Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona f: $[a,b] \to \mathbb{R}$. Sumą częściową (Riemanna) nazywa się liczbę

$$\sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot \Delta p_i . R_{f,P(q_1,\ldots,q_n)} = \sum_{i=1}^{n} f(q_i) \cdot \Delta p_i .$$

Funkcję f nazywa się całkowalną w sensie Riemanna lub krótko R-całkowalną, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego (P^k) podziałów przedziału $[a,b]$, istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica.

$$R_f = \lim_{k\to\infty} R_{f,P^k\left(q_1^k,\ldots,q_{n_k}^k\right)}$$

nazywana wtedy **całką Riemanna** tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba R_f, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista$\delta > 0$,że dla dowolnego podziału $P(q_1,\ldots,q_n)$ o średnicy $\operatorname{diam} P(q_1,\ldots,q_n) < \delta$; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$istnieje taki podział $S(t_1,\ldots,t_m)$ przedziału $[a,b]$, że dla każdego podziału$P(q_1,\ldots,q_n)$ rozdrabniającego $S(t_1,\ldots,t_m)$ zachodzi

$$\left|R_{f,P(q_1,\ldots,q_n)} - R_f\right| < \varepsilon .$$

Funkcję f nazywa się wtedy całkowalną w sensie Riemanna (R-całkowalną), a liczbęR_f jej **całką Riemanna**.