 19.1 можно выделить

$$x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0.$$

По предыдущей лемме $Q(x_n) \to Q(x_0)$. □

Лемма 31.3. Пусть $x \in H$, $\|x_0\| = 1$ и

$$\big|Q(x_0)\big| = \max_{\|x\|\leqslant 1} \big|Q(x)\big|.$$

Пусть y перпендикулярен к x_0. Тогда $(y,\, Ax_0) = 0$.

Доказательство. Не умаляя общности, положим $\|y\| = 1$, рассмотрим

$$\tilde{x} = \frac{x_0 + ry}{\sqrt{1 + |r|^2}},\ r \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что $\|\tilde{x}\| = 1$. Найдём $Q(\tilde{x})$:

$$Q(\tilde{x}) = \frac{1}{1 + |r|^2}\Big(Q(x_0) + 2\,\mathrm{Re}\,\big(r\overline{(y,\, Ax_0)}\big) + |r|^2 Q(y)\Big).$$

Пусть $(Ax_0,\, y) = \big|(Ax_0,\, y)\big|e^{i\theta}$, и пусть $r = he^{i\theta}$, где h – некоторое малое число. Заметим, что

$$r\overline{(Ax_0,\, y)} = h\big|(Ax_0,\, y)\big|.$$

Из написанного выше следует, что

$$Q(\tilde{x}) = Q(x_0) + 2h\,|(Ax_0,\, y)| + o(h^2).$$

Пусть $\big|(Ax_0,\, y)\big| > 0$. Если $Q(x_0) > 0$, берём $h > 0$ и $Q(\tilde{x}) > Q(x_0)$. С отрицательным наоборот. □

Следствие 31.1. x_0 – собственный вектор оператора A, отвечающий $\lambda = Q(x_0)$.

Доказательство. Разложим Ax_0 по $\operatorname{Lin} x_0$ и $x_0^\perp$: пусть $Ax_0 = \lambda x_0 + y$, где $y \perp x_0$. По лемме $y \perp Ax_0$, поэтому

$$0 = (Ax_0,\, y) = (y,\, y) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0.$$

При этом

$$Q(x_0) = (Ax_0,\, x_0) = \lambda.$$

□

Определение 31.1. Пусть T – линейный оператор на X, X нормируемо, X_0 – замкнутое подпространство в X. Говорят, что X_0 *инвариантно,* если $TX_0 \subset X_0$.

Утверждение 31.1. Пусть H – гильбертово пространство, T – линейный оператор, H_0 инвариантно для T. Тогда $H_0^\perp$ инвариантно относительно T^*.

Следствие 31.2. Если H_0 инвариантно относительно самосопряжённого A, то и $H_0^\perp$ тоже.

Возьмём $x_1 \in H$ такой, что $\|x_1\| = 1$ и

$$\left|Q(x_0)\right| = \max_{\|x\| \leqslant 1} \left|Q(x)\right|.$$

Мы знаем, что x_1 – собственный вектор, а $\lambda_1 = Q(x_1)$ – собственное число. Можно взять $H_1 = \operatorname{Lin}(x_1)$, это A-инвариантное подпространство, его ортогональное дополнение, значит, тоже. Поэтому можно сузить всю задачу на $H_1^\perp$ и продолжать.

Какие есть возможные концовки?

1. Найдётся k такое, что $Q(x) = 0$ на всём $H_k^\perp$,
2. это будет продолжаться до бесконечности.

Рассмотрим эти случаи.

1. Если $Q(x) = 0$ на $H_k^\perp$, то мы знаем, что $\forall x \in H_k$ $(x,\, Ax) = 0$. Воспользуемся 31.3:

   $$(x,\, Ax) = 0 \Rightarrow \|x\|^2 \left(\frac{x}{\|x\|},\, \frac{Ax}{\|x\|}\right) = 0,$$

   и, положив

   $$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \text{ и } y = \frac{Ax}{\|x\|},$$

   получим

   $$(Ax,\, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0.$$

   Поэтому $H_k^\perp \in \operatorname{Ker} A$.

2. Предположим, что нашёлся x такой, что он перпендикулярен всем x_k. Докажем, что $x \in \operatorname{Ker} A$, предположим, не умаляя общщности, что $\|x\| \leqslant 1$.

   Введём обозначение

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_k^\perp = \left(\operatorname{Lin}\{x_k\}\right)^\perp = \tilde{H},$$

   ясно, что $x \in \tilde{H}$.

   $$\forall k\ x \in H_k^\perp \Rightarrow \left|Q(x)\right| \leqslant \max_{\|z\| \leqslant 1,\, z \in H_k^\perp} \left|Q(z)\right| = \left|Q(x_{k+1})\right| = |\lambda_{k+1}| \to 0,$$

   а потому $\forall x \in \tilde{H}\, Q(x) = 0$.

   Аналогичным рассуждением, используя 31.3, получаем, что $\tilde{H} \subset \operatorname{Ker} A$.

   В случае 1 пространство H_k – конечномерно. Поэтому оно полное, а значит, замкнутое, а потому $H = H_k \oplus H_k^\perp$. Поскольку $H_k^\perp \subset \operatorname{Ker} A$, можно выбрать там базис Шаудера из элементов ядра, а в H_k есть базис из собственных векторов. Таким образом, во всём H получится базис из собственных векторов.

   В случае 2 ясно, что

   $$\left(\overline{\operatorname{Lin}\{x_k\}}\right)^\perp \subset \left(\operatorname{Lin} B\right)^\perp \subset \operatorname{Ker} A.$$

При этом
$$H = \left(\overline{\mathsf{Lin}\{x_k\}}\right)^{\perp} \oplus \overline{\mathsf{Lin}\{x_k\}},$$
$\{x_k\}$ является базисом Шаудера в $\overline{\mathsf{Lin}\{x_k\}}$ и в $\overline{\mathsf{Lin}\{x_k\}}$ можно выбрать базис Шаудера из элементов ядра.

□

2.32 Компактность сопряжённого оператора

Определение 32.1. Пусть X, Y – банаховы пространство, $A\colon X \to Y$ – непрерывный линейный оператор. Тогда *банаховым сопряжённым оператором* A^{b*} называют оператор из Y^* в X^* такой, что
$$f \mapsto f \circ A.$$

Замечание 32.1. Легко видеть, что оператор A^{b*} ограничен, потому что
$$\frac{\|f \circ A\|}{\|f\|} \leqslant \|A\|.$$

Определение 32.2. Пусть H и K – гильбертовы пространства, A – непрерывный оператор из H в K. Тогда *гильбертовым сопряжённым* оператором называют оператор A^{h*} из K в H такой, что коммутативна диаграмма
$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "I"'] & K \arrow[l, "A^{h*}"'] \arrow[d, "J"] \\
H^* & K^* \arrow[l, "A^{b*}"]
\end{tikzcd}$$
где I и J – сопряжённо-линейные унитарные изоморфизмы, доставляемые теоремой Рисса.

Утверждение 32.1. Гильбертов сопряжённый оператор линеен и ограничен.

Доказательство. Явное выражение для него имеет вид $I^{-1}A^{b*}J$, поэтому его линейность следует из линейности A^{b*} и сопряжённой линейности I и J. Ограниченность же следует из того, что
$$\frac{\|I^{-1}A^{b*}J(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{b*}J(x)\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{b*}\|\,\|J(x)\|}{\|x\|} = \|A^{b*}\|.$$

□

Утверждение 32.2. Гильбертов сопряжённый оператор из H в H является сопряжённым в обычном смысле.

Доказательство. Проведём прямое вычисление:
$$y = A^{h*}(x) = I^{-1}A^{b*}I(x) = I^{-1}\Big(\big(A(\cdot),\, x\big)\Big) \Rightarrow (\cdot,\, y) = \big(A(\cdot),\, x\big).$$
Отсюда для любого t выполняется
$$(t,\, A^{h*}x) = (At,\, x).$$

□

Теорема 32.1. Пусть A – компактный оператор, заданный на банаховом пространстве X. Тогда банахово сопряжённый к нему оператор компактен.

Доказательство. Будем доказывать, что A^{b*} переводит B^{X^*} в предкомпактное множество. Рассмотрим элементы из X^* как функции только на компакте $\overline{AS}$ – замыкании образа открытого единичного шара. Оказывается, что множество Φ функций, отвечающих функционалам из B^{X^*}, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Действительно, если $\|\varphi\| \leqslant 1$, то

$$\sup_{x\in\overline{AS}} \left|\varphi(x)\right| = \sup_{x\in AS} \left|\varphi(x)\right| \leqslant \|\varphi\| \sup_{S} \|Ax\| \leqslant \|A\|$$

и

$$\left\|\varphi(x') - \varphi(x'')\right\| \leqslant \|\varphi\| \, \|x' - x''\| \leqslant \|x' - x''\|.$$

Поэтому множество Φ предкомпактно в $C\big(\overline{AS}\big)$ по теореме Арцела-Асколи.

С другой стороны, Φ с метрикой из $C\big(\overline{AS}\big)$ изометрично множеству $A^{b*}B^{X^*}$ с нормой. Это так, поскольку

$$\begin{aligned}\|A^{b*}g_1 - A^{b*}g_2\| &= \sup_{x\in S} \left|(A^{b*}g_1 - A^{b*}g_2)(x)\right| = \sup_{x\in S} \left|(g_1 - g_2)A(x)\right| = \sup_{z\in AS} \left|(g_1 - g_2)z\right| = \\ &= \sup_{z\in\overline{AS}} \left|(g_1 - g_2)z\right| = \rho(g_1,\, g_2).\end{aligned}$$

Раз Φ предкомпактно, оно вполне ограничено; но тогда вполне ограничено и изометричное ему множество $A^*B^{X^*}$. Поэтому $A^*B^{X^*}$ предкомпактно. □

Следствие 32.1. Если оператор на гильбертовом пространстве компактен, то и сопряжённый к нему компактен.

Доказательство. Это следует из изометричности биекций I и J из теоремы Рисса. □

2.33 Лемма о замкнутости образа и ортогональные представления пространства

Сформулируем для начала теорему, которую будем доказывать три пункта.

Теорема 33.1. Пусть A – компактный оператор на гильбертовом пространстве H, и $T = I - A$.

1. Уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны каждому решению уравнения $T^*\psi_0 = 0$.

2. Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ ровно одно решение, либо уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.

3. Уравнения $T\varphi = f$ и $T\varphi_0 = 0$ имеют одно и то же, притом конечное, число линейно независимых решений.

А теперь начнём доказывать.

Лемма 33.1. Образ оператора T замкнут.

Доказательство. Пусть $y_n \in \operatorname{Im} T$ и $y_n \to y$. Найдутся векторы $x_n \in H$ такие, что

$$y_n = x_n - Ax_n,$$

причём можно выбрать их так, чтобы $x_n \perp \operatorname{Ker} T$.

На самом деле, ещё можно считать, что $\|x_n\|$ ограничены в совокупности, ибо в противном случае можно было бы перейти к подпоследовательности, в которой $\|x_n\| \to \infty$. Для неё выполнялось бы

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{Ax_n}{\|x_n\|} \to 0.$$

Компактность оператора A позволяет считать последовательность

$$\frac{Ax_n}{\|x_n\|}$$

сходящейся, поэтому и
$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \to z.$$
Ясно, что $\|z\| = 1$ и $z \in \operatorname{Ker} T$.

С другой стороны мы считали все x_n ортогональными к $\operatorname{Ker} T$, поэтому и $z \perp \operatorname{Ker} T \Rightarrow z = 0$. Но тогда у него не единичная норма!

Поскольку $\|x_n\|$ ограничены в совокупности, последовательность $\{Ax_n\}$ можно считать сходящейся, а поэтому сходится и последовательность $\{x_n\}$. Понятно, что предел этой последовательности и есть прообраз y. □

Лемма 33.2. Пространство H является прямой суммой замкнутых подпространств $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} T^*$.

Доказательство. Мы уже знаем, что оба этих подпространства замкнуты. Ещё они ортогональны, поскольку
$$h \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow Th = 0 \Rightarrow \big((T^*x,\, h) = (x,\, Th) = 0\big).$$
Предположим, например, что $(\operatorname{Ker} T)^\perp \neq \operatorname{Im} T^*$, то есть найдётся вектор $y \notin \operatorname{Im} T^*$ такой, что $y \perp \operatorname{Ker} T$. Поскольку образ T^* замкнут, можно вычесть из y его проекцию на этот образ и получить вектор, ортогональный сразу $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} T^*$, не лежащий в них.

Раз $y \perp \operatorname{Im} T^*$, для любого $x \in H$ имеем
$$0 = (T^*x,\, y) = (x,\, Ty) \Rightarrow (Ty,\, Ty) = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} T.$$
Противоречие.

Таким образом, образ является ортогональным дополнением замкнутого ядра, и их прямая сумма равна H. □

Отсюда следует первое утверждение теоремы Фредгольма: образ T и есть ортогональное дополнение ядра T^*.

2.34 Второе утверждение АФ и спектр компактного оператора

Положим $H^k = \operatorname{Im} T^k$. Ясно, что
$$H^1 \supset H^2 \supset \ldots \supset H^k \supset \ldots;$$
по лемме 33.1 все они замкнуты [1]. При этом $T(H^k) = H^{k+1}$.

Лемма 34.1. Существует такое j, что $H^{k+1} = H^k$ при $k \geqslant j$.

Доказательство. Если такого j нет, то все H^k различны. По теореме о перпендикуляре можно построить ортонормированную последовательность $\{x_k\}$ такую, что $x_k \in H^k$ и $x_k \perp H^{k+1}$.

Пусть $l > k$. Тогда
$$Ax_l - Ax_k = -x_k + \underbrace{(x_l + Tx_k - Tx_l)}_{\in H^{k+1}} \Rightarrow \|Ax_l - Ax_k\| \geqslant 1,$$
поскольку $\|x_k\| = 1$. Поэтому из $\{x_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A. □

Лемма 34.2. Если $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, то $\operatorname{Im} T = H$.

[1] Потому что если A и B компактны, то
$$(I - A)(I - B) = I - A - B + AB,$$
и оператор $AB - A - B$, конечно, компактен, поскольку
$$(AB - A - B)x_n = ABx_n - Ax_n - Bx_n,$$
и можно выбрать сходящуюсь подпоследовательность для первого слагаемого, потом из неё для второго, а потом для третьего.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, он инъективен, а значит, у него есть левое теоретико-множественное обратное отображение. Применяя его к равенству $H^k = H^{k+1}$ k раз, получаем $H = T(H)$. □

Лемма 34.3. Если $\operatorname{Im} T = H$, то $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Доказательство. По лемме 33.2 мы знаем, что раз $\operatorname{Im} T = H$, $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$. Отсюда по предыдущей лемме $\operatorname{Im} T^* = H$, и, опять по лемме 33.2, $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. □

Две последние леммы и дают второе утверждение теоремы Фредгольма.

Следствие 34.1. Всякая отличная от нуля точка спектра компактного оператора является его собственным значением конечной кратности. Точка 0 всегда в спектре, но не обязана быть собственным значением. Множество собственных значений не более чем счётно.

2.35 Теорема об индексе (третье утверждение в АФ)

Пусть пространство $\operatorname{Ker} T$ бесконечномерно. Тогда в нём найдётся бесконечная ортонормированная система $\{x_k\}$. При этом $Ax_k = x_k$, а потому при $k \neq l$ имеем

$$\|Ax_k - Ax_l\| = \sqrt{2}.$$

Но тогда из последовательности $\|Ax_k\|$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит компактности оператора A.

Пусть теперь μ – размерность $\operatorname{Ker} T$ и ν – размерность $\operatorname{Ker} T^*$. Пусть $\mu < \nu$, а $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu\}$ – ортонормированный базис в $\operatorname{Ker} T$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_\nu\}$ – ортонормированный базис в $\operatorname{Ker} T^*$. Пусть

$$Sx = Tx + \sum_{i=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j.$$

Поскольку оператор S отличается от T на конечномерный оператор, для него будет всё точно также.

Покажем, что уравнение $Sx = 0$ имеет только тривиальное решение. Предположим противное:

$$Tx + \sum_{i=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0.$$

В силу леммы 33.2 ψ_j ортогональны всем векторам вида Tx, а поэтому $Tx = 0$ и

$$(x, \varphi_j) = 0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant \mu.$$

Таким образом, x должен быть одновременно линейной комбинацией векторов φ_j и ортогонален им, поэтому $x = 0$. По второму пункту теоремы Фредгольма 33.1 существует y такой, что

$$Ty + \sum_{i=1}^{\mu} (y, \varphi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}.$$

Если умножить это равенство не $\psi_{\mu+1}$, справа получится 1, а слева 0, поскольку $Ty \in \operatorname{Im} T$, а $\operatorname{Im} T \perp \operatorname{Ker} T^*$. Это противоречие возникло из предположения $\mu < \nu$. Наоборот точно также, поэтому они равны.

Литература

[1] У. Рудин «Функциональный анализ», Лань, 2005

[2] А. Я. Хелемский «Лекции по функциональному анализу», МЦНМО, 2014

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин «Элементы теории функций и функционального анализа», Наука, 1972