Równoważność cykliczna ciągów

Definicja problemu i przedstawienie rozwiązań

Mikołaj Juda

2023

W referacie przedstawiono problem równoważności cyklicznej ciągów oraz różne algorytmy do jego rozwiązywania razem z implementacją w języku Python. Pokrótce omówiono algorytm naiwny oraz algorytm korzystający z wyszukiwania wzorca. Przedstawiono również szybki algorytm sprawdzania równoważności list cyklicznych Shiloacha(1979)[1] z modyfikacją do obsługi ciągów numerowanych od 0 i pewnymi uproszczeniami[3] oraz wyjaśniono dowód jego poprawności i analizę złożoności obliczeniowej.

Spis treści

1 Definicja problemu

Dane są dwa ciągi $A = (a_0, \dots, a_{n-1})$ oraz $B = (b_0, \dots, b_{n-1})$ długości n. A i B są *równoważne cyklicznie* ($A \equiv B$), gdy są równe w sensie list cyklicznych tzn.

Definicja 1.1 (Równoważność cykliczna)**.**

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} \; a_{(k_0+k) \pmod n} = b_k$$

Dla wygody dalszego zapisu oznaczmy:

$$a_k \coloneqq a_{k \pmod n}, \; b_k \coloneqq b_{k \pmod n} \text{ dla wszystkich } k \geq n$$

Zdefiniujmy A_k jako listę powstałą z przesunięcia cyklicznego ciągu A takiego, że a_k jest pierwszym elementem ciągu A_k. Analogicznie dla B_k.[1]

$$A_k = [a_k, \dots, a_n, a_0, \dots, a_{k-1}]$$
$$B_k = [b_k, \dots, b_n, b_0, \dots, b_{k-1}]$$

Definicję Definicja 1.1 można przedstawić równoważnie jako:

Definicja 1.2 (Równoważność cykliczna)**.**

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} \, A_{k_0} = B$$

Podsumowując, problem brzmi: „Czy istnieje takie przesunięcie cykliczne jednego ciągu, że jest po nim równy drugiemu ciagowi?”

[1] $A_0 = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ oraz $B_0 = [b_0, \dots, b_{n-1}]$

2 Algorytm naiwny

Z Definicji 1.1 można łatwo zauważyć, że

Lemat 2.1. *Jeżeli nie istnieje* $k_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ *spełniające warunek:*

$$\forall_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \; a_{k_0+k} = b_k$$

to nie istnieje $k_0 \in \mathbb{Z}$ *spełniające ten warunek.*

Dowód. Oczywiste. ■

Wniosek 2.1. *Żeby ustalić istnienie* k_0 *z Definicji 1.1, wystarczy sprawdzić, czy*

$$\exists_{k_0 \in \{0,\ldots,n-1\}} \forall_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \; a_{k_0+k} = b_k$$

2.1 Algorytm

Algorytm naiwny sprawdza dla każdego $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ czy

$$\forall_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \; a_{l+k} = b_k$$

. Jeżeli trafi na l spełniające warunek to mamy $k_0 = l$ i algorytm zwraca `True`, w przeciwnym wypadku zwraca `False`. Algorytm ma złożoność kwadratową.[3]

2.2 Implementacja

```python
def rownowazne_cyklicznie(a: list, b: list) -> bool:
    if len(a) != len(b):
        return False
    n = len(a)
    for l in range(n):
        for k in range(n):
            if a[(l + k) % n] != b[k]:
                break
        else:
            return True
    return False
```

3 Algorytm wykorzystujący wyszukiwanie wzorca

Utwórzmy listę
$$AA = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1}]$$
i zauważmy, że dowolny spójny podciąg AA o długości n rozpoczynający się od indeksu k ma postać A_k, czyli jest przesunięciem cyklicznym ciągu A.

Uwaga 3.1. Łatwo zauważyć, że
$$\{ A_0, \dots, A_{n-1} \} = \{ A_{\mathbb{Z}} \}$$
Zatem jeżeli sprawdzimy, czy B jest spójnym podciągiem AA to otrzymamy rozwiązanie problemu równoważności cyklicznej.

3.1 Algorytm

Można użyć do tego dowolnego algorytmu wyszukiwania wzorca, jednakże naiwny algorytm wyszukiwania wzorca sprowadza się do wcześniej przedstawionego algorytmu naiwnego i ma złożoność kwadratową. Wykorzystanie algorytmu wyszukiwania wzorca o liniowej złożoności obliczeniowej umożliwia sprawdzenie równoważności cyklicznej w czasie liniowym.[2] Wersja wykorzystująca algorytm Knutha-Morrisa-Pratta wykonuje około $5n$ porównań.[1] Wymaga on jednak dodatkowej pamięci (liniowa złożoność pamięciowa).

3.2 Implementacja[2]

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    AA = A + A
    return KMPSearchExists(B, AA)


def KMPSearchExists(pattern, word) -> bool:
    M = len(pattern)
    N = len(word)
    lps = [0] * M
    j = 0
    computeLPSArray(pattern, M, lps)
    i = 0
    while i < N:
        if pattern[j] == word[i]:
            i += 1
            j += 1
        if j == M:
            return True
        elif i < N and pattern[j] != word[i]:
            if j != 0:
                j = lps[j - 1]
            else:
                i += 1
    return False


def computeLPSArray(pat, M, lps):
    len = 0
    lps[0] = 0
    i = 1
    while i < M:
        if pat[i] == pat[len]:
            len += 1
            lps[i] = len
            i += 1
        else:
            if len != 0:
                len = lps[len - 1]
            else:
                lps[i] = 0
                i += 1
```

[2]Użyta implementacja algorytmu KMP (z modyfikacjami) pochodzi ze strony:
https://www.geeksforgeeks.org/python-program-for-kmp-algorithm-for-pattern-searching-2/

4 Algorytm szybki[3]

Algorytm wymaga istnienia porządku liniowego na zbiorze

$$\{ a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \}$$

Niech $a \leq b$ oznacza, że a poprzedza lub jest równe b w tym porządku, a $a < b$ oznacza $x \leq b \wedge a \neq b$.
Wtedy porządek leksykograficzny na zbiorze

$$\{ A_0, \ldots, A_{n-1}, B_0, \ldots, B_{n-1} \}$$

jest dobrym porządkiem.
Niech $A_i \preceq B_j$ oznacza, że A_i poprzedza lub jest równe B_j w porządku leksykograficznym, a $A_i \prec B_j$ oznacza $A_i \preceq B_j \wedge A_i \neq B_j$.
Niech

$$A_{i_0} = \min(\{ A_0, \ldots, A_{n-1} \}) \text{ tzn. } \forall_{0 \leq i < n-1} A_{i_0} \preceq A_i$$

analogicznie

$$B_{j_0} = \min(\{ B_0, \ldots, B_{n-1} \})$$

Lemat 4.1.

$$A \equiv B \iff A_{i_0} = B_{j_0}$$

Dowód. Oczywiste. ■

Lemat 4.2.

$$\forall_{0 \leq l < k} \; a_{i+l} = b_{j+l} \wedge a_{i+k} < b_{j+k} \implies \forall_{0 \leq l \leq k} \; A_{i+l} \prec B_{j+l}$$

Dowód. Trywialne. ■

Zdefiniujmy

$$D_A = \{ i : \exists_j \; B_j \prec A_i \}$$

analogicznie

$$D_B = \{ j : \exists_i \; A_i \prec B_j \}$$

tzn. D_A to zbiór indeksów wyznaczających takie przesunięcia cykliczne A, dla których istnieje dowolne przesunięcie cykliczne B poprzedzające je w porządku leksykograficznym. Analogicznie dla B.

[3] Będę używał nieco innych oznaczeń niż w [1]

Zdefiniujmy

$$i_D = \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_A = \emptyset \\ \max(D_A) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$j_D = \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_B = \emptyset \\ \max(D_B) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Lemat 4.3.

$$D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\} \implies A \not\equiv B$$

Dowód. Dowód wynika z Lematu 4.1

$$A \equiv B \implies i_0 \notin D_A \wedge j_0 \notin D_B$$

■

4.1 Algorytm

Zasadą działania algorytmu jest szybkie zbieranie indeksów przesunięć cyklicznych, które powinny być w zbiorach D_A i D_B,[4] dopóki nie zajdzie jeden z poniższych warunków stopu:

(1) $D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\}$

(2) Znajdziemy takie i oraz j, że $\forall_{0 \le k \le n-1}\ a_{i+k} = b_{j+k}$ (tzn. $A \equiv B$)

Głównym elementem algorytmu będzie procedura COMPARE, która znajduje pierwszy indeks k, dla którego $a_{i+k} \neq b_{j+k}$ i w zależności od tego, czy $a_{i+k} < b_{j+k}$ dodaje do D_B zbiór $\{j, \dots, j+k\}$ albo do D_A zbiór $\{i, \dots, i+k\}$ (Patrz Lemat 4.2). Jeżeli nie znajdzie nierówności to zwraca $A \equiv B$.
Procedura ROWNCYKL wykonuje procedurę COMPARE, dopóki nie zajdzie jeden z powyższych warunków.

[4]W implementacji te zbiory są niejawne.

global D_a, D_B, i_D, j_D
procedure COMPARE(i, j)
    for $k = 0, \dots, n-1$ **do**
        if $a_{i+k} \neq b_{j+k}$[5] **then**
            if $a_{i+k} < b_{j+k}$ **then**
                $D_b \leftarrow D_b \cup \{ j, \dots, j+k \}$
                $j_D \leftarrow j + k$
            else
                $D_a \leftarrow D_a \cup \{ i, \dots, i+k \}$
                $i_D \leftarrow i + k$
            end if
            return
        end if
    end for
    return $A \equiv B$
end procedure
procedure ROWNCYKL(A, B)
    $D_a \leftarrow \emptyset$
    $D_b \leftarrow \emptyset$
    $i_D \leftarrow -1$
    $j_D \leftarrow -1$
    while $D_A \not\supseteq \{ 0, \dots, n-1 \} \wedge D_B \not\supseteq \{ 0, \dots, n-1 \}$ **do**
        if COMPARE$(i_D + 1, j_D + 1)$ returns $A \equiv B$ **then**
            return $A \equiv B$
        end if
    end while
    return $A \not\equiv B$
end procedure

[5] W analizie złożoności będziemy liczyć te porównania

4.2 Poprawność

Lemat 4.4 (Niezmiennik)**.** *Po każdym wykonaniu procedury* COMPARE D_A *oraz* D_B *mają postać*

$$D_A = \{ 0, \dots, i_D \}$$

$$D_B = \{ 0, \dots, j_D \}$$

tzn. w D_A *nie brakuje żadnego elementu między* 0 *a* i_D*, analogicznie w* D_B *nie brakuje żadnego elementu między* 0 *a* j_D*.*

Dowód. Dowód wynika trywialnie z faktu, że jedyny sposób, w jaki modyfikowane jest D_A to

$$D_a \leftarrow D_a \cup \{ i_D + 1, \dots, i_D + k \}$$

analogicznie dla D_B

$$D_b \leftarrow D_b \cup \{ j_D + 1, \dots, j_D + k \}$$

■

Wniosek 4.1. *Z Lematu 4.4 wynika, że nie musimy przechowywać zbiorów* D_A *i* D_B*, wystarczy nam jedynie* i_D *oraz* j_D*.*

Twierdzenie 4.1 (Własność stopu)**.** *Procedura* ROWNCYKL *zatrzymuje się w skończonym czasie dla wszystkich poprawnych danych wejściowych.*

Dowód. Jeżeli dla jakiegoś i oraz j procedura COMPARE zwróci $A \equiv B$ to ROWNCYKL się zatrzymuje.
Jeżeli procedura COMPARE nie zwróci $A \equiv B$ dla żadnego i oraz j to z każdym wywołaniem COMPARE $i_D + j_D$ rośnie co najmniej o 1, więc w końcu (z Lematu 4.4) warunek stopu 1 zostanie spełniony i procedura ROWNCYKL się zatrzyma. ■

Twierdzenie 4.2 (Poprawność)**.** *Procedura* ROWNCYKL *zwraca* $A \equiv B$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $A \equiv B$*.*

Dowód. Jeżeli procedura ROWNCYKL zwróciła $A \equiv B$ to znaczy, że procedura COMPARE wykazała równość dwóch przesunięć cyklicznych A i B, a więc $A \equiv B$. Jeżeli procedura ROWNCYKL nie zwróci $A \equiv B$ to zwróci $A \not\equiv B$, gdyż z Twierdzenia 4.1 wiemy, że zawsze się zatrzymuje. Zwrócenie $A \not\equiv B$ oznacza, że wystąpił warunek stopu 1, więc z Lematu 4.3 $A \not\equiv B$. ■

4.3 Złożoność

Definicja 4.1. Wykonanie procedury COMPARE nazwiemy *udanym*, jeżeli zwróci $A \equiv B$. (Wykonanie, które nie jest udane jest *nieudane*)

Definicja 4.2. Oznaczmy D_A oraz D_B bezpośrednio przed ostatnim wykonaniem procedury COMPARE jako odpowiednio D_A^* oraz D_B^*.

Lemat 4.5. *Łączna liczba porównań wykonanych przez wywołania procedury* COMPARE*, z wyjątkiem ostatniego wynosi* $\left|D_A^*\right| + \left|D_B^*\right|$

Dowód. Każde wywołanie procedury COMPARE z wyjątkiem ostatniego jest nieudane i zwiększa $|D_A| + |D_B|$ o dokładnie tyle ile wykonało porównań. Wynika to trywialnie z definicji procedury COMPARE. ∎

Lemat 4.6. $\left|D_A^*\right| + \left|D_B^*\right| \leq 2n - 2$

Dowód. Jeżeli $\left|D_A^*\right| + \left|D_B^*\right| \geq 2n - 1$ to oznacza, że

$$\{\,0, \ldots, n-1\,\} \subset D_A^* \vee \{\,0, \ldots, n-1\,\} \subset D_B^*$$

co nie jest możliwe (patrz Definicja 4.2). ∎

Twierdzenie 4.3. *Algorytm wykonuje co najwyżej $3n - 2$ porównań.*

Dowód. Dowód wynika z Lematu 4.5 oraz Lematu 4.6, gdyż ostatnie wywołanie procedury COMPARE może wykonać co najwyżej n porównań. ∎

Wniosek 4.2. *Algorytm ma pesymistyczną złożoność czasową $\mathcal{O}(n)$ i dodatkową złożoność pamięciową $\mathcal{O}(1)$ (z Wniosku 4.1)*

4.4 Implementacja

```python
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)
    i = -1
    j = -1
    while i < n - 1 and j < n - 1:
        for k in range(1, n + 1):
            if A[(i + k) % n] != B[(j + k) % n]:
                if A[(i + k) % n] < B[(j + k) % n]:
                    j += k
                else:
                    i += k
                break
        else:
            return True
    return False
```

Bibliografia

[1] Yossi Shiloach. „A fast equivalence-checking algorithm for circular lists". W: *Information Processing Letters* 8.5 (1979), s. 236–238. ISSN: 0020-0190. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0190(79)90114-5. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019079901145.

[2] Lech Banachowski, Krzysztof Diks i Wojciech Rytter. *Algorytmy i struktury danych*. pol. Wyd. 5. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006. ISBN: 8320432243.

[3] *Algorytmy i struktury danych/Wstęp: poprawność i złożoność algorytmu*. 2020. URL: https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy_i_struktury_danych/Wst%C4%99p:_poprawno%C5%9B%C4%87_i_z%C5%82o%C5%BCono%C5%9B%C4%87_algorytmu#Algorytm_8._R.C3.B3wnowa.C5.BCno.C5.9B.C4.87_cykliczna_ci.C4.85g.C3.B3w.