

# Równoważność cykliczna ciągów

## Definicja problemu i przedstawienie rozwiązań

Mikołaj Juda

2023

W referacie przedstawiono problem równoważności cyklicznej ciągów oraz różne algorytmy do jego rozwiązywania razem z implementacją w języku Python. Pokrótce omówiono algorytm naiwny oraz algorytm korzystający z wyszukiwania wzorca. Przedstawiono również szybki algorytm sprawdzania równoważności list cyklicznych Shiloacha(1979)[1] z pewnymi uproszczeniami[2] i modyfikacją do obsługi ciągów numerowanych od 0[3] oraz pokazano dowód jego poprawności i analizę złożoności obliczeniowej.

## Spis treści

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Definicja problemu</b>                          | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Algorytm naiwny</b>                             | <b>3</b>  |
| 2.1      | Algorytm . . . . .                                 | 3         |
| 2.2      | Implementacja . . . . .                            | 3         |
| <b>3</b> | <b>Algorytm wykorzystujący wyszukiwanie wzorca</b> | <b>4</b>  |
| 3.1      | Algorytm . . . . .                                 | 4         |
| 3.2      | Implementacja . . . . .                            | 4         |
| <b>4</b> | <b>Algorytm szybki</b>                             | <b>5</b>  |
| 4.1      | Algorytm . . . . .                                 | 6         |
| 4.2      | Poprawność . . . . .                               | 8         |
| 4.3      | Złożoność . . . . .                                | 9         |
| 4.4      | Implementacja . . . . .                            | 10        |
| 4.5      | Przykłady wykonania . . . . .                      | 11        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                | <b>12</b> |

## 1 Definicja problemu

Dane są dwa ciągi  $A = (a_0, \dots, a_{n-1})$  oraz  $B = (b_0, \dots, b_{n-1})$  długości  $n$ .  $A$  i  $B$  są *równoważne cyklicznie* ( $A \equiv B$ ), gdy są równe w sensie list cyklicznych tzn.

**Definicja 1.1** (Równoważność cykliczna).

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{(k_0+k) \pmod n} = b_k$$

Dla wygody dalszego zapisu oznaczmy:

$$a_k := a_{k \pmod n}, \quad b_k := b_{k \pmod n}$$

Zdefiniujmy  $A_k$  jako listę powstałą z przesunięcia cyklicznego ciągu  $A$  takiego, że  $a_k$  jest pierwszym elementem  $A_k$ . Analogicznie dla  $B_k$ .<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} A_k &:= [a_k, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{k-1}] \\ B_k &:= [b_k, \dots, b_{n-1}, b_0, \dots, b_{k-1}] \end{aligned}$$

**Definicję 1.1** można przedstawić równoważnie jako:

**Definicja 1.2** (Równoważność cykliczna).

$$A \equiv B \iff \exists_{k_0 \in \mathbb{Z}} A_{k_0} = B$$

*Uwaga 1.1.* Oczywiście  $A \equiv B$  także wtedy, gdy

$$\exists_{k_0, l_0 \in \mathbb{Z}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_{l_0+k}$$

lub

$$\exists_{k_0, l_0 \in \mathbb{Z}} A_{k_0} = B_{l_0}$$

---

<sup>1</sup> $A_0 = [a_0, \dots, a_{n-1}]$  oraz  $B_0 = [b_0, \dots, b_{n-1}]$

## 2 Algorytm naiwny

Można łatwo zauważyć, że

**Lemat 2.1.** *Jeżeli nie istnieje  $k_0 \in \{0, \dots, n-1\}$  spełniające warunek:*

$$\forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_k$$

*to nie istnieje  $k_0 \in \mathbb{Z}$  spełniające ten warunek.*

*Dowód.* Oczywiście. ■

**Wniosek 2.1.** *Żeby ustalić istnienie  $k_0$  z [Definicji 1.1](#), wystarczy sprawdzić, czy*

$$\exists_{k_0 \in \{0, \dots, n-1\}} \forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{k_0+k} = b_k$$

### 2.1 Algorytm

Algorytm naiwny sprawdza dla każdego  $l \in \{0, \dots, n-1\}$  czy

$$\forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{l+k} = b_k$$

Jeżeli trafi na  $l$  spełniające warunek to mamy  $k_0 = l$  i algorytm zwraca  $A \equiv B$ , w przeciwnym wypadku zwraca  $A \not\equiv B$ . Algorytm ma złożoność kwadratową[3].

### 2.2 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    for l in range(n):
        for k in range(n):
            if A[(l + k) % n] != B[k]:
                break
        else:
            return True
    return False
```

### 3 Algorytm wykorzystujący wyszukiwanie wzorca

Utwórzmy listę

$$AA := [a_0, \dots, a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-1}]$$

i zauważmy, że dowolny spójny podciąg  $AA$  o długości  $n$  rozpoczynający się od indeksu  $k$  ma postać  $A_k$ , czyli jest przesunięciem cyklicznym ciągu  $A$ .

*Uwaga 3.1.* Łatwo zauważyć, że

$$\{A_0, \dots, A_{n-1}\} = \{A_{\mathbb{Z}}\}$$

Zatem jeżeli sprawdzimy, czy  $B$  jest spójnym podciągiem  $AA$  to otrzymamy rozwiązanie problemu równoważności cyklicznej.

#### 3.1 Algorytm

Problem sprowadza się więc do problemu wyszukiwania wzorca, który można rozwiązać wykorzystując np. algorytm Knutha-Morrisa-Pratta. Wykonuje on dla sprawdzania równoważności cyklicznej około  $5n$  porównań[1]. Wymaga on jednak dodatkowej pamięci (liniowa złożoność pamięciowa).

#### 3.2 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    pmt = [0] * n
    for i in range(1, n):
        k = pmt[i - 1]
        while k > 0 and B[i] != B[k]:
            k = pmt[k - 1]
        if B[i] == B[k]:
            k += 1
        pmt[i] = k

    j=0
    for i in range(2*n):
        while j>0 and A[i%n] != B[j]:
            j = pmt[j-1]
        if A[i%n] == B[j]:
            if j == n-1:
                return True
            j += 1

    return False
```

## 4 Algorytm szybki<sup>2</sup>

Algorytm wymaga istnienia porządku liniowego na zbiorze

$$\{ a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \}$$

Niech  $a \leq b$  oznacza, że  $a$  poprzedza lub jest równe  $b$  w tym porządku, a  $a < b$  oznacza  $x \leq b \wedge a \neq b$ .

Wtedy porządek leksykograficzny na zbiorze

$$\{ A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1} \}$$

jest dobrym porządkiem.

Niech  $A_i \preceq B_j$  oznacza, że  $A_i$  poprzedza lub jest równe  $B_j$  w porządku leksykograficznym, a  $A_i \prec B_j$  oznacza  $A_i \preceq B_j \wedge A_i \neq B_j$ .

Niech

$$A_{i_0} := \min(\{ A_0, \dots, A_{n-1} \}) \text{ tzn. } \forall_{i \in \{0, \dots, n-1\}} A_{i_0} \preceq A_i$$

analogicznie

$$B_{j_0} := \min(\{ B_0, \dots, B_{n-1} \})$$

*Uwaga 4.1.* Łatwo można zauważyć, że

$$A \equiv B \iff \{ A_0, \dots, A_{n-1} \} = \{ B_0, \dots, B_{n-1} \}$$

**Lemat 4.1.**

$$A \equiv B \iff A_{i_0} = B_{j_0}$$

*Dowód.* Oczywiście. ■

**Lemat 4.2.**

$$\forall_{l \in \{0, \dots, k-1\}} a_{i+l} = b_{j+l} \wedge a_{i+k} < b_{j+k} \implies \forall_{l \in \{0, \dots, k\}} A_{i+l} \prec B_{j+l}$$

*Dowód.* Trywialne. ■

Zdefiniujmy

$$D_A := \{ i : \exists_j B_j \prec A_i \}$$

analogicznie

$$D_B := \{ j : \exists_i A_i \prec B_j \}$$

tzn.  $D_A$  to zbiór indeksów wyznaczających takie przesunięcia cykliczne  $A$ , dla których istnieje dowolne przesunięcie cykliczne  $B$  poprzedzające je w porządku leksykograficznym. Analogicznie dla  $B$ .

---

<sup>2</sup>Będę używał nieco innych oznaczeń niż w [1]

Zdefiniujmy

$$i_D := \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_A = \emptyset \\ \max(D_A) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$j_D := \begin{cases} -1 & \text{jeżeli } D_B = \emptyset \\ \max(D_B) & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

**Lemat 4.3.**

$$D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\} \implies A \not\equiv B$$

*Dowód.* Dowód wynika z **Lematu 4.1**

$$A \equiv B \implies i_0 \notin D_A \wedge j_0 \notin D_B$$

■

#### 4.1 Algorytm

Zasadą działania algorytmu jest szybkie zbieranie indeksów przesunięć cyklicznych, które powinny być w zbiorach  $D_A$  i  $D_B$ ,<sup>3</sup> dopóki nie znajdzie jeden z poniższych warunków stopu:

- (1)  $D_A \supseteq \{0, \dots, n-1\} \vee D_B \supseteq \{0, \dots, n-1\}$
- (2) Znajdziemy takie  $i$  oraz  $j$ , że  $\forall_{k \in \{0, \dots, n-1\}} a_{i+k} = b_{j+k}$  (tzn.  $A \equiv B$ )

Głównym elementem algorytmu będzie procedura COMPARE, która znajduje pierwszy indeks  $k$ , dla którego  $a_{i+k} \neq b_{j+k}$  i w zależności od tego, czy  $a_{i+k} < b_{j+k}$  dodaje do  $D_B$  zbiór  $\{j, \dots, j+k\}$  albo do  $D_A$  zbiór  $\{i, \dots, i+k\}$  (Patrz **Lemat 4.2**). Jeżeli nie znajdzie nierówności to zwraca  $A \equiv B$ .

Procedura ROWNCYKL wykonuje procedurę COMPARE, dopóki nie znajdzie jeden z powyższych warunków.

---

<sup>3</sup>W implementacji te zbiory są niejawne.

```

global  $D_a, D_B, i_D, j_D$ 
procedure COMPARE( $i, j$ )
  for  $k = 0, \dots, n - 1$  do
    if  $a_{i+k} \neq b_{j+k}$ 4 then
      if  $a_{i+k} < b_{j+k}$  then
         $D_b \leftarrow D_b \cup \{j, \dots, j + k\}$ 
         $j_D \leftarrow j + k$ 
      else
         $D_a \leftarrow D_a \cup \{i, \dots, i + k\}$ 
         $i_D \leftarrow i + k$ 
      end if
    return
  end if
end for
return  $A \equiv B$ 
end procedure
procedure ROWNCYKL( $A, B$ )
   $D_a \leftarrow \emptyset$ 
   $D_b \leftarrow \emptyset$ 
   $i_D \leftarrow -1$ 
   $j_D \leftarrow -1$ 
  while  $D_A \not\supseteq \{0, \dots, n - 1\} \wedge D_B \not\supseteq \{0, \dots, n - 1\}$  do
    if COMPARE( $i_D + 1, j_D + 1$ ) returns  $A \equiv B$  then
      return  $A \equiv B$ 
    end if
  end while
  return  $A \not\equiv B$ 
end procedure

```

---

<sup>4</sup>W analizie złożoności będziemy liczyć te porównania

## 4.2 Poprawność

**Lemat 4.4** (Niezmiennik). *Po każdym wykonaniu procedury COMPARE  $D_A$  oraz  $D_B$  mają postać*

$$D_A = \{0, \dots, i_D\}$$

$$D_B = \{0, \dots, j_D\}$$

*tn. w  $D_A$  nie brakuje żadnego elementu między 0 a  $i_D$ , analogicznie w  $D_B$  nie brakuje żadnego elementu między 0 a  $j_D$ .*

*Dowód.* Dowód wynika trywialnie z faktu, że jedyny sposób, w jaki modyfikowane jest  $D_A$  to

$$D_a \leftarrow D_a \cup \{i_D + 1, \dots, i_D + k\}$$

analogicznie dla  $D_B$

$$D_b \leftarrow D_b \cup \{j_D + 1, \dots, j_D + k\}$$

■

**Wniosek 4.1.** *Z **Lematu 4.4** wynika, że nie musimy przechowywać zbiorów  $D_A$  i  $D_B$ , wystarczy nam jedynie  $i_D$  oraz  $j_D$ .*

**Twierdzenie 4.1** (Własność stopu). *Procedura ROWNCYKL zatrzymuje się w skończonym czasie dla wszystkich poprawnych danych wejściowych.*

*Dowód.* Jeżeli dla jakiegoś  $i$  oraz  $j$  procedura COMPARE zwróci  $A \equiv B$  to ROWNCYKL się zatrzymuje.

Jeżeli procedura COMPARE nie zwróci  $A \equiv B$  dla żadnego  $i$  oraz  $j$  to z każdym wywołaniem COMPARE  $i_D + j_D$  rośnie co najmniej o 1, więc w końcu (z **Lematu 4.4**) **warunek stopu 1** zostanie spełniony i procedura ROWNCYKL się zatrzyma. ■

**Twierdzenie 4.2** (Poprawność). *Procedura ROWNCYKL zwraca  $A \equiv B$  wtedy i tylko wtedy gdy  $A \equiv B$ .*

*Dowód.* Jeżeli procedura ROWNCYKL zwróciła  $A \equiv B$  to znaczy, że procedura COMPARE wykazała równość dwóch przesunięć cyklicznych  $A$  i  $B$ , a więc  $A \equiv B$ . Jeżeli procedura ROWNCYKL nie zwróci  $A \equiv B$  to zwróci  $A \not\equiv B$ , gdyż z **Twierdzenia 4.1** wiemy, że zawsze się zatrzymuje. Zwrócenie  $A \not\equiv B$  oznacza, że wystąpił **warunek stopu 1**, więc z **Lematu 4.3**  $A \not\equiv B$ . ■



### 4.3 Złożoność

**Definicja 4.1.** Wykonanie procedury COMPARE nazwiemy *udanym*, jeżeli zwróci  $A \equiv B$ . (Wykonanie, które nie jest udane jest *nieudane*)

**Definicja 4.2.** Oznaczmy  $D_A$  oraz  $D_B$  bezpośrednio przed ostatnim wykonaniem procedury COMPARE jako odpowiednio  $D_A^*$  oraz  $D_B^*$ .

**Lemat 4.5.** Łączna liczba porównań wykonanych przez wywołania procedury COMPARE, z wyjątkiem ostatniego wynosi  $|D_A^*| + |D_B^*|$

*Dowód.* Każde wywołanie procedury COMPARE z wyjątkiem ostatniego jest nieudane i zwiększa  $|D_A| + |D_B|$  o dokładnie tyle ile wykonało porównań. Wynika to trywialnie z definicji procedury COMPARE. ■

**Lemat 4.6.**  $|D_A^*| + |D_B^*| \leq 2n - 2$

*Dowód.* Jeżeli  $|D_A^*| + |D_B^*| \geq 2n - 1$  to oznacza, że

$$\{0, \dots, n-1\} \subset D_A^* \vee \{0, \dots, n-1\} \subset D_B^*$$

co nie jest możliwe (patrz **Definicja 4.2**). ■

**Twierdzenie 4.3.** Algorytm wykonuje co najwyżej  $3n - 2$  porównań.

*Dowód.* Dowód wynika z **Lematu 4.5** oraz **Lematu 4.6**, gdyż ostatnie wywołanie procedury COMPARE może wykonać co najwyżej  $n$  porównań. ■

**Wniosek 4.2.** Algorytm ma pesymistyczną złożoność czasową  $\mathcal{O}(n)$  i dodatkową złożoność pamięciową  $\mathcal{O}(1)$  (z **Wniosku 4.1**)

*Uwaga 4.2.* Największa ilość porównań występuje dla ciągów postaci  $A = (1, 1, \dots, 1, 2, 0, 1)$ ,  $B = (1, 1, 1, \dots, 1, 2, 0)$  [2]

#### 4.4 Implementacja

```
def rownowazne_cyklicznie(A: list, B: list) -> bool:
    if len(A) != len(B):
        return False
    n = len(A)

    i = -1
    j = -1
    while i < n - 1 and j < n - 1:
        for k in range(1, n + 1):
            if A[(i + k) % n] != B[(j + k) % n]:
                if A[(i + k) % n] < B[(j + k) % n]:
                    j += k
                else:
                    i += k
                break
        else:
            return True
    return False
```

#### 4.5 Przykłady wykonania

Listy wypisane z przesunięciem  $(i + 1)$  dla  $A$  i  $(j + 1)$  dla  $B$

|  |  |
|--|--|
| $n = 8$<br>$A = (1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$<br>$B = (2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$  | $n = 10$<br>$A = (1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1)$<br>$B = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3)$   |
| $i = -1, j = -1$<br>$A_0 = [\textcolor{red}{1}, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1]$<br>$B_0 = [\textcolor{green}{2}, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1]$<br>$k = 1, A_0 \prec B_0$ | $i = -1, j = -1$<br>$A_0 = [1, 1, \textcolor{green}{2}, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1]$<br>$B_0 = [1, 1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$<br>$k = 3, B_0 \prec A_0$ |
| $i = -1, j = 0$<br>$A_0 = [1, \textcolor{green}{2}, 1, 2, 1, 1, 2, 1]$<br>$B_1 = [1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$<br>$k = 2, B_1 \prec A_0$  | $i = 2, j = -1$<br>$A_3 = [1, \textcolor{green}{3}, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]$<br>$B_0 = [1, \textcolor{red}{1}, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$<br>$k = 2, B_0 \prec A_3$  |
| $i = 1, j = 0$<br>$A_2 = [1, \textcolor{green}{2}, 1, 1, 2, 1, 1, 2]$<br>$B_1 = [1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$<br>$k = 2, B_1 \prec A_2$   | $i = 4, j = -1$<br>$A_5 = [1, 1, \textcolor{green}{2}, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$<br>$B_0 = [1, 1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$<br>$k = 3, B_0 \prec A_5$  |
| $i = 3, j = 0$<br>$A_4 = [1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$<br>$B_1 = [1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]$<br>brak nierówności<br>$A \equiv B$                             | $i = 7, j = -1$<br>$A_8 = [1, 1, 1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 3, 1, 1, 2]$<br>$B_0 = [1, 1, 1, \textcolor{green}{2}, 1, 1, 1, 2, 1, 3]$<br>$k = 4, A_8 \prec B_0$  |
|  | $i = 7, j = 3$<br>$A_8 = [1, 1, 1, \textcolor{red}{1}, 2, 1, 3, 1, 1, 2]$<br>$B_4 = [1, 1, 1, \textcolor{green}{2}, 1, 3, 1, 1, 1, 2]$<br>$k = 4, A_8 \prec B_4$   |
|  | $i = 7, j = 7$<br>$A_8 = [1, \textcolor{red}{1}, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 2]$<br>$B_8 = [1, \textcolor{green}{3}, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2]$<br>$k = 2, A_8 \prec B_8$   |
|  | $i = 7, j = 9$<br>$j \geq n - 1$ , więc $A \not\equiv B$   |

## Bibliografia

- [1] Yossi Shiloach. „A fast equivalence-checking algorithm for circular lists”. W: *Information Processing Letters* 8.5 (1979), s. 236–238. ISSN: 0020-0190. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(79\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0020-0190(79)90114-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019079901145>.
- [2] Lech Banachowski, Krzysztof Diks i Wojciech Rytter. *Algorytmy i struktury danych*. pol. Wyd. 5. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006. ISBN: 8320432243.
- [3] *Algorytmy i struktury danych/Wstęp: poprawność i złożoność algorytmu*. 2020. URL: [https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy\\_i\\_struktury\\_danych/Wst%C4%99p:\\_poprawno%C5%9B%C4%87\\_i\\_z%C5%82o%C5%BCono%C5%9B%C4%87\\_algorytmu#Algorytm\\_8.\\_R.C3.B3wnowa.C5.BCno.C5.9B.C4.87\\_cykliczna\\_ci.C4.85g.C3.B3w](https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Algorytmy_i_struktury_danych/Wst%C4%99p:_poprawno%C5%9B%C4%87_i_z%C5%82o%C5%BCono%C5%9B%C4%87_algorytmu#Algorytm_8._R.C3.B3wnowa.C5.BCno.C5.9B.C4.87_cykliczna_ci.C4.85g.C3.B3w).