

Równoważność cykliczna ciągów

Definicja problemu i przedstawienie rozwiązań

Mikołaj Juda

2023

W referacie przedstawiono problem równoważności cyklicznej ciągów oraz różne algorytmy do jego rozwiązywania razem z implementacją w języku Python. Pokrótce omówiono algorytm naiwny oraz algorytm korzystający z wyszukiwania wzorca. Przedstawiono również szybki algorytm sprawdzania równoważności list cyklicznych Shiloacha(1979)[1] z modyfikacją do obsługi ciągów numerowanych od 0 i pewnymi uproszczeniami[2] oraz wyjaśniono dowód jego poprawności i analizę złożoności obliczeniowej.

Spis treści

1	Definicja problemu	2
2	Algorytm naiwny	3
2.1	Algorytm	3
2.2	Implementacja	3
3	Algorytm wykorzystujący wyszukiwanie wzorca	4
3.1	Algorytm	4
3.2	Implementacja	4
4	Algorytm szybki	5
4.1	Algorytm	6
4.2	Poprawność	8
4.3	Złożoność	9
4.4	Implementacja	10
	Bibliografia	11

1 Definicja problemu

Dane są dwa ciągi $A = (a_0, \dots, a_{n-1})$ oraz $B = (b_0, \dots, b_{n-1})$ długości n . A i B są *równoważne cyklicznie* ($A \equiv B$), gdy są równe w sensie list cyklicznych tzn.

Definicja 1.1 (Równoważność cykliczna).

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{(k_0+k) \pmod n} = b_k$$

Dla wygody dalszego zapisu oznaczmy:

$$a_k := a_{k \pmod n}, \quad b_k := b_{k \pmod n}$$

Zdefiniujmy A_k jako listę powstałą z przesunięcia cyklicznego ciągu A takiego, że a_k jest pierwszym elementem ciągu A_k . Analogicznie dla B_k .¹

$$\begin{aligned} A_k &:= [a_k, \dots, a_n, a_0, \dots, a_{k-1}] \\ B_k &:= [b_k, \dots, b_n, b_0, \dots, b_{k-1}] \end{aligned}$$

Definicję 1.1 można przedstawić równoważnie jako:

Definicja 1.2 (Równoważność cykliczna).

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} A_{k_0} = B$$

Uwaga 1.1. Oczywiście $A \equiv B$ także wtedy, gdy

$$\exists_{k_0, l_0 \in \mathbb{Z}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_{l_0+k}$$

lub

$$\exists_{k_0, l_0 \in \mathbb{Z}} A_{k_0} = B_{l_0}$$

¹ $A_0 = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ oraz $B_0 = [b_0, \dots, b_{n-1}]$

2 Algorytm naiwny

Można łatwo zauważyć, że

Lemat 2.1. *Jeżeli nie istnieje $k_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ spełniające warunek:*

$$\forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_k$$

to nie istnieje $k_0 \in \mathbb{Z}$ spełniające ten warunek.

Dowód. Oczywiście. ■

Wniosek 2.1. *Żeby ustalić istnienie k_0 z [Definicji 1.1](#), wystarczy sprawdzić, czy*

$$\exists_{k_0 \in \{0, \dots, n-1\}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_k$$

2.1 Algorytm

Algorytm naiwny sprawdza dla każdego $l \in \{0, \dots, n-1\}$ czy

$$\forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{l+k} = b_k$$

Jeżeli trafi na l spełniające warunek to mamy $k_0 = l$ i algorytm zwraca $A \equiv B$, w przeciwnym wypadku zwraca $A \not\equiv B$. Algorytm ma złożoność kwadratową[2].

2.2 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    for l in range(n):
        for k in range(n):
            if A[(l + k) % n] != B[k]:
                break
        else:
            return True
    return False
```

3 Algorytm wykorzystujący wyszukiwanie wzorca

Utwórzmy listę

$$AA := [a_0, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1}]$$

i zauważmy, że dowolny spójny podciąg AA o długości n rozpoczynający się od indeksu k ma postać A_k , czyli jest przesunięciem cyklicznym ciągu A .

Uwaga 3.1. Łatwo zauważyć, że

$$\{A_0, \dots, A_{n-1}\} = \{A_{\mathbb{Z}}\}$$

Zatem jeżeli sprawdzimy, czy B jest spójnym podciągiem AA to otrzymamy rozwiązanie problemu równoważności cyklicznej.

3.1 Algorytm

Problem sprowadza się więc do problemu wyszukiwania wzorca, który można rozwiązać wykorzystując np. algorytm Knutha-Morrisa-Pratta. Wykonuje on dla sprawdzania równoważności cyklicznej około $5n$ porównań[1]. Wymaga on jednak dodatkowej pamięci (liniowa złożoność pamięciowa).

3.2 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    pmt = [0] * n
    for i in range(1, n):
        k = pmt[i - 1]
        while k > 0 and B[i] != B[k]:
            k = pmt[k - 1]
        if B[i] == B[k]:
            k += 1
        pmt[i] = k

    j=0
    for i in range(2*n):
        while j>0 and A[i%n] != B[j]:
            j = pmt[j-1]
        if A[i%n] == B[j]:
            if j == n-1:
                return True
            j += 1

    return False
```

4 Algorytm szybki²

Algorytm wymaga istnienia porządku liniowego na zbiorze

$$\{ a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \}$$

Niech $a \leq b$ oznacza, że a poprzedza lub jest równe b w tym porządku, a $a < b$ oznacza $x \leq b \wedge a \neq b$.

Wtedy porządek leksykograficzny na zbiorze

$$\{ A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1} \}$$

jest dobrym porządkiem.

Niech $A_i \preceq B_j$ oznacza, że A_i poprzedza lub jest równe B_j w porządku leksykograficznym, a $A_i \prec B_j$ oznacza $A_i \preceq B_j \wedge A_i \neq B_j$.

Niech

$$A_{i_0} := \min(\{ A_0, \dots, A_{n-1} \}) \text{ tzn. } \forall_{i \in \{0, \dots, n-1\}} A_{i_0} \preceq A_i$$

analogicznie

$$B_{j_0} := \min(\{ B_0, \dots, B_{n-1} \})$$

Uwaga 4.1. Łatwo można zauważyć, że

$$A \equiv B \iff \{ A_0, \dots, A_{n-1} \} = \{ B_0, \dots, B_{n-1} \}$$

Lemat 4.1.

$$A \equiv B \iff A_{i_0} = B_{j_0}$$

Dowód. Oczywiście. ■

Lemat 4.2.

$$\forall_{0 \leq l < k} a_{i+l} = b_{j+l} \wedge a_{i+k} < b_{j+k} \implies \forall_{0 \leq l \leq k} A_{i+l} \prec B_{j+l}$$

Dowód. Trywialne. ■

Zdefiniujmy

$$D_A := \{ i : \exists_j B_j \prec A_i \}$$

analogicznie

$$D_B := \{ j : \exists_i A_i \prec B_j \}$$

tzn. D_A to zbiór indeksów wyznaczających takie przesunięcia cykliczne A , dla których istnieje dowolne przesunięcie cykliczne B poprzedzające je w porządku leksykograficznym. Analogicznie dla B .

²Będę używał nieco innych oznaczeń niż w [1]

Zdefiniujmy

$$i_D := \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_A = \emptyset \\ \max(D_A) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$j_D := \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_B = \emptyset \\ \max(D_B) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Lemat 4.3.

$$D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\} \implies A \not\equiv B$$

Dowód. Dowód wynika z **Lematu 4.1**

$$A \equiv B \implies i_0 \notin D_A \wedge j_0 \notin D_B$$

■

4.1 Algorytm

Zasadą działania algorytmu jest szybkie zbieranie indeksów przesunięć cyklicznych, które powinny być w zbiorach D_A i D_B ,³ dopóki nie znajdzie jeden z poniższych warunków stopu:

- (1) $D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\}$
- (2) Znajdziemy takie i oraz j , że $\forall_{0 \leq k \leq n-1} a_{i+k} = b_{j+k}$ (tzn. $A \equiv B$)

Głównym elementem algorytmu będzie procedura COMPARE, która znajduje pierwszy indeks k , dla którego $a_{i+k} \neq b_{j+k}$ i w zależności od tego, czy $a_{i+k} < b_{j+k}$ dodaje do D_B zbiór $\{j, \dots, j+k\}$ albo do D_A zbiór $\{i, \dots, i+k\}$ (Patrz **Lemat 4.2**). Jeżeli nie znajdzie nierówności to zwraca $A \equiv B$.

Procedura ROWNCYKL wykonuje procedurę COMPARE, dopóki nie znajdzie jeden z powyższych warunków.

³W implementacji te zbiory są niejawne.

```

global  $D_a, D_B, i_D, j_D$ 
procedure COMPARE( $i, j$ )
  for  $k = 0, \dots, n - 1$  do
    if  $a_{i+k} \neq b_{j+k}$ 4 then
      if  $a_{i+k} < b_{j+k}$  then
         $D_b \leftarrow D_b \cup \{j, \dots, j + k\}$ 
         $j_D \leftarrow j + k$ 
      else
         $D_a \leftarrow D_a \cup \{i, \dots, i + k\}$ 
         $i_D \leftarrow i + k$ 
      end if
    return
  end if
end for
return  $A \equiv B$ 
end procedure
procedure ROWNCYKL( $A, B$ )
   $D_a \leftarrow \emptyset$ 
   $D_b \leftarrow \emptyset$ 
   $i_D \leftarrow -1$ 
   $j_D \leftarrow -1$ 
  while  $D_A \not\supseteq \{0, \dots, n - 1\} \wedge D_B \not\supseteq \{0, \dots, n - 1\}$  do
    if COMPARE( $i_D + 1, j_D + 1$ ) returns  $A \equiv B$  then
      return  $A \equiv B$ 
    end if
  end while
  return  $A \not\equiv B$ 
end procedure

```

⁴W analizie złożoności będziemy liczyć te porównania

4.2 Poprawność

Lemat 4.4 (Niezmiennik). *Po każdym wykonaniu procedury COMPARE D_A oraz D_B mają postać*

$$D_A = \{0, \dots, i_D\}$$

$$D_B = \{0, \dots, j_D\}$$

tn. w D_A nie brakuje żadnego elementu między 0 a i_D , analogicznie w D_B nie brakuje żadnego elementu między 0 a j_D .

Dowód. Dowód wynika trywialnie z faktu, że jedyny sposób, w jaki modyfikowane jest D_A to

$$D_a \leftarrow D_a \cup \{i_D + 1, \dots, i_D + k\}$$

analogicznie dla D_B

$$D_b \leftarrow D_b \cup \{j_D + 1, \dots, j_D + k\}$$

■

Wniosek 4.1. *Z **Lematu 4.4** wynika, że nie musimy przechowywać zbiorów D_A i D_B , wystarczy nam jedynie i_D oraz j_D .*

Twierdzenie 4.1 (Własność stopu). *Procedura ROWNCYKL zatrzymuje się w skończonym czasie dla wszystkich poprawnych danych wejściowych.*

Dowód. Jeżeli dla jakiegoś i oraz j procedura COMPARE zwróci $A \equiv B$ to ROWNCYKL się zatrzymuje.

Jeżeli procedura COMPARE nie zwróci $A \equiv B$ dla żadnego i oraz j to z każdym wywołaniem COMPARE $i_D + j_D$ rośnie co najmniej o 1, więc w końcu (z **Lematu 4.4**) **warunek stopu 1** zostanie spełniony i procedura ROWNCYKL się zatrzyma. ■

Twierdzenie 4.2 (Poprawność). *Procedura ROWNCYKL zwraca $A \equiv B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \equiv B$.*

Dowód. Jeżeli procedura ROWNCYKL zwróciła $A \equiv B$ to znaczy, że procedura COMPARE wykazała równość dwóch przesunięć cyklicznych A i B , a więc $A \equiv B$. Jeżeli procedura ROWNCYKL nie zwróci $A \equiv B$ to zwróci $A \not\equiv B$, gdyż z **Twierdzenia 4.1** wiemy, że zawsze się zatrzymuje. Zwrócenie $A \not\equiv B$ oznacza, że wystąpił **warunek stopu 1**, więc z **Lematu 4.3** $A \not\equiv B$. ■

4.3 Złożoność

Definicja 4.1. Wykonanie procedury COMPARE nazwiemy *udanym*, jeżeli zwróci $A \equiv B$. (Wykonanie, które nie jest udane jest *nieudane*)

Definicja 4.2. Oznaczmy D_A oraz D_B bezpośrednio przed ostatnim wykonaniem procedury COMPARE jako odpowiednio D_A^* oraz D_B^* .

Lemat 4.5. Łączna liczba porównań wykonanych przez wywołania procedury COMPARE, z wyjątkiem ostatniego wynosi $|D_A^*| + |D_B^*|$

Dowód. Każde wywołanie procedury COMPARE z wyjątkiem ostatniego jest nieudane i zwiększa $|D_A| + |D_B|$ o dokładnie tyle ile wykonało porównań. Wynika to trywialnie z definicji procedury COMPARE. ■

Lemat 4.6. $|D_A^*| + |D_B^*| \leq 2n - 2$

Dowód. Jeżeli $|D_A^*| + |D_B^*| \geq 2n - 1$ to oznacza, że

$$\{0, \dots, n-1\} \subset D_A^* \vee \{0, \dots, n-1\} \subset D_B^*$$

co nie jest możliwe (patrz **Definicja 4.2**). ■

Twierdzenie 4.3. Algorytm wykonuje co najwyżej $3n - 2$ porównań.

Dowód. Dowód wynika z **Lematu 4.5** oraz **Lematu 4.6**, gdyż ostatnie wywołanie procedury COMPARE może wykonać co najwyżej n porównań. ■

Wniosek 4.2. Algorytm ma pesymistyczną złożoność czasową $\mathcal{O}(n)$ i dodatkową złożoność pamięciową $\mathcal{O}(1)$ (z **Wniosku 4.1**)

4.4 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    i = -1
    j = -1
    while i < n - 1 and j < n - 1:
        for k in range(1, n + 1):
            if A[(i + k) % n] != B[(j + k) % n]:
                if A[(i + k) % n] < B[(j + k) % n]:
                    j += k
                else:
                    i += k
                break
        else:
            return True
    return False
```

Bibliografia

- [1] Yossi Shiloach. „A fast equivalence-checking algorithm for circular lists”. W: *Information Processing Letters* 8.5 (1979), s. 236–238. ISSN: 0020-0190. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(79\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0020-0190(79)90114-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019079901145>.
- [2] *Algorytmy i struktury danych/Wstęp: poprawność i złożoność algorytmu*. 2020. URL: https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy_i_struktury_danych/Wst%C4%99p:_poprawno%C5%9B%C4%87_i_z%C5%82o%C5%BCono%C5%9B%C4%87_algorytmu#Algorytm_8._R.C3.B3wnowa.C5.BCno.C5.9B.C4.87_cykliczna_ci.C4.85g.C3.B3w.