

# 1 Portrety fazowe systemów liniowych

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z pojęciem portretu fazowego oraz możliwymi zastosowaniami. Przedyskutowane zostanie analizowanie portretów z wykorzystaniem dekompozycji Jordana. Przedstawione zostanie również pojęcie stabilności i warunki stabilności systemów liniowych. Podany zostanie również sposób uzyskiwania portretów fazowych za pomocą MATLABa.

## 1.1 Portret fazowy

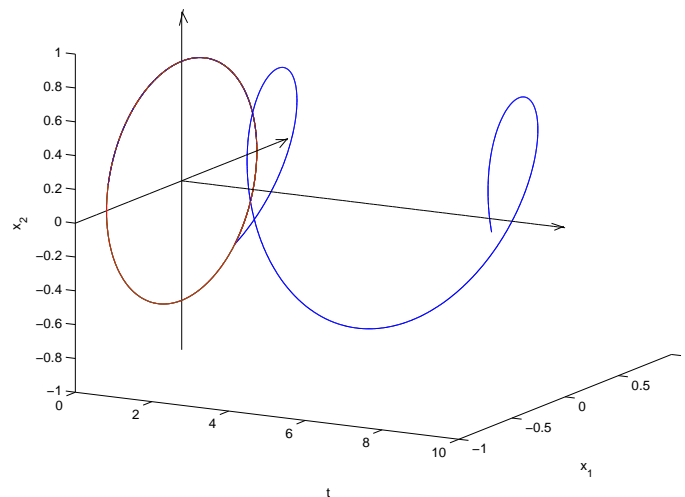
Rozważany będzie liniowy autonomiczny system dynamiczny opisany równaniem:

$$\dot{x} = Ax \quad (1.1)$$

gdzie  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , czyli system drugiego rzędu. Niech  $X$  będzie przestrzenią stanu. Trajektorię fazową na odcinku  $[t_0, t_1]$  będzie nazywany podzbiór przestrzeni  $X$  określony w następujący sposób

$$\{x(t) \in X, t \in [t_0, t_1]\}$$

**Portretem fazowym** będzie nazywany wykres trajektorii fazowych systemu, dla takich warunków początkowych, aby trajektorie te miały reprezentacyjny charakter dla systemu. Wykres trajektorii fazowej uzyskuje się poprzez rzutowanie trajektorii stanu, na płaszczyznę  $x_1 \times x_2$ , jak na rysunku 1.1.



Rysunek 1.1: Trajektorja stanu i jej rzut na płaszczyznę  $x_1 \times x_2$

Historycznie, portrety fazowe, dla układów liniowych, rozpatrywane były w kontekście analizy równania różniczkowego rzędu drugiego postaci

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0,$$

dla którego wykreślano trajektorie we współrzędnych  $y \times \dot{y}$ , które to nazywano współrzędnymi fazowymi. Powyższe równanie drugiego rzędu można rozpatrywać jako układ dwóch równań

pierwszego rzędu, np. za pomocą podstawienia (zob. Mitkowski, 2007, s. 136)

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{y}\end{aligned}\tag{1.2}$$

wtedy można zapisać

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_0y = -a_0x_1 - a_1x_2\end{aligned}$$

warto zauważyć, że jest to wtedy system (1.1) z macierzą

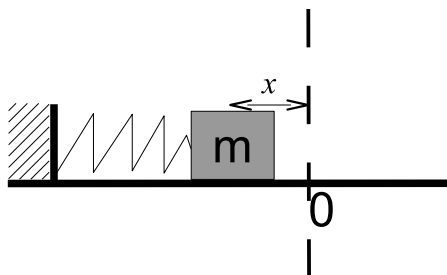
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix},$$

która jest w postaci kanonicznej Frobeniusa (zob. np. Mitkowski, 2007, s. 88, Turowicz, 1995). Rozpatrywanie dwóch równań pierwszego rzędu jest ogólniejsze z dwóch powodów. Po pierwsze, transformacja (1.2) nie jest jedynym sposobem sprowadzenia równania drugiego rzędu do postaci (1.1). Po drugie, istnieją takie układy równań pierwszego rzędu, dla których nie istnieją odpowiadające im równania drugiego rzędu.

## 1.2 Przykłady systemów drugiego rzędu

Poniżej przedstawione zostaną przykłady systemów drugiego rzędu, będących modelami pewnych uproszczonych układów fizycznych. Na tych przykładach zaprezentowana zostanie analiza portretów fazowych.

**Przykład 1.** Prosty oscylator harmoniczny



Rysunek 1.2: Oscylator harmoniczny

Rozpatrywany jest układ jak na rysunku 1.2 (zob. Halliday and Resnick, 1983, t. I, s. 348). Ciało o masie  $m$  przyczepione jest do idealnej sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  i porusza się po idealnie gładkiej powierzchni. Interesować nas będzie położenie ciała  $x$ . Istnieje pewne położenie (zaznaczone na rysunku jako zero), w którym sprężyna nie działa na ciało żadną siłą. Położenie to nazwiemy punktem równowagi. Z prawa Hooke'a wynika, że sprężyna działa na ciało siłą

$$F = -kx.$$

Jednocześnie z drugiej zasady dynamiki Newtona wiadomo, że siła ta nadaje ciału przyspieszenie, zgodnie z równością

$$F = m \cdot a.$$

Ponieważ przyspieszenie jest drugą pochodną położenia ( $\ddot{x} = a$ ) powyższe równości można zapisać jako równanie różniczkowe

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x\tag{1.3}$$

Dla ustalenia uwagi niech  $\frac{k}{m} = 1$ . Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami, równanie (1.3) można przedstawić jako równoważny układ równań różniczkowych pierwszego rzędu za pomocą podstawienia

$$\begin{aligned}x_1 &= x, \\x_2 &= \dot{x}.\end{aligned}$$

Ta zmiana zmiennych prowadzi do układu równań różniczkowych

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (1.4)$$

gdzie  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ . Na rysunku 1.3 znajduje się portret fazowy dla tego systemu. Jak można zauważyć trajektorie fazowe są okręgami. Dzieje się tak dlatego, ponieważ rozwiązanie równania (1.4) ma postać

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

można je, zaś w ogólności przedstawić jako

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \cos(t + \varphi) \\x_2(t) &= A \sin(t + \varphi)\end{aligned}$$

przy czym amplituda  $A$  i faza  $\varphi$  są jednoznacznie określone przez warunki początkowe. Podnosząc powyższe równości do kwadratu i dodając stronami (rugując czas) uzyskujemy równanie rodziny krzywych na płaszczyźnie  $x_1 \times x_2$  następującej postaci

$$x_1^2 + x_2^2 = A^2$$

czyli rodzinę okręgów o promieniach równych amplitudzie rozwiązania. Jednocześnie należy podkreślić, że przy zerowych warunkach początkowych rozwiązaniem (1.4) jest funkcja  $\mathbf{x} \equiv 0 \in \mathbb{R}^2$  (należy to rozumieć jako  $[x_1, x_2]^T = [0, 0]^T$ ). Odpowiada to sytuacji gdy sprężyna zostanie naciągnięta do pozycji odpowiadającej zeru na rysunku 1.2, na portrecie fazowym na rysunku 1.3 punkt ten (czyli punkt równowagi) zaznaczony jest kropką. Strzałki na portrecie oznaczają kierunek ruchu trajektorii fazowych.

## Przykład 2. Obwód elektryczny $RLC$

Rozważany jest obwód elektryczny jak na rysunku (1.4). Korzystając z praw Kirchoffa można zapisać równanie węzła (zob. Bolkowski, 1995?)

$$i = i_l + i_c$$

oraz równania oczek:

- Dla oczka I

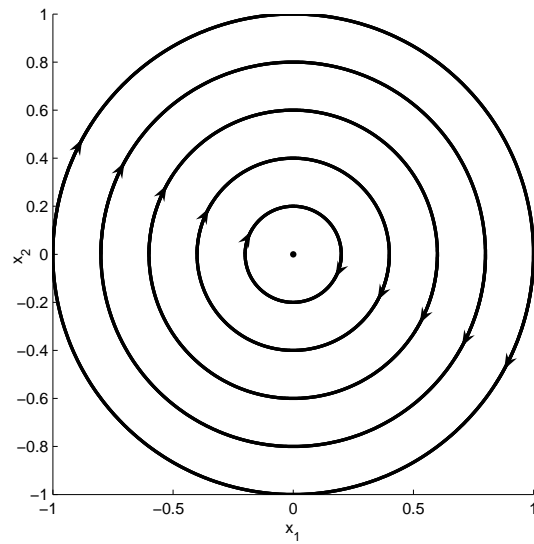
$$u(t) - iR - U_c = 0$$

- Dla oczka II

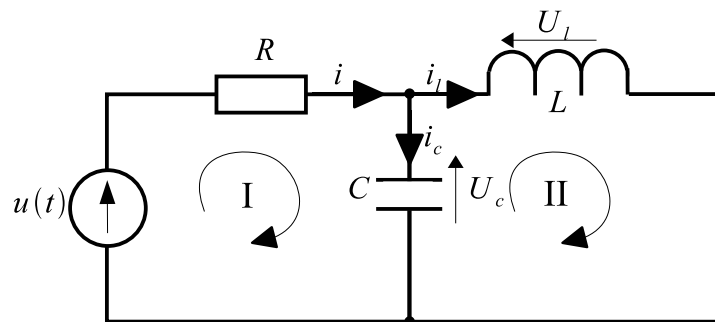
$$U_c - U_l = 0$$

Związki dla cewki i kondensatora dają odpowiednio

$$\begin{aligned}U_l &= L \frac{di_l}{dt} \\i_c &= C \frac{dU_c}{dt}\end{aligned}$$



Rysunek 1.3: Portret fazowy dla oscylatora harmonicznego



Rysunek 1.4: Przykładowy obwód  $RLC$

Po podstawieniu uzyskuje się

$$\begin{aligned}\frac{di_l}{dt} &= \frac{U_c}{L} \\ \frac{dU_c}{dt} &= -\frac{1}{C}i_l - \frac{1}{RC}U_c + \frac{1}{RC}u(t)\end{aligned}$$

Podstawiając  $x_1 = i_l$  i  $x_2 = U_c$  ( $x = [x_1, x_2]^T$ ) oraz dla ustalenia uwagi przyjmując  $R = L = C = 1$  i  $u \equiv 0$  otrzymuje się system autonomiczny postaci

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t). \quad (1.5)$$

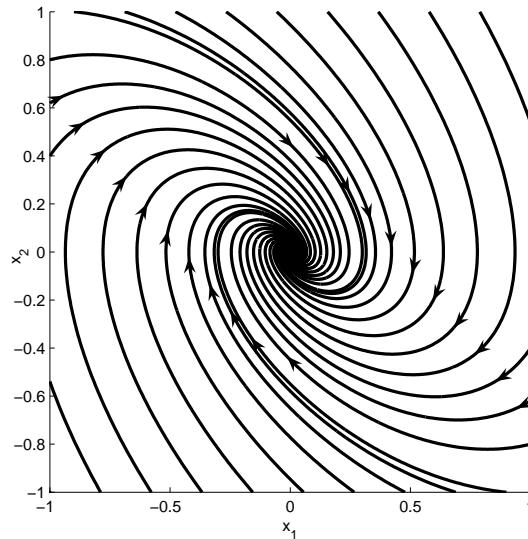
Wartościami własnymi macierzy stanu równania (1.5) są

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

oznacza to, że rozwiązanie będzie miało postać

$$x(t) = e^{-0.5t} P \begin{bmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t & \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{bmatrix} P^{-1}x(0)$$

gdzie  $P$  jest macierzą postaci  $P = [\text{Re}(w) \quad \text{Im}(w)]$ , gdzie  $w$  jest wektorem własnym macierzy stanu równania (1.5). Konsekwencją takiej postaci rozwiązania, jest fakt, że oscylacje analogiczne do tych z oscylatora harmonicznego, będą z upływem czasu tłumione przez zanikający do zera czynnik  $e^{-0.5t}$ . Można zaobserwować to na portrecie fazowym na rysunku (1.5). Dodatkowo na portrecie można zaobserwować, jak wraz ze zmianą jednej ze zmiennych stanu zmienia się druga. Ponownie  $x \equiv 0 \in \mathbb{R}^2$  jest punktem równowagi.

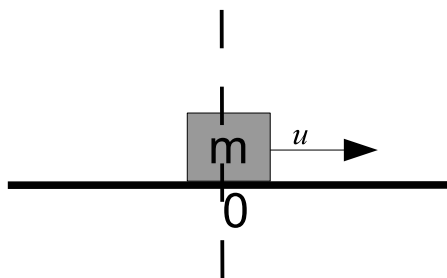


Rysunek 1.5: Portret fazowy obwodu  $RLC$

### Przykład 3. Ciało poruszane w jednej osi

Rozważmy układ przedstawiony na rysunku 1.6. Do ciała, o masie  $m$ , poruszającego się w jednej osi, bez tarcia przyłożono siłę  $u$ . Z drugiego prawa dynamiki Newtona wiadomo, że związek siły z przyspieszeniem ma postać

$$u(t) = a(t) \cdot m$$



Rysunek 1.6: Ciało poruszane siłą

ponieważ przyspieszenie jest drugą pochodną położenia, można zapisać równanie różniczkowe

$$\ddot{x}(t) = \frac{u(t)}{m}$$

dla ustalenia uwagi niech  $m = 1$ . Korzystając ze zmiany zmiennych analogicznej do (1.2), uzyskuje się układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Ponieważ, w ramach ćwiczenia, rozpatrywane są układy autonomiczne niech  $u(t) \equiv 0$  co w konsekwencji daje

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (1.6)$$

Rozwiązanie takiego autonomicznego układu równań różniczkowych ma postać:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0)$$

Portret fazowy zaś przyjmuje postać jak na rysunku 1.7 i stanowi ilustrację dla pierwszej zasady dynamiki Newtona. Ponieważ na ciało nie działa żadna siła ( $u \equiv 0$ ) dla  $x_2(0) = 0$  (czyli dla zerowej prędkości początkowej) ciało pozostanie w spoczynku ( $x_1$  czyli położenie będzie stałe); jeżeli zaś prędkość początkowa będzie niezerowa ( $x_2 \neq 0$ ) ciało będzie się poruszało ruchem jednostajnym ( $x_1$  rośnie). Niezależnie od warunków początkowych, prędkość, czyli  $x_2$ , pozostanie stała. Jest to zgodne z równaniem (1.6), w którym pochodna  $x_2$  jest stale równa 0.

#### Przykład 4. Silnik elektryczny prądu stałego

Rozważany jest silnik elektryczny prądu stałego z magnesami trwałymi zasilany napięciem  $u$ . Zmiennymi stanu są położenie kątowe  $\alpha$  i prędkość kątowa  $\omega$  wału silnika, wyrażone odpowiednio w radianach i radianach na sekundę. Ponieważ prędkość jest pochodną położenia równanie różniczkowe pierwszej zmiennej stanu ma postać

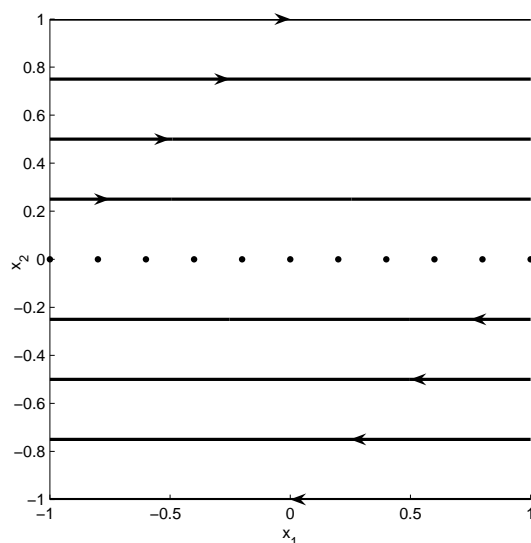
$$\dot{\alpha}(t) = \omega(t).$$

Prędkość kątową zaś możemy opisać równaniem

$$J\dot{\omega}(t) = M_{em}(t)$$

gdzie  $J$  jest momentem bezwładności wału silnika, zaś  $M_{em}$  jest elektromagnetycznym momentem siły wytwarzanym przez silnik. Przy przyjęciu pewnych dodatkowych założeń idealizujących można zapisać

$$\frac{M_{em}(t)}{J} = -a \cdot \omega(t) + b \cdot u(t)$$



Rysunek 1.7: Portret fazowy dla ciała poruszanego w jednej osi.

gdzie  $a > 0$  i  $b > 0$  są pewnymi stałymi, zależnymi od parametrów konstrukcyjnych silnika (zob. Szklarski et al., 1996, s. 9). Przyjmując oznaczenia  $x_1 = \alpha$  i  $x_2 = \omega$  można zapisać równania silnika w postaci

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t).$$

Przy rozpatrywaniu systemu autonomicznego, będziemy zakładać, że  $u \equiv 0$ , oznacza to że obserwujemy jak silnik został rozpędzony do pewnej prędkości (a jego wał znalazł się w pewnej pozycji) a następnie wyłączono zasilanie. Rozpatrywane będzie równanie

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x(t) \quad (1.7)$$

Portret fazowy systemu opisanego równaniem (1.7) (przy  $a = 1$ ) znajduje się na rysunku 1.8. Na portrecie tym można zaobserwować, że rozpędzony silnik ( $x_2 \neq 0$ ) wytraca swoją prędkość w sposób proporcjonalny do przyrostu położenia (wał silnika, obraca się dopóki prędkość nie spadnie do zera).

### 1.3 Dekompozycja Jordana

Rozwiązaniem szczególnym układu równań (1.1) jest

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

dokonując podstawienia

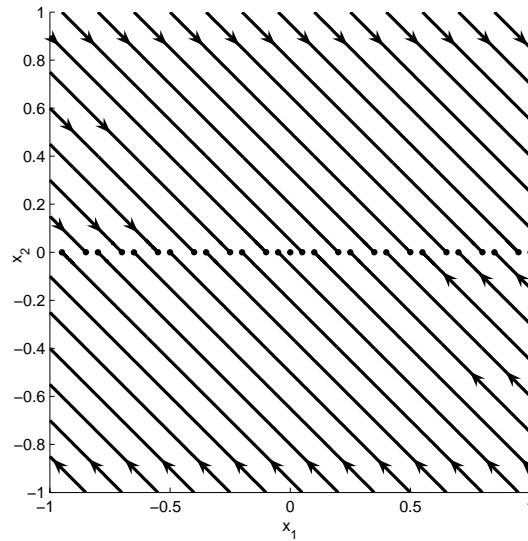
$$x = Pz \quad (1.8)$$

można uzyskać równanie różniczkowe

$$\dot{z} = P\dot{z},$$

które to po podstawieniu równości (1.1) przyjmie postać

$$Ax = P\dot{z}$$



Rysunek 1.8: Portret fazowy dla silnika prądu stałego

przy założeniu, że  $P$  jest macierzą nieosobliwą, i podstawiając (1.8), uzyskuje się równanie

$$\dot{z} = P^{-1}APx. \quad (1.9)$$

Rozwiązaniem równania (1.9) jest

$$z(t) = \exp(P^{-1}APt)z(0)$$

korzystając z podstawienia (1.8) można uzyskać rozwiązanie równania (1.1) w następującej postaci

$$x(t) = P \exp(P^{-1}APt) P^{-1}x(0).$$

Niech  $P$  będzie macierzą zbudowaną z wektorów głównych macierzy  $A$ , wtedy

$$P^{-1}AP = J$$

gdzie  $J$  jest postacią kanoniczną Jordana macierzy  $A$ . (zob. Mitkowski, 2007, s. 95, Turowicz, 1995, s. 4)

Ponieważ znany jest związek między rozwiązaniami, istotne jest przeanalizowanie jaki zachodzi związek pomiędzy portretami fazowymi systemu opisanego równaniem (1.1) i systemu opisanego równaniem

$$\dot{z}(t) = Jz(t) \quad (1.10)$$

gdzie  $J$  jest postacią kanoniczną Jordana macierzy stanu równania (1.1).

Rozważany jest przykład (4). Macierz stanu z tego przykładu (przy  $a = 1$ ) ma postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ponieważ jest to macierz trójkątna, wiadomo, że jej wartości własne znajdują się na przekątnej, są nimi  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = -1$ . Wektory główne ( w tym przypadku są to dwa wektory własne) można uzyskać z poniższych równości

$$\begin{aligned} (\lambda_1 I - A)w &= 0 \\ (\lambda_2 I - A)v &= 0 \end{aligned}$$



na przykład mogą być to wektory

$$\begin{aligned} w &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wtedy dla macierzy  $P = [w \ v]$ , postać kanoniczna Jordana macierzy  $A$  przyjmie postać

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Porównując portrety fazowe na rysunku 4 i na rysunku 1.9 można zauważyć, że portrety te są do siebie podobne. Co więcej portret fazowy systemu z macierzą  $A$  jest portretem systemu z macierzą w postaci Jordana, z osiami współrzędnych wyznaczonymi przez wektory własne (zob. rysunek 1.9).

Ta prosta geometryczna zależność pomiędzy portretami fazowymi zachodzi jedynie dla systemów o macierzach stanu z rzeczywistymi wartościami własnymi. W przypadku wartości zespolonych podobieństwo między portretami również zachodzi, ale nie jest tak łatwe do określenia.

Podstawowym wnioskiem z podobieństwa między portretami jest to, że wszystkie podstawowe własności będzie wykazywać system w postaci kanonicznej Jordana. Oznacza to, że znajomość portretów systemów w postaci kanonicznej Jordana, oznacza znajomość dynamiki układów liniowych o dowolnych macierzach. W przypadku systemów drugiego rzędu typowe kombinacje wartości własnych ilustruje rysunek 1.10 (rysunek nie zawiera układów wartości własnych symetrycznych względem osi urojonej).

Warto zwrócić uwagę, że pośród rozpatrywanych wcześniej przykładów, występują dwa przypadki macierzy w postaci kanonicznej Jordana – przykłady 1 (przypadek 8 na rysunku 1.10) i 3 (przypadek 2 na rysunku 1.10).

## 1.4 Stabilność

Ważną własnością systemów dynamicznych jest stabilność. Wprowadzone zostaną następujące definicje

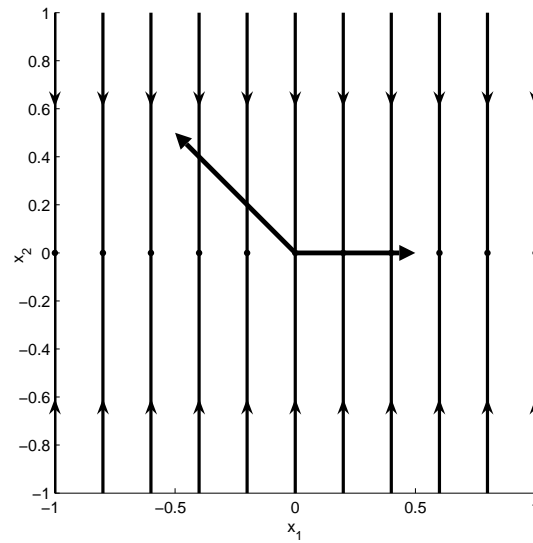
**Definicja 1.1.** Rozwiązanie  $x_r$  równania różniczkowego jest stabilne w sensie Lapunowa, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$ , dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że każda trajektoria  $x$  spełniająca warunek  $|x(t_0) - x_r(t_0)| < \delta$  jest określona na  $[t_0, \infty)$  oraz  $|x(t) - x_r(t)| < \epsilon$  w przedziale  $[t_0, \infty)$  (zob. Mitkowski, 1991, str. 30).

Ponieważ pojęcie stabilności jest bardzo ogólne, warto skupić się na pewnym szczególnym rodzaju stabilności.

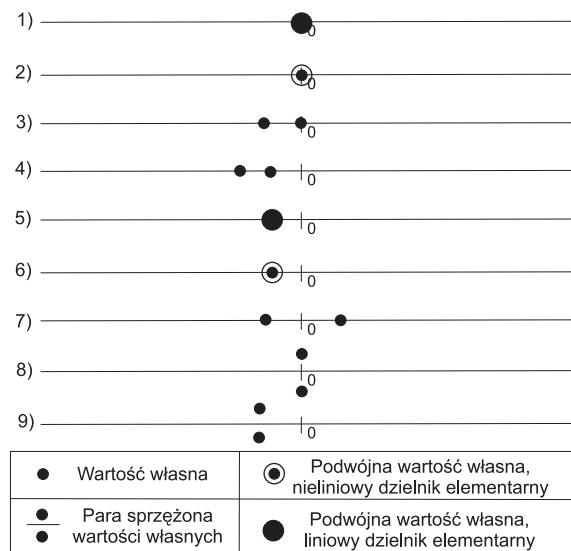
**Definicja 1.2.** Zerowe rozwiązanie równania różniczkowego jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie  $x_r = 0$  jest stabilne w sensie Lapunowa oraz dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  istnieje stała  $\Delta > 0$  taka, że jeżeli  $|x(t_0)| < \Delta$  to  $|x(t)| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$  (zob. Mitkowski, 1991, str. 32).

**Definicja 1.3.** Zerowe rozwiązanie równania różniczkowego jest wykładniczo stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie  $x_r = 0$  jest stabilne w sensie Lapunowa oraz dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  istnieją stałe  $\Delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  i  $c > 0$  takie, że jeżeli  $|x(t_0)| < \Delta$ , to

$$|x(t)| \leq ce^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)|, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (1.11)$$



Rysunek 1.9: Portret systemu z macierzą stanu w postaci kanonicznej Jordana  $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  oraz wektory własne



Rysunek 1.10: Podstawowe układy wartości własnych w systemach drugiego rzędu.

Oczywista jest następująca implikacja

$$\text{wykładnicza stabilność} \Rightarrow \text{asymptotyczna stabilność} \Rightarrow \text{stabilność}$$

**Definicja 1.4.** Jeżeli zerowe rozwiązanie równania różniczkowego, nie jest stabilne w sensie Lapunowa, rozwiązanie takie nazywa się **niestabilnym**.

**Definicja 1.5.** Asymptotyczna stabilność, w ogólności, jest własnością lokalną. Niech  $D_{t_0}$  będzie zbiorem warunków początkowych w  $X = \mathbb{R}^n$  takim, że jeżeli  $x(t_0) \in D_{t_0}$ , to  $|x(t)| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Zbiór  $D_{t_0}$  nazywany jest **obszarem przyciągania (atrakcji)** do zerowego rozwiązania w chwili  $t_0$ .

**Definicja 1.6.** Zerowe rozwiązanie nazywane jest globalnie asymptotycznie stabilnym w sensie Lapunowa wtedy, i tylko wtedy, gdy rozwiązanie to jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa oraz dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  zbiór  $D_{t_0} = \mathbb{R}^n$ .

W przypadku systemów liniowych zachodzą następujące własności

- asymptotyczna stabilność jest tożsama wykładniczej stabilności,
- Jeżeli  $x_r = 0$  jest stabilnym (asymptotycznie stabilnym) rozwiązaniem równania (1.1) to wszystkie rozwiązania tego równania są stabilne (asymptotycznie stabilne).
- dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  zbiór  $D_{t_0} = \mathbb{R}^n$  (w systemach liniowych stabilność jest zawsze globalna), dlatego też mówi się również o stabilności systemu liniowego
- warunkiem koniecznym i wystarczającym, **stabilności** systemu liniowego, opisanego równaniem (1.1), jest niedodatniość części rzeczywistych wartości własnych macierzy  $A$ , przy czym wartości własne o częściach rzeczywistych równych zeru są jednokrotnymi pierwiastkami wielomianu minimalnego macierzy  $A$  (zob. Mitkowski, 1996, s. 92).
- warunkiem koniecznym i wystarczającym, **asymptotycznej stabilności** systemu liniowego, opisanego równaniem (1.1), jest to, aby części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy  $A$  były ujemne
- warunkiem koniecznym i wystarczającym niestabilności systemu liniowego, jest to aby przynajmniej jedna wartość własna macierzy  $A$  miała dodatnią część rzeczywistą, lub aby wartość własna o zerowej części rzeczywistej była wielokrotnym pierwiastkiem wielomianu minimalnego

Z rozpatrywanych wcześniej przykładów systemy w przykładach 1 i 4 były stabilne, system w przykładzie 2 jest asymptotycznie stabilny, zaś system w przykładzie 3 jest niestabilny.

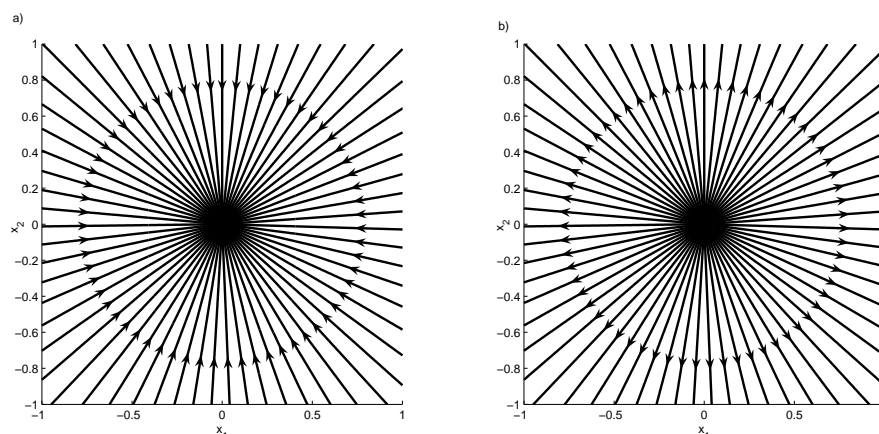
### Stabilność a portrety fazowe

Rozważane są systemy opisane równaniem różniczkowym 1.1 z macierzami stanu

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portrety fazowe tych systemów znajdują się na rysunku 1.11. Jak można zauważyć, trajektorie fazowe mają ten sam kształt, różnią się one jedynie kierunkiem ruchu punktów. Oznacza to, że rozkłady wartości własnych symetryczne do tych z rysunku 1.10 wiążą się z analogiczną symetrią trajektorii.



Rysunek 1.11: a) Portret fazowy systemu z macierzą  $A_1$  (systemu stabilnego); b) Portret fazowy systemu z macierzą  $A_2$  (systemu niestabilnego)

## 1.5 Przebieg ćwiczenia

Celem ćwiczenia będzie uzyskanie portretów fazowych dla rozkładów wartości własnych podanych na rysunku 1.10.

Należy utworzyć model w Simulinku. Parametry dla symulacji:

W oknie modelu w menu Simulation → Simulation Parameters

- W zakładce Solver
  - Solver options → Type na 'Fixed step', a w menu obok 'ode4 (Runge-Kutta)',
    - \* Fixed step size ustawić na 1e-2 (czyli 0.01)
  - W zakładce Workspace I/O
    - \* W polu save data odznaczyć opcję 'limit data points to last:'

Do utworzenia modelu potrzebne będą następujące bloczki:

1. Sinks → To Workspace (ustawić 'Save format' jako Array, nazwa zmiennej jako x)
2. Continuous → State Space (W polu A wpisać A, w B [0;0], w C eye(2), w D [0;0], w initial conditions WPC)
3. Sources → Ground

Bloczki te należy połączyć ze sobą (jest jeden możliwy sposób) i zapisać model pod wybraną przez siebie nazwą.

Utworzony schemat posłuży do obliczania na drodze numerycznej rozwiązania równania (1.1) potrzebnego do narysowania portretu fazowego. Portrety należy rysować przy użyciu napisanego przez siebie skryptu.

Ponieważ portret fazowy to rodzina trajektorii fazowych istnieje konieczność umieszczenia na jednym wykresie więcej niż jednego przebiegu. Aby rozpocząć rysowanie aktywnym oknie, bez tracenia poprzednich wykresów, należy wpisać 'hold on;' a po zakończeniu rysowania należy wpisać 'hold off;'.

Aby określić dla jakiego systemu będzie rysowany portret fazowy, skrypt powinien przypisywać zmiennej A odpowiednią wartość. Warto tego dokonać korzystając z postaci kanonicznej Jordana, czyli:

$A = P * J * P^{-1}$ ;

Do uzyskania macierzy  $J$  można posłużyć się instrukcją `diag`, zaś na początku macierz  $P$  przyjąć jako jednostkową korzystając z instrukcji `eye`. Później za pomocą macierzy  $P$ , będzie można określać zadane wektory własne macierzy  $A$ .

Aby uzyskać rodziny trajektorii należy przeprowadzać wielokrotne symulacje rozpatrywanego systemu dynamicznego, z różnych warunków początkowych. Dlatego też potrzebne będzie zastosowanie pętli. Mogą do tego posłużyć instrukcje `'for'` lub `'while'`; informacje o ich składni znajdują się w plikach pomocy Matlaba. Pliki pomocy są dostępne przy pomocy komendy `'while [nazwa funkcji]'`.

Każda iteracja pętli musi zrealizować następujące zadania:

1. Deklaracje nowej wartości warunku początkowego - WPC. Najlepiej w tym celu wykorzystać funkcje dla  $x \in [0, 2\pi]$ :

- wartości początkowe leżą na okręgu jednostkowym o środku w  $(0, 0)$  :

$$WPC(1) = \sin(x), \quad WPC(2) = \cos(x), \quad (1.12)$$

- wartości początkowe leżą na brzegu kwadratu o boku jeden i środku w  $(0, 0)$ :

$$WPC(1) = \frac{\cos(x)}{\rho(x)}, \quad WPC(2) = \frac{\sin(x)}{\rho(x)}, \quad \rho(x) = \max(|\sin(x)|, |\cos(x)|). \quad (1.13)$$

2. Przeprowadzenie symulacji;
3. Narysowanie trajektorii fazowej na wykresie.

## AD 2

To zagadnienie było omawiane na poprzednich ćwiczeniach

## AD 3

Aby rysować trajektorie na wykresie najlepiej przed rozpoczęciem pętli włączyć `hold on`; a po jej zakończeniu `hold off`; i korzystać z instrukcji `plot`. Ponieważ należy rysować  $x_1$  w funkcji  $x_2$  a wynik ze schematu dostaniemy w postaci macierzy  $2 \times \text{liczba kroków}$  będziemy musieli jako pierwszego argumentu użyć pierwszego wiersza macierzy a jako drugiego argumentu analogicznie drugiego wiersza.

## 1.6 Sprawozdanie

Sprawozdanie ma zawierać:

1. Skrypt w m-filu i model.
2. Skrypt ma umożliwiać narysowanie dowolnego portretu fazowego. M-file ma zawierać komentarze opisujące działanie programu;
3. Macierz  $A$  ma być uzyskana  $PJP^{-1}$ ;
4. Przeanalizować wszystkie typy portretów fazowych związanymi z wartościami własnymi z rysunku 1.10 (zadać macierz  $J$  i  $P = I$ );
5. Wykreślić na wykresie wektory własne powiązane z portretem fazowym;
6. Zbadać wpływ wartości własnych na wygląd portretów fazowych (zadać macierz  $J$  i  $P = I$ );

7. Zbadać wpływ wektorów własnych na wygląd (zadać macierze  $\mathbf{J}$  jak w poprzednich punktach i dowolnych  $\mathbf{P}$ ) - wykreślić proste powiązane z wektorami własnymi;
8. Zbadać jak zachowują się portrety fazowe układów zmieniając wartości własne w ramach danej struktury ;
9. Plik tekstowy z opisem wniosków z wpływu wartości wektorów własnych i wartości własnych na wygląd portretów (w ramach danego typu portretu). Należy także podać jak zmieniać warunki początkowe w zależności od typu portretu, tak aby uzyskać właściwie wyglądające portrety.

## 1.7 Przykładowe zadania

**Zadanie 1.1.** Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad \text{i} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

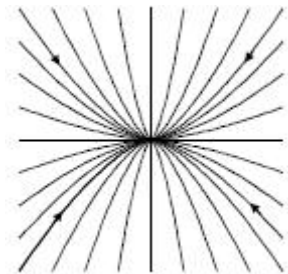
i opisać czym się różnią.

**Zadanie 1.2.** Naszkicować portrety fazowe systemów dynamicznych

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & \text{i} & & \dot{x}_1(t) &= 10x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) & & & \dot{x}_2(t) &= -10x_1(t) \end{aligned}$$

i opisać czym się różnią.

**Zadanie 1.3.** Podać wartości własne, jakie mogą odpowiadać poniższemu portretowi fazowemu.



**Zadanie 1.4.** Dla systemu

$$\begin{aligned} x(t) + 4\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) &= u(t) \\ u(t) &= k_1\dot{x}(t) - k_2x(t) \end{aligned}$$

zbadać zachowanie się układu w zależności od  $k_1$  i  $k_2$ . Zaznaczyć odpowiednie obszary na płaszczyźnie  $k_1 \times k_2$ .

**Zadanie 1.5.** Zbadać charakter pracy układu

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned}$$

w zależności od parametru  $K$ . Zaznaczyć wszystkie istotne rodzaje zachowań na osi liczbowej.

**Zadanie 1.6.** Wyznaczyć macierz  $e^{At}$  dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 1.7.** Dla jakich wartości parametru  $k$  system opisany równaniami:

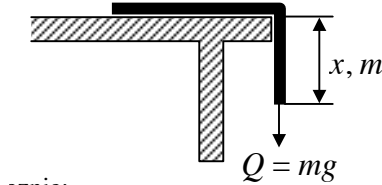
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2kx_2 \\ 4\dot{x}_2 &= -kx_1 + k(0.5x_1 + x_2) \end{aligned}$$

będzie niestabilny.

**Zadanie 1.8.** Wyznaczyć rozwiązanie  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  równania

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \end{aligned}$$

**Zadanie 1.9.** Na gładkim stole leży sznur o długości 1 m, przy czym część sznura zwisa ze stołu jak na rysunku. Zamodelować ruch sznura po stole za pomocą równania różniczkowego. Naszkicować portret fazowy systemu opisanego tym równaniem.



**Zadanie 1.10.** Dany jest system opisany równaniem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \pi x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\pi x_1(t) \end{aligned}$$

Naszkicować zbiór punktów powstałych z trajektorii stanu systemu w chwili  $t = 0.25s$  dla warunków początkowych branych ze zbioru  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 + x_2| = 1\}$ .

**Zadanie 1.11.** Rozwiązanie równania różniczkowego

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) = -3x(t) + \sin(\omega t)$$

gdzie  $x(0) = 7$ ,  $t \geq 0$  ma postać

$$x(t) = f(t) + A \sin(\omega t + \varphi)$$

Znaleźć takie  $\omega$  dla, którego  $A$  jest największe.

# Bibliografia

- S. Bolkowski. *Teoria obwodów elektrycznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1995?
- D. Halliday and R. Resnick. *Fizyka*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, vii edition, 1983.
- W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1991.
- W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.
- W. Mitkowski. *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2 edition, 2007.
- L. Szklarski, A. Dziadecki, J. Strycharz, and K. Jaracz. *Automatyka Napędu Elektrycznego*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.
- A. Turowicz. *Teoria macierzy*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo Dydaktyczne AGH, Kraków, 5 edition, 1995.