Функциональный анализ–1

Михаил Пирогов

Аннотация

Конспект курса А. Д. Баранова, прочитанного в осеннем семестре 2017 года.

1 Топологические векторные пространства

1.1 Основные определения

Определение 1.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, снабжённое топологией τ. Пару $(X,\, \tau)$ называют *топологическим векторным пространством,* если сложение и умножение на скаляр непрерывны относительно τ, и каждая точка является замкнутым множеством.

Пример 1.1. Нормированное пространство со стандартной топологией – ТВП, а прямая с топологией Зарисского – нет, ибо в ней $U + V = \mathbb{R}$ для любых двух открытых множеств (ведь их дополнения конечны).

Утверждение 1.1. Параллельный перенос T_a и растяжение M_λ – гомеоморфизмы ТВП X в себя. При T_a локальная база переходит в локальную базу.

Определение 1.2. ТВП называют *локально выпуклым,* если в нём есть база в нуле, состоящая из выпуклых множеств.

Определение 1.3. Множество $E \subset X$ называют *уравновешенным,* если для любого α такого, что $|\alpha| \leqslant 1$ верно, что $\alpha E \subset E$.

Определение 1.4. Множество $E \subset X$ называют *ограниченным,* если для любой окрестности нуля U

$$\exists\, t\colon \forall s > t\; sU \supset E.$$

Утверждение 1.2. Легко видеть, что при растяжении ограниченное множество переходит в ограниченное множество. Позже мы докажем, что это происходит с ним при любом непрерывном линейном отображении (то есть и при параллельном переносе).

Определение 1.5. ТВП X называют *локально ограниченным,* если в нём существует база в нуле из ограниченных множеств.

Утверждение 1.3. Существования всего одной ограниченной окрестности нуля достаточно, чтобы ТВП было локально ограничено.

Теорема 1.1. ТВП $(X,\, \tau)$ метризуемо $\Leftrightarrow$ есть счётная база в нуле.

Теорема 1.2 (Колмогоров)**.** ТВП нормируемо $\Leftrightarrow$ оно локально ограничено и локально выпукло.

1.2 Топология, порождённая счётным семейством полунорм

Определение 2.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функцию $p\colon\, X \to [0,\, \infty)$ называют *полунормой*, если выполняются следующие условия:

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Пример 2.1. На $C\big((-1,\, 1)\big)$ полунормой является

$$\|f\| = \max_{\left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Определение 2.2. Семейство полунорм $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на ВП X называют *определяющим,* если

$$\forall n\; p_n(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Определение 2.3. Топологией, *порождённой* семейством полунорм, называют самую грубую топологию, относительно которой все они непрерывны.

Утверждение 2.1. Базой этой топологии являются множества вида

$$V_{\varepsilon,\, i_1, \ldots, i_n}(x_0) = \bigl\{x \in X \bigm| \forall k\; p_{i_k}(x - x_0) < \varepsilon\bigr\}.$$

Утверждение 2.2. Семейство полунорм определяющее $\Leftrightarrow$ топология, порождённая им, хаусдорфова.

Утверждение 2.3. Векторное пространство с топологией, порождённой определяющим семейством полунорм – локально выпуклое ТВП.

Теорема 2.1. Топология τ, порождённая определяющим семейством полунорм p_n, задаётся метрикой

$$\rho(x,\, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(1,\, p_n(x-y))}{2^n}.$$

Доказательство.

1. Очевидно, что ряд сходится, причём $\rho(x,\, y) \geqslant 0$.
2. Если $\rho(x,\, y) = 0$, то все слагаемые нулевые, поэтому $x = y$.
3. $\rho(x,\, y) = \rho(y,\, x)$.
4. Если верно неравенство

   $$\forall a,\, b \geqslant 0\;\; \min(1,\, a+b) \leqslant \min(1,\, a) + \min(1,\, b),$$

   то

   $$\min(1,\, p_n(x-z)) \leqslant \min\bigl(1,\, p_n(x-y) + p_n(y-z)\bigr) \leqslant \min(1,\, p_n(x-y)) + \min(1,\, p_n(y-z)),$$

   откуда сразу следует искомый результат.
5. Неравенство довольно просто доказать.
6. Осталось лишь понять, что этой метрикой задаётся нужная топология. Для этого достаточно доказать, что

   $$\forall B_\delta(0)\; \exists\, V_{\varepsilon,\, i_1,\, \ldots,\, i_n}(0)\colon V_\varepsilon \subset B_\delta$$

   и, напротив,

   $$\forall V_{\varepsilon,\, i_1,\, \ldots,\, i_n}(0)\; \exists\, B_\delta(0)\colon B_\delta \subset V_\varepsilon.$$

   Докажем сначала первое включение. Найдётся такое N, что

   $$\forall N' > N\;\; \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \forall x \in B_\delta\;\; \sum_{n=N'}^{\infty} \frac{\min\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

   Возьмём $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ и $n = N$. Тогда

   $$x \in V_\varepsilon \Rightarrow \forall k \leqslant N\; p_k(x) < \frac{\delta}{2}.$$

   Поэтому

   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{\min\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

   Таким образом получаем, что из того, что $x \in V_\varepsilon$, следует, что

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bigl(1,\, p_n(x)\bigr)}{2^n} < \delta \Rightarrow x \in B_\delta.$$

7. Докажем теперь второе включение. Не умаляя общности, положим $\varepsilon < 1$. Пусть $\max(i_1,\, \ldots,\, i_n) = N$. Возьмём

   $$\delta = \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

   Если $x \in B_\delta$, то

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(x)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2^N} \Rightarrow \forall n \leqslant N\; p_n(x) < \varepsilon.$$

   Отсюда получаем, что $x \in V_\varepsilon$.

$\square$

Теорема 2.2. Пусть X – ТВП с топологией τ, порождённой определяющим семейством полунорм p_n.

1. $x_k \to x_0 \Leftrightarrow \forall n\; p_n(x_k - x_0) \to 0$,
2. $E \subset X$ ограничено $\Leftrightarrow \forall n\; p_n$ ограничены на E.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$: Пусть $x_k \to x_0$. Это означает, что $\rho(x_k,\, x_0) \to 0$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\big(1,\, p_n(x_n - x_0)\big)}{2^n} \to 0 \Rightarrow \forall n\; p_n(x_k - x_0) \to 0.$$

$\Leftarrow$: Пусть все p_n стремятся к нулю. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Пусть N таково, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\rho(x_k,\, x_0) < \sum_{n=1}^{N} \frac{\min\big(1,\, p_n(x_k - x_0)\big)}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая достаточно большое k, первую сумму можно сделать меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

2. $\Rightarrow$: Пусть множество E ограничено. Фиксируем некоторую полунорму p_n из семейства; рассмотрим окрестность $V_{\varepsilon,\, n}(0)$. Т.к. V является окрестностью нуля, $E \subset kV$ для некоторого k. Но тогда $p_n(x) < k$ для любого x из E.

   $\Leftarrow$: Пусть теперь все полунормы ограничены на E. Возьмём U – произвольную окрестность нуля, и $V_{\varepsilon,\, i_1,\, \dots,\, i_n}(0) \subset U$. Найдутся M_i такие, что $\forall x \in E\; p_i(x) < M_i$. Отсюда следует, что $E \in nU$, если $n > M_i n_i$ для всех i. Поэтому E ограничено. Если умножить V на число, превосходящее $M_{i_1},\, \dots\, M_{i_n}$, то получится окрестность, содержащая E.

□

Пример 2.2. Примеры – $C\big((a,\, b)\big)$, $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. На $C^\infty(\Omega)$ нужно построить последовательность компактов K_n такую, что $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ и $\cup K_n = \Omega$. После этого полунорма p_n определяется следующим образом:

$$p_n(f) = \max_{x \in K_n,\, |\alpha| \leqslant n} \big|D^\alpha f(x)\big|.$$

Оба этих пространства полны.

Простой пример – множество последовательностей комплексных чисел $\{x_n\}$, в котором p_n возвращает модуль x_n. Его обозначают $\mathbb{C}^\infty$.

Гораздо больше написано в параграфе «Примеры» первой главы книжки Рудина.

1.3 Функционал Минковского

Определение 3.1. Пусть X – ТВП, $A \subset X$. A называют *поглощающим*, если

$$\forall x \in X\; \exists\, t > 0\colon x \in tA.$$

Замечание 3.1. Если A поглощающее, то $0 \in A$.

Утверждение 3.1. Любая окрестность нуля – поглощающее множество.

Доказательство. Это можно вывести, например, из того, что ноль – ограниченное множество, а точка – ноль после параллельного переноса. Параллельный перенос, как непрерывное линейное оторбажение, сохраняет ограниченность.

Иначе это можно увидеть так: понятно, что $x \cdot 0 = 0$, а из непрерывности умножения следует, что

$$\forall U(0)\; \exists\, V(x),\, W_\varepsilon(0)\colon VW_\varepsilon \subset U.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t} \in W_\varepsilon \Rightarrow \frac{x}{t} \in U \Rightarrow x \in tU.$$

□

Определение 3.2. Пусть A – поглощающее множество. Тогда

$$\mathfrak{m}_A(x) = \inf\left\{t \mid \frac{x}{t} \in A\right\} \text{ – функционал Минковского.}$$

Замечание 3.2. Если A выпукло и содержит ноль, то из того, что $\frac{x}{t} \in A$, следует, что $\frac{x}{s} \in A$ для любого $s > t$.

Утверждение 3.2. Пусть A – выпуклое и поглощающее, и $t > \mathfrak{m}_A(x)$. Тогда $\frac{x}{t} \in A$.

Теорема 3.1. Пусть A – выпуклое поглощающее множество. Тогда:

1. $\forall t > 0$ $\mathfrak{m}_A(tx) = t\mathfrak{m}_A(x)$ (положительная однородность),
2. $\mathfrak{m}_A(x+y) \leqslant \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_A(y)$ (полуаддитивность),
3. Если A уравновешенное, $\mathfrak{m}_A$ – полунорма.

Доказательство.

1. $$\mathfrak{m}_A(tx) = \inf\left\{s \mid \frac{tx}{s} \in A\right\} = t\inf\left\{\frac{s}{t} \mid \frac{tx}{s} \in A\right\} = t\mathfrak{m}_A(x).$$

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся s и t такие, что

   $$s - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(x) < s,\ \frac{x}{s} \in A \text{ и } t - \varepsilon < \mathfrak{m}_A(y) < t \text{ и } \frac{y}{t} \in A.$$

   Распишем частное сумм:
   $$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t}.$$
   По выпуклости это частное лежит в A, поэтому

   $$\mathfrak{m}_A(x+y) \leqslant s + t < \mathfrak{m}_A(x) + \mathfrak{m}_B(y).$$

3. Не хватает возможности умножать на любую константу из $\mathbb{C}$. Пусть $\alpha = r\beta$, $r \geqslant 0$, $|\beta| = 1$.

   $$\mathfrak{m}_A(\alpha x) = \inf\left\{s \mid \frac{\alpha r x}{s} \in A\right\} = \inf\left\{s \mid \frac{rx}{s} \in \underbrace{\alpha^{-1}A}_{=A}\right\} = \mathfrak{m}_A(rx) = r\mathfrak{m}_A(x) = |\alpha|\mathfrak{m}_A(x).$$

□

1.4 Теорема о нормируемости

Лемма 4.1.

1. Любая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность;
2. любая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность.

Доказательство.

1. Пусть U – окрестность нуля. По непрерывности умножения, существуют $V(0)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что если $|\alpha| < \varepsilon$, то $\alpha V \subset U$. Объединение αV по всем α и есть искомая окрестность.
2. Пусть U – выпуклая окрестность нуля. Положим $A = \cap \alpha U$ по всем α на единичной окружности. Пусть W – окрестность из предыдущего пункта. Очевидно, что $W \subset A$. Отсюда следует, что внутренность $\operatorname{Int} A$ является окрестностью нуля, лежащей в U. Выпуклость и уравновешенность внутренности следуют из выпуклости и уравновешенности A.

□

Теорема 4.1 (Колмогоров)**.** Следующие условия равносильны:

1. X нормируемо;
2. X локально выпукло и локально ограничено.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Очевидно.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть $\{U_\alpha\}$ – база в нуле из выпуклых окрестностей, V – ограниченная окрестность. Найдётся α такое, что $U_\alpha \subset V \Rightarrow U_\alpha$ ещё и ограниченная. Выпуклая окрестность нуля U_α содержит выпуклую уравновешенную U; таким образом, U – выпуклое ограниченное уравновешенное поглощающее множество, окрестность нуля. Введём норму следующим образом:

$$\|x\| = \mathfrak{m}_U(x).$$

По теореме 3.1 $\|\cdot\|$ – полунорма.

Докажем, что это норма. Возьмём $x \neq 0$. Все точки замкнуты, поэтому существует окрестность нуля, не содержащая x. Т.к. U ограничена, найдётся $r > 0$ такое, что rU лежит в этой окрестности. Значит, есть r такое, что

$$x \notin rU \underset{\text{вып.}}{\Rightarrow} \forall s \in (0, r)\ \frac{x}{s} \notin U \Rightarrow \mathfrak{m}_U(x) \geqslant r > 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0.$$

Осталось доказать, что эта норма задаёт нужную топологию. Для этого достаточно получить, что

$$rU = \big\{x \,\big|\, \|x\| < r\big\}\,;$$

отсюда будет следовать совпадение локальных баз. Докажем это равенство.

Обозначим множество справа через B_r. Заметим, что

$$x \in rU \Rightarrow \frac{x}{r} \in U \Rightarrow \|x\| \leqslant r.$$

Отсюда $rU \subset \overline{B_r}$. Т.к. rU открытое, $rU \subset B_r$.

Докажем обратное включение.

$$\|x\| < r \Rightarrow \exists\, s < r\colon\ \frac{x}{s} \in U.$$

Поскольку U выпукло

$$\frac{x}{r} \in U \Rightarrow x \in rU.$$

□

1.5 Примеры ненормируемых пространств

Утверждение 5.1. Пусть на локально ограниченном X топология задана определяющим семейством полунорм $\{p_n\}$. Тогда найдётся окрестность нуля $V_{\varepsilon,\,1,\,\ldots,\,n}(0)$ такая, что на ней все полунормы ограничены.

Доказательство. Пусть X локально ограничено. Тогда найдётся ограниченная $V_{\varepsilon,\,1,\,\ldots,\,n}(0)$. По теореме 2.2 это как раз и значит, что

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \sup_V p_i < \infty.$$

□

Пример 5.1. Легко видеть, что для пространств $C^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$, $\mathbb{C}^\infty$ это всегда не так.

Определение 5.1. Говорят, что ТВП X обладает *свойством Гейне-Бореля*, если любое замкнутое и ограниченное множество в нём компактно.

Замечание 5.1. Из теоремы Рисса следует, что любое нормированное пространство, обладающее этим свойством, конечномерно.

Утверждение 5.2. C^∞ обладает свойством Гейне-Бореля.

Доказательство. Поскольку C^∞ метризуемо, в нём компактность равносильна секвенциальной компактности. Её и будем проверять.

Пусть $x^k = \left(x_n^k\right)_{n=1}^\infty$ – элементы $\mathbb{C}^\infty$. Тогда сходимость x^k к x^0 просто означает, что

$$\forall n\ x_n^k \to x_n^0.$$

Пусть E – замкнутое и ограниченное подмножество X, $x^k \in E$. E ограничено $\Rightarrow \forall n\ p_n(x^k) = |x_n^k|$ ограничены. Поэтому можно выделить $x^{k,\,1}$ – подпоследовательность в $\{x^k\}$ такую, что $x_n^{k,\,1}$ сходится. Продолжая диагональным методом, получим то, что нужно. □

Замечание 5.2. $C^\infty(\mathbb{R})$ обладает свойством Гейне-Бореля, а $C(\mathbb{R})$ нет. $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ обладает свойством Гейне-Бореля.

1.6 Теорема о непрерывности линейных отображений

Определение 6.1. Линейное отображение ТВП называют *ограниченным,* если оно переводит ограниченные множества в ограниченные.

Лемма 6.1.

1. Если d – инвариантная относительно сдвига метрика на пространстве X, то для любого $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$
$$d(nx,\, 0) \leqslant nd(x,\, 0).$$

2. Если $\{x_n\}$ – сходящаяся к 0 последовательность точек метризуемого ТВП, то существуют такие положительные скаляры γ_n, что $\gamma_n \to \infty$ и $\gamma_n x_n \to 0$.

Доказательство.

1. $$d(nx,\, 0) = d\big((n-1)x,\, -x\big) \leqslant d\big((n-1)x,\, 0\big) + \underbrace{d(0,\, -x)}_{=d(x,\,0)}.$$
Продолжая эту деятельность, по индукции получаем наше утверждение.

2. Мы знаем, что раз X метризуемо, в нём можно ввести инвариантную метрику, совместимую с топологией. Построим такую возрастающую последовательность целых чисел n_k, что $d(x_n,\, 0) < k^{-2}$ при $n \geqslant n_k$ и положим $\gamma_n = 1$ при $n < n_1$ и $\gamma_n = k$ при $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Посмотрим, как ведёт себя последовательность $\gamma_n x_n$:
$$d(\gamma_n x_n,\, 0) = d(kx_n,\, 0) \leqslant kd(x_n,\, 0) < k^{-1}.$$
Поэтому $\gamma_n x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

□

Лемма 6.2. Следующие два свойства подмножества E топологического векторного пространства эквивалентны:

1. E ограничено;
2. если $\{x_n\}$ – любая последовательность точек из E, а α_n – такая последовательность скаляров, что $\alpha_n \to 0$, то $\alpha_n x_n \to 0$.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть E ограничено, а U – произвольная окрестность нуля. По определению ограниченности
$$\big(\exists\, t > 0\colon \forall s > t\ E \subset sU\big) \Rightarrow \left(\exists\, t > 0\colon \forall s > t\ \forall n\ \frac{x_n}{s} \in U\right).$$
Поскольку $\gamma_n \to 0$, с некоторого момента будет выполнено неравенство $\gamma_n < \frac{1}{t} \Rightarrow \gamma_n x_n \in U$. По определению предела отсюда следует, что $\gamma_n x_n \to 0$.

$2 \Rightarrow 1$: Пусть теперь E не ограничено. Тогда найдётся окрестность нуля U и последовательность скаляров $r_n \to \infty$ такие, что $E \not\subset r_n U$. Выберем x_n такими, что $x_n \notin r_n U$, а γ_n положим равным r_n^{-1}. Тогда $\gamma_n x_n$ ни при каком n не попадает в U, а значит, и к нулю не сходится. □

Теорема 6.1. Пусть X и Y – ТВП, а $L\colon X \to Y$ – линейное отображение. Рассмотрим следующие утверждения:

1. L непрерывно;
2. L ограничено;
3. если $x_n \to 0$, то $\{Lx_n\}$ – ограниченное множество;
4. $x_n \to 0 \Rightarrow Lx_n \to 0$.

Импликация $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ выполняется всегда; импликация $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ выполняется, если X метризуемо.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $E \subset X$ – ограниченное множество, W – окрестность нуля в Y. Из непрерывности L следует, что $L^{-1}(W)$ открыто в X.

Найдётся окрестность нуля V такая, что $V \subset L^{-1}(W) \Rightarrow L(V) \subset W$. E ограничено, поэтому существует t такое, что $\forall s > t\ E \subset sV \Rightarrow L(E) \subset L(sV) = sL(V) \subset sW$.

Таким образом, для произвольной окрестности $W \subset Y$ мы нашли t такое, что при $s > t$ $L(E) \subset sW$. Отсюда следует ограниченность $L(E)$.

$2 \Rightarrow 3$: Для этого нужно только доказать, что сходящаяся к нулю последовательность ограничена. Сходимость x_n к 0 значит, что

$$\forall U(0)\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n \in U.$$

Возьмём произвольную окрестность U и в ней выберем уравновешенную окрестность V. Из только что написанного определения следует, что вне неё находится лишь конечное количество точек последовательности; обозначим их $\{x_{i_k}\}_{k=1}^K$. Поскольку любая окрестность нуля – поглощающее множество, для любого k найдётся n_k такое, что $x_{i_k} \in n_k V$. Легко видеть, что

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset V \cup \bigcup_{k=1}^K n_k V.$$

Т.к. V – уравновешенное множество, то и $(\max_{k\in 1\ldots K} n_k)\, V$ тоже. Поэтому

$$\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset \left(\max_{k\in 1\ldots K} n_k\right) \cdot V \subset \left(\max_{k\in 1\ldots K} n_k\right) \cdot U.$$

Отсюда и следует искомая ограниченность.

$4 \Rightarrow 1$: С этого места мы предполагаем, что X метризуемо. Пусть (1) неверно, то есть отображение L не непрерывно. Легко видеть, что оно тогда не непрерывно в нуле (для этого надо рассмотреть определение непрерывности в точке через окрестности и вспомнить, что параллельный перенос – автоморфизм). Это значит, что найдётся окрестность нуля $U \subset Y$ такая, что $L^{-1}(U)$ не содержит ни одной окрестности нуля.

Поскольку X метризуемо, в нём есть счётная локальная база, причём в каждом её элементе есть точка, которая не попадает в U. Из этих точек можно составить сходящуюся к нулю последовательность, образ которой с U вовсе не пересекается. Это противоречит (3).

$3 \Rightarrow 4$: Пусть X метризуемо и L обладает свойством (3). Пусть $x_n \to 0$. По лемме 6.1 найдётся последовательность положительных скаляров γ_n такая, что $\gamma_n \to \infty$ и $\gamma_n x_n \to 0$. Тогда $\{L\gamma_n x_n\}$ – ограниченное множество.

По лемме 6.2 выходит, что

$$\underbrace{\frac{1}{\gamma_n}}_{\to 0} \underbrace{L(\gamma_n x_n)}_{\text{огранич.}} \to 0 \Rightarrow Lx_n \to 0.$$

$\square$

1.7 Равностепенно непрерывные семейства, теорема Банаха-Штейнгауза, следствия

Определение 7.1. Подмножество топологического пространства называют *нигде не плотным,* если его замыкание имеет пустую внутренность. Говорят, что множество относится к *первой категории* (или *худое*), если его можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. Все остальные множества относят ко *второй категории* (их называют ещё *тучными*).

Свойство 7.1.

1. Если $A \subset B$ и B первой категории, то A тоже первой категории.
2. Счётное объединение множеств первой категории – множество первой категории.
3. Замкнутое в S множество $E \subset S$ с пустой внутренностью является множеством первой категории в S.
4. Если h – гомеоморфизм пространства S на себя, то множества E и $h(E)$ имеют одну категорию в S.

Теорема 7.1. (Бэр) Пусть S либо

1. полное метрическое пространство, либо
2. локально компактное хаусдорфово пространство.

Тогда пересечение любого счётного семейства всюду плотных множеств всюду плотно в S.

Следствие 7.1. Полные метрические пространства и локально компактные хаусдорфовы пространства являются множествами второй категории в себе.

Определение 7.2. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – некоторое семейство отображений из X в Y. Назовём Γ *равностепенно непрерывным*, если для любой $U(0) \subset Y$ найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$ (т.е. $\forall \Lambda \in \Gamma\ \Lambda(V) \subset U$).

Лемма 7.1. Пусть X и Y – ТВП, а Γ – равностепенно непрерывное семейство линейных отображений. Тогда если E – ограниченное множество в X, то $\Gamma(E)$ тоже ограничено.

Доказательство. Рассмотрим произвольную U – окрестность нуля в Y. Поскольку Γ равностепенно непрерывно, найдётся $V(0) \subset X$ такая, что $\Gamma(V) \subset U$. Ограниченность E означает, что

$$\exists\, t\colon \forall s > t\ E \subset sV.$$

Отсюда

$$\Gamma(E) \subset s\Gamma(V) \subset sU,$$

что и даёт ограниченность $\Gamma(E)$. □

Теорема 7.2 (Теорема Банаха-Штейнгауза, принцип равномерной ограниченности)**.** Пусть X и Y – ТВП, Γ – некоторое семейство непрерывных линейных отображений из X в Y, а B – множество всех таких точек $x \in X$, что их орбиты $\Gamma(x)$ ограничены. Если B – множество второй категории в X, то $B = X$ и семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Выберем в Y такие уравновешенные окрестности нуля U и W, что $\overline{U}+\overline{U} \subset V$, и положим

$$E = \bigcap_{\Lambda\in\Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Если $x \in B$, $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого натурального n, так что $x \in nE$. Поэтому

$$B \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nE.$$

Хотя бы одно из множеств nE является множеством второй категории в X, ибо B таково. Поскольку умножение на n – гомеоморфизм, само E тоже относится ко второй категории. Но E замкнуто, как пересечение замкнутых множеств; поэтому в нём есть внутренняя точка x_0. Множество $E - x_0$ содержит некоторую окрестность нуля V, причём

$$\Lambda(V) \subset \Lambda(E) - \Lambda(x_0) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

для любого $\Lambda \in \Gamma$.

Отсюда следует, что Γ равностепенно непрерывно. По лемме 7.1 Γ ещё и равномерно ограничено, в частности, все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Поэтому $B = X$. □

Следствие 7.2. Пусть Γ – семейство непрерывных линейных отображений F-пространства[1] X в ТВП Y, причём все множества $\Gamma(x)$ ограничены. Тогда Γ равностепенно непрерывно.

Теорема 7.3. Пусть X и Y – ТВП, а $\{\Lambda_n\}$ – последовательность непрерывных линейных отображений из X в Y.

1. Пусть C – множество $x \in X$, для которых $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y. Если C – множество второй категории в X, то $C = X$.
2. Пусть L – множество всех $x \in X$ таких, что для них существует предел

   $$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

   Если Y – F-пространство, а L – множество второй категории в X, то $L = X$ и отображение Λ непрерывно.

Доказательство.

1. Так как каждая последовательность Коши ограничена (для сходящихся это доказано в теореме 6.1; для последовательностей Коши доказательство идейно похоже[2]), по теореме 7.2 Банаха-Штейнгауза семейство Λ_n равностепенно непрерывно.

   Можно проверить, что C – подпространство X. Его замыкание $\overline{C}$ всюду плотно (если бы это было не так, $\overline{C}$ было бы собственным подпространством X, поэтому у него не было бы внутренних точек и C было бы первой категории).

[1] F-пространство – ТВП, в котором топология порождается полной инвариантной метрикой.

[2] В ТВП можно назвать последовательность $\{x_n\}$ *последовательностью Коши*, если для любой окрестности нуля U найдётся такое N, что при n, $m > N$ точка $x_n - x_m$ лежит в U. Для пространств, на которых можно ввести **инвариантную** метрику (на самом деле, все метризуемые таковы), это определение совпадает с обычным. Отсюда, кстати, следует, что две эквивалентные инвариантные метрики задают одинаковые последовательности Коши и полны одновременно.

Зафиксируем $x \in X$ и $W(0) \subset Y$. Из равностепенной непрерывности $\{\Lambda_n\}$ следует, что есть симметричная окрестность $V(0) \subset X$ такая, что $\Lambda_n(V) \subset W$ для всех n. Раз C всюду плотно, найдётся точка $x' \in C \cap (x+V)$.

Пусть n и m столь велики, что

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W.$$

Тождество

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x - x')$$

показывает, что $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Поэтому $\{\Lambda_n x\}$ – последовательность Коши в Y, и $x \in C$.

2. Из полноты Y следует, что $L = C$. Пусть V и W обозначают то же самое, что и в пункте (1); тогда $\Lambda_n(V) \subset V$ для всех n. Поэтому $\Lambda(V) \subset \overline{V}$. Из этого и регулярности любого ТВП (и Y в том числе) следует непрерывность Λ.

□

Замечание 7.1. Идея доказательства пункта (1) выражается всего в трёх утверждениях:

1. C – подпространство, и его вторая категория требует, чтобы оно было всюду плотным.
2. То, что Λ_n равностепенно непрерывно, позволяет из того, что для x' последовательность $\Lambda_n(x)$ сходится в себе, заключить это для близкой к ней x.
3. То, что C всюду плотно, позволяет взять эту самую x' достаточно близко к x.

Теорема 7.4. Пусть $\{\Lambda_n\}$ – семейство непрерывных линейных отображений из F-пространства X в ТВП Y, причём в каждом x существует предел

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Тогда отображение Λ непрерывно.

Доказательство. Из следствия 7.2 получется, что семейство Λ_n равностепенно непрерывно. Дальнейшее рассуждение эквивалентно пункту (2) предыдущей теоремы. □

Теорема 7.5. Пусть X и Y – ТВП, $K \subset X$ – компактное выпуклое подмножество, а Γ – такое семейство непрерывных отображений из X в Y, что для всех x $\Gamma(x)$ – ограниченное множество. Тогда $\Gamma(K)$ ограничено.

1.8 Теорема об открытом отображении

Теорема 8.1. Пусть X – F-пространство, Y – топологическое векторное пространство, а $\Lambda\colon X \to Y$ – такое непрерывное линейное отображение, что его образ является множеством второй категории в Y. Тогда верны следующие утверждения:

1. $\Lambda(X) = Y$;
2. Λ – открытое отображение;
3. Y является F-пространством.

Доказательство. Подробно изложено в [1, с. 58–60]. □

Следствие 8.1 (Теорема Банаха)**.** Если $\Lambda\colon X \to Y$ – непрерывная линейная биекция, а X и Y – F-пространства, то Λ – гомеоморфизм.

Доказательство. По теореме 8.1 об открытом отображении отображение Λ открыто. Из этого сразу следует непрерывность обратного к нему. □

1.9 Теорема о замкнутом графике

Определение 9.1. Пусть X, Y – множества, $f\colon X \to Y$ – отображение. Тогда *графиком* f называют множество
$$\Gamma_f = \left\{(x,\, f(x)) \in X \times Y \,\middle|\, x \in X\right\}.$$

Утверждение 9.1. Пусть X, Y – топологические пространства, $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение, Y хаусдорфово. Тогда Γ_f замкнут в топологии произведения.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(x,\, y)$ не на графике; пусть $f(x) = y_0$. Так как Y хаусдорфово, существуют непересекающиеся окрестности $U(y)$ и $V(y_0)$. Так как f непрерывно, существует окрестность $W(x)$ такая, что $f(W) \subset V$. Легко видеть, что

$$W \times U \cap \Gamma_f \subset W \times U \cap W \times V = \varnothing.$$

Таким образом, дополнение Γ_f открыто, поэтому оно замкнуто. □

Теорема 9.1. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейное отображение двух F-пространств. Если график A замкнут, то оно непрерывно.

Доказательство. Операции векторного пространства на $X \times Y$ можно определить просто покомпонентно. Пусть d_X и d_Y – полные инвариантные метрики пространств X и Y соответственно. Метрику на $X \times Y$ можно определить следующим образом:

$$d\big((x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2)\big) = d_X(x_1,\, x_2) + d_Y(y_1,\, y_2).$$

Можно проверить, что она будет совместима с топологией произведения, полна и инвариантна, а всё это вместе будет F-пространством, но это не очень интересно.

Поскольку отображение A линейно, его график будет линейным пространством. Так как он замкнут, он тоже будет F-пространством.

Определим отображения $\pi_1(x,\, \Lambda x) = x$ и $\pi_2(x,\, y) = y$ из графика в соответствующие пространства. Тогда π_1 будет непрерывной биекцией между F-пространствами, а по теореме Банаха 8.1 мы знаем, что тогда и обратное к нему непрерывно. Но $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, поэтому и оно непрерывно, как композиция непрерывных отображений. □

Утверждение 9.2. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейное отображение двух F-пространств. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ точек из X такую, что существуют пределы

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Если для любой такой последовательности $y = Ax$, то график A замкнут.

Доказательство. Поскольку все пространства метризуемы, можно говорить о замкнутости на языке последовательностей. Если график не замкнут, то существует последовательность точек графика $(x_n,\, y_n)$, сходящаяся к точке, на нём не лежащей (полнота гарантирует, что она не сходится к «дырке»). Так как сходимость в $X \times Y$ с определённой нами метрикой покомпонентная, это прямое противоречие. □

1.10 Теорема Хана-Банаха

Определение 10.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называют *выпуклым функционалом* на X, если

$$\forall \lambda \in [0,\, 1]\; p\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda p(x_1) + (1-\lambda)p(x_2).$$

Определение 10.2. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $p\colon X \to \mathbb{R}$ называют *положительно однородным,* если

$$\forall \alpha \geqslant 0\; p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Утверждение 10.1. Пусть p – выпуклый, положительно однородный. Тогда $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$.

Утверждение 10.2. Пусть p – выпуклый, положительно однородный и неотрицательный. Тогда он является функционалом Минковского для множества

$$A = \{x \in x \,|\, p(x) < 1\}.$$

Теорема 10.1 (Вещественная теорема Хана-Банаха)**.** Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$, p – положительно однородный выпуклый функционал на X, X_0 – подпространство X.

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0. Если $f_0(x) \leqslant p(x)$ на X_0, то найдётся функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ такой, что

1. $f|_{x_0} = f_0$,
2. $f(x) \leqslant p(x)$ на X.

Теорема 10.2 (Комплексная теорема Хана-Банаха)**.** Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{C}$, p – полунорма на X, X_0 – подпространство X.

Рассмотрим f_0 – линейный функционал на X_0. Если $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ на X_0, то найдётся функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ такой, что

1. $f|_{x_0} = f_0$,
2. $|f(x)| \leqslant p(x)$ на X.

1.11 Первая теорема об отделимости

Определение 11.1. Пусть X – векторное пространство над $\mathbb{R}$, E, $F \subset X$ – непустые множества. Говорят, что E и F *отделимы,* если есть линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\forall x \in E \; \forall y \in F \; f(x) \leqslant f(y).$$

Другими словами, $f(E) \leqslant f(F)$. Говорят, что f *разделяет* E и F.

Утверждение 11.1. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ – линейный функционал. Тогда

$$\exists\, a \in X\colon \{\alpha a + x \mid \alpha \in \mathbb{R},\; x \in \operatorname{Ker} f\} = X.$$

Определение 11.2. Подпространство $Y \neq X$ такое, что есть $a \in X$: $\operatorname{Lin}(a, Y) = X$ называют *гиперподпространством*.

Утверждение 11.2. Y – гиперподпространство в $X \Rightarrow$ есть линейный функционал f такой, что $\operatorname{Ker} f = Y$.

Определение 11.3. *Гиперплоскость* – множество вида $x_0 + Y$, где Y – гиперподпространство.

Замечание 11.1. Понятно, что уравнение $f(x) = \alpha$ задаёт гиперплоскость. Пусть $\sup\limits_E f = \alpha$. Тогда эта самая гиперплоскость разделяет множества E и F в обычном геометрическом смысле.

Определение 11.4. Говорят, что E и F *строго отделимы,* если существует линейный функционал f такой, что

$$\sup_E f < \inf_F f.$$

Теорема 11.1. Пусть X – ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, $\operatorname{Int} E \neq \varnothing$ и $F \cap \operatorname{Int} E = \varnothing$. Тогда найдётся **непрерывный** линейный функционал, разделяющий E и F.

Доказательство. Введём обозначение $\overset{\circ}{E} = \operatorname{Int} E$. $f(x) - f(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(E - F) \leqslant 0$, поэтому можно просто отделять $E - F$ от нуля.

Не умаляя общности, предположим, что $0 \in \overset{\circ}{E}$ (в противном случае можно было бы сдвинуть всё на какой-нибудь вектор). Зафиксируем $y_0 \in F$. Отделимость $E - F$ и $\{0\}$ равносильна отделмиости $E - F + y_0$ и $\{y_0\}$. Введём $K = \overset{\circ}{E} - F + y_0$ и докажем сначала отделимость K и $\{y_0\}$.

Множество K – выпуклая окрестность нуля. Поэтому оно поглощающее $\Rightarrow$ можно рассмотреть на нём функционал Минковского. Заметим, что

$$\overset{\circ}{E} \cap F = \varnothing \Rightarrow 0 \notin \overset{\circ}{E} - F,$$

а значит, $y_0 \notin K$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{m}_K(y_0) \geqslant 1$ (здесь мы пользуемся ещё выпуклостью K).

Рассмотрим $X_0 = \operatorname{Lin}(y_0)$. На нём можно задать функционал f_0 такой, что

$$\alpha y_0 \mapsto \alpha \mathfrak{m}_K(y_0).$$

Легко видеть, что $f_0 \leqslant \mathfrak{m}_K$ на X_0, ведь

$$\begin{cases} \alpha \geqslant 0 \Rightarrow \mathfrak{m}_K(\alpha y_0) = \alpha \mathfrak{m}_K(y_0) = f_0(\alpha y_0) \\ \alpha < 0 \Rightarrow f_0(\alpha y_0) < 0,\; \mathfrak{m}_A(\alpha y_0) \geqslant 0. \end{cases}$$

По теореме Хана-Банаха f_0 можно продолжить на всё пространство X и получить линейный функционал f. Понятно, что f разделяет K и y_0, ведь

$$x \in K \Rightarrow p(x) \leqslant 1 \Rightarrow f(x) \leqslant 1$$

и $f(y_0) = f_0(y_0) = p(y_0) \geqslant 1$.

Мы доказали, что f разделяет $\overset{\circ}{E}$ и F. Почему он разделяет E и F? Пусть $x \in E$. Нетрудно доказать[3], что тогда

$$\forall \varepsilon \in [0,\, 1)\ (1-\varepsilon)x \in \overset{\circ}{E}\ .$$

Мы уже знаем, что $(1-\varepsilon)f(x) = f\big((1-\varepsilon)x\big) \leqslant f(y)$ при $y \in F$. Предельным переходом в неравенстве получаем искомое.

Осталось доказать непрерывность f. Ноль лежит в $\overset{\circ}{E}$, поэтому можно выбрать уравновешенную $V(0) \subset \overset{\circ}{E}$. Зафиксируем какой-нибудь $y \in F$.

$$\forall x \in V\ f(x) \leqslant f(y) = a.$$

Если x лежит в V, то и $-x$ лежит в V, поэтому $f(-x) \leqslant a$. Отсюда следует, что $a > 0$. Заметим, что

$$f(V) \subset (-2a,\, 2a) \Rightarrow V \subset f^{-1}\big((-2a,\, 2a)\big) \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2a} V \subset f^{-1}\big((-\varepsilon,\, \varepsilon)\big).$$

Вот и получили непрерывность.

□

1.12 Вторая теорема об отделимости

Лемма 12.1. Каждая окрестность нуля W содержит симметричную окрестность U такую, что $U + U \subset W$.

Доказательство. Существование двух окрестностей V_1 и V_2 таких, что $V_1 + V_2 \subset W$ следует из непрерывности сложения. Полагая

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

получим окрестность нуля U, обладающую нужными свойствами. □

Замечание 12.1. Понятно, что опираясь на эту лемму, можно сделать и три, и четыре, и сколько угодно таких окрестностей.

Лемма 12.2. Пусть K и C – подмножества ТВП X, причём K компактно, C замкнуто и $K \cap C = \varnothing$. Тогда найдётся окрестность нуля V такая, что

$$(K+V) \cap (C+V) = \varnothing.$$

Доказательство. Если множество K пусто, то утверждение тривиально. Поэтому рассмотрим $x \in K$. По только что доказанной лемме 12.1, найдётся окрестность $V_x(0)$ такая, что $x + V_x + V_x + V_x$ не пересекается с C; из симметричности V_x следует, что

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing.$$

Поскольку K компактно, в нём найдётся множество точек $x_1, \ldots x_n$ такое, что

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \ldots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Положим $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Тогда

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subset K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

а ни одно из множеств в последнем объединении не пересекает $C + V$. □

Теорема 12.1. Пусть X – локально выпуклое ТВП, E и F – непустые выпуклые множества, причём E компактно, а F замкнуто, $E \cap F = \varnothing$. Тогда E и F строго отделимы.

Доказательство. Лемма 12.2 позволяет отделить E и F непересекающимися окрестностями, а локальная выпуклость позволяет сделать их выпуклыми. После этого можно просто сослаться на первую теорему об отделимости 11.1. □

[3] Нужно рассмотреть множество $(1-\varepsilon)x + \varepsilon\ \overset{\circ}{E}$ и использовать выпуклость.

Определение 12.1. Если X – комплексное ТВП, то говорят, что непустые E и F *отделимы,* если существует линейный функционал f такой, что

$$f(E) \leqslant f(F).$$

Утверждение 12.1. Для $\mathbb{C}$ формулировки теорем в точности такие же.

Доказательство. Нужно сослаться на доказанные теоремы, рассмотрев комплексное пространство, как вещественное. Функционал f определится через вещественный, как

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix).$$

□

Определение 12.2. Пусть X – ТВП. Тогда *двойственное* к нему X^* – пространство всех **непрерывных** линейных функционалов на X.

Следствие 12.1. Если X – локально выпуклое пространство, и $x \neq y$, то найдётся непрерывный линейный функционал такой, что $f(x) \neq f(y)$ (другими словами, X^* *разделяет точки пространства* X).

1.13 Теорема Крейна-Мильмана

Определение 13.1. Пусть X – ТВП, $E \subset X$ – выпуклый непустой компакт. Тогда говорят, что $S \subset E$ – *крайнее* для E, если

$$x,\, y \in E;\ y \notin S;\ t \in (0,\, 1) \Rightarrow tx + (1-t)y \notin S.$$

Определение 13.2. Если крайнее множество состоит из одной точки, эта точка называется *крайней*.

Теорема 13.1 (Крейна-Мильмана)**.** Пусть X – ТВП, E – выпуклый непустой компакт. Пусть $\mathrm{Ext}\, E$ – множество крайних точек E. Тогда

$$E = \overline{\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}\, E)}$$

1.14 Слабые топологии

Определение 14.1. Пусть X – множество, Y – топологическое пространство, $\mathcal{F}$ – семейство отображений из X в Y. Обозначим через $\tau_{\mathcal{F}}$ топологию, состоящую из всех объединений всех конечных пересечений множеств вида $f^{-1}(U)$, где U открыто в Y, а $f \in \mathcal{F}$.

Замечание 14.1. Легко видеть, что эта конструкция действительно даёт топологию.

Утверждение 14.1. $\tau_{\mathcal{F}}$ – самая слабая топология, относительно которой все $f \in \mathcal{F}$ непрерывны.

Доказательство. Рассмотрим произвольную такую топологию τ. Множества вида $f^{-1}(U)$ в ней открыты по определению непрерывного отображения, а их объединения и конечные пересечения – по определению топологии. Поэтому $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$. □

Утверждение 14.2. Если пространство Y хаусдорфово, и семейство $\mathcal{F}$ разделяет точки X, то $(X,\, \tau_{\mathcal{F}})$ тоже хаусдорфово.

Доказательство. Рассмотрим две различные точки x_1 и x_2 в X. Раз $\mathcal{F}$ их разделяет, существует $f \in \mathcal{F}$ такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. У точек $f(x_1)$ и $f(x_2)$ есть непересекающиеся окрестности, раз Y хаусдорфово, и их прообразы – окрестности точек x_1 и x_2 – тоже не пересекаются. □

1.15 Топология, порождённая подпространством в пространстве функционалов

Лемма 15.1. Пусть X_n – векторное пространство, $f_1,\, \ldots,\, f_n,\, f$ – линейные функционалы на X; пусть

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_i.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_n\colon f=\alpha_1 f_1+\ldots+\alpha_n f_n$;
2. $\exists\,M\colon \forall x\in X\;|f(x)|\leqslant M\cdot\max|f_i(x)|$;
3. $f|_N=0$.

Доказательство. Импликация $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3$ очевидна. Докажем $3\Rightarrow 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Pi\colon X&\to\mathbb{C}^n\\ x&\mapsto\big(f_1(x),\,\dots,\,f_n(x)\big);\end{aligned}$$

пусть $Y=\Pi X$. Возьмём произвольный $y=\Pi x\in Y$; определим $F\colon Y\to\mathbb{C}$ следующим образом:

$$F(y)=f(x).$$

Для корректности нужно проверить, что если $\Pi x=\Pi x'$, то и $f(x)=f(x')$. Это так:

$$\Pi(x)=\Pi(x')\Rightarrow\Pi(x-x')=0\Rightarrow x-x'\in N\Rightarrow f(x)=f(x').$$

F – линейный функционал на подпространстве $\mathbb{C}^n$, его всегда можно продолжить на всё $\mathbb{C}^n$, просто отправив всё лишнее в ноль, и записать в координатах:

$$F(y)=\sum_{i=1}^n\alpha_i y_i\Rightarrow f(x)=F(\Pi x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i f_i(x).$$

□

Теорема 15.1. Пусть X – векторное пространство, X' – подпространство пространства линейных функционалов на X, X' разделяет точки X. Тогда X с топологией, порождённой X' – локально выпуклое ТВП, а $X^*=X'$.

Доказательство. Мы уже знаем, что пространство $(X,\,\tau_{X'})$ хаусдорфово. Рассмотрим множества вида

$$V_{\varepsilon,\,f_1,\,\dots,\,f_n}(x_0)=\left\{x\in X\,\middle|\,\forall i\;\big|f_i(x-x_0)\big|<\varepsilon,\;f_i\in X'\right\}.$$

Нетрудно проверить, что любая точка в пересечении двух множеств такого типа содержится вместе с третьим множеством того же типа. Поэтому они образуют базу некоторой топологии τ.

Из непрерывности f_i в $\tau_{X'}$ следует открытость множеств $V_{\varepsilon,\,f_1,\,\dots,\,f_n}(x_0)$. Это значит, что $\tau\subset\tau_{X'}$. Однако

$$\forall f\in X'\;f^{-1}\big(B_\varepsilon(x_0)\big)\in\tau,$$

поэтому f непрерывно относительно τ. Поскольку $\tau_{X'}$ самая слабая, $\tau=\tau_{X'}$.

Непрерывность сложения, умножения на скаляр и выпуклость доказываются довольно просто теперь, когда у нас есть удобная база.

Осталось лишь увидеть, что нет никаких непрерывных функционалов не из X'. Пусть f непрерывен в $(X,\,\tau_{X'})$. Тогда найдётся окрестность вида $V_{\varepsilon,\,f_1,\,\dots,\,f_n}(0)$ такая, что

$$\forall x\in V\;\big|f(x)\big|<1.$$

Возьмём $y\in N$ в обозначнениях предыдущей леммы 15.1:

$$f_i(y)=0\Rightarrow f_i(\alpha y)=0\Rightarrow\alpha y\in V$$

для любого скаляра α. Но

$$\big|f(\alpha y)\big|<1\Rightarrow\forall\alpha\;|\alpha|\big|f(y)\big|\leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $f(y)=0$. Пользуясь леммой, получаем искомое. □

1.16 Слабая топология и слабая сходимость

Определение 16.1. Пусть X – нормированное пространство. Тогда *слабой топологией* на нём называют самую слабую топологию, в которой все функционалы из X^* непрерывны. Её обозначают через $\sigma(X,\,X^*)$.

Утверждение 16.1. Слабая сходимость $x_n\xrightarrow{w}x_0$ равносильна тому, что $\forall f\in X^*\;f(x_n)\to f(x_0)$.

Доказательство. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ означает, что

$$\forall V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0)\; \exists\, N\colon n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Если рассмотреть окрестность типа $V_{\varepsilon,\, f}$, получится в точности то, что справа.

Докажем теперь обратно. Для всех $f \in X^*$ выполняется

$$f(x_n) \to f(x_0) \Leftrightarrow \forall V_{\varepsilon,\, f}(x_0)\; \exists\, N\colon n > N \Rightarrow x_n \in V.$$

Рассмотрим окрестность общего вида $V_{\varepsilon,\, f_1,\, \dots,\, f_n}(x_0)$. Если записать последнее утверждение для всех окрестностей $V_{\varepsilon,\, f_i}(x_0)$ и выбрать наибольшее из полученных N, оно станет верным и для окрестности общего вида. □

Теорема 16.1. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. sup $\|x_n\| < \infty$,
2. для всех f в некотором всюду плотном множестве $E \subset X^*$ $f(x_n) \to f(x_0)$.

Доказательство. Пусть f – произвольный непрерывный линейный функционал на X. Поскольку E всюду плотно, найдётся функционал $f_0 \in E$ такой, что $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Заметим, что

$$f(x_n - x_0) = f_0(x_n - x_0) + (f - f_0)(x_n - x_0),$$

поэтому

$$\bigl|f(x_n - x_0)\bigr| \leqslant \bigl|f_0(x_n - x_0)\bigr| + \bigl|(f - f_0)(x_n - x_0)\bigr| \leqslant \bigl|f_0(x_n - x_0)\bigr| + \|f - f_0\|\bigl(\|x_n\| + \|x_0\|\bigr).$$

Используя ограниченность, окончательно пишем

$$\bigl|f(x_n - x_0)\bigr| \leqslant \bigl|f_0(x_n - x_0)\bigr| + M\|f - f_0\|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, а второе можно сделать сколь угодно малым, верно выбрав f_0. Успех! □

Пример 16.1. Пусть $x_n \in l^p$. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. sup $\|x_n\| < \infty$,
2. $x_n^k \to x_0^k$.

Доказательство. Мы знаем, как устроено пространство, двойственное к l^p – это просто l^q, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Линейная оболочка векторов вида

$$e_k = (0,\, \dots,\, \underbrace{1}_{k},\, 0,\, \dots)$$

образует всюду плотное множество в l^q. При этом, если рассмотреть их как функционалы, то

$$e_k(x) = x^k \Rightarrow e_k(x_n) \to e_k(x_0).$$

При линейных комбинациях векторов это, конечно, не ломается, поэтому можно спокойно использовать только что доказанную теорему. □

Пример 16.2. Пусть $x_n \in C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт. Тогда сходимость $x_n \xrightarrow{w} x_0$ равносильна тому, что одновременно выполняются два утверждения:

1. sup $\|x_n\| < \infty$,
2. $\forall t \in K$ $x_n(t) \to x_0(t)$.

Доказательство. Мы знаем, как устроены функционалы и на $C(K)$ – любой из них имеет вид

$$\varphi(x) = \int\limits_K x\, \mathrm{d}\mu,$$

где μ – некоторая регулярная борелевская комплексная мера. По теореме Лебега об ограниченной сходимости из условий теоремы следует, что

$$\int\limits_K x_n\, \mathrm{d}\mu \to \int\limits_K x_0\, \mathrm{d}\mu,$$

поскольку борелевская мера компактного множества конечна[4].

В обратную сторону доказательство тривиально: надо в качестве функционала взять значение в точке. $\square$

Теорема 16.2. Пусть H – гильбертово пространство. Следующие утверждения равносильны:

1. $x_n \to x_0$;
2. $x_n \xrightarrow{w} x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Доказательство. Доказывать надо только $2 \Rightarrow 1$. Распишем норму разности:

$$\|x_n - x_0\|^2 = \|x_n\|^2 + (x_n,\, x_0) - (x_0,\, x_n) + \|x_0\|^2.$$

Вторые два слагаемых стремятся к квадрату нормы x_0 из-за слабой сходимости (они ведь непрерывные линейные функционалы по сути!) Первое стремится к квадрату нормы x_0. $\square$

1.17 Слабая ограниченность, теорема Мазура

Теорема 17.1. Пусть X – нормированное пространство, $E \subset X$. Следующие условия равносильны:

1. E ограничено в слабой топологии;
2. $f(E)$ ограничено для любого непрерывного на X функционала;
3. E ограничено по норме.

Доказательство.

$3 \Rightarrow 2$: Очевидно.

$2 \Rightarrow 3$: Пусть π_x – функционал на X^*, который переводит f в $f(x)$ (он, конечно, непрерывный). Ограниченность $f(E)$ означает, что множество $\{\pi_x(f) \mid x \in E\}$ ограничено, а это орбита f! Поскольку X^* – F-пространство, можно воспользоваться теоремой Банаха-Штейнгауза 7.2 и получить, что семейство π_x равностепенно непрерывно, а потому и равномерно ограничено, т.е. $\sup \|\pi_x\| < \infty$, а $\|\pi_x\| = \|x\|$.

$1 \Rightarrow 2$: Пусть $f \in X^*$. Рассмотрим $V_{1,\,f}(0)$. Из ограниченности E следует, что

$$\exists\, s > 0\colon \forall t > s\ E \subset tV \Rightarrow \sup |f(E)| < t.$$

$2 \Rightarrow 1$: Пусть U – окрестность нуля в слабой топологии. Не умаляя общности, $U = V_{\varepsilon,\, f_1,\, \ldots,\, f_n}$. Найдутся M_i такие, что $|f_i(x)| \leqslant M_i$ для всех x из E. Пусть $M = \max M_i$; тогда при $t > \frac{M}{\varepsilon}$ $E \subset tU$. $\square$

Теорема 17.2 (Мазура)**.** Пусть X – нормированное пространство, а $E \subset X$ непусто и выпукло. Тогда замкнутость E в слабой и в обычной топологии равносильны.

Доказательство. Если E слабо замкнуто, то оно и по норме замкнуто, ибо топология нормы сильнее. Интересно в обратную сторону.

Пусть множество E замкнуто по норме. Предположим, что существует точка $x_0 \notin E$, которая попала в слабое замыкание E. По второй теореме отделимости 12.1 точку можно отделить от замкнутого множества E функционалом $f \in X^*$ так, что

$$\operatorname{Re} f(x_0) > M > \sup_{x \in E} \operatorname{Re} f(x).$$

Пусть

$$U = \{x \mid \operatorname{Re} f(x) > M\}.$$

f непрерывен в слабой топологии, поэтому $\operatorname{Re} f$ непрерывен в ней, а значит, U в ней открыто. $x_0 \in U$ и U не пересекает E, что даёт противоречие. $\square$

[4]Это требование, кажется, не всегда включают в определение борелевской меры.

1.18 $*$-слабая топология

В принципе, можно было бы рассмотреть слабую топологию на пространстве линейных функционалов. Однако она оказывается довольно бесполезной, потому что второе двойственное зачастую слишком большое. Вместо этого поступают иначе.

Определение 18.1. Пусть X – нормированное пространство. Рассмотрим отображение $\pi\colon X^* \to X^{**}$, которое точку x переводит в функционал на пространстве X^*, сопоставляющий $f \in X^*$ его значение $f(x)$. *$*$-слабой топологией* называют самую слабую топологию, относительно которой непрерывны все функционалы из множества $\pi(X)$. Вместо $\pi(x)$ иногда пишут π_x.

Утверждение 18.1 (Корректность)**.** Функционал π_x действительно непрерывен, его норма не превосходит $\|x\|$.

Доказательство.

$$\left|\pi_x(f)\right| = \left|f(x)\right| \leqslant \|f\|\|x\|.$$

Отсюда следует, что

$$\|\pi_x\| = \sup_x \frac{\left|\pi_x(f)\right|}{\|f\|} \leqslant \|x\|.$$

Это значит, что π_x ограничен $\Rightarrow$ непрерывен, причём его норма не превосходит $\|x\|$. □

Теорема 18.1. Пусть X – нормированное пространство.

1. Рассмотрим $X_0 \subset X$ – линейное подпространство, $f_0\colon X_0 \to \mathbb{C}$ – непрерывный линейный функционал. Тогда найдётся непрерывный линейный функционал $f\colon X \to \mathbb{C}$ такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $\|f\| = \|f_0\|$.
2. Для любой точки $x_0 \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство.

1. Рассмотрим $p(x) = \|f_0\|\|x\|$. Это полунорма на X (а если $f_0 \neq 0$), даже норма. Понятно, что $p(x)$ ограничивает f_0. Поэтому по теореме Хана-Банаха существует линейный функционал f на X такой, что $f|_{X_0} = f_0$ и $f(x) \leqslant \|f_0\|\|x\|$. Это сразу же даёт нам ограниченность f и то, что его норма не превосходит $\|f_0\|$. При этом меньше она тоже никак быть не может.
2. Пусть $X_0 = \mathrm{Lin}(x_0)$. Положим $f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. По первому пункту теоремы всё получается.

□

Теорема 18.2. Отображение $\pi\colon X \to X^{**}$ – изометрия.

Доказательство. Теперь мы знаем, что по любой точке x можно пострить функционал f такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Это значит, что

$$\frac{\left|\pi_x(f)\right|}{\|f\|} = \|x\|.$$

Поэтому верхняя оценка из утверждения 18.1 достигается и $\|\pi_x\| = \|x\|$, что и значит, что отображение π – изометрия. □

Определение 18.2. Если каноническое вложение π – изоморфизм, пространство X называют *рефлексивным*.

Пример 18.1. Рефлексивны все гильбертовы пространства (потому что они изоморфны своим двойственным). Рефлексивно также L^p при $1 < p < \infty$, потому что двойственное к нему L^q, а к нему снова L^p. То, что именно π задаёт этот изоморфизм, строго говоря, надо проверять, но это довольно просто. А вот L^1, L^∞ и $C(K)$ не являются рефлексивными.

Утверждение 18.2. База $*$-слабой топологии состоит из множеств вида

$$V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f_0) = \left\{ f \in V^* \,\middle|\, \forall i \in 1 \ldots n \, \left|f(x_i) - f_0(x_i)\right| < \varepsilon \right\}.$$

Утверждение 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow \forall x\ \pi_x(f_n) \to \pi_x(f_0)$, то есть, $*$-слабая сходимость – по сути поточечная сходимость.

Теорема 18.3. $f_n \xrightarrow{w^*} f_0 \Leftrightarrow$ выполнению двух условий:

1. $\sup \|f_n\| < \infty$.
2. Найдётся E – всюду плотное множество в X такое, что $f_n(x) \to f_0(x)$ для всех $x \in E$.

Всё это делается аналогично обычной слабой топологии.

Пример 18.2. Если X рефлексивно, то $*$-слабая и слабая тополгии на X^* совпадают.

1.19 Теорема Банаха-Алаоглу

Теорема 19.1. Пусть X – нормированное пространство. Единичный шар $\overline{B}^*$ в пространстве X^* компактен и секвенциально компактен в $*$-слабой топологии.

Список литературы

[1] У. Рудин «Функциональный анализ», Лань, 2005