

Федеральное агентство по образованию
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

А.Н. Долгов, С.Е. Муравьев, Б.В. Соболев

ЗАДАЧИ
вступительных экзаменов и олимпиад
по физике с решениями

Молекулярная физика и термодинамика

Под редакцией С.Е. Муравьева

Москва

УДК 53(075)
ББК 22.3я7
Д 64

Долгов А.Н., Муравьев С.Е., Соболев Б.В. **Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике с решениями. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие** / Под ред. С.Е. Муравьева. – М.: МИФИ, 2008. – 248 с.

Настоящий задачник по молекулярной физике и термодинамике является второй частью учебного пособия, в котором собраны задачи, предлагавшиеся в течение ряда лет на проводимой в МИФИ Всероссийской олимпиаде Федерального агентства по атомной энергии и на вступительных экзаменах в МИФИ. Большинство задач снабжено подробными решениями. В начале каждой главы приведено краткое теоретическое введение и рассмотрены характерные примеры решения задач. Последняя глава посвящена разбору олимпиадных задач повышенной трудности.

Предназначено для поступающих в МИФИ и физико-математические лица при МИФИ, а также может быть использовано студентами младших курсов и слушателями всех форм подготовительного обучения.

Рецензент канд. физ-мат. наук, доц. Е.Е. Городничев

*Рекомендовано редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия*

ISBN 978-5-7262-0912-8 © А.Н. Долгов, С.Е. Муравьев, Б.В. Соболев, 2008

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие		4
	Задачи	Решения и ответы
1. Основные принципы молекулярно-кинетической теории. Массы и скорости молекул. Количество вещества	5	14 112
2. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы	17	22 120
3. Графические задачи на газовые законы	28	33 134
4. Смеси газов. Закон Дальтона	37	41 141
5. Термодинамика идеального газа: внутренняя энергия, количество теплоты, первый закон термодинамики	45	58 149
6. Графическое представление процессов в термодинамике идеального газа	64	66 165
7. Термодинамика жидкостей и твердых тел: теплообмен, уравнение теплового баланса, фазовые превращения	70	76 173
8. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность	80	87 180
9. Основные принципы работы тепловых двигателей. Второй закон термодинамики	91	100 193
10. Комбинированные задачи повышенной сложности		105 205

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение многих лет в Московском инженерно-физическом институте проводится Всероссийская олимпиада Федерального агентства по атомной энергии Российской Федерации (Росатома). Победители и призеры олимпиады зачисляются на бюджетное отделение МИФИ без вступительных экзаменов. За годы проведения олимпиады Росатома тысячи школьников воспользовались этой возможностью и были зачислены в МИФИ по итогам олимпиады. В настоящее время в соответствии с Положением Министерства образования и науки Российской Федерации о порядке проведения олимпиад школьников до 45 % участников олимпиады Росатома планируется зачислять на инженерно-физические специальности МИФИ без экзаменов.

Характерной особенностью варианта задания олимпиады Росатома по физике является значительное различие уровня сложности задач. В варианте задания есть простые, сложные и очень сложные, т.е. настоящие олимпиадные задачи, такие, которые могут решить только хорошо подготовленные школьники. Эти задачи позволяют приемной комиссии МИФИ еще на этапе поступления выделить наиболее талантливых ребят. Каждый школьник сможет на олимпиаде Росатома оценить свои силы в качестве будущего абитуриента, сравнить уровень собственной подготовки с уровнем подготовки ровесников из многих школ различных регионов России, а также в случае удачного выступления получить существенные льготы при зачислении в МИФИ.

Поскольку олимпиада Росатома проводится много лет в несколько туров, к настоящему времени накоплено большое количество задач, предлагавшихся школьникам на олимпиадах. Мы планируем собрать эти задачи, дополнить их задачами вступительных экзаменов в МИФИ (задач олимпиад Росатома все-таки недостаточно для «полноценного» задачника) и издать их с подробными комментариями и решениями. Настоящая книга – хронологически первая из серии книг такого рода – представляет собой вторую часть учебного пособия и посвящена молекулярной физике и термодинамике. Пособие будет состоять из трех частей: первая часть будет посвящена механике, третья – электричеству и оптике.

Каждая часть пособия построена по следующему принципу. Каждая глава посвящена тому или иному разделу физики. В начале главы приведен основной теоретический материал этого раздела (которого вполне достаточно для решения стандартных задач) с разбором наиболее характерных примеров задач. В последней главе собраны задачи повышенной сложности, предлагавшиеся школьникам на олимпиадах Росатома разных лет и вступительных экзаменах в МИФИ. Для большинства задач даны решения, для остальных (как правило, однотипных) указания или ответы.

Авторы

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. МАССЫ И СКОРОСТИ МОЛЕКУЛ. КОЛИЧЕСТВО ВЕЩЕСТВА

Основное предположение молекулярной физики, которое в настоящее время многократно проверено, в том числе и прямыми наблюдениями, заключается в том, что все тела состоят из огромного количества мельчайших частиц – молекул, которые находятся в состоянии непрерывного и хаотического движения. Рассмотрение свойств тел (которые принято в молекулярной физике называть макроскопическими системами*) с точки зрения их внутренней молекулярной структуры и составляет предмет молекулярной физики.

Все величины, характеризующие макроскопические тела, делят в молекулярной физике на две группы: макро- и микроскопические. Макроскопическими величинами (или, как говорят, *макроскопическими параметрами* системы) называют такие ее характеристики, которые относятся ко всей системе в целом, а не к отдельным молекулам. Это, например, температура, плотность, объем. Такие же величины, которые характеризуют каждую молекулу, например координаты и скорости каждой молекулы, принято называть микроскопическими характеристиками, или *микроскопическими параметрами*** . Поскольку молекулы непрерывно и хаотически движутся, сталкиваются, разлетаются, то значения микроскопических параметров любой макроскопической системы непрерывно меняются, в то время как значения макропараметров остаются неизменными. Это значит, что макроскопические параметры

* *Макро* – от греческого слова «большой», что означает в данном контексте содержащий большое количество молекул.

** *Микро* – от греческого слова «маленький».

связаны со средними характеристиками движения отдельных молекул. Установление этих связей на основе рассмотрения движения отдельных частиц и вычисление макроскопических параметров тел и является целью молекулярной физики.

Для этого в молекулярной физике вводятся величины, которые служат «мостиками» между микро- и макрохарактеристиками макроскопических систем. В первую очередь, это – моль* и температура. Понятие моля было впервые введено в химии. Основная идея, связанная с молем, заключается в том, что при исследовании избытков-недостатков веществ, вступающих в химические реакции, удобно измерять вещество такими количествами, которые содержали бы одинаковое число молекул *независимо от вещества*. Такое количество вещества, которое содержит $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ молекул, причем независимо от того, какое это вещество, называется молем этого вещества, а приведенное число молекул в моле N_A – числом Авогадро. Масса моля вещества называется молярной массой этого вещества. В принципе, число молекул в моле – число Авогадро – можно было выбрать любым. Приведенное выше значение числа Авогадро выбрано так, чтобы молярные массы разных веществ можно было легко запомнить или иметь простой рецепт для их нахождения. С этим выбором связана такая логика. Поскольку моли любых веществ содержат одинаковое количество молекул, то отношение молярных масс двух веществ равно отношению масс их молекул, которое (как и отношение любых величин одинаковой размерности) не зависит от единиц измерений. Например, для двух веществ X и Y имеем:

$$\frac{\mu_X}{\mu_Y} = \frac{N_A m_X}{N_A m_Y} = \frac{m_X}{m_Y}, \quad (1.1)$$

где μ_X и μ_Y – молярные массы веществ X и Y ; m_X и m_Y – массы молекул этих веществ. Причем в этой формуле массы μ_X и μ_Y можно измерять в одних единицах, а m_X и m_Y – в других, ведь отношения в правой и левой части (1.1) безразмерны. Из формулы (1.1) следует, что число Авогадро можно выбрать так, чтобы массы молей, выраженные в граммах, численно совпадали с массой молекул этого

* От латинского moles – толпа.

вещества, выраженной в атомных единицах массы (а.е.м.). Именно так и было установлено приведенное выше значение. А поскольку массы атомов любых элементов известны и их можно всегда найти в периодической таблице химических элементов (в а.е.м.), то и молярные массы элементов, а следовательно, и любых соединений известны. Например, в периодической таблице элементов находим, что масса одного атома водорода равна $m_H \approx 1$ а.е.м., а значит, масса одного моля атомарного водорода (молекула которого состоит из одного атома) – $\mu_H \approx 1$ г/моль, молекулярного H_2 – $\mu_{H_2} \approx 2$ г/моль. Масса одного атома кислорода $m_O \approx 16$ а.е.м., поэтому масса одного моля атомарного кислорода – $\mu_O \approx 16$ г/моль, молекулярного O_2 – $\mu_{O_2} \approx 32$ г/моль. Из этих же данных находим молярную массу воды H_2O – $\mu_{H_2O} \approx 18$ г/моль.

Приведем для справок молярные массы некоторых элементов, наиболее часто встречающихся в задачах школьного курса физики:

He (гелий): $\mu_{He} \approx 4$ г/моль;

C (углерод): $\mu_C = 12$ г/моль;

N (азот): $\mu_N \approx 14$ г/моль;

Fe (железо): $\mu_{Fe} \approx 56$ г/моль

(для углерода равенство является точным, см. задачу 1.4).

Обратим внимание читателя на размерность молярной массы. Поскольку для нахождения молярной массы нужно взять массу некоторого тела и разделить на количество молей, которое это тело содержит, размерность молярной массы –

$$\frac{\text{г}}{\text{моль}}$$

(здесь фактически используется та же логика, что и при определении размерности плотности – массы единицы объема – г/см³).

Моль является естественной мерой вещества, а число молей данного вещества принято называть *количеством этого вещества*. Для количества вещества справедливы следующие очевидные со-

отношения. Если имеется масса m какого-то вещества с молярной массой μ , то количество данного вещества равно

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}, \quad (1.2)$$

где N – число молекул, содержащихся в массе m . Знание молярных масс химических элементов и соединений позволяет находить число молекул или количества этих веществ и, следовательно, получать массовые соотношения в химических реакциях. Рассмотрим два примера.*

Пример 1.1. Где содержится больше молекул: в 4,5 г воды или в 23 г железа? Во сколько раз?

Решение. Если бы в нашем распоряжении были *одинаковые доли* молей воды и железа, то число молекул в этих количествах веществ было бы одинаковым. Поэтому для ответа на поставленный вопрос необходимо понять, какую долю молей составляют данные массы веществ. Используя массы молей воды и железа, находим, что данное количество воды составляет

$$\frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{4,5 \text{ г}}{18 \text{ г/моль}} = 0,25 \text{ моль}, \quad (*)$$

или одну четверть моля и, следовательно, содержит четвертую часть числа Авогадро молекул:

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = 0,25 \cdot N_A = 1,5 \cdot 10^{23} \text{ молекул.}$$

Данная масса железа составляет

$$\frac{m_{\text{Fe}}}{\mu_{\text{Fe}}} = \frac{23 \text{ г}}{56 \text{ г/моль}} = 0,5 \text{ моль}, \quad (**)$$

или половину моля и, следовательно, содержит, половину числа Авогадро молекул $N_{\text{Fe}} = 0,5 \cdot N_A = 3 \cdot 10^{23}$ молекул.

* Здесь и далее примеры задач будут набраны втяжкой, т.е. с отступом, слева.

Следовательно, 23 г железа содержит вдвое большее количество молекул, чем 4,5 г воды.

Пример 1.2 (ВЭ, 2005)*. В закрытом сосуде находятся $m = 1$ г молекулярного водорода и $m = 4$ г – молекулярного кислорода. Происходит химическая реакция образования воды



причем известно, что воды образовалось максимально возможное количество. Сколько молекул будет находиться в сосуде?

Решение. Возможны три случая.

Первый. Кислород и водород прореагировали полностью; тогда в сосуде будут находиться только молекулы воды.

Второй. Прореагировали все молекулы водорода, но только часть молекул кислорода; для оставшейся части молекул не хватило молекул водорода (кислород в избытке). В результате реакции в сосуде будут находиться молекулы воды и кислорода.

Третий. Полностью прореагировал кислород, водород в избытке; в сосуде находятся вода и водород.

Чтобы ответить на вопрос о том, какой случай реализуется, заметим, что из уравнения химической реакции (*) следует, что при образовании воды к каждой молекуле кислорода присоединяются две молекулы водорода. Поэтому чтобы вещества прореагировали полностью, нужно иметь такие количества водорода и кислорода, чтобы число молекул водорода было бы вдвое больше числа молекул кислорода. Чтобы найти число молекул в данных количествах веществ, найдем, какую долю молей они составляют. Поскольку $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль, $\mu_{\text{H}_2} = 2$ г/моль, то данные количества веществ содержат

$$N_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2} N_{\text{A}}}{\mu_{\text{H}_2}} = 3 \cdot 10^{23}$$

* Задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах или олимпиадах, отмечены символами ВЭ или О с указанием года, когда это происходило.

и

$$N_{\text{O}_2} = \frac{m_{\text{O}_2} N_A}{\mu_{\text{O}_2}} = 0,75 \cdot 10^{23}$$

молекул водорода и кислорода. Поэтому кислород вступит в реакцию полностью, при этом, поскольку с каждой молекулой кислорода соединяются две молекулы водорода, в реакцию вступят $2N_{\text{O}_2} = 1,5 \cdot 10^{23}$ молекул водорода, а $N'_{\text{H}_2} = N_{\text{H}_2} - 2N_{\text{O}_2} = 1,5 \cdot 10^{23}$ молекул водорода останется в избытке.

Как следует из уравнения реакции (*), в результате реакции получается вдвое большее число молекул воды, чем число молекул кислорода, вступивших в реакцию. Поэтому в результате реакции образуются $N_{\text{H}_2\text{O}} = 2N_{\text{O}_2}$ молекул воды. Таким образом, в сосуде будут находиться

$$N'_{\text{H}_2} + N_{\text{H}_2\text{O}} = N_{\text{H}_2} - 2N_{\text{O}_2} + 2N_{\text{O}_2} = N_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2} N_A}{\mu_{\text{H}_2}} = 3 \cdot 10^{23}$$

молекул водорода и воды.

В середине XIX в. Л. Больцман доказал, что если два тела привести в тепловой контакт, т.е. разрешить молекулам сталкиваться и при столкновениях обмениваться энергией, то через некоторое время установится такое состояние, когда средние кинетические энергии поступательного движения молекул тел станут одинаковыми. А поскольку из опыта известно, что при тепловом контакте выравниваются температуры тел, это означает, что *температура связана со средней кинетической энергией поступательного движения молекул*. Дж. Максвелл установил, что эта связь – прямая пропорциональность, т.е.

$$\left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\text{ср}} = \frac{3}{2} kT, \quad (1.3)$$

где $(mv^2/2)_{\text{ср}}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул; T – температура; k – постоянная, которая назы-

вается постоянной Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. (Множитель $3/2$ введен в формулу (1.3) для упрощения записи ряда формул. Температуру можно определить с помощью уравнения типа (1.3), но без множителя $3/2$. В этом случае уравнение Клапейрона – Менделеева содержало бы множитель $2/3$.)

Из формулы (1.3) следует, что температура T не может быть отрицательной и достигает минимально возможного значения $T = 0$, когда все молекулы останавливаются. Поэтому входящая в формулу (1.3) величина T – абсолютная температура (т.е. температура по шкале Кельвина), которая связана с температурой в градусах Цельсия t соотношением

$$T [\text{K}] = t [^{\circ}\text{C}] + 273 \text{ }^{\circ}\text{C}. \quad (1.4)$$

Остановимся чуть более подробно на определении средних величин*. С одной стороны, нам кажется, что для первого изучения молекулярной физики достаточно интуитивного понимания смысла среднего, которое есть у каждого человека. С другой – в ряде учебников для школьников используется, например, термин «среднеквадратичная скорость», и школьники тоже его иногда используют, плохо понимая, что он означает, и бывают ли другие («несреднеквадратичные») средние. Поэтому несколько слов об усреднении нужно сказать. Пусть имеем две молекулы, движущиеся со скоростями $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Чему равна средняя скорость молекулы? С одной стороны, среднюю скорость можно определить как среднее арифметическое значение скоростей

$$v_{\text{cp}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 1,5 \text{ м/с}. \quad (1.5)$$

А с другой, среднюю скорость можно определить и многими другими способами. Например, величина

$$v_{\text{cp}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = 1,581 \text{ м/с} \quad (1.6)$$

тоже имеет смысл некоторой средней между v_1 и v_2 величины. Очевидно, что по такому же принципу можно определить и другие средние. Ограничимся еще одним

$$v_{\text{cp}} = \sqrt[3]{\frac{v_1^3 + v_2^3}{2}} = 1,6509 \text{ м/с}. \quad (1.7)$$

Величина (1.5) называется средним модулем скорости, или просто средней скоростью, величина (1.6) – среднеквадратичной (или средней квадратичной) ско-

* Текст, набранный мелким шрифтом, может быть пропущен при первом чтении.

ростью, величина (1.7) – средней кубической скоростью. Из приведенных значений видно, что эти средние немного, но все-таки отличаются друг от друга. А какие средние входят в формулы молекулярной физики?

В принципе, в различные макроскопические величины могут входить различные – и (1.5), и (1.6), и (1.7) – средние скорости. Однако поскольку температура определяется средней кинетической энергией, в которую входит квадрат скорости молекул, то температура определяется средней квадратичной скоростью молекул. Из-за этого в школьном курсе физики приходится иметь дело только со средней квадратичной скоростью. Поэтому в дальнейшем под словами «средняя скорость» везде будет подразумеваться «средняя квадратичная скорость», хотя использовать этот термин нигде далее мы не будем.

Формула (1.3) связывает средние микроскопические характеристики молекул тела (среднюю кинетическую энергию молекул) с его макроскопическими характеристиками (температурой) и, следовательно, позволяют связать *тепловые явления с механическим движением* молекул. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.3. Средняя скорость молекул некоторого газа при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ составляет $v = 515$ м/с. Какое количество молекул этого газа содержится в $m = 10$ г этого газа?

Решение. Если бы молярная масса газа μ была нам известна, то число молекул, содержащихся в массе m , можно было бы найти как

$$N = \frac{m}{\mu} N_A. \quad (*)$$

Найдем из данных условия молярную массу газа. Из определения температуры (1.3) имеем

$$\frac{m_0 v^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (**)$$

где m_0 – масса молекул газа; T – абсолютная температура. Умножая равенство (**) на число Авогадро и учитывая, что $m_0 N_A = \mu$, получим

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{3kN_A T}{v^2} = \frac{3kN_A (t + 273^\circ\text{C})}{v^2} = \\ &= 0,028 \text{ кг/моль} = 28 \text{ г/моль}. \end{aligned} \quad (***)$$

Таким образом, рассматриваемый газ – молекулярный азот. Используя теперь формулы (*) и (***), находим, что газ

$$\text{содержит } N = \frac{mv^2 N_A}{3kN_A T} = \frac{mv^2}{3k(t + 273^\circ\text{C})} = 2,1 \cdot 10^{23} \text{ молекул.}$$

Рассматривая газ как макроскопическую систему, состоящую из огромного количества молекул, которые хаотически движутся со средними скоростями, определяемыми соотношением (1.3), можно вычислить среднее число столкновений молекул со стенкой сосуда и давление, которое газ оказывает на стенки. Если в сосуде находится газ с концентрацией молекул n (число молекул в единице объема) при абсолютной температуре T , то за интервал времени Δt с элементом стенки площадью ΔS столкнутся

$$N = \frac{nv_{\text{ср}} \Delta S \Delta t}{6} = \frac{n \Delta S \Delta t}{6} \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad [\text{молекул}]. \quad (1.8)$$

Здесь k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; m – масса молекул газа. Из формулы (1.8) можно найти давление газа. Поскольку каждая молекула передает стенке сосуда импульс $2mv_{\text{ср}}$, то среднее давление p молекул на стенку сосуда определяется соотношением

$$p = \frac{N 2mv_{\text{ср}}}{\Delta S \Delta t} = \frac{nmv_{\text{ср}}^2}{3} = \frac{2}{3} n(E)_{\text{ср}} = nkT. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) дает связь макроскопических параметров газа. Одно из равенств (1.9), а именно, $p = (2/3)nE_{\text{ср}}$, принято называть основным уравнением молекулярно-кинетической теории. Соотношения (1.9) будут подробно рассматриваться во второй главе. Здесь рассмотрим только один пример.

Пример 1.4. Оценить расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях (т.е. при атмосферном давлении $p = 1 \text{ атм} = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 0^\circ\text{C}$, или $T = 273 \text{ К}$).

Решение. Из (1.9) находим концентрацию молекул воздуха

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Поскольку n – число молекул в единице объема, то на одну молекулу приходится объем

$$V_1 = \frac{1}{n} = \frac{kT}{p}.$$

Если представить объем V_1 , приходящейся на одну молекулу, как куб, то длина ребра a этого куба равна:

$$a = \sqrt[3]{V_1} = \sqrt[3]{\frac{kT}{p}} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Эта величина и может служить оценкой среднего расстояния между молекулами воздуха.

ЗАДАЧИ

1.1. Оцените размеры молекул воды, используя то обстоятельство, что жидкости практически несжимаемы.

1.2. В сосуд объемом V помещают ν молей газа. Молярная масса газа μ . Найти плотность газа в сосуде.

1.3 (ВЭ, 2004). Плотность некоторого газа $\rho = 0,9 \text{ кг/м}^3$. При этом концентрация молекул газа (число молекул в единице объема) $n = 27 \cdot 10^{25} \text{ 1/м}^3$. Какой это газ?

1.4. Чему равна масса одного моля углерода? А одной молекулы углерода? И то, и другое найти в граммах и атомных единицах массы, используя периодическую систему элементов и число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

1.5. Где содержится больше молекул: в стакане воды или стакане ртути? Сколько молекул содержится в стакане воды или ртути? Плотности воды и ртути: $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \text{ г/см}^3$; молярные массы: $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ г/моль}$, $\mu_{\text{Hg}} = 208 \text{ г/моль}$; объем стакана $V = 0,2 \text{ л}$.

1.6. Сколько молекул содержится в $m = 10 \text{ г}$ воды? А сколько молей?

1.7. Сколько атомов водорода содержится в одном моле этилового спирта $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$? Сколько молей молекулярного водорода H_2 можно было бы из них получить?

1.8. В закрытом сосуде находится озон O_3 . С течением времени озон превращается в молекулярный кислород. Изменилось ли количество вещества в сосуде, и если да, то во сколько раз?

1.9. Где содержится больше молекул, в одном кубическом сантиметре водорода или кислорода при одинаковых температуре и давлении? Сколько молекул содержится в одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях ($p = 1 \text{ атм} = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T = 273 \text{ К}$).

1.10. Оцените среднюю скорость молекулы воздуха при нормальных условиях ($T = 273 \text{ К}$). Считать, что воздух имеет молярную массу $\mu = 29 \text{ г/моль}$.

1.11. Скорость движения газовых молекул при обычных условиях измеряется сотнями метров в секунду. Почему процесс взаимного проникновения (диффузии газов) происходит с гораздо меньшими скоростями?

1.12. При некоторой температуре средняя скорость молекул вещества, масса моля которого μ_1 , равна v_1 . Какова средняя скорость молекул вещества, масса моля которого μ_2 , при той же температуре?

1.13 (ВЭ, 2006 – 2007). Повышение температуры газа на ΔT привело к увеличению средней скорости молекул газа на Δv . На сколько нужно еще повысить температуру газа, чтобы средняя скорость повысилась еще на Δv ? Молярная масса газа μ .

1.14. Во сколько раз увеличится средняя скорость молекул газа при повышении его температуры от $t_1 = 30^\circ \text{C}$ до $t_2 = 40^\circ \text{C}$?

1.15. Оцените число ударов молекул воздуха о поверхность оконного стекла площадью $S = 1 \text{ м}^2$ со стороны аудитории за интервал времени $\Delta t = 1 \text{ с}$. Температура воздуха в аудитории $t = 27^\circ \text{C}$, концентрация $n = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

1.16. Оцените длину свободного пробега (расстояние между двумя последовательными столкновениями) и интервал времени между двумя последовательными столкновениями при нормальных условиях ($p = 10^5 \text{ Па}$, $T = 273^\circ \text{C}$), если диаметр молекулы $d = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, а концентрация молекул $n = 3 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

1.17. Оцените длину свободного пробега (расстояние между двумя последовательными столкновениями) в углекислом газе при нормальных условиях ($p = 10^5 \text{ Па}$, $T = 273^\circ \text{C}$), если число столкно-

вений каждой молекулы с другими в среднем за 1 с равно $\nu = 9 \cdot 10^9$. Молярная масса углекислого газа $\mu = 44$ г/моль.

1.18. Почему в атмосфере Земли, практически, отсутствуют молекулы водорода, а у Луны вообще нет атмосферы?

1.19 (О, 2003, 2006). В сосуде, имеющем форму полушара радиусом R , находилась жидкость плотности ρ , налитая до краев сосуда. Жидкость испаряется так, что в единицу времени с единицы площади поверхности вылетают n молекул. За какое время вся жидкость в сосуде испарится? Молярная масса жидкости μ .

Глава 2

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ИЗОПРОЦЕССЫ

Простейшей модельной системой молекул, которая рассматривается в молекулярной физике, является *идеальный газ*. Идеальным газом называется макроскопическая система большого количества молекул, потенциальная энергия взаимодействия которых много меньше их кинетической энергии. Для того чтобы газ можно было считать идеальным, его температура должна быть достаточно высока (при этом будет велика кинетическая энергия молекул), и газ должен быть достаточно разреженным (при этом молекулы будут редко сталкиваться, и, следовательно, будет мала средняя энергия их взаимодействия; кроме того, «собственный» объем молекул будет мал по сравнению с объемом сосуда). Как показывает опыт, атмосферный воздух при температурах, близких к комнатным, и давлении до нескольких десятков атмосфер с хорошей степенью точности является идеальным газом.

Как указывалось в первой главе, основной целью молекулярной физики является вычисление величин, которые характеризуют не поведение каждой отдельной молекулы, а всей молекулярной системы в целом, таких, как давление, плотность, температура. Такие величины называют макроскопическими параметрами системы. Макроскопические параметры идеального газа связаны уравнением

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \quad (2.1)$$

которое называется *уравнением состояния идеального газа*, или *уравнением Клапейрона – Менделеева*. В формуле (2.1) p – давление газа, V – занимаемый им объем, m – масса газа, μ – его молярная масса, T – абсолютная температура, $\nu = m/\mu$ – число молей газа (количество вещества). В формуле (2.1) величина $R =$

$= 8,3 \text{ Дж/}(\text{моль} \cdot \text{К})$ – постоянная, которая называется *универсальной газовой постоянной* и которая связана с постоянной Больцмана k и числом Авогадро N_A следующим соотношением: $R = kN_A$. С учетом этой связи уравнение состояния идеального газа (2.1) можно записать в нескольких, эквивалентных (2.1), формах:

$$pV = \nu N_A kT = NkT, \quad \text{или} \quad p = nkT, \quad (2.2)$$

где N – число молекул газа; $n = N/V$ – число молекул в единице объема газа, или *концентрация молекул газа*.

Уравнение состояния газа (2.1) или (2.2) позволяет находить один неизвестный макроскопический параметр газа (например, давление p) по известным трем другим (объему V , температуре T и числу молей ν) или какие-то величины, связанные с входящими в уравнение состояния, – плотность, молярную массу и др. При этом если сосуд, в котором находится газ, имеет подвижные стенки, или ограничивается подвижным поршнем, то давление газа в случае равновесия таких стенок или поршня может быть найдено *механически* из условия равновесия этих стенок или поршня. В этом случае достаточно задать только два параметра (например, объем V и число молекул N), чтобы определить все остальные: давление p – из условия равновесия поршня, а затем температуру газа T – по известным p , V и N – из уравнения состояния. Рассмотрим несколько примеров.

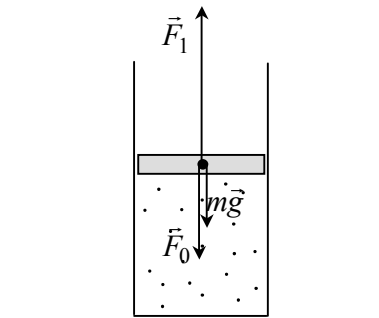
Пример 2.1. В цилиндрическом сосуде площадью поперечного сечения S под подвижным поршнем массой m находится некоторый идеальный газ в количестве ν молей. Определить температуру газа, если в равновесии поршень расположен на высоте h от дна сосуда. Атмосферное давление p_0 .

Решение. Для того чтобы найти температуру газа с помощью уравнения Клапейрона – Менделеева, необходимо знать объем газа (который нам здесь фактически известен), число молей (которое также известно) и давление газа p . Давление газа нам неизвестно, однако в условии сказано, что сосуд ограничен подвижным поршнем, который находится в равновесии. Используем условие равновесия поршня, чтобы найти давление газа. На поршень действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны газа \vec{F} , направленная вертикально вверх, и

сила со стороны атмосферного воздуха \vec{F}_0 , направленная вертикально вниз (см. рисунок). Условие равновесия поршня дает

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_0 = 0. \quad (*)$$

Проецируя уравнение (*) на вертикальную ось и выражая силы F_0 и F через давление атмосферного воздуха p_0 и давление газа в сосуде p , получим



$$p = p_0 + \frac{mg}{S}, \quad (**)$$

где S – площадь поперечного сечения сосуда. Теперь из уравнения Клапейрона – Менделеева можно найти температуру газа. Учитывая, что объем газа $V = Sh$ и используя давление (**), находим

$$T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{p_0 Sh + mgh}{\nu R}.$$

Пример 2.2 (ВЭ, 2004 – 2006). Найти формулу газообразного соединения углерода с кислородом, если известно, что это вещество массой $m = 1$ г, помещенное в объем $V = 1$ дм³ при температуре $t = 27$ °С, оказывает давление $p = 5,6 \cdot 10^4$ Па.

Решение. Основная идея решения задачи заключается в том, чтобы из закона Клапейрона – Менделеева найти молярную массу газа, а через нее по известным атомным массам элементов – химическую формулу вещества. Из закона Клапейрона – Менделеева для рассматриваемого газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где p – давление газа; V – занимаемый им объем; m – масса газа; μ – его молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура, находим

$$\mu = \frac{mRT}{pV}. \quad (*)$$

Подставляя в формулу (*) значения массы газа, давления, объема, универсальной газовой постоянной $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, а также абсолютной температуры, которая связана с данной в условии температурой по шкале Цельсия как $T = t + 273$, и выполняя вычисления, найдем молярную массу газа

$$\mu = 44 \text{ г/моль}.$$

Пусть искомая формула соединения углерода с кислородом имеет вид C_nO_k , где n и k – неизвестные числа, которые могут быть только целыми и положительными. Поскольку $\mu_C = 12 \text{ г/моль}$, $\mu_O = 16 \text{ г/моль}$, то для чисел n и k справедливо уравнение

$$12n + 16k = 44. \quad (**)$$

Уравнение (**) имеет единственное решение в целых положительных числах n и k : $n = 1$, $k = 2$ (это решение находится с помощью подбора). Поэтому искомая формула – CO_2 , т.е. неизвестное соединение – углекислый газ.

Уравнение состояния газа (2.1) или (2.2) позволяет также проследить за изменением параметров газа в том или ином процессе. В этом случае уравнение состояния следует применить к начальному и к конечному состояниям газа, и, используя полученные уравнения, исследовать изменение искомых величин. При этом те параметры газа, которые не менялись в рассматриваемом процессе, как правило, можно исключить из уравнений, деля их, например, друг на друга, или вычитая друг из друга.

В связи с рассмотрением различных процессов, происходящих с газом, используют такую терминологию. Если в рассматриваемом процессе какой-то параметр газа не изменялся, то процесс называют *изопроцессом*: если не менялась температура – *изотермическим*, давление – *изобарическим* (или *изобарным*), объем – *изохорическим* (или *изохорным*).

Применение закона Клапейрона – Менделеева к изопроцессам (для фиксированного количества вещества газа) позволяет получить частные газовые законы.

Для изотермического процесса $T = \text{const}$ при фиксированной массе газа закон Клапейрона – Менделеева дает:

$$pV = \text{const}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называется законом Бойля – Мариотта.

Для изохорического процесса $V = \text{const}$ при фиксированной массе газа закон Клапейрона – Менделеева дает:

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется законом Шарля.

Для изобарического процесса $p = \text{const}$ при фиксированной массе газа закон Клапейрона – Менделеева дает:

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) называется законом Гей-Люссака.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2.3 (ВЭ, 2005 – 2007). В цилиндре под поршнем находится некоторый газ при давлении p_1 и температуре T_1 . Груз какой массы надо положить на поршень, чтобы после нагревания газа до температуры T_2 его объем был равен первоначальному? Площадь поршня S .

Решение. По закону Клапейрона – Менделеева для начального состояния газа имеем

$$p_1 V = \nu R T_1, \quad (*)$$

где V и ν – объем и количество вещества газа, которые нам неизвестны. Применим теперь закон Клапейрона – Менделеева к конечному состоянию газа. По условию объем газа в конечном состоянии равен его объему в начальном; также не менялось количество вещества газа. Поэтому

$$p_2 V = \nu R T_2, \quad (**)$$

где p_2 – давление газа в конечном состоянии. Деля уравнение (*) на уравнение (**), получим:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (***)$$

(фактически, мы вывели таким образом из закона Клапейрона – Менделеева закон Шарля).

Используем теперь условие равновесия поршня. В начальном состоянии сила, действующая на поршень со стороны газа в сосуде, компенсирует действующие на поршень силу тяжести и силу со стороны атмосферного воздуха. В конечном – силу тяжести поршня, силу со стороны атмосферного воздуха (которые не изменились по сравнению с начальным состоянием) и силу тяжести дополнительного груза. Поэтому разность сил, действующих на поршень в конечном и начальном состояниях, равна силе тяжести дополнительного груза:

$$p_2 S - p_1 S = mg,$$

где m – масса груза; g – ускорение силы тяжести. Выражая из этой формулы давление p_2 , подставляя его в (***) и решая полученное уравнение относительно m , находим

$$m = \frac{p_1 S (T_2 - T_1)}{g T_1}.$$

ЗАДАЧИ

2.1. Аквалангисту необходимо определить глубину озера. Никаких иных инструментов, кроме цилиндрической мензурки с делениями у него нет. Как ему справиться с задачей?

2.2. Найти плотность воздуха при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па, $T = 273$ °C). Считать, что молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

2.3 (О, 2007). При нагревании газа на ΔT при постоянном давлении его объем увеличился в два раза. Найти начальную температуру газа.

2.4. Определить температуру газа, находящегося в закрытом сосуде, если при нагревании газа на $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ давление газа увеличивается на величину, составляющую α -ю часть от первоначального давления ($\alpha = 0,004$).

2.5. При нагревании некоторой массы идеального газа на $\Delta T = 250^\circ\text{C}$ его объем увеличился на $\alpha = 1/7$, а давление повысилось на $\beta = 1/2$ от своих первоначальных значений. Какова была первоначальная температура газа?

2.6. Бутылка, наполненная газом, плотно закрыта пробкой, площадь поперечного сечения которой $S = 2,5\text{ см}^2$. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы пробка вылетела из бутылки, если максимальная сила трения, удерживающая пробку $F = 12\text{ Н}$? Начальное давление газа в бутылке и наружное давление воздуха одинаковы и равны $p = 100\text{ кПа}$, а начальная температура $T = 270\text{ К}$.

2.7. В закрытом сосуде содержится идеальный газ. Во сколько раз:

а) уменьшится или увеличится его давление, если сократить на 15 % число его молекул;

б) надо уменьшить или увеличить абсолютную температуру газа, чтобы его давление уменьшилось на 30 %;

в) надо уменьшить или увеличить объем сосуда, чтобы давление газа в нем уменьшилось на 25 %?

2.8 (ВЭ, 2005). До какого давления накачан футбольный мяч объемом $V = 3\text{ л}$ за $n = 40$ качаний поршневого насоса, если при каждом качании насос захватывает из атмосферы объем воздуха $v = 150\text{ см}^3$. Атмосферное давление $p_a = 10^5\text{ Па}$. Считать, что температура воздуха не меняется.

2.9 (О, 2007). При изотермическом сжатии объем газа уменьшился от значения V_1 до значения V_2 , при этом давление газа увеличилось на величину Δp . Найти начальное давление газа.

2.10. Соединенный с атмосферой сосуд содержит воздух при температуре T_1 . Какая часть воздуха покинет сосуд при его нагревании до температуры T_2 ? Тепловым расширением сосуда пренебречь.

2.11. В сосуде находится идеальный газ. Масса газа – m . Когда часть газа из сосуда выпустили, а абсолютную температуру остав-

шегося газа уменьшили в k раза, давление в сосуде уменьшилось в n раз. Какую массу газа выпустили из сосуда?

2.12 (О, 2005, 2007). Сосуд разделен на две части подвижной теплонепроницаемой перегородкой. В одной части объемом V_1 содержится ν_1 молей идеального газа при температуре T_1 . Сколько молей газа содержится в другой части сосуда объемом V_2 при температуре T_2 , если перегородка находится в равновесии.

2.13 (ВЭ, 2004 – 2006). Два баллона с кислородом объемом $V_1 = 2$ л и $V_2 = 7$ л соединили трубкой. Какое давление установится в баллонах, если до соединения оно, соответственно, было равно $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па и $p_2 = 0,52 \cdot 10^5$ Па? Температура газа не изменилась. Газ считать идеальным.

2.14. Три сосуда с одинаковыми объемами сообщаются между собой трубками, перекрытыми кранами. Первый сосуд содержит ν_1 молей некоторого газа, третий – ν_2 молей того же газа, во втором сосуде находится вакуум. Сначала соединили второй и третий сосуды, а после установления равновесия второй сосуд отсоединили от третьего и соединили с первым. В результате давление в первом и втором сосудах установилось равным p . Найти начальное давление в первом сосуде. Температура постоянна.

2.15. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится водород массой $m_1 = 3$ г, с другой – азот массой $m_2 = 21$ г. Какую часть объема цилиндра занимает водород? Температура газов одинакова.

2.16 (ВЭ, 2006). Цилиндрический сосуд делится на две части тонким подвижным поршнем. В одну часть сосуда помещают некоторое количество гелия, в другую – такое же (по массе) количество азота при одинаковых температурах, и поршень приходит в состояние равновесия. Найти длину той части сосуда, в которой находится гелий. Длина сосуда $l = 32$ см.

2.17 (ВЭ, 2003). Воздух внутри открытой в атмосферу оболочки воздушного шара объемом V нагревают газовой горелкой до температуры T , превышающей температуру окружающего воздуха T_0 . Какую массу может поднять воздушный шар? Массой оболочки шара пренебречь. Атмосферное давление – p_0 , молярная масса воздуха – μ .

2.18. Масса $m = 716$ мг органического соединения, имеющего формулу $(C_3H_6O)_n$, находится в газообразном состоянии в сосуде объемом $V = 243$ см³. При температуре $t = 200$ °С газ оказывает

давление $p = 10^5$ Па. Найти значение n . Атомные массы водорода, углерода и кислорода, соответственно, равны: $\mu_{\text{H}} = 1$ г/моль, $\mu_{\text{C}} = 12$ г/моль, $\mu_{\text{O}} = 16$ г/моль. Считать, что газ – идеальный.

2.19 (ВЭ, 2003 – 2006). Найти формулу газообразного соединения углерода с кислородом, если известно, что масса $m = 1$ г этого соединения, помещенная в объем $V = 1$ дм³ при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, оказывает давление $p = 5,6 \cdot 10^4$ Па.

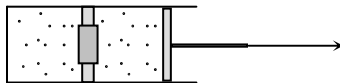
2.20 (ВЭ, 2006 – 2007). В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S под невесомым поршнем находится воздух и резиновый шарик объемом V с давлением воздуха в нем p ($p > p_0$). На сколько поднимется или опустится поршень, если шарик лопнет? Трения нет, атмосферное давление – p_0 , температура воздуха в сосуде неизменна.

2.21 (ВЭ, 2005, 2007). Для измерения собственного объема сыпучего материала его помещают в цилиндр, который герметически закрывают поршнем. Затем измеряют давление воздуха внутри цилиндра p_1 и p_2 ($p_2 > p_1$) при одной и той же температуре и двух положениях поршня, когда суммарные объемы воздуха и материала равны V_1 и V_2 . Найти по этим данным объем материала.

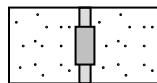
2.22 (О, 2007). В некотором тепловом процессе объем идеального газа зависит от его температуры по закону $V = \alpha T^2$. Во сколько раз изменяется давление газа в этом процессе при изменении его объема от V_1 до V_2 ?

2.23 (О, 2007). В некотором тепловом процессе давление идеального газа зависит от температуры по закону $P = \alpha T^2$. Во сколько раз изменяется давление газа при изменении его объема от V_1 до V_2 ?

2.24 (ВЭ, 2006 – 2007). Цилиндр разделен на два равных отсека перегородкой с отверстием, закрытым пробкой. В обоих отсеках содержится одинаковый газ под давлением p . Пробка вылетает, когда перепад давлений в отсеках равен Δp . С одного конца цилиндр запаян, с другого закрыт поршнем. Поршень медленно вытягивают, пока пробка не вылетит, в этот момент вытягивание прекращают. Найти установившееся давление. Температура постоянна.

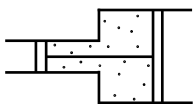


2.25. Цилиндр разделен на два равных отсека перегородкой с отверстием, закрытым пробкой. В обоих отсеках содержится одинаковый газ под дав-

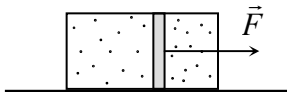


лением p . Пробка вылетает, когда перепад давлений в отсеках равен Δp . Газ в одном отсеке нагревают до тех пор, пока пробка не вылетит, в этот момент нагревание прекращают. Найти давление газа после установления равновесия.

2.26 (О, 2004). В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится идеальный газ. Чтобы уменьшить объем газа в $n = 2$ раза, на поршень надо положить груз массой $m = 1$ кг. Какой еще груз надо положить на поршень, чтобы уменьшить объем газа еще в $k = 3$ раза? Температура поддерживается постоянной.



2.27 (О, 2005). Две открытые с обоих концов в атмосферу трубы с площадями сечений S_1 и S_2 ($S_2 > S_1$) состыкованы между собой. В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при температуре T_0 находятся в равновесии на одинаковых расстояниях от стыка труб. Между поршнями находится идеальный газ. При какой температуре газа между поршнями левый поршень сместится вправо до стыка труб? А при какой температуре до стыка труб переместится правый поршень?



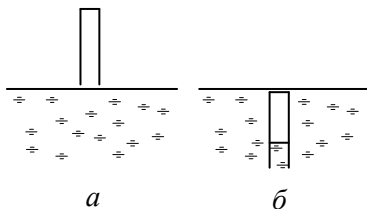
2.28. Цилиндрический сосуд, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, делится на две части тонким подвижным вертикальным поршнем. Справа и слева от поршня находятся по одному молю идеального газа. К поршню приложили горизонтальную силу F . Каким будет положение поршня при установившемся движении? Длина сосуда – l . Температура газа постоянна и равна T . Масса сосуда равна массе поршня. Масса газа много меньше масс сосуда и поршня.

2.29. В закрытой, частично откаченной трубке находится столбик ртути длиной l . Если трубка расположена горизонтально, то столбик находится посередине. Если трубку поставить вертикально, верхний объем будет вдвое больше нижнего. Найти давление воздуха в горизонтально расположенной трубке. Плотность ртути считать известной. Температура не изменяется.

2.30. Открытую вертикальную трубку длиной l опускают в жидкость с плотностью ρ на глубину $l/2$, затем затыкают верхнее отверстие и вытаскивают трубку из жидкости. Известно, что в трубке

остается столбик жидкости высотой x . Найти атмосферное давление. Температура не изменяется.

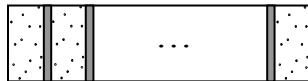
2.31. Вертикальную цилиндрическую трубку длиной l , запаянную с одного конца (рисунок *а*), полностью погружают открытым концом в жидкость плотностью ρ (рисунок *б*). Найти высоту столбика воздуха в трубке. Атмосферное давление – p_a . Температура не изменяется.



2.32 (О, 2003). Вертикально расположенный запаянный цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. Над и под поршнем находятся одинаковые количества одинакового идеального газа, при этом объем нижней части сосуда вдвое меньше объема верхней. Температура газов одинакова и равна T_1 . Каким будет соотношение объемов верхней и нижней частей сосуда при увеличении температуры газов до T_2 ? Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

2.33. Ртутный барометр дает неправильные показания из-за воздуха над ртутью в трубке. При истинном давлении p_1 он показывает p'_1 (т.е. высота столбика ртути равна $p'_1 / \rho g$, ρ – плотность ртути). Чему равно истинное давление p_2 при показании барометра p'_2 , если расстояние от уровня ртути до верхнего конца трубки равно l ? Температура постоянна.

2.34 (О, 2006). В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся n подвижных теплонепроницаемых поршней, делящих сосуд на $n + 1$ отсек (см. рисунок). Первоначально температура газа во всех отсеках была равна T_0 , объемы всех отсеков одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T_1 , а температуру газа в других отсеках поддерживают равной T_0 . На сколько сместится при этом самый правый поршень?



Глава 3

ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ

Представление тепловых процессов с помощью графиков зависимости одного макроскопического параметра газа от другого является очень удобным и плодотворным, поскольку позволяет «увидеть» весь процесс в целом и помогает выделить наиболее характерные его черты.

Для построения графиков тех или иных процессов, происходящих с идеальным газом, используются такие соображения. Во-первых, процесс должен быть как-то задан условием задачи, например задана зависимость давления газа от его объема в этом процессе. За изменением других же параметров газа можно проследить с помощью уравнения состояния (уравнения Клапейрона – Менделеева), которое связывает все макроскопические параметры газа. Рассмотрим пример.

Пример 3.1. Построить графики изотермического, изохорического и изобарического процессов в координатных осях $p - T$, $V - T$ и $p - V$. Как будут изменяться графики при изменении температуры, объема и давления?

Решение. В изотермическом процессе не изменяется температура газа: $T = \text{const}$, но изменяются его давление и объем. Поэтому графиками этого процесса – изотермами – на координатных плоскостях $p - T$ и $V - T$ будут вертикальные прямые. При этом возможны два направления изотермического процесса – с увеличением или уменьшением объема. Как следует из закона Клапейрона – Менделеева,

$$pV = \nu RT, \quad (*)$$

давление газа будет, соответственно, уменьшаться или увеличиваться в этих процессах. На рис. 1, а, б в координатных осях $p - T$ и $V - T$ сплошной линией представлены графики

изотермического процесса, в котором растет давление газа и убывает объем (это показано стрелками на графиках). Если нагреть газ, а затем провести с ним изотермический процесс при большей температуре, то соответствующие изотермы будут расположены на графиках $p - T$ и $V - T$ правее. На рис. 1, a , b эти изотермы показаны пунктиром. Отметим, что изотерма на плоскости $V - T$ не может доходить до оси T , поскольку это отвечало бы нулевому объему газа. На графике $p - T$ изотерма формально доходит до оси температур может, но это отвечало бы бесконечно большому объему газа.

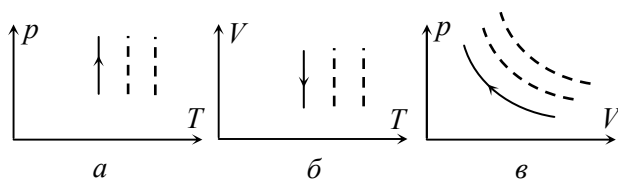


Рис. 1

Чтобы построить изотерму на графике $p - V$, заметим, что из закона (*) следует, что в изотермическом процессе давление зависит от объема по закону

$$p = \frac{\alpha}{V}, \quad (**)$$

где величина $\alpha = \nu RT = \text{const}$ является постоянной. Зависимость (**) на графике $p - V$ изображается гиперболой. Для изотерм, отвечающих большей температуре, величина α больше, и, следовательно, соответствующие гиперболы будут расположены выше. На рис. 1, v на координатной плоскости $p - V$ сплошной линией показан график изотермического процесса. Стрелка на изотерме показывает направление процесса (возрастание давления и убывание объема). Пунктиром показаны изотермы, отвечающие большей температуре.

В изохорическом процессе не меняется объем газа ($V = \text{const}$), поэтому графиками этого процесса – изохорами – на координатных плоскостях $V - T$ и $p - V$ будут, соответственно, горизонтальные и вертикальные прямые. При этом из закона (*) следует, что давление и температура в изохориче-

ском процессе либо одновременно растут, либо одновременно убывают. Изохоры на координатных плоскостях $V - T$ и $p - V$ показаны на рис. 2, б, в (пунктиром – изохоры, отвечающие большему объему).

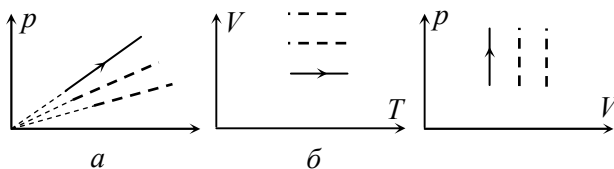


Рис. 2

Изохора на графике $p - T$ строится следующим образом. Как следует из закона (*), в изохорическом процессе давление зависит от температуры по закону

$$p = \beta T, \quad (***)$$

где $\beta = \nu R/V = \text{const}$ в изохорическом процессе. Зависимости (***) отвечает прямая, причем проходящая через начало координат. Однако при построении такой прямой «доводить» ее до начала координат нельзя. Это связано с тем, что при малых температурах газ перестанет быть газом, и все зависимости изменятся. Поэтому обычно при построении изохоры на графике $p - T$ ее «нижний кусочек» изображают пунктиром, чтобы показать, что изохоре отвечает прямая, *продолжение* которой проходит через начало координат (рис. 2, а).

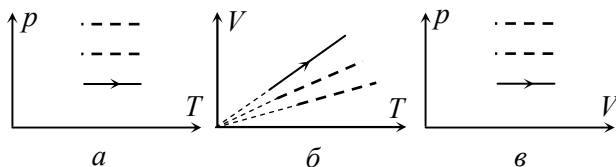


Рис. 3

Для построения изохор, отвечающих бóльшим объемам, заметим, что значение постоянной β в формуле (***) будет убывать при увеличении объема. Это означает, что прямые, изображающие изохоры, отвечающие бóльшим объемам, бу-

дуг расположены более полого. Изохоры на координатной плоскости $p - T$ показаны на рис. 2, *a* (толстым пунктиром – изохоры, отвечающие большему объему).

Аналогичное проведенному выше рассмотрению изобарического процесса ($p = \text{const}$) приводит к графикам (которые называются изобарами), изображенным на рис. 3. Толстым пунктиром на этих графиках показаны изобары, отвечающие большему давлению.

В школьном курсе физики наиболее часто рассматриваются изопроцессы, т.е. процессы, в которых один из макроскопических параметров газа не изменяется. Однако изопроцессы не исчерпывают все возможные процессы с газами. Приведем пример.

Пример 3.2. С идеальным газом происходит процесс, в котором его объем зависит от температуры по закону $V = \alpha/T$, где α – положительная постоянная, причем температура газа в этом процессе возрастает. Построить графики зависимости давления от температуры, давления от объема и объема от температуры в этом процессе.

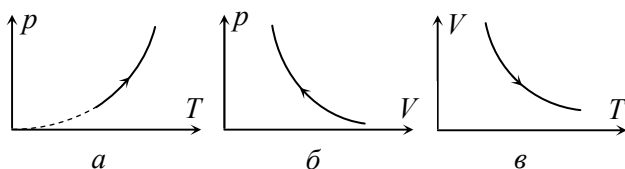
Решение. Из закона Клапейрона – Менделеева заключаем, что в рассматриваемом процессе давление зависит от температуры по закону

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu RT^2}{\alpha} = \beta T^2, \quad (*)$$

где β – положительная постоянная. Аналогично находим, что давление газа зависит от его объема по закону

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu R\alpha}{V^2} = \frac{\gamma}{V^2}, \quad (**)$$

где γ – положительная постоянная. Из (*), (**) следует, что графиками рассматриваемого процесса в координатных осях $p - T$, $p - V$ и $V - T$ являются: квадратичная парабола с вершиной в начале в начале координат, квадратичная гипербола и гипербола соответственно (последняя зависимость дана в условии). Графики приведены на рисунке.



Часто задачи на графическое представление тепловых процессов ставятся так, что процесс в них задается графически (с помощью графика зависимости одного макроскопического параметра от другого). И требуется построить график зависимости других параметров газа друг от друга в этом процессе. В этом случае необходимо на основе данного графика понять, каким уравнением описывается зависимость данных на графике величин друг от друга, а затем с помощью уравнения Клапейрона – Менделеева установить зависимости других параметров газа в этом процессе.

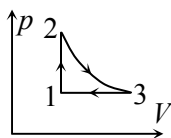


Рис. 1

Пример 3.3. С идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах «давление-объем» приведен на рисунке (участок графика 2 – 3 – изотерма, рис. 1). Построить графики зависимости $p - T$ и $V - T$ для этого процесса.

Решение. Исследуем отдельно все участки процесса: 1 – 2, 2 – 3 и 3 – 1. Как видно из данного в условии графика, процесс 1 – 2 является изохорическим с ростом давления. Поэтому на графиках $p - T$ и $V - T$ ему отвечают: прямая, продолжение которой проходит через начало координат (см. пример 3.1), и горизонтальная прямая соответственно, причем и давление, и температура в этом процессе растут (участки 1 – 2 на рис. 2).

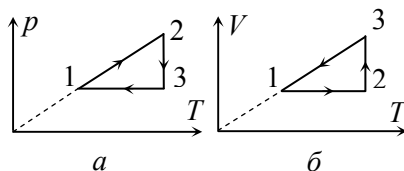


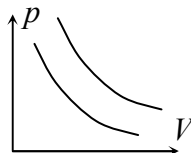
Рис. 2

Процесс 2 – 3 является изотермическим (это говорится в условии) с ростом объема газа и убыванием давления (см. рис. 1). Поэтому на графиках $p - T$ и $V - T$ ему отвечают вертикальные прямые: убывающая на графике $p - T$ и растущая на графике $V - T$ (участки 2 – 3 на рис. 2).

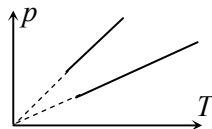
Как следует из рис. 1, процесс 3 – 1 является изобарическим, в котором объем газа убывает (см. рис. 1). Поэтому ему отвечают: горизонтальная прямая на графике $p - T$ и прямая, продолжение которой проходит через начало координат, на графике $V - T$. При этом поскольку, совершив процесс 1 – 2 – 3 – 1, газ возвращается в первоначальное состояние, то все графики должны быть замкнуты. Это значит, что соответствующие прямые должны попасть в начальную точку 1 (участки 3 – 1 на рис. 2).

ЗАДАЧИ

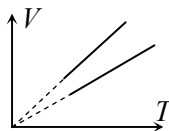
3.1. На рисунке в координатах «давление–объем» приведены две изотермы двух разных идеальных газов, которые отвечают одинаковой температуре. Какой из этих процессов происходил с газом с большей молярной массой, если массы газов одинаковы? Какой из этих процессов происходил с газом с большей массой, если их молярные массы одинаковы?



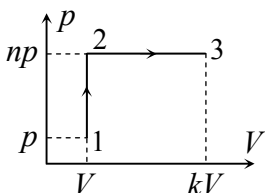
3.2. На рисунке в координатах «давление–температура» приведены две изохоры двух разных идеальных газов, которые отвечают одинаковому объему. Какой из этих процессов происходил с газом с большей молярной массой, если массы газов одинаковы? Какой из этих процессов происходил с газом с большей массой, если их молярные массы одинаковы?



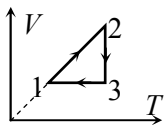
3.3. На рисунке в координатах «объем–температура» приведены две изобары двух разных идеальных газов, которые отвечают одинаковым давлениям. Какой из этих процессов происходил с газом с большей молярной массой, если



массы газов одинаковы? Какой из этих процессов происходил с газом с большей массой, если их молярные массы одинаковы?

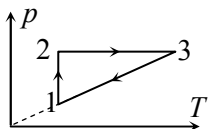


3.4. С идеальным газом происходит процесс, график которого в координатах «давление-объем» приведен на рисунке. Определить отношение максимальной и минимальной абсолютных температур газа в течение всего процесса. Все необходимые величины приведены на рисунке, k и n – известные числа.



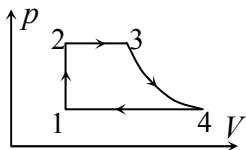
3.5. С идеальным газом происходит циклический процесс, график зависимости объема газа от его температуры для которого приведен на рисунке. Построить графики зависимости давления от температуры и давления от объема для этого процесса. Найти температуру газа в состоянии 3, если

давление в состоянии 1 равно p_1 , а объем в состоянии 2 – V_2 . Газ взят в количестве ν молей.

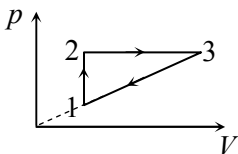


3.6. Некоторая масса идеального газа совершает процесс $1-2-3-1$, график которого в координатах $p-T$ приведен на рисунке. Построить графики зависимости $p-V$ и $V-T$ для этого процесса. Определить массу газа, если известно, что $T_3 = nT_1$. Известно также, что

максимальная плотность газа в ходе этого процесса была равна ρ_0 , а максимальный объем – V_0 .



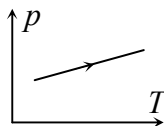
3.7. С идеальным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах «давление-объем» приведен на рисунке (участок графика $3-4$ – изотерма). Известно, что минимальные плотность, давление и температура газа в ходе этого процесса равнялись ρ_0 , p_0 и T_0 соответственно, а температура газа изменилась в течение процесса в n раз. Определить молярную массу газа.



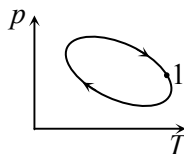
3.8 (О, 2007). На рисунке в координатах $p-V$ изображен циклический процесс $1-$

2 – 3 – 1, происходящий с идеальным газом. Температура газа в состоянии 1 равна T_1 , в состоянии 3 – T_3 . Какова температура газа в состоянии 2? Построить графики зависимости объема от температуры и давления от температуры в этом процессе.

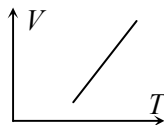
3.9 (ВЭ, 2003 – 2004). С идеальным газом происходит процесс, график зависимости давления газа от его абсолютной температуры для которого представлен на рисунке. Увеличивается или уменьшается объем газа в этом процессе. Качественно построить график $V(T)$ для этого процесса. Масса газа не изменяется.



3.10. Зависимость давления от температуры в некотором процессе, который происходил с идеальным газом, приведена на рисунке. Известно, что масса газа в этом процессе не изменялась. Определить графически, в каких состояниях объем газа максимален и минимален? В каком еще состоянии объем газа равен его объему в состоянии 1?

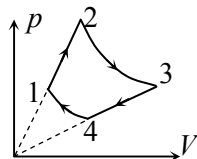


3.11 (ВЭ, 2003 – 2004). С идеальным газом происходит процесс, график зависимости объема газа от его абсолютной температуры для которого представлен на рисунке. Увеличивается или уменьшается давление газа в этом процессе? Качественно построить график $p - V$ для этого процесса. Масса газа не изменяется.

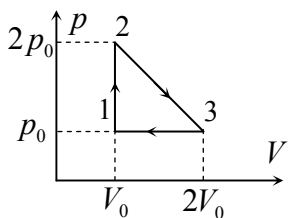


3.12. С идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $p = \alpha V$, где α – положительная постоянная, причем объем газа в этом процессе возрастает. Построить графики зависимости давления газа от его объема, давления от температуры и объема от температуры в этом процессе.

3.13. На рисунке в координатах $p - V$ изображен график циклического процесса, происходящий с идеальным газом. Известно, что участки процесса 2 – 3 и 1 – 4 – изотермы. Построить график этого процесса в координатах $V - T$. Известно, что объем газа в состоянии 1 равен V_1 , в



состоянии 3 – V_3 , объемы в состояниях 2 и 4 равны друг другу. Найти объем газа в состояниях 2 и 4. Масса газа не изменяется.



3.14 (О, 2003). График зависимости давления идеального газа от его объема в циклическом процессе приведен на рисунке. Все участки графика – отрезки прямых. Построить график зависимости объема газа от его температуры в этом процессе. Масса газа в течение процесса не изменяется.

Глава 4

СМЕСИ ГАЗОВ. ЗАКОН ДАЛЬТОНА

Закон Дальтона дает связь макроскопических параметров смеси газов в предположении, что эту смесь можно считать идеальным газом. Этот закон заключается в следующем. Поскольку молекулы идеального газа слабо взаимодействуют друг с другом, отдельные компоненты смеси ничего «не знают» друг о друге, и, следовательно, каждая компонента смеси оказывает давление на стенки сосуда независимо от других компонент. Поэтому давление смеси газов представляет собой сумму давлений отдельных компонент смеси. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к каждой компоненте (при этом необходимо считать, что для каждой компоненты доступен весь объем сосуда V) и складывая их давления, получим для давления p смеси газов

$$\begin{aligned} p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots &= \frac{\nu_1 RT}{V} + \frac{\nu_2 RT}{V} + \frac{\nu_3 RT}{V} + \dots = \\ &= (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots) \frac{RT}{V}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура смеси; ν_1, ν_2, ν_3 – количества вещества каждой компоненты смеси. Давления p_1, p_2, p_3, \dots отдельных компонент смеси газов в формуле (4.1) принято называть *парциальными*.

Закон Дальтона (4.1) показывает, что смесь газов (при условии, что она представляет собой идеальный газ) ничем не отличается от однородного идеального газа: и в том, и в другом макроскопические параметры газа связаны соотношением

$$pV = \nu RT, \quad (4.2)$$

где v – полное число молей газа. Этот вывод абсолютно естествен, поскольку молекулы идеального газа слабо взаимодействуют друг с другом и фактически «не знают», является ли газ однородным или представляет собой смесь разных газов.

Давление смеси газов (4.1) можно выразить через полное число молекул в смеси. Умножая правую и левую части формулы (4.1) на объем сосуда и учитывая, что $R = N_A k$, где N_A – число молекул в моле (число Авогадро), k – постоянная Больцмана, получим из (4.1)

$$pV = (v_1 N_A + v_2 N_A + v_3 N_A + \dots) kT. \quad (4.3)$$

Поскольку произведения $v_i N_A$ представляют собой число молекул i -й компоненты смеси N_i , формулу (4.3) можно представить в виде

$$pV = (N_1 + N_2 + N_3 + \dots) kT = NkT, \quad (4.4)$$

где N – полное число молекул в смеси.

Закон Дальтона устанавливает связь между макроскопическими параметрами смеси газов и, следовательно, позволяет находить один из них по известным значениям остальных. При исследованиях тех или иных процессов, проходящих со смесями, нужно использовать закон Дальтона для различных состояний смеси и находить изменения макроскопических параметров смеси. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.1. В сосуде при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $t = 27$ °С находится смесь азота и кислорода, массы которых равны друг другу. Найти плотность смеси газов.

Решение. По закону Дальтона для смеси газов имеем

$$pV = \frac{m}{\mu_{O_2}} RT + \frac{m}{\mu_{N_2}} RT, \quad (*)$$

где V – объем сосуда; m – масса кислорода и азота в сосуде; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура смеси газов, $T = t + 273$ °С. Из формулы (*) находим массы газов в сосуде

$$m = \frac{pV\mu_{\text{O}_2}\mu_{\text{N}_2}}{(\mu_{\text{O}_2} + \mu_{\text{N}_2})RT}. \quad (**)$$

Учитывая, что масса газа в сосуде равна $2m$, находим плотность смеси газов $\rho = 2m/V$:

$$\rho = \frac{2p\mu_{\text{O}_2}\mu_{\text{N}_2}}{(\mu_{\text{O}_2} + \mu_{\text{N}_2})RT}. \quad (***)$$

Подставляя в формулу (***) данные в условии задачи числовые значения и учитывая, что $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль, $\mu_{\text{N}_2} = 28$ г/моль, найдем:

$$\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ г/м}^3.$$

Пример 4.2 (О, 2004). При испытаниях баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при температуре $t_1 = 727$ °С. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего (по массе) количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре $t_2 = 127$ °С. Найти молярную массу неизвестного газа, если $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль.

Решение. Баллон разрывается, когда давление газа превышает некоторое предельно допустимое для данного баллона значение. Поэтому для кислорода в баллоне в момент его разрыва имеем

$$p_0 = \frac{m}{\mu_{\text{O}_2}} \frac{RT_1}{V}, \quad (*)$$

где p_0 – указанное выше предельное давление; m – масса кислорода в баллоне; $\mu_{\text{O}_2} = 32$ г/моль – молярная масса кислорода; V – объем баллона; T_1 – абсолютная температура кислорода в момент разрыва ($T_1 = t_1 + 273$ °С).

Когда разрывается баллон, содержащий смесь кислорода и неизвестного газа, давление смеси в нем достигает того же значения p_0 . Поэтому для смеси газов в баллоне в момент его разрыва имеем по закону Дальтона

$$p_0 = \left(\frac{(m/2)}{\mu_{\text{O}_2}} + \frac{(m/4)}{\mu_x} \right) \frac{RT_2}{V}, \quad (**)$$

где $m/2$ и $m/4$ – массы кислорода и неизвестного газа в баллоне; μ_x – молярная масса неизвестного газа; T_2 – абсолютная температура смеси газов в момент разрыва баллона, $T_2 = t_2 + 273$ °С. Приравнявая правые части уравнений (*) и (**) и сокращая неизвестные V и m , а также универсальную газовую постоянную R , получим

$$\frac{T_1}{\mu_{\text{O}_2}} = \left(\frac{T_2}{2\mu_{\text{O}_2}} + \frac{T_2}{4\mu_x} \right). \quad (***)$$

Решая уравнение (***), найдем молярную массу неизвестного газа

$$\mu_x = \frac{\mu_{\text{O}_2} T_2}{2(2T_2 - T_1)}.$$

Подставляя в эту формулу значения молярной массы кислорода и абсолютные температуры, получим $\mu_x = 4$ г/моль. Таким образом, неизвестный газ – гелий.

С помощью закона Дальтона можно проследить за изменениями физических параметров смеси газов при протекании в ней химических реакций. Основная идея такого исследования заключается в том, что с помощью уравнения химической реакции можно установить соотношения между числом молекул в исходной и получившейся после протекания реакции смесях. Затем нужно применить закон Дальтона к исходной и получившейся смесям и установить таким образом связь между параметрами. Можно решить и обратную задачу: по известным изменениям физических параметров смеси с помощью закона Дальтона можно проследить за изменением числа частиц и восстановить уравнение химической реакции (отметим, что уравнения многих химических реакций были установлены именно таким образом). Рассмотрим следующий пример.

Пример 4.3 (О, 2002). Смесь двух одноатомных газов X и Y находится в некотором объеме. Давление смеси – p_0 , абсо-

плотная температура – T_0 . При повышении температуры смеси в ней происходит химическая реакция $nX + mY \rightarrow X_nY_m$ с образованием газообразного соединения X_nY_m . При температуре $T_1 = 3T_0$ все молекулы газов X и Y прореагировали. Давление получившегося газа при этой температуре равно $p_1 = (3/4)p_0$. Определить химическую формулу соединения X_nY_m (т.е. значения индексов n и m). Все газы считать идеальными.

Решение. По закону Дальтона для исходной смеси газов и закону Клапейрона – Менделеева для газа в конечном состоянии имеем

$$\begin{aligned} p_0V &= (N_X + N_Y)kT_0; \\ p_1V &= NkT_1, \end{aligned} \quad (*)$$

где V – объем сосуда; N_X , N_Y и N – число молекул газов X , Y и X_nY_m . Согласно уравнению химической реакции образования газа X_nY_m



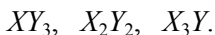
каждая молекула соединения X_nY_m образуется из n молекул газа X и m молекул газа Y . Поэтому $N_X = nN$, $N_Y = mN$, и закон Дальтона для исходной смеси газов можно представить в виде

$$p_0V = (n + m)NkT_0. \quad (***)$$

Деля уравнение (***) на уравнение (*) и учитывая данные в условии задачи соотношения давлений и температур начального и конечного состояний, получим

$$n + m = 4.$$

Из этого уравнения заключаем, что возможны три варианта соединений молекул X и Y :



ЗАДАЧИ

4.1. Определить плотность смеси $m_1 = 4$ г водорода и $m_2 = 32$ г кислорода при температуре $t = 7^\circ\text{C}$ и давлении $p = 10^5$ Па.

4.2 (ВЭ, 2006). В сосуде находится смесь кислорода и азота, причем масса кислорода в $n = 3$ раза больше массы азота. Давление смеси $p = 10^5$ Па, температура $T = 300$ К. Найти плотность смеси газов.

4.3. Лазерные трубки объемом $V_0 = 60 \text{ см}^3$ должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении $k = 5 : 1$ соответственно при общем давлении в трубке $p_0 = 800 \text{ Па}$. Имеются баллоны с этими газами, каждый объемом $V = 2 \text{ л}$. Давление в баллоне с гелием $p_1 = 6670 \text{ Па}$, в баллоне с неоном $p_2 = 2670 \text{ Па}$. Какое число лазерных трубок можно заполнить этим количеством газа? Считать, что газ из любого баллона может быть использован полностью.

4.4. В сосуде объемом $V = 10 \text{ л}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$ находится смесь следующих газов: $\nu_1 = 0,2$ моля водорода (H_2), $\nu_2 = 0,3$ моля кислорода (O_2), $\nu_3 = 0,4$ моля углекислого газа (CO_2). Найти давление и среднюю молярную массу смеси.

4.5. За один вдох в легкие человека попадает воздух объемом $V = 0,5 \text{ л}$. Сколько молекул кислорода содержится в таком объеме воздуха. Приблизительно можно считать, что воздух представляет собой смесь молекулярного азота (N_2) с массовой долей $\eta_1 = 76 \%$, молекулярного кислорода (O_2) с массовой долей $\eta_2 = 23 \%$ и аргона (Ar) с массовой долей $\eta_3 = 1 \%$ (все остальные компоненты воздуха составляют значительно меньшие доли). Молярная масса аргона $\mu_{\text{Ar}} = 40 \text{ г/моль}$. Температура и давление воздуха – $t = 27^\circ\text{C}$, $p = 10^5 \text{ Па}$.

4.6 (ВЭ, 2006 – 2007). Два сосуда заполнены разными газами при одинаковых температурах. Давление в сосудах равно p_1 и p_2 , а число молекул N_1 и N_2 соответственно. Сосуды соединяют. Найти давление смеси, считая, что температура не изменялась.

4.7. Теплоизолированный сосуд разделен неподвижной перегородкой на части объемами V_1 и V_2 . В первую поместили ν_1 молей атомарного газа одного сорта, во вторую – ν_2 молей другого при одинаковой температуре. Перегородка абсолютно проницаема для молекул газа первого сорта и только для них. Определить отношение установившихся давлений в обеих частях. Газы – идеальные.

4.8. Сосуд разделен на две части неподвижной перегородкой. В одну часть сосуда помещают некоторое количество водорода, в другую – гелия. Перегородка пропускает молекулы гелия и является непроницаемой для водорода. После установления равновесия давление в одной части сосуда увеличилось в α раз, в другой уменьшилось в β раз. Определить отношение объемов частей сосуда и масс водорода и гелия в сосуде. Температура газов постоянна.

4.9 (ВЭ, 2005 – 2006). Закрытый цилиндрический сосуд разделен на две одинаковые части подвижной непроницаемой перегородкой. В одной части сосуда находится ν_1 молей газа 1, во второй – смесь – ν_2 молей газа 2 и некоторое количество газа 1. Температура газов в обеих частях сосуда одинакова, а перегородка находится в равновесии. В некоторый момент перегородка становится проницаемой для газа 2. Каким будет отношение объемов частей сосуда после установления нового равновесия? Температура не изменялась.

4.10 (ВЭ, 2004 – 2005). В сосуде объемом $V = 0,5 \text{ м}^3$ находится $m = 1 \text{ г}$ пароводяного йода. При температуре $t = 1000^\circ\text{C}$ давление в сосуде оказалось равным $p = 10^5 \text{ Па}$. Найти степень диссоциации молекул йода J_2 на атомы йода при этих условиях. Степень диссоциации – отношение числа диссоциировавших молекул к общему числу молекул до диссоциации. Молярная масса йода J_2 равна $\mu = 254 \text{ г/моль}$.

4.11 (ВЭ, 2003 – 2005). В закрытом сосуде находится идеальный двухатомный газ. При увеличении температуры в $\beta = 3$ раза давление газа увеличилось в $\alpha = 3,15$ раза. Какая часть молекул газа η диссоциировала на атомы?

4.12 (ВЭ, 2003). В сосуде объемом $V = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ находится молекулярный азот N_2 массой $m = 0,28 \text{ г}$. Азот нагревают до температуры $T = 1500^\circ\text{C}$. При этой температуре $\alpha = 0,3$ часть молекул азота диссоциирует на атомы. Определить давление в сосуде.

4.13. В сосуд помещают двухатомный азот. При некоторой температуре α -я часть молекул азота диссоциировала на атомы, а давление в сосуде равно p_1 . Температуру увеличивают в n раз, при этом диссоциирует β -я часть первоначального количества молекул ($\beta > \alpha$). Найти давление в сосуде при этой температуре.

4.14 (ВЭ, 2005, 2007). В сосуде содержатся $\nu_1 = 2$ моля гелия и $\nu_2 = 1$ моля водорода при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ и давлении $p_1 = 10^3 \text{ Па}$. Смесь газов нагревают до температуры $T_2 = 10000 \text{ К}$, при этом все молекулы водорода диссоциируют на атомы. Найти давление смеси при температуре T_2 . Объем газа не изменяется.

4.15 (О, 2007). В сосуде объемом V_0 при температуре T_0 и давлении p_0 находился воздух, содержащий некоторое количество озона O_3 . С течением времени озон полностью превратился в молекулярный кислород. Получившийся воздух при температуре T и объеме V оказывает то же самое давление p_0 , что и первоначальная смесь газов. Найти первоначальное число молей озона в сосуде.

4.16 (ВЭ, 2005). В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T_1 , когда азот полностью диссоциировал на атомы, а диссоциацией водорода можно пренебречь, давление в сосуде равно p_1 . При температуре T_2 ($T_2 > T_1$), когда оба газа полностью диссоциировали, давление в сосуде равно p_2 . Найти отношение числа атомов азота и водорода в смеси.

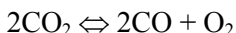
4.17. В сосуде содержатся ν_1 моля гелия и ν_2 моля водорода при температуре T_1 и давлении p_1 . Смесь газов нагревают до температуры T_2 , при этом все молекулы водорода диссоциируют на атомы. Найти новое давление смеси. Объем не изменяется.

4.18. В сосуде находится озон (O_3). Когда α -я часть молекул озона превращается в кислород (O_2), газ оказывает давление p . Найти давление газа, если в молекулярный кислород превращаются β -я часть первоначального количества молекул озона. Температура газа не менялась.

4.19. В закрытом сосуде при давлении p_0 находится смесь кислорода и водорода. Количества вещества кислорода и водорода в смеси одинаковы. Происходит химическая реакция образования воды, в которую вступают максимально возможные количества водорода и кислорода. Затем газ охлаждают до первоначальной температуры. Найти давление газа в конечном состоянии. Конденсации водяного пара не происходит. Пар можно считать идеальным газом.

4.20 (О, 2005). В сосуде, разделенном пополам перегородкой, находятся $m_1 = 2$ г водорода (H_2) и $m_2 = 32$ г кислорода (O_2) при температуре $t_0 = 27^\circ C$ и одинаковом давлении. После того как перегородку убрали, и газы прореагировали с образованием воды H_2O , установилась температура $t = 127^\circ C$ и давление $p = 10^5$ Па. Определить первоначальное давление в сосуде. Конденсации пара не происходит. Пар можно считать идеальным газом.

4.21. В сосуде объемом $V = 1$ л находится углекислый газ CO_2 массой $m = 0,1$ г. При температуре $T = 2500$ К некоторая часть молекул CO_2 диссоциировала на молекулы кислорода O_2 и угарного газа CO :



При этом давление в сосуде оказалось равным $p = 5,5 \cdot 10^4$ Па. Найти отношение числа молекул CO к числу молекул CO_2 в смеси.

Глава 5

ТЕРМОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА: ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ, КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛОТЫ, ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Из-за того, что молекулы находятся в состоянии непрерывного движения и взаимодействуют друг с другом, любое макроскопическое тело, даже не движущееся в пространстве и не находящееся в поле внешних сил, обладает определенной энергией. Эта энергия равна сумме кинетических энергий всех молекул и потенциальных энергий их взаимодействий друг с другом и называется *внутренней энергией* тела.

Поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул идеального газа много меньше их кинетической энергии, внутренняя энергия идеального газа равна сумме кинетических энергий всех его молекул. Если каждая молекула газа состоит из одного атома (газ, состоящий из таких молекул, называется одноатомным), то кинетическая энергия каждой молекулы связана только с ее поступательным движением. Поэтому внутренняя энергия одноатомного идеального газа определяется соотношением

$$U = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} + \dots = N \left(\frac{mv^2}{2} \right)_{\text{ср}}, \quad (5.1)$$

где v_1, v_2, v_3, \dots – скорости молекул газа; $(mv^2/2)_{\text{ср}}$ – средняя кинетическая энергия; N – число молекул. Используя определение температуры (1.3) и вводя в формулу (5.1) количество вещества $N = \nu N_A$ (N_A – число Авогадро), получим

$$U = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (5.2)$$

где k – постоянная Больцмана; $R = N_A k$ – универсальная газовая постоянная.

Внутренняя энергия жидкостей и твердых тел определяется суммой кинетических энергий молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Из-за огромного количества молекул последнюю величину вычислить невозможно. Поэтому простого выражения для внутренней энергии жидкостей и твердых тел не существует.

Если каждая молекула газа состоит из двух, трех, ... атомов (двух-, трех-, ... атомный газ), то с вращением молекулы вокруг своей оси и с колебаниями атомов в молекуле друг относительно друга также связана определенная энергия. Поэтому внутренняя энергия двух-, трех-, ... атомного газа определяется суммой энергии поступательного движения (формула (5.2)), энергии вращения и энергии колебаний. Как показывает опыт, вклад этих слагаемых в полную внутреннюю энергию газа является различным при разных температурах. При температурах ниже 100 К внутренняя энергия двухатомного идеального газа (если, конечно, газ при этих температурах остается газом) определяется формулой (5.2), при комнатных – формулой, аналогичной (5.2), но с коэффициентом 5/2, при температурах ~ 1500 К (если молекулы газа не диссоциируют при этой температуре на атомы) – формулой, аналогичной (5.2), но с коэффициентом 7/2. При решении задач для внутренней энергии двухатомного газа, как правило, используют формулу (5.2) с коэффициентом 5/2.

Чтобы изменить внутреннюю энергию идеального газа, нужно изменить его температуру. При этом существуют два механизма такого изменения. Во-первых, можно привести газ в тепловой контакт с более горячим телом. Тогда при столкновениях медленных молекул газа с более быстрыми молекулами тела первым в каждом акте столкновений передается энергия. В результате внутренняя энергия газа повышается, тела – понижается. Количество энергии, переданной газу в процессе хаотических столкновений молекул, называется количеством теплоты Q , переданной газу. В результате передачи теплоты имеем

$$\Delta U = Q, \quad (5.3)$$

где ΔU – приращение (или изменение) внутренней энергии газа, равное разности его конечной и начальной внутренних энергий*. Поскольку приращение внутренней энергии ΔU может быть как положительным (если внутренняя энергия растет), так и отрицательным (если внутренняя энергия убывает), то количество переданной газу теплоты следует считать величиной алгебраической

$$Q > 0, \text{ если газ получает энергию, и } Q < 0, \text{ если отдает.} \quad (5.4)$$

Существует и другой способ изменения внутренней энергии. Если газ расширяется без теплообмена с окружающей средой, его температура, а следовательно, и внутренняя энергия будут уменьшаться за счет того, что молекулы газа будут совершать положительную работу A над движущимися стенками сосуда, в котором находится газ, и окружающими телами и при этом отдадут часть своей энергии. Если газ сжимается, то молекулы газа будут совершать отрицательную работу (т.е. будут получать энергию), и внутренняя энергия газа увеличится. Поэтому в этих процессах:

$$\Delta U = -A, \quad (5.5)$$

где A – работа, совершенная газом над стенками сосуда. Величина A может быть как положительна, так и отрицательна:

$$A > 0, \text{ если газ расширяется, и } A < 0, \text{ если газ сжимается.} \quad (5.6)$$

Если одновременно имеют место оба механизма изменения внутренней энергии (и теплообмен, и расширение-сжатие газа, в котором газ совершает механическую работу), то

$$\Delta U = Q - A, \text{ или } Q = \Delta U + A. \quad (5.7)$$

Формула (5.7), представляющая собой закон сохранения энергии для тепловых процессов, называется первым законом (или первым началом) термодинамики.

В связи с первым законом термодинамики часто используют следующую терминологию и систему обозначений (часть из них нами уже использована).

Внутренняя энергия газа однозначно определяется его состоянием. Действительно, если состояние газа задано, т.е. задана его температура, то внутренняя

* Приращением любой физической величины называется разность ее конечного и начального (именно в такой последовательности!) значений.

энергия может быть определена по формуле (5.2) (или аналогичной формуле с другим коэффициентом, если газ не одноатомный). Это значит, что внутренняя энергия является, как говорят, *функцией состояния*. Поэтому имеет смысл говорить о приращении этой величины в некотором процессе, как разности значений внутренней энергии в конечном и начальном состояниях этого процесса

$$\Delta U = U_{\text{к}} - U_{\text{н}}.$$

Что касается количества теплоты и работы, то эти величины функциями состояния не являются. Действительно, бессмысленно говорить о *количестве теплоты или работе газа в каком-то состоянии*, поскольку эти величины зависят от того, с помощью какого процесса газ пришел в это состояние. Поэтому о количестве теплоты и работе газа говорят, как о *функциях процесса*. В связи с этим использовать для количества теплоты и работы обозначения ΔQ и ΔA не очень точно, поскольку буквой Δ в физике принято обозначать приращение (или изменение) какой-либо величины, которое равно разности ее конечного и начального значений. Поэтому для обозначения малых величин количества теплоты и работы используют не прописную греческую букву Δ , а ту же букву, но строчную δ , например δQ и δA .

Формула (5.7) позволяет находить одну из величин – приращение внутренней энергии ΔU , количество сообщенной газу теплоты Q , или работу, совершенную газом A , если две другие величины известны. При этом приращение внутренней энергии газа может быть найдено и независимо от первого закона термодинамики через приращение его температуры. Действительно, из определения внутренней энергии одноатомного идеального газа (5.2) находим:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (5.8)$$

где ΔT – приращение температуры газа (при условии, что не меняется количество вещества). Кроме того, с помощью закона Клапейрона – Менделеева можно связать приращение внутренней энергии одноатомного идеального газа с изменениями его давления и объема. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.1. Найти внутреннюю энергию одноатомного идеального газа, занимающего объем V при давлении p . То же для двухатомного газа. Как изменится энергия воздуха в комнате, если его нагреть от температуры T_1 до температуры T_2 ?

Решение. Внутренняя энергия U одноатомного идеального газа определяется соотношением

$$U = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (*)$$

где ν – число молей газа; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура газа. Входящая в правую часть формулы (*) комбинация входит также в закон Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$, где p и V – давление и объем газа. Поэтому

$$U = \frac{3}{2} pV. \quad (**)$$

Энергия двухатомного газа (каковым можно считать воздух) при температурах, близких к комнатным, определяется формулой (**), но с коэффициентом $5/2$. Поскольку в процессе нагревания воздуха в комнате не меняется его давление (так как воздух в комнате контактирует с атмосферой) и объем (мы пренебрегаем тепловым расширением стенок), дляращения внутренней энергии имеем

$$\Delta U = 0. \quad (***)$$

Постоянство внутренней энергии воздуха в комнате при нагревании связано с тем, что часть молекул воздуха при нагревании будет уходить из комнаты, и произведение νRT будет неизменным.

Также независимо от первого закона термодинамики может быть найдена работа газа в том или ином процессе. При этом используются следующие соображения. Пусть в сосуде, закрытом подвижным поршнем, находится газ под давлением p . Пусть далее поршень переместился на бесконечно малую величину δx ; тогда объем газа изменился на $\Delta V = \pm S \delta x$ (S – площадь поршня, «+» – при расширении, «–» – при сжатии). Очевидно, при бесконечно малом перемещении поршня давление газа в сосуде практически не изменяется. Поэтому в таком процессе газ совершает над поршнем следующую работу

$$A = F \delta x \cos \alpha = p S \delta x \cos \alpha = p \Delta V, \quad (5.9)$$

где α – угол между силой, действующей со стороны газа на поршень, и его перемещением ($\cos \alpha = 1$ при расширении газа, $\cos \alpha = -1$ при его сжатии). Пусть теперь объем газа изменяется на конечную величину. Поскольку такое изменение объема можно представить как сумму бесконечно малых приращений $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots$, работа газа равна сумме

$$A = p_1 \Delta V_1 + p_2 \Delta V_2 + p_3 \Delta V_3 + \dots, \quad (5.10)$$

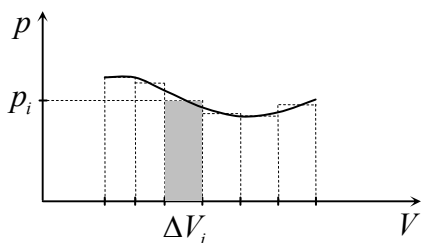


Рис. 5.1

где p_i – давление газа в тот момент, когда изменение его объема равнялось ΔV_i . Сумма (5.10) имеет следующий геометрический смысл. Построим для рассматриваемого процесса график зависимости давления газа от его объема (пример такой зависимости приведен на рис. 5.1). Все величины, входящие в формулу

(5.10), для работы газа имеют определенный графический образ на этом графике. Малые элементы объема ΔV_i можно отложить с помощью отрезков на оси объемов (в том масштабе, который принят для этой оси). Давления p_i – как расстояние от оси объемов до графика в тех его точках, когда изменение объема газа равнялось ΔV_i . Произведения $p_i \Delta V_i$ – как площадь малого прямоугольника с основанием ΔV_i и высотой от оси объемов до графика (один из таких прямоугольников выделен на рис. 5.1). Поэтому работа газа представляет собой площадь фигуры, лежащей под графиком зависимости давления от объема в рассматриваемом процессе (со знаком «+» при расширении газа, со знаком «–» при сжатии). Отсюда следует, что если процесс, происходящий с газом, определен, т.е. известна зависимость давления газа от его объема в этом процессе, то работа газа может быть вычислена, как площадь фигуры под графиком зависимости $p(V)$. В частности, можно определить работу газа, совершенную в любом изопроцессе. Например, работа газа в изобарическом процессе равна

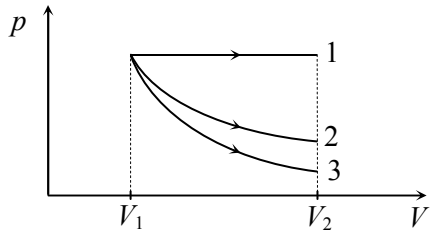
$$A = p\Delta V, \quad (5.11)$$

где p – давление газа (постоянное в течение изобарического процесса); $\Delta V = V_{\text{к}} - V_{\text{н}}$ – приращение его объема ($V_{\text{к}}$ и $V_{\text{н}}$ – конечный и начальный объемы газа в этом процессе).

После того как приращение внутренней энергии газа и его работа вычислены, по первому закону термодинамики можно определить количество тепла, сообщенное газу. Рассмотрим пример.

Пример 5.2. Одноатомный идеальный газ расширяется из некоторого начального состояния с объемом V_1 до объема V_2 один раз изотермически, второй изобарически, третий адиабатически. В каком процессе газ совершает большую работу? Получает большее количество тепла?

Решение. Чтобы сравнить работы, совершенные газом, построим графики зависимости давления от объема в указанных процессах и сравним площади под этими графиками. При изобарическом расширении давление не изменяется, поэтому график зависимости $p(V)$ – горизонтальная прямая (зависимость 1 на рисунке). В изотермическом процессе давление зависит от объема по закону



$$p = \frac{\alpha}{V}, \quad (*)$$

где $\alpha = \nu RT$. Графиком зависимости (*) является гипербола, «начинающаяся» в той же точке, что и изобара 1, поскольку по условию начальное состояние газа для всех процессов одно и то же (кривая 2 на рисунке).

Адиабатическим называется процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой. Докажем, что кривая зависимости давления от объема в адиабатическом процессе будет расположена круче изотермы (кривая 3 на рисунке). Пусть газ совершает адиабатическое расширение. Тогда газ

совершает работу, причем затрачивает на это часть своей внутренней энергии (нет теплообмена), которая, таким образом, убывает. Поэтому при адиабатическом расширении температура газа уменьшается. Поскольку все точки, лежащие на плоскости $p - V$ выше некоторой изотермы, отвечают состояниям с большей (чем на этой изотерме) температурой, а ниже изотермы – с меньшей температурой (см. гл. 2), то конечному состоянию газа при адиабатическом расширении на графике $p(V)$ отвечает точка, лежащая ниже изотермы, проходящей через начальное состояние (т.е. ниже кривой 2 на рисунке).

Можно доказать, что в адиабатическом процессе зависимость давления идеального одноатомного газа от его объема определяется соотношением (эта формула не входит в программу школьного курса физики):

$$p = \frac{\beta}{V^{5/3}}, \quad (**)$$

где $\beta = \text{const}$. Графиком зависимости (**) является кривая, убывающая быстрее, чем гипербола (*) (кривая 3 на рисунке).

Сравнение площадей под графиками (см. рисунок) показывает, что наибольшей (среди этих трех процессов) является работа газа в изобарическом процессе (самая большая площадь под графиком), наименьшей – в адиабатическом (самая маленькая площадь)

$$A_p > A_T > A_{\text{ад}}, \quad (***)$$

где A_p , A_T и $A_{\text{ад}}$ – работы, совершенные газом в изобарическом, изотермическом и адиабатическом процессах. (В молекулярной физике часто используются следующие обозначения. Если рассматривается процесс, в котором не изменяется какой-то макроскопический параметр газа, то в качестве индекса у всех величин, характеризующих этот процесс, пишут символ этого параметра. Например, C_p обозначает теплоемкость газа в процессе, в котором не изменяется давление; C_V – теплоемкость газа при постоянном объеме и т.д. Далее будем использовать такие обозначения.)

Сравним теперь количества теплоты, полученные газом в рассматриваемых процессах. Для этого воспользуемся первым законом термодинамики. В изотермическом процессе температура газа не меняется, поэтому приращение внутренней энергии газа в этом процессе ΔU_T равно нулю. Следовательно,

$$Q_T = A_T,$$

причем поскольку газ в рассматриваемом изотермическом процессе расширяется, то A_T и Q_T положительны.

Очевидно, при изобарическом расширении газа его температура растет (так как растет произведение pV , которое по закону Клапейрона – Менделеева пропорционально температуре газа). Поэтому $\Delta U_p > 0$. А так как работа газа в изобарическом процессе больше работы в изотермическом (см. (**)), то

$$Q_p = \Delta U_p + A_p > Q_T = A_T.$$

Учитывая, что в адиабатическом процессе газу не сообщают тепло ($Q_{ад} = 0$), заключаем, что количества теплоты, полученные газом в рассматриваемых процессах, удовлетворяют неравенствам

$$Q_p > Q_T > Q_{ад}.$$

Во всех задачах на термодинамику используется рассмотренная выше логика. Во-первых, количество теплоты, сообщенное газу, его работа и приращение внутренней энергии связаны первым законом термодинамики. Во-вторых, существуют независимые от первого закона термодинамики способы вычисления приращения внутренней энергии и работы через макроскопические параметры газа и их изменения в тех или иных процессах. В результате первый закон термодинамики позволяет установить связь между количеством сообщенной газу теплоты и изменениями его макроскопических параметров. Рассмотрим еще один пример.

Пример 5.3. Некоторое количество идеального одноатомного газа участвует в процессе, в ходе которого сначала давление газа изохорически увеличили в $n = 2$ раза, а затем его объем изобарически увеличили в $k = 3$ раза. Какое количество теплоты сообщают газу в указанном процессе? Начальное

давление и объем газа $p_0 = 10^5$ Па и $V_0 = 100$ л соответственно.

Решение. Применим к рассматриваемому процессу первый закон термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Используя формулу (5.2) для внутренней энергии одноатомного идеального газа, получим

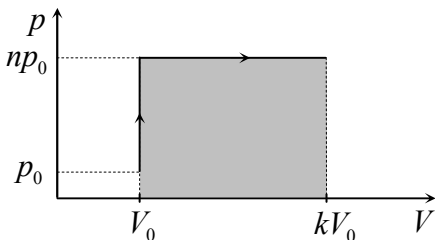
$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (\nu R T_1 - \nu R T_0), \quad (*)$$

где ν – количество вещества рассматриваемого газа; T_0 и T_1 – начальная и конечная температуры газа. По закону Клапейрона – Менделеева для этих состояний имеем

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad n k p_0 V_0 = \nu R T_1 \quad (**)$$

(в формуле (**)) учтено, что давление газа в конечном состоянии рассматриваемого процесса в n раз больше начального, объем – в k раз). Вычитая первое уравнение (**) из второго и подставляя эту разность в (*), найдем приращение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_0 V_0 (nk - 1).$$



Для того чтобы найти работу газа, построим график исследуемого процесса в координатах $p - V$. Этот график приведен на рисунке. Работа газа представляет собой площадь под

графиком процесса, т.е. площадь фигуры, выделенной на рисунке. Из графика находим

$$A = np_0(kV_0 - V_0) = np_0V_0(k - 1).$$

Подставляя приращение внутренней энергии газа ΔU и работу газа A в первый закон термодинамики, найдем количество теплоты, сообщенное газу в исследуемом процессе

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2} p_0 V_0 (nk - 1) + np_0 V_0 (k - 1) = \\ &= p_0 V_0 \left[\frac{5}{2} nk - n - \frac{3}{2} \right] = 115 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

Для характеристики способности тела нагреваться при сообщении ему теплоты вводится понятие теплоемкости тела, которая определяется следующим образом:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \quad (5.12)$$

где Q – количество теплоты, сообщенное телу в том или ином процессе; ΔT – приращение температуры тела при сообщении ему теплоты Q .

Очевидно, теплоемкость зависит от того, какое тело или газ рассматривается (тела или газы по-разному нагреваются при сообщении им одинакового количества теплоты), и от рассматриваемого процесса (например, в изотермическом процессе газ вообще не нагревается, сколько бы теплоты ему не сообщили, в адиабатическом – нагревается без теплообмена). Однако от Q или ΔT (несмотря на то, что эти величины входят в определение теплоемкости) эта величина не зависит. Ведь Q и ΔT в формуле (5.12) – это не независимые, а связанные друг с другом величины: ΔT в знаменателе формулы (5.12) – приращение температуры тела, произошедшее при сообщении ему именно того количества теплоты Q , которое входит в числитель. Поэтому при повышении величины Q , например, вдвое, величина ΔT увеличится также вдвое, и их отношение не изменится. Следовательно, это отношение вообще не зависит от Q и ΔT , а является характеристикой тела и процесса.

Теплоемкость любого тела или газа пропорциональна массе этого тела или газа. Действительно, если для нагревания тела массой m на ΔT необходимо затратить количество теплоты Q , то для нагревания двух таких тел (или, другими словами, тела массой $2m$) на ту же самую величину ΔT необходимо затратить теплоту $2Q$, поэтому теплоемкость тела массой $2m$ вдвое больше теплоемкости тела массой m . В связи с такой зависимостью теплоемкости от массы часто используют удельную теплоемкость, которой называется теплоемкость единицы массы тела

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}. \quad (5.13)$$

Для газов часто используют понятие молярной теплоемкости, как теплоемкости одного моля газа. Очевидно, что удельная или молярная теплоемкости являются характеристикой вещества тела или газа.

Поскольку внутренняя энергия идеального газа простым образом связана с температурой, то теплоемкость идеального газа в том или ином процессе можно вычислить. Для этого нужно мысленно: 1) сообщить газу некоторое количество теплоты Q (причем это количество – вспомогательная величина, теплоемкость от нее не зависит); 2) вычислить работу A , совершенную газом в рассматриваемом процессе; 3) с помощью первого закона термодинамики найти приращение температуры газа ΔT ; 4) вычислить отношение (5.12), в котором вспомогательная величина Q должна сократиться. Полученный результат и даст теплоемкость газа в рассматриваемом процессе.

Теплоемкость твердых тел и жидкостей вычислить невозможно, поскольку нельзя найти их внутреннюю энергию. Теплоемкости твердых тел и жидкостей являются их экспериментально измеряемыми (табличными) характеристиками.

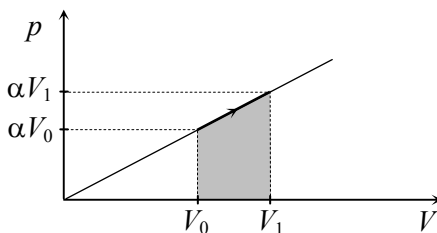
Рассмотрим пример вычисления теплоемкости газа.

Пример 5.5 (ВЭ, 2004). С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $P = \alpha V$. Найти теплоемкость газа в этом процессе.

Решение. Сообщим газу некоторое количество теплоты Q . Найдем приращение температуры газа ΔT . По первому закону термодинамики имеем

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + A, \quad (*)$$

где ν – число молей газа. Чтобы найти приращение температуры газа ΔT из закона (*), нужно вычислить его работу.



Для этого построим график зависимости давления газа от его объема в исследуемом процессе и найдем площадь под участком графика, отвечающего нагреву газа на ΔT . Очевидно, график зависимости давления от объема для рассматриваемого процесса представляет собой участок прямой, проходящей через начало координат. Этот график построен на рисунке, участок прямой, отвечающий исследуемому нагреву, и площадь под ним выделены. Пусть объем газа до нагревания был равен V_0 , после нагревания – V_1 . Тогда давления газа до p_0 и после p_1 нагревания можно найти с помощью уравнения, связывающего давление и объем в исследуемом процессе (см. рисунок)

$$p_0 = \alpha V_0, \quad p_1 = \alpha V_1.$$

Находя площадь выделенной на рисунке фигуры (которая представляет собой трапецию с основаниями αV_0 и αV_1 и высотой $V_1 - V_0$), определим работу газа при его нагревании на ΔT :

$$A = \frac{\alpha V_0 + \alpha V_1}{2} (V_1 - V_0) = \frac{\alpha V_1^2 - \alpha V_0^2}{2}. \quad (**)$$

Применяем теперь закон Клапейрона – Менделеева к начальному (с объемом V_0) и конечному (с объемом V_1) состояниям газа. Имеем

$$\nu RT_0 = p_0 V_0 = \alpha V_0^2, \quad \nu RT_1 = p_1 V_1 = \alpha V_1^2,$$

где T_0 и T_1 – температуры газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая первую формулу из второй и подставляя найденную разность в (**), найдем

$$A = \frac{1}{2} \nu R \Delta T. \quad (***)$$

Теперь из первого закона термодинамики можно найти связь количества сообщенной теплоты и приращение температуры газа. Подставляя работу (***) в (*), найдем приращение температуры газа ΔT в исследуемом процессе при сообщении ему количества теплоты Q

$$\Delta T = \frac{Q}{2\nu R}$$

(как и должно быть, величина ΔT оказалась пропорциональной Q). Подставляя величину ΔT в определение теплоемкости $C = Q/\Delta T$, получим для теплоемкости газа в исследуемом процессе

$$C = 2\nu R.$$

ЗАДАЧИ

5.1 (ВЭ, 2006 – 2007). Изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа происходит по закону $PV^2 = \text{const}$. Найти приращение внутренней энергии газа при увеличении объема в $n = 2$ раза. Начальная температура газа $T_0 = 300$ К.

5.2. Изменение состояния одного моля идеального одноатомного газа происходит по закону $PV^n = \text{const}$ (n – целое положительное число). Что происходит с внутренней энергией газа, если его объем возрастает в таком процессе?

5.3. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью поперечного сечения $S = 100$ см² на высоте $h = 10$ см от основания на-

ходится подвижный поршень массой m . Под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па. Определить внутреннюю энергию газа под поршнем. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

5.4 (О, 2006). В сосуде содержится ν молей одноатомного идеального газа при абсолютной температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найти количество теплоты, подведенное к газу.

5.5. Одноатомный идеальный газ находится в сосуде объемом $V = 10$ л под давлением $p = 10^5$ Па. Газ нагревают изохорически и его давление возрастает в $n = 1,5$ раза. Какое количество теплоты подвели к газу?

5.6. Температура идеального газа изменяется от значения T_1 до значения T_2 ($T_2 > T_1$) один раз изохорически, второй изобарически, третий адиабатически (начальное состояние газа во всех трех случаях одно и то же). В каком процессе газ совершает большую работу? Получает большее количество тепла?

5.7. Одно и то же количество теплоты сообщается двум одноатомным идеальным газам: первому – в изотермическом процессе, второму – в изобарическом. Определить отношение работ, совершенных газами в этих процессах.

5.8. С идеальным газом проводят сначала изобарический, а затем адиабатический процессы, в которых газ совершает одинаковую работу. Определить отношение приращений внутренних энергий газа в этих процессах.

5.9. Температура одноатомного идеального газа повышается на величину ΔT один раз при постоянном объеме, второй раз – при постоянном давлении. Найти отношение количеств теплоты, сообщаемых газу в этих процессах.

5.10 (О, 2003). Одноатомный идеальный газ совершает в некотором изобарическом процессе в n раз большую работу, чем в некотором изотермическом. Определить отношение количеств теплоты, сообщаемых газу в этих процессах.

5.11. На сколько увеличится внутренняя энергия одноатомного идеального газа в процессе изобарического расширения, если газу сообщили при этом количество теплоты $Q = 30$ кДж?

5.12 (ВЭ, 2003). Некоторое количество идеального одноатомного газа сначала расширяется изотермически. При этом газ соверша-

ет работу $A = 10^3$ Дж. Затем газ нагревают изобарически, сообщая ему в $n = 2$ раза большее количество теплоты. Какую работу совершит газ во втором случае?

5.13. Определить работу, совершаемую ν молями одноатомного идеального газа при адиабатическом сжатии, если температура газа увеличилась на ΔT .

5.14. Какую работу совершат $m = 6$ кг водорода, расширяясь при изобарическом нагревании от $t_1 = 5^\circ\text{C}$ до $t_2 = 155^\circ\text{C}$?

5.15. Одноатомный идеальный газ в количестве $\nu = 1$ моль находится в закрытом сосуде при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты надо сообщить газу, чтобы его давление увеличилось в $n = 3$ раза?

5.16. Найти работу изобарического расширения $\nu = 2$ молей идеального газа, если известно, что концентрация молекул в конечном состоянии в $q = 2$ раза меньше, чем в начальном при температуре $T_1 = 300\text{ K}$.

5.17. В теплоизолированном цилиндре под теплонепроницаемым поршнем находится одноатомный идеальный газ с начальным давлением $p_0 = 10^5$ Па, объемом $V_0 = 3\text{ дм}^3$ и температурой $T_0 = 300\text{ K}$. При адиабатическом сжатии газа над ним совершили работу $A' = 90$ Дж (работу, которая совершается над газом, принято в термодинамике отмечать штрихом, т.е. A'). Найдите температуру газа после сжатия.

5.18 (ВЭ, 2005). В вертикальном сосуде под подвижным поршнем находится одноатомный идеальный газ при температуре T_0 . Масса газа — m . Какое количество теплоты необходимо подвести к газу, чтобы его объем вырос в n раз? Молярная масса газа μ известна.

5.19. Один моль идеального газа изохорически перевели из состояния 1 в состояние 2 так, что его давление уменьшилось в $n = 1,5$ раза. Затем газ изобарически нагрели до первоначальной температуры T . При этом газ совершил работу $A = 0,83\text{ кДж}$. Определите величину T .

5.20. Сначала ν молей идеального газа нагревают при постоянном объеме от температуры T_1 до температуры T_2 , а затем охлаждают при постоянном давлении от T_2 до T_3 . Найти количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе, если молярная теплоемкость газа при постоянном объеме известна и равна c .

5.21. Сосуд разделен на две части неподвижной теплопроницаемой перегородкой. В начальный момент времени в одной части сосуда находится ν_1 молей одного одноатомного идеального газа с температурой T_1 , в другой – ν_2 молей другого одноатомного идеального газа с температурой T_2 ($T_1 < T_2$). Какое количество теплоты будет передано первому газу в процессе установления равновесия? Что изменится, если перегородка будет подвижной?

5.22. В двух сосудах объемами V_1 и V_2 содержится один и тот же одноатомный идеальный газ с одной и той же концентрацией молекул n . В первом сосуде температура – T_1 , во втором – T_2 . Какая установится температура, если сосуды привести в тепловой контакт? Какая энергия передается от одного газа к другому? Теплообмена с окружающей средой нет.

5.23. Идеальный одноатомный газ расширяется по закону $P/V = \text{const}$. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы увеличить его объем в n раз? Начальные давление p_0 и объем V_0 газа известны.

5.24. Найти теплоемкость одноатомного идеального газа в адиабатическом, изотермическом, изохорическом и изобарическом процессах.

5.25. Найти теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p смеси ν_1 моля гелия и ν_2 молей кислорода. При рассматриваемых температурах внутренняя энергия моля кислорода определяется соотношением $U = (5/2)RT$.

5.26. С одним молем одноатомного идеального газа происходит процесс, в котором его объем зависит от температуры по закону $V = f(T)$, где f – известная функция. Найти теплоемкость газа в этом процессе в состоянии, в котором температура газа равна T_0 .

5.27. Считая известной молярную теплоемкость газа при постоянном объеме C_V , найти молярную теплоемкость этого идеального газа в процессах, описываемых законами:

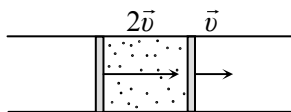
а) $V = \alpha T^2$;

б) $p = \alpha/T^3$;

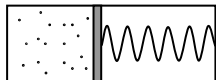
в) $p = \alpha V$.

В этих формулах p , V , T – давление, объем и температура (по абсолютной шкале) газа соответственно; α – некоторая заданная постоянная.

5.28. С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $p = \beta V^\alpha$. Найти теплоемкость газа.



5.29 (ВЭ, 2003 – 2004). В горизонтальном цилиндре удерживают два одинаковых поршня массой m каждый. Между поршнями находится ν молей идеального газа при температуре T . Поршням сообщают скорости v и $2v$ (см. рисунок). Найти максимальную температуру газа в процессе последующего движения. Внешнее давление отсутствует. Трения нет. Считать, что в процессе движения поршня газ все время находится в равновесном состоянии. Масса газа много меньше массы поршней.

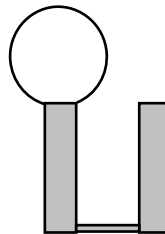


5.30 (О, 2005). В цилиндре с одной стороны от закрепленного поршня находится 1 моль одноатомного идеального газа при температуре T , с другой стороны – вакуум. Пружина не деформирована. Поршень освобождают, и после установления равновесия объем газа увеличивается вдвое. Найти температуру газа в конечном состоянии. Теплоемкостью цилиндра и поршня, а также потерями тепла пренебречь.

5.31 (ВЭ, 2007). Теплоизолированный сосуд заполнен одноатомным идеальным газом под давлением p . Со временем половина атомов газа соединились в двухатомные молекулы. При образовании одной молекулы выделяется энергия \mathcal{E} . Найти новое давление в сосуде. Начальная температура T . При рассматриваемых температурах энергия ν молей двухатомного газа равна $(5/2)\nu RT$.

5.32 (ВЭ, 2007). В сосуде находится двухатомный идеальный газ. При температуре T_1 начинается диссоциация молекул, которая прекращается при температуре T_2 . При диссоциации одной молекулы поглощается энергия \mathcal{E} . Найти отношение числа диссоциировавших молекул двухатомного газа к числу недиссоциировавших. Теплообмен отсутствует. При рассматриваемых температурах энергия ν молей двухатомного газа равна $(5/2)\nu RT$.

5.33 (ВЭ, 2005, 2007). Два одинаковых цилиндрических сосуда с площадью сечения S и высотой h соединены тонкой трубкой. В систему до краев залита жидкость плотностью ρ . К одному из сосудов присоединен резервуар объемом V_0 с одноатомным идеальным газом, другой – открыт в атмосферу. Какое количество теплоты нужно сообщить газу, находящемуся в резервуаре, чтобы он медленно вытеснил жидкость из одного сосуда? Атмосферное давление – p_0 .



Глава 6

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ В ТЕРМОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Значительное количество задач на термодинамику идеального газа формулируется «графически», т.е. процесс, происходящий с газом, задается с помощью графика зависимости одного макроскопического параметра газа от другого.

По существу в этих задачах нет никаких новых идей по сравнению с термодинамическими задачами в «алгебраической» постановке. Для установления изменений макроскопических параметров идеального газа в рассматриваемом процессе можно: найти приращение внутренней энергии газа – по приращению температуры из соответствующего графика, работу газа – как площадь под графиком зависимости давления газа от его объема в исследуемом процессе, использовать первый закон термодинамики. Несмотря на это, мы выделили графические задачи на термодинамику в отдельную главу именно из-за их многочисленности. В качестве примера рассмотрим одну из них.

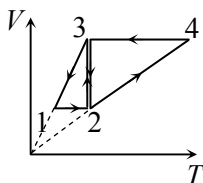


Рис. 1

Пример 6.1. На рис. 1 в координатах «объем – абсолютная температура» изображены графики двух циклических процессов $1-2-3-1$ и $4-3-2-4$, происходящих с идеальным газом. В каком из этих циклических процессов газ совершает большую работу?

Решение. Для того чтобы сравнить работы газов в данных процессах, построим для них графики зависимости давления от объема (именно на таком графике работа имеет смысл площади под графиком). Процесс $1-2-3-1$ состоит из изохорического нагревания $1-2$ –

2, изотермического расширения 2 – 3 и изобарического сжатия 3 – 1 (последнее следует из того, что график процесса 3 – 1 на графике $V - T$ – прямая, продолжение которой проходит через начало координат). График процесса 1 – 2 – 3 – 1 в координатах $p - V$ показан на рис. 2, *а*. Процесс 4 – 3 – 2 – 4 состоит из изохорического охлаждения 4 – 3, изотермического сжатия 3 – 2 (этот процесс является обратным процессу 2 – 3 в первом цикле) и изобарического расширения 2 – 4 (поскольку продолжение прямой, описывающей этот процесс на графике $V - T$, проходит через начало координат). График процесса 4 – 3 – 2 – 4 в координатах $p - V$ показан на рис. 2, *б*.

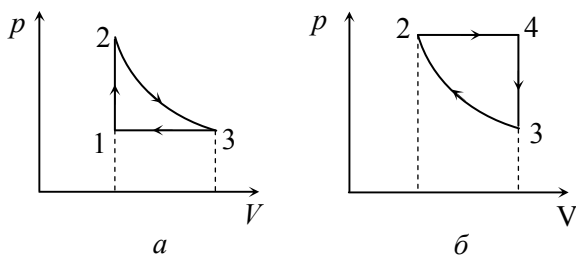


Рис. 2

Найдем работу газа в циклическом процессе 1 – 2 – 3 – 1. В процессе 1 – 2 газ не совершает работу, поскольку не меняется его объем. Работа газа в процессе 2 – 3 положительна и численно равна площади фигуры, ограниченной на рис. 2, *а* гиперболой 2 – 3, осью объемов и вертикальными отрезками. В процессе 3 – 1 работа газа отрицательна и численно равна площади фигуры, ограниченной на рис. 2, *а* горизонтальным отрезком 3 – 1, осью объемов и вертикальными отрезками. Поэтому суммарная работа газа в течение циклического процесса 1 – 2 – 3 – 1 положительна и численно равна площади цикла 1 – 2 – 3 – 1 на графике $p - V$. Аналогично работа газа в процессе 4 – 3 – 2 – 4 положительна и численно равна площади цикла 4 – 3 – 2 – 4 на графике $p - V$. Поскольку два цикла 1 – 2 – 3 – 1 и 4 – 3 – 2 – 4 можно приложить друг к другу по изотерме так, что вместе они будут образовывать на

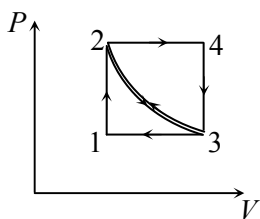
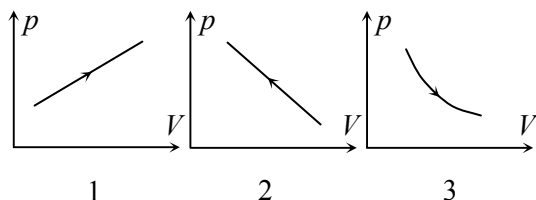


Рис. 3

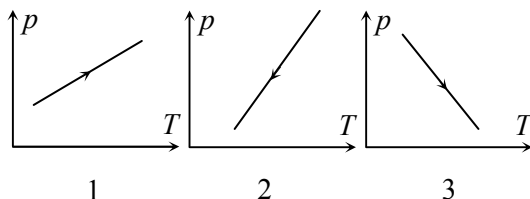
графике $p - V$ прямоугольник, в котором изотерма «выгнута» в сторону цикла $1 - 2 - 3 - 1$ (рис. 3), то площадь цикла $1 - 2 - 3 - 1$ меньше площади цикла $4 - 3 - 2 - 4$, и, следовательно, работа газа в первом процессе меньше работы газа во втором.

ЗАДАЧИ

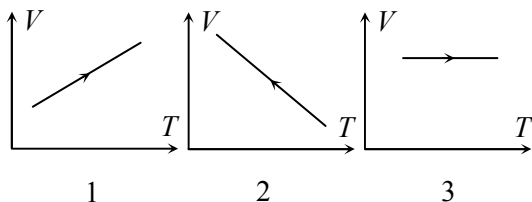
6.1. С идеальным газом происходят процессы, графики которых в координатах «давление – объем» приведены на рисунке (процесс, изображенный на графике 3 – изотермический). Определить, в каких процессах внутренняя энергия газа увеличивалась, уменьшалась; в каких процессах газ совершал положительную, отрицательную работу; в каких процессах газ отдавал, получал тепло.



6.2. С идеальным газом происходят процессы, графики которых в координатах «давление – абсолютная температура» приведены на рисунке. Определить, в каких процессах внутренняя энергия газа увеличивалась, уменьшалась; в каких процессах газ совершал положительную, отрицательную работу; в каких процессах газ отдавал, получал тепло.



6.3. С идеальным газом происходят процессы, графики которых в координатах «объем – абсолютная температура» приведены на рисунке. Определить, в каких процессах внутренняя энергия газа увеличивалась, уменьшалась; в каких процессах газ совершал положительную, отрицательную работу; в каких процессах газ отдавал, получал тепло.

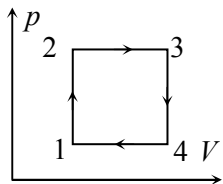


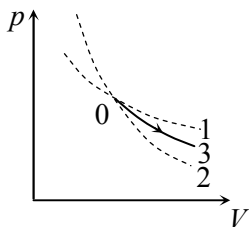
6.4 (ВЭ, 2003 – 2006). Для одноатомного идеального газа построить графики изохорического, изотермического, изобарического и адиабатического процессов в координатных осях $Q - A$, где Q и A – количество полученной газом теплоты и его работа в рассматриваемом процессе.

6.5 (ВЭ, 2003 – 2006). Для одноатомного идеального газа построить графики изохорического, изотермического, изобарического и адиабатического процессов в координатных осях $\Delta U - A$, где ΔU и A – приращение внутренней энергии газа и его работа в рассматриваемом процессе.

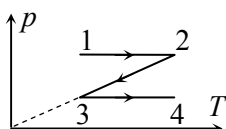
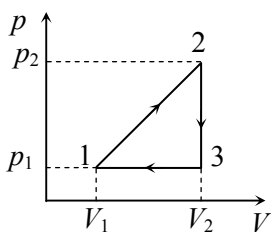
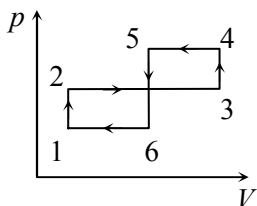
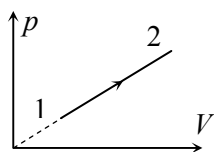
6.6 (ВЭ, 2003 – 2006). Для одноатомного идеального газа построить графики изохорического, изотермического, изобарического и адиабатического процессов в координатных осях $\Delta U - Q$, где ΔU и Q – приращение внутренней энергии газа и количество полученной газом в рассматриваемом процессе теплоты.

6.7 (О, 2005). С ν молями идеального газа происходит процесс, график которого в координатах $p - V$ приведен на рисунке ($1 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 4$ – изохоры, $2 \rightarrow 3$ и $4 \rightarrow 1$ – изобары). Температуры газа в состояниях 1 и 3 равны T_1 и T_3 , точки 2 и 4 лежат на одной изотерме. Найти работу, совершенную газом за цикл, и количество теплоты, полученное газом в течение процесса $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.





ло в этом процессе? Что можно сказать про теплоемкость газа в этом процессе?



6.8. Давление одноатомного идеального газа зависит от его объема так, как показано на рисунке (кривые 0 – 3). На этом же рисунке пунктиром показаны графики изотермического (кривая 1), и адиабатического процессов (кривая 2). Как изменяется температура газа в процессе 0 – 3? Получает или отдает газ тепло

6.9. С ν молями одноатомного идеального газа происходит процесс, в котором давление газа зависит от его объема так, как показано на рисунке. Известны начальная T_1 и конечная T_2 температуры газа. Какое количество теплоты было подведено к газу?

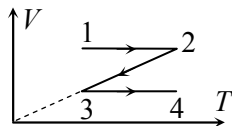
6.10. Найти работу, которую совершает идеальный газ в циклическом процессе 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1, изображенном на рисунке в координатах «давление – объем» (процессы 1 – 2, 3 – 4 и 5 – 6 являются изохорическими, процессы 2 – 3, 4 – 5 и 6 – 1 – изобарическими). Известно, что $p_5 - p_2 = p_2 - p_1$, $V_3 - V_6 = V_6 - V_1$.

6.11. Идеальный газ совершает циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1, график которого в координатах «давление – объем» приведен на рисунке (процесс 2 – 3 является изохорическим, 3 – 1 – изобарическим, на участке 1 – 2 давление является линейной функцией объема). Давления p_1 и p_2 и объемы V_1 и V_2 известны. Найти количество теплоты, сообщенное газу в целом за цикл.

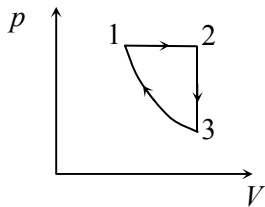
6.12. Из начального состояния 1 в конечное состояние 4 переводят ν молей одноатомного идеального газа в процессе, изображенном на рисунке в координатах «давление – абсолютная температура»

(процессы 1 – 2 и 3 – 4 – изобарические). Найти количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе, если известно, что температуры газа в состояниях 1 и 3, а также в состояниях 2 и 4 одинаковы. Известно, что $T_4 - T_1 = \Delta T$.

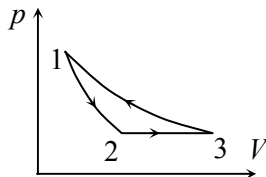
6.13. Из начального состояния 1 в конечном состоянии 4 переводят ν молей одноатомного идеального газа в процессе, изображенном на рисунке в координатах «объем – абсолютная температура» (процессы 1 – 2 и 3 – 4 – изохорические). Найти количество теплоты, сообщенное газу в этом процессе, если известно, что температуры газа в состояниях 1 и 3, а также в состояниях 2 и 4 одинаковы. Известно, что $T_4 - T_1 = \Delta T$.



6.14 (ВЭ, 2005, 2007). На рисунке в координатах «давление – объем» изображен циклический процесс, происходящий с ν молями идеального одноатомного газа. Процесс 3 – 1 является адиабатическим, объем газа в этом процессе уменьшается в три раза. Процесс 1 – 2 – изобарический, 2 – 3 – изохорический. Какую работу совершил газ при сжатии, если известно, что работа газа за цикл 1 – 2 – 3 – 1 равна A , а температура газа в состоянии 1 равна T_1 ?



6.15. Одноатомный идеальный газ совершает циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1 (см. рисунок), состоящий из адиабатического расширения 1 – 2, изотермического расширения 2 – 3 и изотермического сжатия 3 – 1. Известно, что в процессе адиабатического расширения газ совершил работу A_{2-1} . Какое количество теплоты получил газ в изобарическом процессе?



Глава 7

ТЕРМОДИНАМИКА ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ: ТЕПЛООБМЕН, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА, ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Термодинамика жидкостей и твердых тел значительно отличается от термодинамики идеального газа. Это связано с тем, что в жидкостях или твердых телах существует сильное взаимодействие молекул друг с другом. Поэтому внутренняя энергия жидкостей или твердых тел складывается из кинетической энергии молекул и потенциальной энергии их взаимодействия, причем для последней величины не удастся получить хоть какое-нибудь выражение через макроскопические параметры жидкости или твердого тела. Однако можно утверждать, что в отсутствии фазовых переходов *изменение внутренней энергии* жидкости или твердого тела пропорционально изменению температуры. Поэтому при сообщении жидкости (или твердому телу) количества теплоты Q , она нагревается на величину ΔT , пропорциональную величине Q :

$$Q = C\Delta T, \quad (7.1)$$

где C – коэффициент пропорциональности, который называется теплоемкостью тела. Очевидно, теплоемкость тела пропорциональна его массе. Действительно, если для нагревания куска железа массой m на величину ΔT требуется количество теплоты Q , то для нагревания куска железа массой $2m$ на ту же величину необходимо вдвое большее количество теплоты. Поэтому теплоемкость тела можно записать как

$$C = cm, \quad (7.2)$$

где величина c не зависит от массы тела, а зависит только от вещества тела. Величина c , которая называется удельной теплоемкостью вещества, не может быть вычислена теоретически через величины,

характеризующие взаимодействие молекул, поскольку не может быть вычислена внутренняя энергия жидкости или твердого тела. Эта величина является экспериментальной (табличной) характеристикой веществ. С использованием формулы (6.2) связь количества теплоты с изменением температуры тела может быть записана в виде

$$Q = cm\Delta T. \quad (7.3)$$

Формуле (7.3) (так же как и аналогичным соотношениям термодинамики газа) можно придать алгебраический смысл, если считать теплоту, сообщенную телу, положительной или отрицательной в зависимости от того, дается телу внутренняя энергия или забирается у него.

Еще одним существенным отличием термодинамики жидкости или твердого тела от термодинамики идеального газа является то, что жидкости и твердые тела слабо расширяются при нагревании и, как правило, имеют свободные границы. Поэтому они не совершают работу при нагревании, которую, следовательно, не нужно учитывать в уравнениях баланса энергии. Поэтому задачи на термодинамику жидкостей или твердых тел часто называют задачами на *тепловой баланс*.

Задачи на тепловой баланс ставятся, как правило, следующим образом. Два или несколько тел приводят в тепловой контакт, нужно найти установившуюся температуру. Основная идея решения таких задач заключается в том, что в процессе установления равновесия одни тела отдают тепло, другие – получают, и при условии, что энергия не рассеивалась в окружающее пространство, сумма отданных теплот равна сумме полученных. Рассмотрим пример.

Пример 7.1. В калориметр с температурой T_1 , содержащий m_1 воды, добавляют m_2 воды при температуре T_2 . Определить температуру смеси. Теплоемкость калориметра – C . Удельная теплоемкость воды – c . Теплотери отсутствуют.

Решение. Пусть температура смеси – T_x . По формуле (7.3) можно найти количество теплоты, полученной жидкостями, а по формуле (7.1) – калориметром

$$Q_1 = cm_1(T_x - T_1), \quad Q_2 = cm_2(T_x - T_2), \quad Q_3 = C(T_x - T_1) \quad (*)$$

(в формуле (*)) учтено, что начальные температуры первой порции воды и калориметра одинаковы). Все формулы (*) справедливы независимо от того, нагревалась первая или вторая порция воды и калориметр, или охлаждались. Только при нагреве ($T_x > T_{\text{нач}}$) полученное тепло положительно, при охлаждении ($T_x < T_{\text{нач}}$) отрицательно. Поэтому условие теплового баланса (равенство отданных и полученных энергий) имеет вид

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0. \quad (**)$$

Подставляя в формулу (**) выражения для теплот, полученных жидкостями и калориметром (*), получим уравнение для установившейся температуры жидкостей и калориметра T_x :

$$cm_1(T_x - T_1) + cm_2(T_x - T_2) + C(T_x - T_1) = 0. \quad (***)$$

Решая уравнение (***), находим установившуюся температуру

$$T_x = \frac{cm_1T_1 + cm_2T_2 + CT_1}{cm_1 + cm_2 + C}.$$

Еще один важный момент, который приходится учитывать в термодинамике жидкости или твердого тела, – возможность *фазовых переходов*, которые могут в них происходить. Фазовыми переходами называется изменение агрегатного состояния вещества: при нагревании твердое тело плавится и превращается в жидкость, которая при дальнейшем нагревании превращается в газ. Разные агрегатные состояния часто называют разными *фазами* одного и того же вещества (жидкая фаза, твердая, газообразная), отсюда название переходов вещества из одного агрегатного состояния в другое – «фазовые переходы» или «фазовые превращения»^{*}.

В школьном курсе физики рассматриваются следующие фазовые превращения: переход вещества из твердого состояния в жидкое – *плавление*, обратный процесс – *кристаллизация*, переход из

^{*} На самом деле, понятие «фазы вещества» является более широким, чем агрегатное состояние. Например, два разных состояния одного и того же твердого вещества углерода – алмаз и графит, которые отличаются кристаллической решеткой, являются разными фазами твердого углерода. Превращение одной твердой фазы вещества в другую также является фазовым переходом.

жидкого состояния в газообразное – *испарение*, обратный процесс – *конденсация*. Плавление и кристаллизация каждого твердого кристаллического вещества происходят при определенной температуре, называемой температурой плавления. При этом, как показывает опыт, для плавления твердого вещества, находящегося при температуре плавления, ему необходимо сообщить количество теплоты

$$Q = \lambda m, \quad (7.4)$$

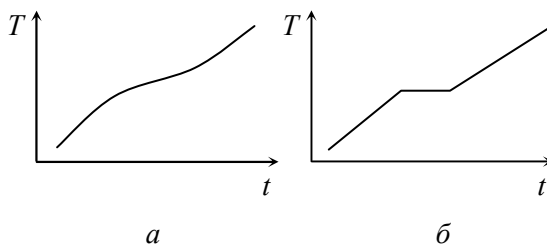
где m – масса вещества; λ – величина, характерная для каждого вещества и называемая удельной теплотой плавления. Энергия (6.4) расходуется на разрыв связей между молекулами, а не на нагревание. Кристаллизация вещества сопровождается выделением количества теплоты (7.4).

Испарение может происходить при любой температуре (кроме абсолютного нуля). Для испарения жидкости при постоянной температуре необходимо передать количество теплоты

$$Q = rm, \quad (7.5)$$

где m – масса испарившейся жидкости; r – удельная теплота парообразования. Испарение может происходить также с поверхности твердой фазы. Обратный испарению процесс – конденсация – сопровождается выделением количества теплоты (7.5).

Кипение – процесс перехода жидкости в пар, сопровождающийся образованием в объеме жидкости пузырьков, заполненных насыщенным паром и всплывающих к поверхности жидкости. Кипение каждой жидкости происходит при определенной температуре, зависящей от давления (подробнее см. гл. 7). Рассмотрим два примера на фазовые превращения.



Пример 7.2. Свинец и воск нагревают, и они становятся жидкими. На рисунке приведены графики зависимости температуры свинца и воска от времени нагревания. На каком из

графиков представлена соответствующая зависимость для свинца, а на каком для воска?

Решение. Перечисленные выше свойства плавления, такие, как существование определенной температуры плавления, необходимость сообщения теплоты, которая не приводит к нагреванию, а расходуется на разрыв связей между молекулами, относятся только к кристаллическим твердым телам, в том числе к металлам. Однако существуют такие твердые тела, которые называются аморфными, плавление которых происходит по-другому. Переход аморфного вещества из твердого состояния в жидкое происходит постепенно: с ростом температуры оно становится «все более и более жидким», причем указать температуру, ниже которой оно твердое, выше жидкое, невозможно. Такое поведение аморфных веществ связано с тем, что фактически они являются жидкостями, но с очень большой вязкостью, и проявляют благодаря этому механические свойства, характерные для твердых тел. При нагревании аморфных тел их вязкость уменьшается и они становятся жидкими. К аморфным телам относятся органические полимеры, стекло, ряд других веществ.

Воск является аморфным веществом, свинец – кристаллическим. Поэтому свинец переходит в жидкое состояние при определенной температуре, воск становится жидким в некотором интервале температур. Поэтому зависимость, приведенная на рисунке *a*, относится к воску, зависимость на рисунке *б* – к свинцу.

Пример 7.3. В медный сосуд, нагретый до температуры T_1 , положили лед массой m_2 при температуре T_2 . В результате в сосуде оказалось m_3 льда, смешанного с водой. Определить массу сосуда m_1 . Удельные теплоемкость меди и льда – c_1 и c_2 соответственно. Удельная теплота плавления льда – λ . Теплопотери пренебречь.

Решение. Так как теплопотери отсутствуют, то теплота, отданная сосудом, расходуется на нагревание и таяние льда. Поскольку в конечном состоянии имеется равновесие воды и льда, конечная температура воды, льда и сосуда равна $T_0 = 0$ °С. Поэтому сосуд отдал количество теплоты

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_1 - T_0). \quad (*)$$

Это количество теплоты расходуется на нагревание всего льда от температуры T_2 до температуры плавления T_0 и на превращение $m_2 - m_3$ льда в воду, для чего необходимо

$$Q_2 = c_2 m_2 (T_0 - T_2) + \lambda (m_2 - m_3) \quad (**)$$

количества теплоты. Приравнивая количества теплоты (*) и (**) и решая полученное уравнение, находим

$$m_1 = \frac{c_2 m_2 (T_0 - T_2) + \lambda (m_2 - m_3)}{c_1 (T_1 - T_0)}.$$

В некоторых задачах приходится учитывать отдачу тепла в окружающую среду из-за теплопроводности стенок калориметра и среды. Теплопроводность возникает в связи со столкновениями быстрых и медленных молекул в области контакта тел с разной температурой и не сопровождается переносом вещества. Скорость теплопроводности определяется разностью температур того тела, которое передает тепло, и того тела, которое его получает (закон Фурье). Рассмотрим пример.

Пример 7.4. В стакан, содержащий $m = 200$ г воды, опускают нагреватель мощностью $P = 50$ Вт. Максимальная температура воды после длительного нагрева составила $T = 55$ °С. За какое время вода в стакане остынет на $\Delta T = 1$ °С после выключения нагревателя? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), теплоемкостью стакана пренебречь.

Решение. Очевидно, что в этой задаче имеют место потери тепла в окружающее пространство. Действительно, если бы потерь тепла не было, то температура воды в стакане при нагревании продолжала бы расти, в задаче же она достигает максимального значения и далее не растет.

Существование максимальной температуры можно объяснить следующим образом. Скорость теплопотерь зависит от разности температур воды и окружающего воздуха. Поэтому при нагревании воды скорость теплопотерь растет, и при достижении водой некоторой температуры эта скорость сравнивается со скоростью выделения тепла нагревателем.

После этого температура воды перестает изменяться, поскольку количество теплоты, переданное в окружающую среду за некоторый интервал времени, равно количеству теплоты, выделяемой нагревателем за этот интервал времени. Отсюда находим, что

$$P = w, \quad (*)$$

где w – скорость теплопотерь (количество теплоты, теряемой стаканом за единицу времени).

Скорость теплопотерь зависит от разности температур стакана и окружающей среды, а также от геометрии системы и свойств стакана (от теплопроводности стенок), но не зависит от того, работает нагреватель или нет. Поэтому после выключения нагревателя, до тех пор пока температура воды изменилась не сильно, скорость теплопотерь остается неизменной и определяется формулой (*). Однако в эти моменты в окружающую среду рассеивается не тепло, выделяемое нагревателем, а внутренняя энергия воды. Приравнявая изменение внутренней энергии воды в стакане за интервал времени Δt энергии, потерянной в окружающее пространство (*), получим

$$cm\Delta T = w\Delta t = P\Delta t. \quad (**)$$

Из уравнения (**) находим время, за которое температура воды в стакане упала на величину ΔT

$$\Delta t = \frac{cm\Delta T}{P} = 17 \text{ с.}$$

ЗАДАЧИ

7.1. В тающий снег поместили пробирку со льдом, имеющим температуру $t = 0^\circ\text{C}$. Будет ли таять лед в пробирке?

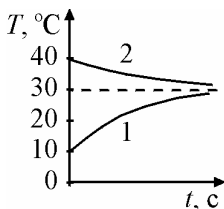
7.2. Может ли кипеть вода в кастрюле, плавающей в другой кастрюле с кипящей водой?

7.3. Нормальная температура тела человека равна $t = 36,6^\circ\text{C}$. Почему человеку не холодно при 25°C и очень жарко при 37°C ?

7.4. Известно, что для измерения температуры тела ртутным термометром нужно 5 – 10 мин, «сбросить» же показания термометра можно через несколько секунд после измерения. Почему это происходит?

7.5. Почему ожоги паром опаснее ожогов кипятком?

7.6. Два образца одного металла, обладающие различной температурой, привели в соприкосновение. По графику зависимости температуры образцов от времени (см. рисунок) определить, у какого из образцов больше масса. Потери тепла во внешнюю среду отсутствуют.



7.7. Нагреватель нагревает $m = 100$ г воды от температуры $T_0 = 10$ °C до температуры $T_1 = 90$ °C за время $t = 5$ мин. Определить мощность нагревателя. Теплотериями и теплоемкостью сосуда пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

7.8. В теплоизолированный сосуд помещают одноатомный идеальный газ при температуре $T_0 = 300$ К и кусочек железа массой $m = 0,2$ кг при температуре $T = 500$ К. Начальное давление газа $p_0 = 10^5$ Па, объем $V = 1000$ см³. Удельная теплоемкость железа $c = 450$ Дж/(кг · К). Найти установившееся давление газа. Объем сосуда не меняется.

7.9. Какую массу керосина необходимо сжечь, чтобы нагреть $m = 100$ г воды от $t = 20$ °C до кипения. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град), удельная теплота сгорания керосина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг. Коэффициент полезного действия нагревателя $\eta = 10$ %.

7.10 (О, 2007). В калориметр с нулевой теплоемкостью наливают три порции воды: одну массой m_1 и температурой t_1 , вторую — m_2 и t_2 и третью — m_3 и t_3 . Найти температуру смеси.

7.11 (О, 2004). Какую максимальную массу льда m_1 с температурой $t_{\text{пл}} = 0$ °C можно бросить в воду массой $m = 1,5$ кг с начальной температурой $t = 30$ °C, чтобы весь лед растаял? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

7.12. Для измерения температуры воды, имеющей массу $m = 50$ г, в нее погрузили термометр, который показал температуру $t_1 = 32,4$ °С. Какова действительная температура воды t , если теплоемкость термометра $C = 2,8$ Дж/К и перед погружением он показывал температуру помещения $t_2 = 17,8$ °С? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град).

7.13. В змеевик нагревателя, содержащего $m = 10$ кг воды при температуре $t_1 = 10$ °С, впускают водяной пар при температуре $t_2 = 100$ °С. Вытекающая из змеевика вода, образовавшаяся после конденсации пара, имеет температуру $t_3 = 60$ °С. Какое количество пара необходимо пропустить через змеевик нагревателя, чтобы температура содержащейся в нем воды повысилась до значения $t_4 = 50$ °С? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · град), удельная теплота парообразования воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

7.14 (О, 2007). Для того чтобы нагреть воду, имеющую температуру $T_0 = 0$ °С, до кипения и испарить ее, потребовалось время $t = 10$ мин. В течение какого времени выкипала вода? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Температура кипения воды $T_1 = 100$ °С. Тепло к сосуду подводилось равномерно, теплотери отсутствуют.

7.15. В алюминиевый чайник массой $m_1 = 0,5$ кг налили воду в количестве $m_2 = 2$ кг при температуре $t_1 = 20$ °С и поставили на электроплитку с КПД $\eta = 30$ %. Плитка потребляет мощность $P = 5 \cdot 10^3$ Вт. Через какое время масса воды в чайнике уменьшится на $\Delta m = 100$ г? Удельная теплоемкость алюминия $c_1 = 9 \times 10^2$ Дж/(кг · К); удельная теплоемкость воды $c_2 = 4,2 \times 10^3$ Дж/(кг · К); удельная теплота парообразования для воды $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

7.16. Из колбы, в которой находилось $m = 575$ г воды при $t = 0$ °С, откачивают воздух и водяные пары, в связи с чем часть воды в колбе замерзает. Определить массу образовавшегося льда. Удельная теплота парообразования воды $r = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

7.17. В калориметр, содержащий $m_1 = 100$ г льда при $t_1 = 0$ °С, впущено $m_2 = 100$ г водяного пара при $t_2 = 100$ °С. Какая темпера-

тура установится в калориметре? Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования $r = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \times 10^5$ Дж/кг. Каково будет фазовое состояние содержимого калориметра?

7.18. В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды при $t_1 = 5$ °С и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг при $t_2 = 40$ °С. Определите температуру содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4,2 \times 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_1 = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

7.19 (О, 2005). В сосуд с горячей водой опустили работающий нагреватель мощностью $P = 50$ Вт. В результате температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ °С за время $t_1 = 100$ с. Если бы воду не нагревали, то ее температура понизилась бы на ту же величину ΔT за время $t_2 = 200$ с. Какова масса воды? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), теплоемкостью сосуда пренебречь.

7.20 (О, 2005). В сосуд с некоторым количеством жидкости опустили работающий нагреватель мощностью P . При этом температура жидкости повысилась на некоторую малую величину ΔT за время $t_1 = 10$ с. Когда в этот же сосуд опустили работающий нагреватель мощностью $P/2$, то температура жидкости повысилась на ΔT за время $t_2 = 21$ с. За какое время температура жидкости в сосуде повысится на ΔT , если в сосуд опустить работающий нагреватель мощностью $2P$?

Глава 8

НАСЫЩЕННЫЕ И НЕНАСЫЩЕННЫЕ ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ

Воздух, который содержит водяной пар, называется влажным. С одной стороны, влажный воздух представляет собой смесь газов (воздуха и водяного пара), и потому макроскопические параметры влажного воздуха можно связать друг с другом с помощью закона Дальтона. Однако, с другой стороны, в тех или иных процессах, проходящих с влажным воздухом при условиях, близких к нормальным, возможна конденсация части молекул пара с образованием воды. Поэтому при рассмотрении влажного воздуха в таких условиях необходимо учитывать возможность такого процесса и сформулировать законы, позволяющие находить количество сконденсировавшихся в тех или иных условиях молекул*.

Если в задаче процесс конденсации пара не происходит или является несущественным, то при условиях, близких к нормальным, смесь воздуха с паром можно считать идеальным газом и применять к влажному воздуху закон Дальтона. Рассмотрим следующий пример.

Пример 8.1. Какой воздух тяжелее – сухой или влажный при одинаковых температуре и давлении?

Решение. Конечно, хочется сказать, что влажный, поскольку в отличие от сухого в нем содержатся еще и молекулы воды. Однако в условии задачи сказано *«при одинаковых температуре и давлении»*, а закон Дальтона говорит о том, что если в сухой воздух добавить пары воды, то его давление возрастет. Чтобы давление влажного воздуха равнялось дав-

* При рассмотрении смесей «обычных» газов, например кислорода, азота, аргона и др., при нормальных условиях возможность их конденсации не нужно учитывать, поскольку нормальные температуры существенно превосходят критические температуры этих газов, выше которых процесс конденсации невозможен.

лению сухого, необходимо во влажном воздухе уменьшить число молекул собственно воздуха, и ответ на вопрос о сравнении масс сухого и влажного воздуха не является таким уж примитивным. Поэтому давайте аккуратно с помощью законов Клапейрона – Менделеева и Дальтона сравним массы сухого и влажного воздуха. Давление сухого воздуха, занимающего объем V , определяется законом Клапейрона – Менделеева

$$pV = NkT, \quad (*)$$

где N – число молекул воздуха; T – его температура. Давление влажного воздуха в том же объеме при той же температуре определяется законом Дальтона

$$pV = (N_1 + N_2)kT, \quad (**)$$

где N_1 – число молекул воздуха; N_2 – воды. Из сравнения формул (*) и (**) видим, что при одинаковом давлении, объеме и температуре сухой и влажный воздух содержат одинаковое число молекул. Поэтому сравнение масс сухого и влажного воздуха определяется сравнением массы одной молекулы воздуха и одной молекулы воды. Конечно, такого объекта, как «молекула воздуха», в общем-то не существует, так как воздух – смесь различных газов, в наибольшем количестве в которой представлены азот, кислород, аргон и углекислый газ. Тем не менее, понятие средней молярной массы воздуха можно ввести, и эта средняя молярная масса равна 29 г/моль. Поэтому можно считать, что масса одной «усредненной» молекулы воздуха равна 29 а.е.м. Масса одной молекулы воды равна 18 а.е.м. Из этих чисел следует, что влажный воздух легче сухого при одинаковых температурах и давлениях.

При испарении воды некоторые ее молекулы выходят в окружающий воздух, но из-за хаотического теплового движения могут вернуться назад в воду. Поэтому одновременно с *испарением воды* идет и обратный процесс – *конденсация пара*. Очевидно, скорость испарения не зависит от концентрации пара, а скорость конденсации увеличивается с ростом концентрации пара. Поэтому при определенной концентрации водяного пара (и, следовательно, при определенном парциальном давлении паров воды) скорости про-

цессов испарения и конденсации сравниваются. В результате количество молекул в паре и жидкости перестает изменяться, и наступает *динамическое равновесие* между водой и ее паром. Такой пар, который находится в динамическом равновесии с жидкостью, называется *насыщенным*.

Для вычисления концентрации (и парциального давления) насыщенного водяного пара необходимо вычислить скорость испарения молекул из воды, что сделать, конечно, нельзя из-за очень сложного взаимодействия молекул, испаряющихся с поверхности жидкости, с жидкостью. Поэтому концентрацию (и давление) насыщенного пара следует измерить на опыте, а затем использовать при рассмотрении процессов конденсации и испарения воды. Таким образом, концентрация (и давление) насыщенного водяного пара представляет собой табличные (измеряемые на опыте, а не вычисляемые) величины. Концентрация (и давление) насыщенного пара зависит от температуры.

Очевидно, давление насыщенного пара – наибольшее давление, которое может иметь водяной пар при данной температуре. Действительно, если сделать давление пара большим давления насыщенного пара при данной температуре (добавляя, например, молекулы пара в воздух или сжимая его), то скорость процесса конденсации станет больше скорости процесса испарения, и часть молекул пара сконденсируется так, что концентрация оставшегося пара станет равна концентрации насыщенного пара.

Для характеристики количества водяного пара в воздухе вводят две величины, которые называются абсолютной и относительной влажностью воздуха. *Абсолютной влажностью воздуха* называют плотность водяного пара $\rho_{\text{п}}$. *Относительной влажностью воздуха* φ называют отношение плотности (или концентрации) водяного пара к плотности (или концентрации) насыщенного водяного пара при данной температуре $\rho_{\text{нп}}$. Поскольку парциальное давление водяного пара согласно закону Клапейрона – Менделеева однозначно связано с его плотностью, то относительную влажность можно выразить через отношение парциального давления водяного пара к парциальному давлению насыщенного водяного пара $p_{\text{нп}}$:

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{нп}}} = \frac{p_{\text{п}}}{p_{\text{нп}}}. \quad (8.1)$$

Обычно относительную влажность выражают в процентах. Знание относительной влажности и давления насыщенного пара при данной температуре позволяет находить абсолютную влажность и наоборот. Рассмотрим два примера.

Пример 8.2. В комнате объемом $V = 120 \text{ м}^3$ при температуре $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ относительная влажность $\varphi = 60 \%$. Определить массу водяного пара в комнате и абсолютную влажность воздуха, если давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_{\text{нп}} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Какой будет масса пара в комнате, а также абсолютная и относительная влажность воздуха, если его температура станет $t_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$? Давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ равно $p_{\text{нп},1} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Па}$. А если температура станет $t_2 = 2 \text{ }^\circ\text{C}$? Давление насыщенного водяного пара при температуре $t_2 = 2 \text{ }^\circ\text{C}$ равно $p_{\text{нп},2} = 0,7 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Открытых сосудов с водой в комнате нет.

Решение. Согласно определению при относительной влажности φ парциальное давление водяного пара составляет φ -ю часть от давления насыщенного пара. Поэтому, применяя к пару закон Клапейрона – Менделеева, получаем

$$\varphi p_{\text{нп}} V = \frac{m}{\mu} RT, \quad (*)$$

где m – масса пара в комнате; μ – молярная масса воды, $\mu = 18 \text{ г/моль}$; T – абсолютная температура, $T = t + 273 \text{ К}$. Из формулы (*) находим массу и абсолютную влажность воздуха, которая равна плотности пара m/V :

$$m = \frac{\varphi \mu p_{\text{нп}} V}{RT} = 920 \text{ г},$$

$$\rho = \frac{\varphi \mu p_{\text{нп}}}{RT} = 7,7 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}. \quad (**)$$

Можно было рассуждать и по-другому. Применяя к насыщенному водяному пару закон Клапейрона – Менделеева,

можно найти плотность, которую имел бы насыщенный пар, если бы он заполнял комнату, а ф-я часть этой плотности и даст плотность рассматриваемого пара, зная которую можно найти и массу пара в комнате. Конечно, такие рассуждения приводят к тем же результатам (***) для массы пара и абсолютной влажности.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда температура воздуха в комнате уменьшается. Поскольку давление насыщенного пара при уменьшении температуры падает, возможно разное поведение пара в зависимости от того, на сколько уменьшится температура. Если уменьшение температуры таково, что плотность насыщенного пара при этой температуре станет меньше плотности пара, находящегося в комнате (или давление насыщенного пара станет меньше парциального давления пара), то часть пара должна сконденсироваться, и парциальное давление оставшегося пара станет равным давлению насыщенного пара. Поэтому и абсолютная, и относительная влажность воздуха изменятся, причем последняя будет равна 100 %. (Поскольку при конденсации образуются маленькие капельки воды, процесс конденсации такого рода принято называть *выпадением росы*.)

Если новое давление насыщенного пара будет больше парциального давления пара в комнате, то конденсации происходить не будет, и, следовательно, абсолютная влажность воздуха меняться не будет. Относительная же влажность воздуха изменится, поскольку та же самая плотность пара будет составлять другую долю от нового давления насыщенного пара.

Из проведенных рассуждений следует, что для анализа поведения пара необходимо сравнить давление насыщенного пара и парциальное давление пара, имеющегося в комнате. При температуре $t = 10^\circ$ давление насыщенного пара больше давления пара в комнате (последнее несколько отличается от $p_{\text{нп}}$ из-за меньшей температуры):

$$p_{\text{нп},1} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Па} > p = \frac{p_{\text{нп}} T_1}{T} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Па} . \quad (***)$$

Поэтому конденсации происходить не будет, и абсолютная влажность воздуха будет равна (**). Относительная же влажность будет равна отношению парциального давления пара при этой температуре (правая часть неравенства (***)) к давлению насыщенного пара при этой температуре, т.е.

$$\varphi_1 = \frac{p_{\text{нп}} T_1}{p_{\text{нп},1} T} = 83 \% .$$

При температуре $t_2 = 2^\circ\text{C}$ ситуация будет другой. Легко проверить, что давление насыщенного пара при этой температуре меньше давления пара в комнате:

$$p_{\text{нп},2} = 0,7 \cdot 10^3 \text{ Па} < p = \frac{p_{\text{нп}} T_2}{T} = 0,97 \cdot 10^3 \text{ Па} .$$

Поэтому избыток пара (по сравнению с насыщенным паром при данной температуре) сконденсируется, а оставшийся в сосуде пар станет насыщенным. Таким образом, относительная влажность воздуха в сосуде при температуре $t_2 = 2^\circ$ будет равна $\varphi_2 = 100 \%$. Чтобы найти абсолютную влажность и массу пара, применяем к насыщенному пару в комнате закон Клапейрона – Менделеева, из которого находим

$$\rho_2 = \frac{\mu p_{\text{нп},2}}{RT_2} = 5,3 \frac{\text{г}}{\text{м}^3}, \quad m_2 = \frac{\mu p_{\text{нп},2} V}{RT_2} = 636 \text{ г} .$$

Из сравнения этих формул заключаем, что при понижении температуры до $t_2 = 2^\circ\text{C}$ сконденсируется масса $m = 284 \text{ г}$ водяного пара.

Отметим, что при рассмотрении пара после конденсации его части мы считали, что объем комнаты, доступный для воздуха не меняется при конденсации, т.е. пренебрегали объемом сконденсировавшейся воды по сравнению с объемом комнаты. Это приближение является «хорошим», так как объем образовавшейся воды $v = m/\rho = 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ действительно много меньше объема комнаты $V = 120 \text{ м}^3$.

С существованием предельного (для каждой температуры) давления водяного пара связан процесс кипения, который заключается в том, что при нагревании жидкости в ней при некоторой температуре начинают образовываться пузырьки. Природа процесса кипения заключается в следующем. Из-за хаотического теплового движения молекул в жидкостях все время образуются микроскопические пузырьки, заполненные паром этой жидкости. Поскольку эти пузырьки – маленькие, за очень короткое время пар в них становится насыщенным, а давление в пузырьках p становится равным давлению насыщенного пара при той температуре, при которой находится жидкость

$$p = p_{\text{нп}}. \quad (8.2)$$

Дальнейшее поведение пузырька с насыщенным паром зависит от соотношения внешнего давления, которое для небольших сосудов практически равно атмосферному $p_{\text{атм}}$, и давления пара в пузырьке, которое согласно (8.2) равно давлению насыщенного пара. Если атмосферное давление больше давления насыщенного пара, пузырек будет сжиматься, а молекулы пара – переходить в жидкость. Если давление насыщенного пара будет больше атмосферного давления, пузырек будет расти в размерах, при этом будет идти процесс испарения жидкости внутрь этого пузырька, что будет поддерживать состояние насыщенности пара в нем. Другими словами, в этом случае в жидкости будут образовываться пузырьки пара (уже не микроскопические), т.е. жидкость будет кипеть. Таким образом, условием кипения является равенство

$$p_{\text{нп}} = p_{\text{атм}}. \quad (8.3)$$

Поскольку внешнее давление не зависит от температуры, а давление насыщенного пара с ростом температуры растет, то при малых температурах давление насыщенного пара будет меньше атмосферного, а при увеличении температуры давление насыщенного пара сравняется с атмосферным и начнется кипение. Поскольку температура кипения воды при нормальных условиях равна $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, давление насыщенного водяного пара при $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ равно атмосферному давлению, т.е. $p_{\text{нп}}(t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}) \approx 10^5\text{ Па}$.

ЗАДАЧИ

8.1. В каком месте на Земном шаре абсолютная влажность воздуха может быть максимальной?

8.2. Почему иногда поверхности окон запотевают? Какие это поверхности – внешние или внутренние?

8.3. Если в комнате достаточно тепло и влажно, то при открывании зимой форточки образуются клубы тумана, которые в комнате опускаются, а на улице поднимаются. Объясните явления.

8.4. На улице целый день моросит холодный осенний дождь. В комнате развешено выстиранное белье, проведена влажная уборка. Высохнет ли белье быстрее, если открыть форточку?

8.5. Почему зимой в квартирах воздух более сухой, чем летом, и для ощущения комфорта его необходимо увлажнять?

8.6. Когда абсолютная влажность воздуха больше и во сколько раз – в декабре после месяца затяжных дождей с мокрым снегом при температуре $t_1 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и относительной влажности $\varphi_1 = 95\%$ или после месяца жары в июле при температуре $t_2 = 35\text{ }^{\circ}\text{C}$ и относительной влажности $\varphi_2 = 40\%$? Давления насыщенных паров воды при этих температурах равны $p_{\text{нп},1} = 4,6$ мм рт. ст. и $p_{\text{нп},2} = 42$ мм рт. ст. соответственно. Какой будет относительная влажность воздуха, если «декабрьский» воздух нагреть до температуры $t_3 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$? Давление насыщенного пара при температуре $t_3 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ равно $p_{\text{нп},3} = 17,5$ мм рт. ст.

8.7. При температуре T и давлении p воздух имеет относительную влажность φ . Найти отношение массы этого воздуха к массе такого же объема сухого воздуха, имеющего те же давление и температуру. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_{\text{нп}}$.

8.8. В сосуд объемом $V = 10\text{ дм}^3$, который содержит сухой воздух, внесли блюдце с $m = 1$ г воды. После этого сосуд герметично закрыли и оставили при температуре $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, при которой давление насыщенного пара $p_{\text{нп}} = 2,3 \cdot 10^3$ Па. Какая масса воды испарится?

8.9. В сосуде объемом $V = 1\text{ м}^3$ при температуре $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ находится воздух с относительной влажностью $\varphi = 30\%$. Определите

относительную влажность после добавления в сосуд и полного испарения $m = 5$ г воды. Температура поддерживается постоянной. Давление насыщенных паров воды при $t = 20$ °С равно $p_{\text{нп}} = 2,3 \cdot 10^3$ Па.

8.10. В комнате объемом V находится воздух при абсолютной температуре T и относительной влажности ϕ_1 . Какую массу воды нужно испарить, чтобы повысить влажность воздуха до значения ϕ_2 ? Температура воздуха не изменяется.

8.11. Два баллона объемом V_1 и V_2 соединены тонкой трубкой, перекрытой краном. В первом баллоне содержится воздух с относительной влажностью ϕ_1 , во втором – воздух с относительной влажностью ϕ_2 . Температура газов в баллонах одинакова. Кран открывают. Найти относительную влажность смеси. Температура не меняется.

8.12. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится воздух при $t = 100$ °С и относительной влажности $\phi = 40$ %. Объем сосуда $V = 1$ л. Сосуд охлаждается до температуры $t_1 = 20$ °С. На сколько нужно изменить объем сосуда, чтобы не выпала роса? Давление насыщенного пара при температуре $t = 20$ °С равно $p_{\text{нп}} = 2,3 \cdot 10^3$ Па.

8.13. В сосуде находится воздух с относительной влажностью ϕ_1 при абсолютной температуре T_1 . Объем воздуха – V_1 . Какой будет относительная влажность воздуха при понижении температуры до T_2 и уменьшении объема сосуда до V_2 ? Давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 $p_{\text{нп},1}$ и $p_{\text{нп},2}$ известны.

8.14. В откачанном герметически закрытом сосуде объемом $V = 10$ дм³ находится колбочка, содержащая $m = 10$ г воды. Сосуд и колбочку нагревают до $t = 100$ °С, а затем поддерживают при этой температуре. Какая масса воды испарится?

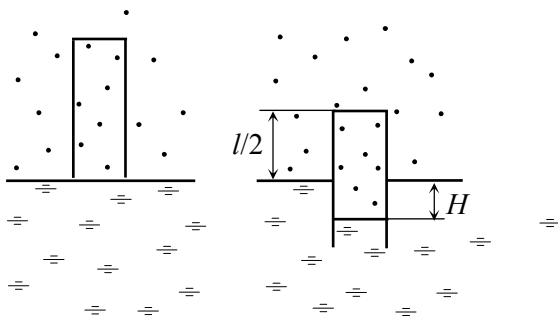
8.15. Для измерения массы воды в каплях тумана пробу воздуха при давлении $p = 100$ кПа и температуре $t = 0$ °С герметически закрывают в сосуде с прозрачными стенками, нагревают до температуры, при которой туман полностью испарится, и измеряют давление при этой температуре. Найти массу воды, содержащейся в $V = 1$ м³ воздуха, если температура исчезновения тумана $t_1 = 82$ °С, давление смеси при этой температуре $p_1 = 180$ кПа.

8.16. Цилиндрический сосуд делится на две части легким подвижным поршнем. В одну часть сосуда помещают $\nu = 2$ моля сухого воздуха, в другую часть – некоторое количество влажного воздуха, при этом в равновесии поршень делит сосуд на части, объемы которых относятся как $n : m$ ($n = 4$, $m = 3$). При медленном охлаждении всего сосуда поршень сначала неподвижен, затем начинает двигаться и через некоторое время занимает положение посередине сосуда. Какую часть сосуда занимал водяной пар? Найти массу сконденсировавшейся к этому моменту воды. Считать, что объем сконденсировавшейся воды много меньше объемов частей сосуда.

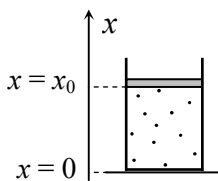
8.17. Сравните поведение «обычного» идеального газа и пара при изотермическом сжатии.

8.18. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится $m = 5$ г воды. Площадь поршня $S = 600$ см², внешнее давление $p_a = 10^5$ Па. Цилиндр медленно нагревают до тех пор, пока вся вода не испарится. На какую высоту поднимется поршень?

8.19. Перевернутая пробирка длиной $l = 100$ см, содержащая воздух и насыщенный пар, касается открытым концом поверхности воды. Затем пробирку погружают в воду наполовину, при этом поверхность воды в пробирке оказывается на глубине $H = 45$ см. Температура постоянна, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³. Найдите давление насыщенного водяного пара.



8.20. Насыщенный водяной пар находится в цилиндре под поршнем при температуре T . При изотермическом сжатии Δm пара сконденсировалось. Какая работа была при этом совершена?



8.21. Цилиндрический сосуд, содержащий ненасыщенный пар, закрыт тяжелым плотно прилегающим к стенкам сосуда поршнем, который может свободно перемещаться вдоль сосуда. Сосуд медленно охлаждают. Построить график зависимости высоты поршня над дном сосуда от температуры $x(T)$. Считать, что начало координат находится около дна сосуда, $x = x_0$ – начальная координата поршня (см. рисунок).

8.22. Герметичный сосуд заполнен сухим воздухом при атмосферном давлении $p_a = 10^5$ Па при температуре $t_0 = 0$ °С. В него поместили некоторое количество воды, и нагрели до температуры $t = 100$ °С. Определите давление, которое установится внутри сосуда. Рассмотреть следующие варианты:

- а) объем сосуда $V = 20$ л, масса воды $m = 19$ г;
- б) объем сосуда $V = 30$ л, масса воды $m = 15$ г.

Глава 9

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ. ЦИКЛ КАРНО

Тепловым двигателем называют устройство, которое совершает механическую работу, используя для этого внутреннюю (тепловую) энергию какого-то тела. Для технической реализации этого устройства, работающего в непрерывном (циклическом) режиме, необходим газ, который называется *рабочим телом двигателя* и который собственно и совершает работу A , не затрачивая своей внутренней энергии (т.е. изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю: $\Delta U = 0$). Первый закон термодинамики не запрещает такой процесс, но требует существования еще одного тела, которое передает газу свою внутреннюю энергию в виде определенного количества теплоты Q , которое и равно совершенной газом работе:

$$Q = A. \quad (9.1)$$

Это тело называют *нагревателем двигателя*, а о законе (9.1) в применении к двигателю говорят, что двигатель *превращает* в работу энергию, взятую у нагревателя (или, что двигатель совершает работу *на* внутреннюю энергию, взятую у нагревателя).

Опыт, однако, показывает, что внутреннюю энергию какого-то тела нельзя превратить в работу целиком. Это означает следующее. Если взять энергию в виде внутренней энергии какого-то тела, то можно превратить в механическую работу *не всю эту энергию*, а только какую-то ее *часть*, оставшаяся часть должна по-прежнему остаться в виде внутренней энергии и должна быть передана телу с меньшей температурой. В применении к тепловому двигателю это означает, что наряду с рабочим телом и нагревателем двигателю необходимо еще одно тело с температурой, меньшей температуры

нагревателя, которому будет отдаваться не превращенная в механическую работу часть внутренней энергии нагревателя. Такое тело называется *холодильником двигателя*. Утверждение о невозможности двигателя без холодильника называется *вторым законом термодинамики*.

Давайте рассмотрим принципы работы теплового двигателя на примере двигателя внутреннего сгорания, «найдем» у него холодильник и убедимся, что существование этого холодильника, с одной стороны, позволяет двигателю внутреннего сгорания работать, а с другой, приводит к потерям энергии и снижает эффективность его работы.

Итак, нагревателем двигателя внутреннего сгорания является бензин, который сгорает внутри двигателя, и выделившаяся при сгорании энергия нагревает воздух в цилиндре двигателя*. Рабочим телом двигателя внутреннего сгорания является смесь воздуха и бензина, причем поскольку масса бензина составляет несколько процентов от массы воздуха в двигателе, то в первом приближении можно считать, что рабочим телом является воздух, и пренебречь изменением его химического состава в результате сгорания бензина.

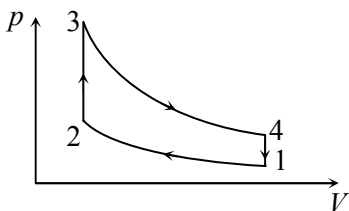


Рис. 9.1

Смесь воздуха и бензина готовится в двигателе так. С помощью системы клапанов в цилиндр засасывается воздух, находящийся при атмосферном давлении (состояние 1 на рис. 9.1). Затем в этот воздух впрыскивается бензин, и смесь воздуха и бензина сжимается с помощью поршня (процесс 1 – 2 на рис. 9.1). При этом на этом участке

мы должны совершить работу над газом в двигателе. Сжатие смеси воздуха и бензина происходит быстро, за это время смесь не успевает обменяться теплом с окружающей средой, поэтому процесс сжатия 1 – 2 – адиабатический.

* То обстоятельство, что нагреватель находится внутри двигателя, позволяет ускорить работу двигателя внутреннего сгорания, поскольку исключает из работы двигателя медленную стадию теплопередачи энергии от внешнего источника газу.

После этого бензин поджигается (в состоянии 2) и сгорает. Сгорание бензина происходит практически мгновенно; за это время поршень не успевает переместиться. Поэтому не изменяется объем воздуха в двигателе, и, следовательно, этот процесс – изохорическое нагревание (участок 2 – 3 на рис. 9.1).

Затем горячий воздух внутри двигателя толкает поршень и совершает полезную работу, которая больше той, что совершили мы при сжатии холодного воздуха. Этот процесс является адиабатическим, поскольку теплообмен между горячим воздухом в двигателе и окружающей средой за время расширения практически не успевает произойти (участок 3 – 4 на рис. 9.1).

Если теперь сжать воздух в двигателе, то необходимо будет совершить ту же работу, которую совершил воздух в процессе расширения, и в результате не будет произведено полезной работы. Поэтому перед сжатием воздух в двигателе необходимо охладить. Однако ждать его охлаждения из-за теплообмена с окружающей средой нужно было бы очень долго. Поэтому «охлаждение» рабочего тела в двигателе внутреннего сгорания проводится так: клапаны открывают отверстия в цилиндре, горячий воздух выбрасывается из двигателя (состояние 4) и заменяется холодным атмосферным воздухом. Поскольку в этом процессе объем двигателя не меняется – можно считать, что это изохорическое охлаждение (участок 4 – 1 на рис. 9.1). Затем клапаны закрывают отверстия в двигателе, впрыскивается бензин, и процесс повторяется*.

Таким образом, если пренебречь небольшими изменениями массы и химического состава воздуха в двигателе внутреннего сгорания в процессе работы, то цикл двигателя – две изохоры и две адиабаты (рис. 9.1). При этом на изохоре 2 – 3 газ получает, на изохоре 4 – 1 – отдает тепло окружающему воздуху, который и является таким образом холодильником двигателя. Куда же это отданное тепло (которое, заметим, получено благодаря сгоранию *купленного нами* бензина) расходуется? Часть этой энергии расходуется на совершение полезной работы в процессе 3 – 4 (ради чего мы, собст-

* Рассмотренный циклический процесс был впервые осуществлен в 1876 г. немецким инженером Н.А. Отто и называется циклом Отто.

венно, бензин и покупали). Однако другая часть уходит в процессе 4 – 1 на «отопление улицы», т.е. теряется*!

А можно ли не терять эту энергию? Второй закон термодинамики говорит о том, что нельзя. В применении к двигателю внутреннего сгорания это означает, что полностью превратить энергию бензина в механическую работу невозможно. Какая-то ее часть обязательно останется внутренней и будет именно в таком виде передана окружающему воздуху, т.е. неизбежно пойдет на «отопление улицы». Отсюда сразу следует, что эффективность работы любого теплового двигателя определяется тем, какую долю от энергии, полученной от нагревателя, двигатель способен превратить в работу. Эту долю принято называть *коэффициентом полезного действия двигателя* (КПД):

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}}, \quad (9.2)$$

где A – работа, совершенная двигателем в течение цикла; $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, полученное от нагревателя за цикл. Эту формулу можно переписать и по-другому. Поскольку работа газа за цикл равна разности тепла, полученного от нагревателя, и тепла, отданного двигателем холодильнику, т.е. $A = Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}$, то

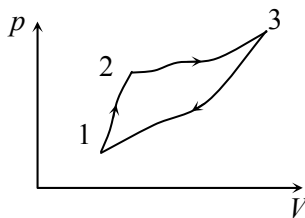
$$\eta = \frac{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{A}{A + Q_{\text{х}}} \quad (9.3)$$

(отметим, что количество теплоты, отданное холодильнику, $Q_{\text{х}}$ по определению положительно, поскольку согласно правилам знаков, принятым в термодинамике, отданное тепло нужно считать положительным, если газ его отдает, и отрицательным, если получает). Рассмотрим пример нахождения КПД.

Пример 9.1. Циклический процесс, происходящий с газом, состоит из трех участков (см. рисунок). На первом газ получает количество теплоты Q_1 , на втором – Q_2 , на третьем – Q_3 . Найти КПД процесса.

* Конечно, эта энергия в автомобилях как-то используется, например для обогрева салона. Однако с точки зрения совершения механической работы – это потерянная энергия.

Решение. Как следует из данного в условии графика, на любом участке процессов 1 – 2 и 2 – 3 газ получает тепло – $\delta Q > 0$. Это связано с тем, что на любой стадии процессов растут и давление газа, и его объем, и, следовательно, температура.



Поэтому газ совершает положительную работу $\delta A > 0$, и растет внутренняя энергия газа $\Delta U > 0$, откуда и получается сделанное выше утверждение. Таким образом, в течение всего процесса 1 – 3 имел место контакт газа и некоторого тела, от которого газ получал энергию в виде некоторого количества теплоты (которое и является нагревателем).

Аналогично доказывается, что на любом участке процесса 3 – 1 газ отдавал тепло ($Q < 0$), т.е. имел место контакт газа и некоторого тела, которое является холодильником.

Отсюда заключаем, что количество теплоты, полученное газом в течение цикла от нагревателя, есть

$$Q_{\text{н}} = Q_1 + Q_2, \quad (*)$$

а количество теплоты, отданное холодильнику, –

$$Q_{\text{х}} = -Q_3. \quad (**)$$

Поскольку конечное состояние газа в цикле совпадает с начальным, то приращение внутренней энергии газа за цикл равно нулю: $\Delta U = 0$. В течение цикла газ получил $Q_1 + Q_2 + Q_3$ количества теплоты. Поэтому применение первого закона термодинамики ко всему циклу дает

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = A, \quad (***)$$

где A – механическая работа, совершенная газом в течение цикла. Отсюда по формуле (9.2) находим КПД данного процесса:

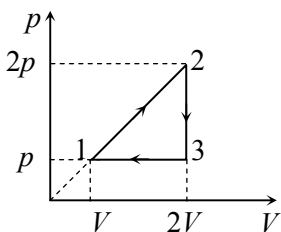
$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2}.$$

Поскольку термодинамика позволяет связать количество теплоты, полученное газом в том или ином процессе, с изменением макроскопических параметров газа, то знание этих изменений, в принципе, позволяет находить КПД цикла, если известно, как меняются давление и объем газа в течение цикла. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. С помощью первого закона термодинамики установить участки процесса, в которых газ контактировал с нагревателем, и найти количество теплоты, полученное от нагревателя. При этом работу газа можно искать, как площадь фигуры, лежащей под графиком соответствующего процесса в координатах $p - V$.

2. Найти работу, совершенную газом в течение цикла. Для этого можно вычислить площадь фигуры, ограниченной циклом на графике процесса в координатах $p - V$, или найти количество теплоты, отданное в течение цикла холодильнику. Затем по формулам (9.2) или (9.3) можно найти КПД.

Рассмотрим следующий пример.



Пример 9.2. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс $1 - 2 - 3 - 1$, график зависимости давления от объема для которого приведен на рисунке (процесс $2 - 3$ – изохорический, процесс $3 - 1$ – изобарический, на участке $1 - 2$ давление является линейной функцией объема,

причем продолжение прямой $1 - 2$ проходит через начало координат). Найти КПД этого процесса.

Решение. Ответим сначала на вопрос о том, на каких участках процесса газ контактирует с нагревателем, на каких с холодильником. В процессе $1 - 2$ газ расширяется, и, следовательно, совершает положительную работу: $A_{1-2} > 0$. В этом процессе растет его температура (это можно увидеть из применения закона Клапейрона – Менделеева к состояниям 1 и 2), и потому растет его внутренняя энергия $\Delta U_{1-1} > 0$. Поэтому из первого закона термодинамики заключаем, что

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2} > 0,$$

и, следовательно, газ контактировал с нагревателем.

В процессе 2 – 3 не меняется объем газа, и значит, газ не совершает работу: $A_{2-3} = 0$. Температура газа в этом процессе уменьшается, поэтому $\Delta U_{2-3} < 0$. Следовательно, в процессе 2 – 3 газ отдавал тепло

$$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + A_{2-3} < 0,$$

т.е. контактировал с холодильником.

Аналогичное рассмотрение процесса 3 – 1 приводит к неравенству

$$Q_{3-1} < 0$$

и выводу о том, что газ контактировал с холодильником.

Найдем теперь количество теплоты, полученное газом от холодильника в течение цикла. Из предыдущего рассмотрения ясно, что

$$Q_{\text{н}} = Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \quad (*)$$

Приращение внутренней энергии газа в процессе 1 – 2 найдем по закону Клапейрона – Менделеева

$$\begin{aligned} \Delta U_{1-2} &= \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (\nu R T_2 - \nu R T_1) = \\ &= \frac{3}{2} (2p2V - pV) = \frac{9}{2} pV, \end{aligned}$$

где ν – количество вещества газа; R – универсальная газовая постоянная; T_2 и T_1 – температуры газа в состояниях 2 и 1.

Работу газа в процессе 1 – 2 найдем как площадь фигуры под графиком процесса в координатах $p - V$. Из рисунка в условии задачи следует, что это – трапеция, поэтому

$$A_{1-2} = \frac{p + 2p}{2} (2V - V) = \frac{3}{2} pV.$$

Теперь из (*) находим

$$Q_{\text{н}} = \frac{9}{2} pV + \frac{3}{2} pV = 6pV.$$

Работу газа в течение цикла найдем как площадь цикла. Поскольку цикл на графике зависимости давления от объема представляет собой прямоугольный треугольник с основанием V и высотой p , то

$$A = \frac{1}{2} pV.$$

Из предыдущих двух формул находим КПД процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{12}.$$

Эта формула показывает, что только одна двенадцатая часть энергии, полученной газом от нагревателя в процессе 1 – 2, становится механической работой, остальная часть этой энергии остается внутренней и передается от холодильника нагревателю.

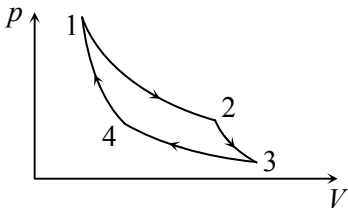


Рис. 9.2

Как показали исследования французского физика и инженера С. Карно, существует процесс, имеющий максимальный КПД среди всех процессов, использующих одни и те же нагреватель и холодильник. Этот процесс состоит из двух изотерм (процессы 1 – 2 и 3 – 4 на рис. 9.2) и двух адиабат (процессы 2 – 3 и 4 – 1 на рис. 9.2)

и называется циклом Карно. Карно вычислил КПД такого процесса $\eta_{\text{К}}$, который оказался равным

$$\eta_{\text{К}} = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}} = 1 - \frac{T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}, \quad (9.4)$$

где T_n и T_x – температуры нагревателя и холодильника. Подчеркнем, что, несмотря на «похожесть» формул (9.3) и (9.4), это – абсолютно разные формулы: формула (9.3) представляет собой определение КПД двигателя; формула (9.4) есть результат вычислений (отметим, достаточно сложных) для цикла Карно, и ни к какому другому циклу, вообще говоря, неприменима.

Задачи школьного курса физики на цикл Карно бывают, как правило, очень простыми и используют только формулу (9.4). Приведем пример.

Пример 9.3. Имеется тепловой двигатель, работающий по циклу Карно (см. рис. 9.2). Известны: работа газа в течение цикла A , количество теплоты, полученное газом в изотермическом процессе $1 - 2$, Q_{1-2} , температура нагревателя T_1 . Найти по этим данным температуру холодильника.

Решение. С одной стороны, КПД любого двигателя есть

$$\eta = \frac{A}{Q_n}, \quad (*)$$

где A и Q_n – работа газа и количество теплоты, полученное газом за цикл. Величина A нам известна, величина Q_n – тоже. Действительно, контакт с нагревателем у газа есть только на участке $1 - 2$, поэтому $Q_n = Q$ (процессы $2 - 3$ и $4 - 1$ в цикле Карно – адиабатические, в процессе $3 - 4$ газ отдает тепло). Поэтому КПД данного цикла нам известен

$$\eta = \frac{A}{Q}. \quad (**)$$

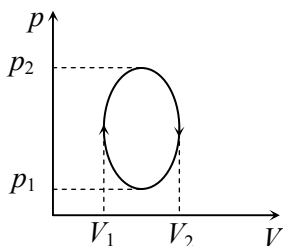
С другой стороны, КПД цикла Карно равен (9.4)

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \quad (***)$$

где T_1 и T_2 – температуры нагревателя и холодильника. Приравнивая правые части формул (**) и (***) и решая полученное уравнение, находим температуру холодильника

$$T_2 = \left(1 - \frac{A}{Q}\right) T_1.$$

ЗАДАЧИ



9.1. С идеальным одноатомным газом происходит циклический процесс, график которого в координатах $p - V$ представляет собой эллипс, полуоси которого параллельны осям (см. рисунок). Известно, что в течение этого процесса газ получил от нагревателя количество теплоты Q , а также максимальные и минимальные давления и объем газа в этом процессе (эти значения приведены на рисунке). Найти КПД процесса.

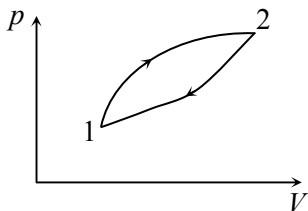
Указание. Площадь эллипса равна πab , где a и b – большая и малая полуоси эллипса.

9.2. Известно, что температура нагревателя тепловой машины, работающей по циклу Карно, в n раз больше температуры холодильника. Найти КПД цикла.

9.3. Известно, что работа, совершаемая газом на «верхней» изотерме цикла Карно, в n раз больше работы, совершенной над газом на «нижней» изотерме цикла. Найти КПД цикла.

9.4. В тепловом двигателе, работающем по циклу Карно, работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении, равна A . Максимальная температура газа в течение цикла равна T . Количество вещества рабочего тела – ν . Найти КПД цикла.

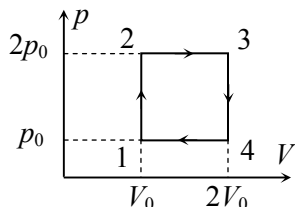
9.5. В каком случае КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, увеличится больше: при повышении температуры нагревателя на ΔT или при уменьшении температуры холодильника на ту же величину ΔT ?



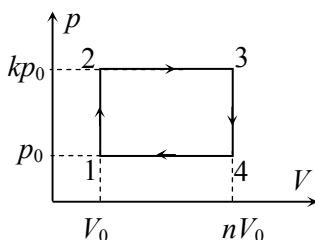
9.6. Найти КПД цикла, изображенного на рисунке, если известно, что отношение работы, совершенной газом в течение цикла, к количеству теплоты, отданному в процессе $2 - 1$, равно n : $A / Q_{2-1} = n$.

9.7 (О, 2007). С одноатомным идеальным газом происходит циклический

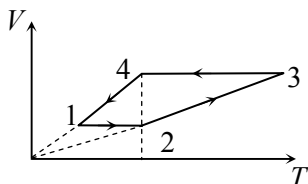
процесс $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ (процессы $1 - 2$, $3 - 4$ являются изохорическими, процессы $2 - 3$, $4 - 1$ – изобарическими), график которого в координатах «давление – объем» приведен на рисунке. На рисунке приведены также значения давления и объема газа в ряде состояний цикла. Найти КПД процесса и его отношение к КПД цикла Карно, работающего при температурах нагревателя и холодильника, равных максимальной и минимальной температуре газа в рассматриваемом процессе.



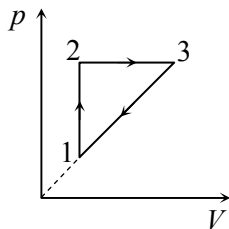
9.8. Циклический процесс $1 - 2 - 3 - 4 - 1$, происходящий с идеальным одноатомным газом, состоит из двух изобар и двух изохор (см. рисунок). Известно, что объем газа в течение цикла меняется в n раз, давление в k раз. Найти КПД цикла.



9.9. На рисунке в координатах $V - T$ изображен циклический процесс, происходящий с одним молем одноатомного идеального газа ($1 - 2$ и $3 - 4$ – изохоры, $2 - 3$ и $4 - 1$ – изобары). В состоянии 1 температура газа равна T_1 , в состоянии 3 – T_3 . Найти КПД процесса.

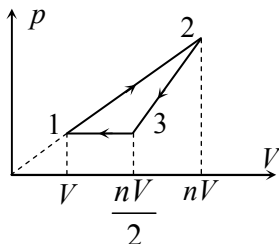


9.10. С идеальным одноатомным газом происходит замкнутый процесс $1 - 2 - 3 - 1$, график которого в координатах «давление – объем» приведен на рисунке (процесс $1 - 2$ – изохорический, $2 - 3$ – изобарический, на участке $3 - 1$ давление является линейной функцией объема). Известно, что работа, совершаемая газом в процессе $2 - 3$, в n раз больше количества теплоты, отданного газом в процессе $3 - 1$. Определить КПД цикла.

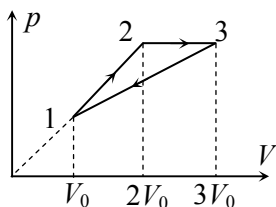


9.11. С идеальным одноатомным газом происходит замкнутый процесс $1 - 2 - 3 - 1$, график которого в координатах «давление –

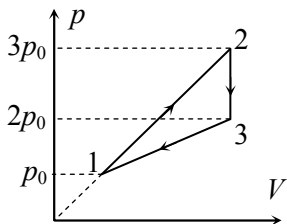
объем» приведен на рисунке к задаче 9.10 (процесс 1 – 2 – изохорический, 2 – 3 – изобарический, на участке 3 – 1 давление является линейной функцией объема). Известно, что объем газа в течение этого цикла изменяется в n раз. Определить КПД цикла.



9.12 (О, 2004). С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1, график зависимости давления от объема для которого приведен на рисунке (процесс 3 – 1 – изобарический, на участках 1 – 2 и 2 – 3 давление является линейной функцией объема, причем продолжение прямой 1 – 2 проходит через начало координат). Найти КПД этого процесса.



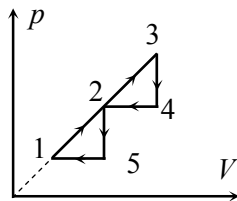
9.13 (О, 2004). С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1, график зависимости давления от объема для которого приведен на рисунке (процесс 2 – 3 – изобарический, на участках 1 – 2 и 3 – 1 давление является линейной функцией объема, причем прямая 1 – 3 проходит через начало координат). Значения объема газа в разных состояниях цикла указаны на рисунке. Определить КПД процесса.



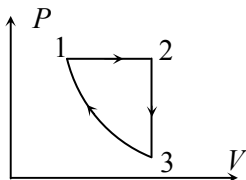
9.14 (О, 2004). С одним моле одноатомного идеального газа происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1, график зависимости давления от объема для которого приведен на рисунке (процесс 2 – 3 – изохорический, на участках 1 – 2 и 3 – 1 давление является линейной функцией объема, причем прямая 1 – 2 проходит через начало координат). Значения давления газа в разных состояниях цикла указаны на рисунке. Определить КПД процесса.

9.15 (ВЭ, 2006 – 2007). С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 4 – 2 – 5 – 1, график которого в координатах $p - V$ приведен на рисунке (процессы 1 – 5 и 2 –

4 – изобарические, 3 – 4 и 2 – 5 – изохорические). Известно, что отношение максимальной и минимальной температур в цикле равно n и что точка 2 делит отрезок 1 – 3 пополам. Найти КПД цикла.

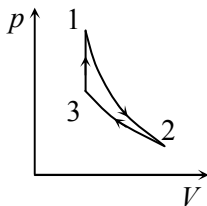


9.16 (ВЭ, 2005 – 2006). С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, состоящий из изобары (процесс 1 – 2 на рисунке), изохоры (процесс 2 – 3) и адиабаты (процесс 3 – 1). Известно, что КПД этого цикла равен η . Найти отношение приращения внутренней энергии газа в адиабатическом процессе к работе, совершенной газом в изобарическом.

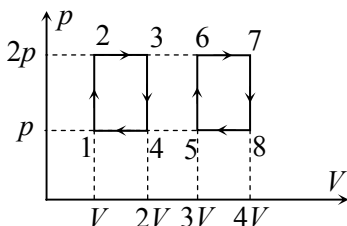


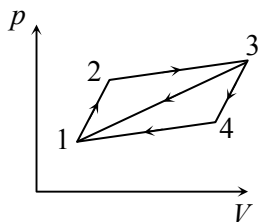
9.17. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, состоящий из изобары (процесс 1 – 2 на рисунке к задаче 9.16), изохоры (процесс 2 – 3) и изотермы (процесс 3 – 1). Известно, что КПД этого цикла равен η . Найти отношение работы газа в изотермическом процессе к приращению внутренней энергии в изобарическом.

9.18 (ВЭ, 2006). Найти КПД тепловой машины, работающей с ν молями одноатомного идеального газа по циклу, состоящему из адиабаты (процесс 1 – 2 на рисунке), изотермы (процесс 2 – 3) и изохоры (процесс 3 – 1). Известно, что работа, совершенная над газом на участке 2 – 3, равна A , разность максимальной и минимальной температур в цикле равна ΔT .



9.19. КПД циклического процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1 равен η . Найти КПД циклического процесса 5 – 6 – 7 – 8 – 5. В координатах «давление – объем» графиками процессов являются прямоугольники, значения ряда параметров цикла указаны на рисунке. Рабочее тело циклов – одноатомный идеальный газ.



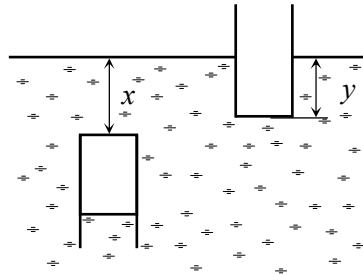


9.20 (О, 2005). КПД циклического процесса $1 - 2 - 3 - 4 - 1$, график которого в координатах «давление – объем» представляет собой параллелограмм (см. рисунок), равен η . Найти КПД циклического процесса $1 - 2 - 3 - 1$.

Глава 10

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

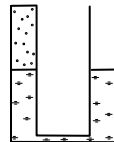
10.1. Перевернутый цилиндрический стакан высотой H погружают в воду вверх дном. На какую глубину x стакан нужно погрузить в воду, чтобы он начал тонуть, если пустой стакан, опущенный в воду вниз дном, плавает так, что его дно погружается в воду на глубину y ($y < H$)? Атмосферное давление — p_0 , плотность воды — ρ .



Температура воды и воздуха поддерживается постоянной. Глубиной погружения стакана считать расстояние между поверхностью воды и дном стакана. Стакан погружают в воду так, что его дно остается параллельным поверхности.

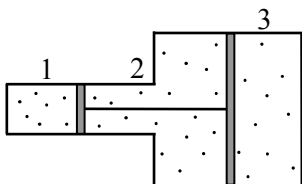
10.2 (ВЭ, 2004 – 2006). В вакууме находится тонкостенный резиновый шар радиусом r_1 с газом, внутри которого находится такой же резиновый шар радиусом r_2 с тем же газом. Внутренний шар лопается. Найти радиус внешнего шара после этого. Температура поддерживается постоянной. Считать, что резиновая оболочка создает внутри себя давление, обратно пропорциональное радиусу: $p = \alpha/r$.

10.3. В U-образную трубку с открытыми концами налили жидкость, после чего один конец запаляли (см. рисунок). Затем жидкость вывели из состояния равновесия, в результате чего возникли малые колебания жидкости в трубке. Масса жидкости — m , плотность — ρ , площадь поперечного сечения — S , высота столба воздуха в запаянном колене — h . Атмосферное давление — p_0 . Найти частоту малых колебаний. Процесс считать изотермическим.



10.4. В U -образную трубку с открытыми концами налили жидкость, после чего один конец запаяли (см. рисунок к задаче 10.3). Затем жидкость вывели из состояния равновесия, в результате чего возникли малые колебания жидкости в трубке. Масса жидкости – m , плотность – ρ , площадь поперечного сечения – S , высота столба воздуха в запаянном колене – h . Атмосферное давление – p_0 . Найти частоту колебаний. Процесс считать адиабатическим, а газ в запаянной трубке над жидкостью – одноатомным.

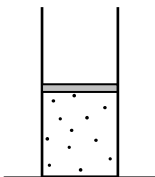
Указание. В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением: $pV^{5/3} = \text{const}$.



10.5 (О, 2003). В сосуде, имеющем форму двух «состыкованных» цилиндров одинаковой длины l и с площадями сечений S и αS ($\alpha > 1$), находится одноатомный идеальный газ. Сосуд разделен на три части двумя поршнями, связанными жестким стержнем, которые могут

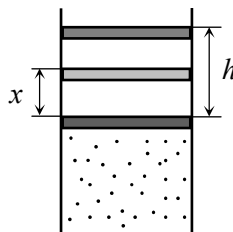
перемещаться в сосуде без трения. В начальный момент поршни находятся в равновесии посередине каждого цилиндра, при этом отношение давлений в первой и третьей частях сосуда равно $p_3/p_1 = \beta$. К сосуду подвели тепло Q так, что температура возросла, оставаясь одинаковой во всех трех частях. На сколько изменилось давление в первой части сосуда?

10.6 (О, 2003). С одним молем одноатомного идеального газа происходит процесс, в котором давление газа зависит от объема по закону $p = \alpha - \beta V^2$, где α и β – положительные постоянные. Объем газа возрастает. Получает газ, или отдает тепло?



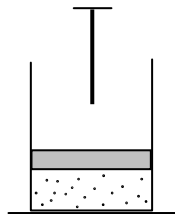
10.7 (ВЭ, 2006 – 2007). В вертикальном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится одноатомный идеальный газ при абсолютной температуре T_0 , при этом газ находится в равновесии. Температуру газа увеличивают в два раза, удерживая поршень в первоначальном положении. Затем сосуд теплоизолируют, а поршень отпускают. Какая температура установится в сосуде после того, как поршень остановится? Атмосферным давлением пренебречь.

10.8 (ВЭ, 2006 – 2007). В вертикальном цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем при температуре окружающей среды находится одноатомный идеальный газ. Поршень поднимают на высоту h так, что температура воздуха в сосуде не изменяется. Затем сосуд теплоизолируют, и отпускают поршень. На какой высоте x по



отношению к его первоначальному положению поршень окажется к тому моменту, когда его колебания прекратятся? Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. Атмосферное давление мало.

10.9 (ВЭ, 2005 – 2007). В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой m и площадью S содержится идеальный одноатомный газ. Поршень находится на высоте h от дна сосуда. Над поршнем висит длинная гибкая веревка, масса единицы длины которой – λ . Расстояние от поршня до нижнего конца веревки также равно h . Какое количество теплоты нужно медленно сообщить газу, чтобы поршень переместился вверх на $2h$? Атмосферное давление – p_a .



10.10 (О, 2004). Однородный железный стержень массой m нагрет так, что его температура меняется по линейному закону от значения T_1 на одном конце до T_2 на другом. Через некоторое время стержень потерял определенное количество тепла. В новом состоянии его температура также меняется по линейному закону от значения T'_1 ($T'_1 < T_1$) до T'_2 ($T'_2 < T_2$). Какое количество тепла потерял стержень? Удельная теплоемкость железа – c .

10.11 (О, 2003). В калориметр, содержащий некоторое количество воды, наливают ложку горячей воды, при этом его температура увеличилась на ΔT_1 . После того как в него добавили еще одну ложку этой же горячей воды, его температура возросла еще на ΔT_2 . На сколько еще возрастет температура калориметра, если в него добавить еще n ложек такой же горячей воды? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

10.12. Нагретое до $t_0 = 100^\circ\text{C}$ тело опустили в сосуд с водой, при этом температура воды повысилась от температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$

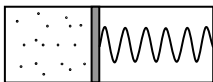
до температуры $t_2 = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Какой станет температура в сосуде, если в него опустить еще два таких же тела?

10.13 (ВЭ, 2003 – 2004). Температура на улице $t_1 = -20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Когда в комнате включили батареи, в комнате установилась температура $t_2 = +16\text{ }^{\circ}\text{C}$. Через некоторое время температура на улице упала до $t_3 = -24\text{ }^{\circ}\text{C}$, и в комнате включили дополнительный нагреватель мощностью $P = 0,5\text{ кВт}$. При этом температура в комнате не изменилась. Найти мощность батарей. Считать, что поток тепла от горячего тела к холодному пропорционален разности температур между телами.

10.14 (ВЭ, 2005 – 2007). Поверхность космической станции представляет собой сферу радиусом R , температура которой в результате работы аппаратуры внутри станции и излучения тепла в окружающее пространство поддерживается равной T . Станцию окружают тонкой сферической оболочкой радиусом $2R$. Найти температуру оболочки и новую температуру поверхности станции, если единица поверхности станции и сферической оболочки излучают по всем направлениям количество теплоты, пропорциональное четвертой степени их температуры с одинаковым коэффициентом пропорциональности для станции и оболочки.

10.15. С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $p = f(V)$, где f – известная функция. Найти теплоемкость газа в этом процессе в состоянии, в котором объем газа равен V .

10.16. С одноатомным идеальным газом происходит процесс, в котором его давление зависит от объема по закону $p = \alpha V^2$, где α – некоторая постоянная. Найти теплоемкость газа.

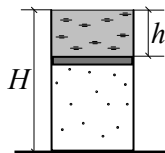


10.17 (ВЭ, 2003 – 2005). Теплоизолированный сосуд разделен на две части поршнем, который может перемещаться без трения. В левой части сосуда содержится ν молей одноатомного идеального газа, в правой – вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной, длина которой в недеформированном состоянии равна длине сосуда. Определить теплоемкость системы. Теплоемкостью сосуда, поршня и пружины пренебречь.

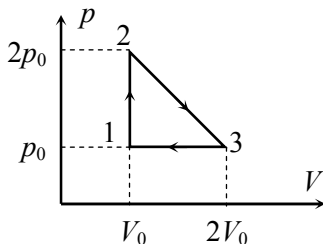
10.18. Идеальный одноатомный газ участвует в термодинамическом процессе, для которого его теплоемкость зависит от темпера-

туры по закону $C = \nu R(T_0^2 / T^2)$, где ν – количество вещества газа; T_0 – постоянная. При какой температуре объем газа будет максимальным?

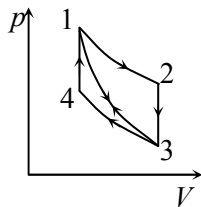
10.19 (О, 2006). В открытом вертикальном цилиндрическом сосуде высотой H под невесомым тонким поршнем находится один моль идеального одноатомного газа. На поршень налита вода, уровень которой совпадает с верхним краем сосуда (см. рисунок), при этом газ находится в равновесии. Найти теплоемкость газа в сосуде в таком состоянии, когда толщина слоя воды $h = 11H/24$. Атмосферным давлением пренебречь.



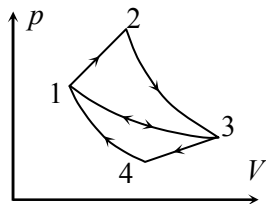
10.20 (О, 2004). С одним молем одноатомного идеального газа происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 1, график которого в координатах p – V приведен на рисунке. Найти КПД этого процесса. Все необходимые величины даны на рисунке.

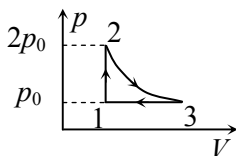


10.21. С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс, изображенный на рисунке. Участки 1 – 2 и 3 – 4 – изотермы, 2 – 3 и 4 – 1 – изохоры, 1 – 3 – адиабата. КПД цикла 1 – 2 – 3 – 1 равен η_1 , а КПД цикла 1 – 3 – 4 – 1 равен η_2 . Чему равен КПД цикла 1 – 2 – 3 – 4 – 1?



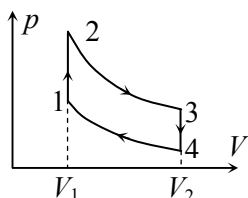
10.22 (ВЭ, 2005). КПД цикла, состоящего из участка 1 – 2, адиабаты 2 – 3 и изотермы 3 – 1, равен η_1 , а КПД цикла, состоящего из изотермы 3 – 1, участка 3 – 4 и адиабаты 4 – 1, равен η_2 . Найти КПД тепловой машины, работающей по циклу 1 – 2 – 3 – 4 – 1. Все циклы обходятся по часовой стрелке.





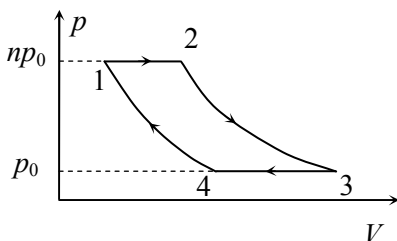
10.23 (О, 2006). С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс (см. рисунок), состоящий из изохоры (1 – 2), адиабаты (2 – 3) и изобары (3 – 1). Известно, что в изохорическом процессе давление газа возросло в два раза. Найти КПД цикла.

Указание. В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением: $pV^{5/3} = \text{const}$.



10.24. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс, состоящий из двух изохор (1 – 2 и 3 – 4) и двух адиабат (2 – 3 и 4 – 1). Известные параметры цикла приведены на рисунке. Определить КПД процесса.

Указание. В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением: $pV^{5/3} = \text{const}$.



10.25. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс 1 – 2 – 3 – 4 – 1 (см. рисунок), состоящий из двух изобар (1 – 2 и 3 – 4) и двух адиабат (2 – 3 и 4 – 1). Известно, что в отношении максимального давления газа в этом процессе к минимальному равно n . Найти КПД цикла.

Указание. В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением: $pV^{5/3} = \text{const}$.

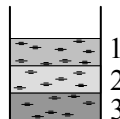
10.26. Свободно перемещающийся непроницаемый, тонкий и невесомый поршень делит цилиндрический сосуд объемом $V = 100$ л на две части. В одну часть сосуда вводят некоторое количество воды, а в другую – некоторое количество газа. В сосуде поддерживают температуру $T = 373$ К. Какое давление установится в сосуде, если в него вводят:

- $m_1 = 74$ г воды, $m_2 = 10$ г водорода;
- $m_1 = 74$ г воды, $m_2 = 74$ г углекислого газа;

в) $m_1 = 36$ г воды, $m_2 = 2,8$ г азота?

Молярные массы: воды $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18$ г/моль, водорода $\mu_{\text{H}_2} = 2$ г/моль, углекислого газа $\mu_{\text{CO}_2} = 44$ г/моль, азота $\mu_{\text{N}_2} = 28$ г/моль.

10.27 (О, 2002). В открытый цилиндрический сосуд налиты в виде трех тонких горизонтальных слоев не смешивающиеся и взаимно нерастворимые жидкости. Сосуд с жидкостями медленно и равномерно по объему нагревают. При какой температуре в сосуде начнется процесс кипения? Давление наружного воздуха – нормальное атмосферное. Зависимость давления насыщенного пара от температуры для каждой из жидкостей можно представить в виде $p_{\text{нп}} = \alpha(T - T_{\text{пл}})^2$, где $T_{\text{пл}}$ – температура плавления; α – постоянная величина. Для налитых в сосуд жидкостей температуры плавления и кипения, соответственно, равны: $T_{\text{пл},1} = 300$ К, $T_{\text{кип},1} = 400$ К, $T_{\text{пл},2} = 300$ К, $T_{\text{кип},2} = 380$ К, $T_{\text{пл},3} = 250$ К, $T_{\text{кип},3} = 350$ К. Насыщенный пар можно считать идеальным газом, $p_{\text{атм}} = 10^5$ Па.



РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

1. Основные принципы молекулярно-кинетической теории. Массы и скорости молекул. Количество вещества

1.1. Так как жидкости практически несжимаемы, то можно считать, что их молекулы «упакованы» очень плотно, без промежутков (в отличие от газов). Поэтому линейный размер ячейки пространства, занимаемой одной молекулой, может рассматриваться в качестве оценки размера молекулы.

Найдем сначала объем такой ячейки. Для этого рассмотрим элемент жидкости объемом V . Пусть этот элемент содержит N молекул. Тогда на одну молекулу приходится объем

$$V_1 = \frac{V}{N}. \quad (1)$$

Умножим и разделим формулу (1) на массу одной молекулы m_0 и число Авогадро N_A . Поскольку Nm_0 есть масса m рассматриваемого элемента жидкости, m/V – плотность жидкости ρ , m_0N_A – молярная масса μ , из формулы (1) получаем

$$V_1 = \frac{\mu}{\rho N_A}. \quad (2)$$

Извлекая кубический корень из объема (2), занимаемого одной молекулой, получаем оценку размера молекулы

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}, \quad (3)$$

причем все величины в правой части формулы (3) известны. Учитывая, что $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль, а плотность и молярная масса воды, соответственно, $\rho = 1$ г/см³, $\mu = 18$ г/моль, получим из (3)

$$d \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

1.2. Плотность газа находится из очевидной цепочки равенств

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = \frac{m_0 N_A \nu}{V} = \frac{\mu \nu}{V},$$

где m – масса газа; V – его объем; m_0 – масса одной молекулы; N – число молекул в сосуде; N_A – число Авогадро (число молекул в одном моле); ν – число молей, $\nu = m/\mu$.

1.3. Из данных условия находим молярную массу газа

$$\mu = m_0 N_A = m_0 N_A \frac{NV}{NV} = \frac{m_0 N}{V} \frac{V}{N} N_A = \frac{m}{V} \frac{N}{V} N_A = \frac{\rho N_A}{n} = 2 \text{ г/моль.}$$

Таким образом, неизвестный газ – молекулярный водород H_2 .

1.4. Масса одной молекулы углерода m_0 (которая состоит из одного атома) *точно* равна 12 а.е.м., поскольку атомная единица массы и определяется как 1/12 массы атома углерода:

$$m_C = 12 \text{ а.е.м.} \quad (1)$$

По определению масса моля углерода в граммах численно равна массе одной молекулы в атомных единицах массы:

$$\mu_C = 12 \text{ г.} \quad (2)$$

Поскольку моль содержит N_A молекул, то для нахождения массы одной молекулы в граммах нужно массу моля в граммах (2) разделить на число Авогадро, а для нахождения массы моля в атомных единицах массы массу молекулы в а.е.м. (1) умножить на число Авогадро. В результате получим

$$m_C = \frac{\mu_C}{N_A} = 2 \cdot 10^{-23} \text{ г;} \quad (3)$$

$$\mu_C = m_C N_A = 7,2 \cdot 10^{24} \text{ а.е.м.} \quad (4)$$

1.5. Количество молекул в стакане N можно найти как отношение массы жидкости в стакане к массе одной молекулы m_0 . Выражая массу жидкости через ее плотность и объем стакана, получим

$$N = \frac{\rho V}{m_0}. \quad (1)$$

Умножая и деля правую часть формулы (1) на число Авогадро N_A и учитывая, что $\mu = m_0 N_A$, получим

$$N = \frac{\rho V N_A}{\mu}. \quad (2)$$

Поэтому сравнение числа молекул воды и ртути в стакане сводится к сравнению

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} \vee \frac{\rho_{Hg}}{\mu_{Hg}}. \quad (3)$$

Подставляя в правую и левую часть сравнения (3) данные в условии задачи числовые значения, получим

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\mu_{H_2O}} = 0,055 \frac{\text{моль}}{\text{см}^3}, \quad \frac{\rho_{Hg}}{\mu_{Hg}} = 0,065 \frac{\text{моль}}{\text{см}^3}. \quad (4)$$

Таким образом, число молекул ртути в стакане в $0,065/0,055 = 1,18$ раз больше числа молекул в этом же стакане воды (это справедливо и для любых одинаковых объемов).

Количество молекул в стакане найдем по формуле (2). Используя данные условия, находим

$$N_{H_2O} = 6,7 \cdot 10^{24}, \quad N_{Hg} = 7,8 \cdot 10^{24}.$$

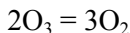
1.6. $N = \frac{m}{\mu} N_A = 3,3 \cdot 10^{23}, \quad \nu = \frac{m}{\mu} = 0,55 \text{ моль}.$

1.7. В одном моле этилового спирта содержится $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ молекул C_2H_5OH . Поскольку каждая содержит 6 атомов водорода, то моль спирта содержит $3,6 \cdot 10^{24}$ атомов водорода, из которых получилось бы $1,8 \cdot 10^{24}$ молекул молекулярного водорода H_2 , т.е. три моля.

1.8. Количество вещества (число молей) определяется как отношение массы вещества к его молярной массе:

$$\nu = \frac{m}{\mu}.$$

При химических реакциях не изменяется масса вещества, но меняется его молярная масса. В частности, при реакции превращения озона в кислород



молярная масса вещества в сосуде уменьшится в полтора раза. Поэтому, несмотря на неизменность массы, количество вещества в сосуде увеличивается в 1,5 раза.

1.9. Количество молекул в единице объема – концентрацию молекул – можно найти из основного уравнения молекулярно-кинетической теории (см. формулу (1.6) теоретического введения к гл. 1):

$$n = \frac{p}{kT}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что число молекул водорода и кислорода, содержащееся в 1 см³ этих газов при одинаковых температуре и давлении, одинаково. Подставляя в (1) данные в условии задачи значения, получим

$$n = 2,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}. \quad (2)$$

Число молекул в одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях (2) не зависит от того, какой это газ, и называется числом Лошмидта.

1.10. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул связана с абсолютной температурой:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (1)$$

где m – масса молекулы; v – средняя скорость молекул; k – постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – абсолютная температура. Умножив правую и левую часть формулы (1) на число Авогадро N_A и используя то обстоятельство, что $\mu = mN_A$, найдем

$$v = \sqrt{\frac{3N_A kT}{\mu}} = 483 \text{ м/с}. \quad (2)$$

1.11. В процессе диффузии молекулы сталкиваются друг с другом, меняя направления движения. При этом после каждого акта

столкновения (называемого рассеянием) молекулы с равной вероятностью могут лететь как в переднюю полусферу, т.е. в первоначальном направлении, так и в заднюю, т.е. в направлении, противоположном первоначальному. В результате процесс взаимного проникновения молекул происходит со скоростями, гораздо меньшими скоростей самих молекул.

$$1.12. v_2 = v_1 \sqrt{\mu_1 / \mu_2}.$$

1.13. Пусть масса молекул рассматриваемого газа – m . Тогда связь средней кинетической энергии и температуры в начальном состоянии и после повышения температуры на ΔT имеет вид

$$mv^2 = 3kT, \quad m(v + \Delta v)^2 = 3k(T + \Delta T), \quad (1)$$

где v – средняя скорость молекул газа при начальной температуре T . Вычитая из второй формулы (1) первую, получим

$$2mv\Delta v = 3k\Delta T - m\Delta v^2. \quad (2)$$

Пусть при увеличении средней скорости молекул еще на Δv температура газа возрастет еще на $\Delta T'$. Тогда

$$m(v + 2\Delta v)^2 = 3k(T + \Delta T + \Delta T'). \quad (3)$$

Вычитая теперь из формулы (3) вторую формулу (1) и используя формулу (2), получим

$$\Delta T' = \Delta T + \frac{2m\Delta v^2}{3k} = \Delta T + \frac{2\mu\Delta v^2}{3kN_A}$$

(здесь использовано, что $\mu = mN_A$).

$$1.14. \text{ Увеличится в } \sqrt{(t_2 + 273^\circ\text{C}) / (t_1 + 273^\circ\text{C})} = 1,016 \text{ раз.}$$

1.15. По формуле (1.5) для числа столкновений молекул с элементом стенки сосуда площадью ΔS за время Δt имеем

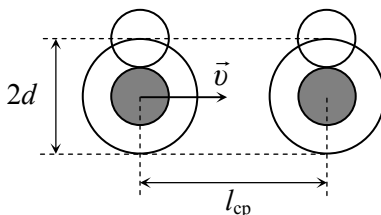
$$N = \frac{nv_{\text{ср}}\Delta S\Delta t}{6} = \frac{n\Delta S\Delta t}{6} \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \frac{n\Delta S\Delta t}{6} \sqrt{\frac{3kN_A T}{\mu}}, \quad (1)$$

где n – концентрация молекул газа; $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость молекул; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; m – масса молекул газа; μ – его молярная масса.

Подставляя в формулу (1) данные в условии задачи значения и считая молярную массу воздуха равной 29 г/моль, получим

$$N = 2 \cdot 10^{27}.$$

1.16. Среднюю длину пробега молекулы газа между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами $l_{\text{ср}}$ можно оценить из условия, что объем, «охватываемый» молекулой от одного столкновения до следующего V_0 , будет равен объему V_1 , приходящемуся на одну молекулу в газе, поскольку именно на таком расстоянии от рассматриваемой молекулы окажется первая из других молекул, столкновение с которой приведет к изменению направления движения первой.



При этом под словами «объем, охватываемый молекулой» следует понимать объем цилиндра с основанием диаметром $2d$ (d – диаметр одной молекулы) и высотой $l_{\text{ср}}$ (см. рисунок):

$$V_0 = \pi d^2 l_{\text{ср}}. \quad (1)$$

Объем V_1 , приходящийся на одну молекулу газа, можно найти как

$$V_1 = \frac{V}{N} = \frac{1}{n}, \quad (2)$$

где V – объем газа; N – число молекул газа в этом объеме; n – концентрация молекул газа, $n = N/V$. Приравнявая объемы (1) и (2), получаем

$$l_{\text{ср}} = \frac{1}{\pi d^2 n} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

1.17. Если время между двумя последовательными столкновениями одной молекулы с другими молекулами обозначить как Δt , то число столкновений каждой молекулы за 1 с будет

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{l} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3kN_A T}{\mu}},$$

где v – средняя скорость молекул газа; l – длина свободного пробега; T – абсолютная температура; μ – молярная масса газа. Отсюда можно выразить длину пробега молекулы

$$l = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{3kN_A T}{\mu}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

1.18. Атмосфера Земли – газовая оболочка вокруг Земли, представляющая собой смесь газов (около 78 % азота, 21 % кислорода и 1 % других газов). Если считать, что эти газы находятся в состоянии термодинамического равновесия, то среднюю скорость молекул можно оценить как:

$$v = \sqrt{\frac{3kN_A T}{\mu}} \quad (1)$$

(обозначения очевидны). Для водорода ($\mu = 2$ г/моль) при нормальных условиях ($T = 273$ К) из (1) находим

$$v_{H_2} = 1850 \text{ м/с}; \quad (2)$$

для азота при тех же условиях

$$v_{N_2} = 460 \text{ м/с.} \quad (3)$$

Как видим, средняя скорость молекул воздушной оболочки Земли значительно меньше второй космической скорости $v_2 = 11,2$ км/с, которую должны иметь любые тела (и космические корабли, и молекулы) для того, чтобы покинуть Землю. Однако при термодинамическом равновесии не все молекулы, хотя и большая их часть, имеют скорость, близкую к (1). Некоторая их часть, и тем большая, чем ближе средняя скорость v ко второй космической скорости v_2 , имеют скорость больше, чем вторая космическая. Из сравнения величин v_2 и v для разных газов воздушной оболочки Земли можно сделать вывод о том, что для того, чтобы покинуть Землю, наиболее благоприятные возможности имеет водород, скорость молекул которого ближе всего ко второй космической скорости. Именно поэтому в атмосфере Земли практически отсутствуют молекулы водорода. Для Луны вторая космическая скорость

$v_2 = 2,4$ км/с значительно меньше, чем для Земли. Поэтому вероятность покинуть Луну у любых молекул ее газовой оболочки гораздо больше и, как следствие, Луна не имеет атмосферы.

1.19. В процессе испарения площадь поверхности жидкости в сосуде непрерывно изменяется. Найдём скорость уменьшения уровня жидкости в сосуде в зависимости от площади поверхности жидкости.

Пусть в некоторый момент времени площадь поверхности жидкости равна S . Тогда за малый интервал времени Δt , за который площадь поверхности жидкости практически не изменилась, с поверхности вылетит

$$\Delta N = nS\Delta t \quad (1)$$

молекул. Умножив это равенство на массу одной молекулы жидкости m_0 , найдём массу жидкости Δm , испарившейся за интервал Δt :

$$\Delta m = nm_0S\Delta t. \quad (2)$$

Из формулы (2) находим изменение объема ΔV и уровня жидкости Δh за рассматриваемый интервал времени Δt :

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{nm_0S\Delta t}{\rho}; \quad (3)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{nm_0\Delta t}{\rho} = \frac{n\mu\Delta t}{\rho N_A} \quad (4)$$

(в формуле (4) использовано, что $m_0N_A = \mu$, где N_A – число Авогадро). Из формулы (4) видим, что скорость убывания уровня жидкости в сосуде $\Delta h/\Delta t$ не зависит от площади поверхности жидкости, или, другими словами, уровень жидкости опускается с постоянной скоростью:

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{n\mu}{\rho N_A}. \quad (5)$$

Поэтому вся жидкость испарится за время

$$t = \frac{R}{v} = \frac{R\rho N_A}{n\mu}.$$

2. Уравнение состояния идеального газа. Изопроцессы

2.1. Аквалангисту необходимо нырнуть на дно озера, удерживая мензурку вверх дном, и измерить высоту столба воздуха в мензурке l_1 . Тогда глубину погружения H он сможет определить, воспользовавшись законом Бойля – Мариотта:

$$p_0 l_0 S = (p_0 + \rho g H) l_1 S, \quad (1)$$

или

$$H = \frac{p_0}{\rho g} \left(\frac{l_0}{l_1} - 1 \right), \quad (2)$$

где p_0 – атмосферное давление воздуха; l_0 – высота мензурки; ρ – плотность воды. Вычисления по формуле (2) легко сделать в уме, поскольку множитель $p_0/\rho g$ в (2) при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па приблизительно равен 10 м. Это значит, что если высота столба воздуха в мензурке равна половине высоты самой мензурки, то глубина погружения – 10 м; если высота столбика воздуха в пять раз меньше длины мензурки, то глубина – 40 м и т.д.

2.2. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к некоторому элементу объема воздуха V , получим

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

где m – масса воздуха в рассматриваемом объеме. Из (1) находим плотность $\rho = m/V$ воздуха:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1,28 \text{ кг/м}^3.$$

2.3. Из закона Гей-Люссака имеем

$$\frac{V}{T} = \frac{2V}{T + \Delta T}. \quad (1)$$

Решая уравнение (1), находим: $T = \Delta T$.

2.4. Так как объем сосуда в рассматриваемом процессе не меняется, то давление и температура газа в нем связаны законом Шарля. Из этого закона для начального и конечного состояния газа имеем:

$$\frac{p}{T} = \frac{p_1}{T_1} = \frac{p(1 + \alpha)}{T + \Delta T}. \quad (1)$$

Решая уравнение (1), находим

$$T = \frac{\Delta T}{\alpha} = 250 \text{ К.}$$

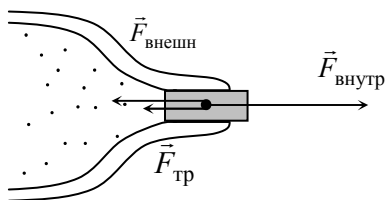
2.5. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к начальному и конечному состояниям и учитывая, что количество вещества газа не изменяется, получим

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1V_1}{T_1},$$

где p , V и T – давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_1 , V_1 и T_1 – давление, объем и температура в конечном. По условию задачи $T_1 = T + \Delta T$, $p_1 = p(1 + \alpha)$, $V_1 = V(1 + \beta)$. Отсюда

$$T = \frac{\Delta T}{\alpha + \beta + \alpha\beta} = 350 \text{ К.}$$

2.6. На пробку действуют: силы со стороны внешнего $\vec{F}_{\text{внешн}}$ и внутреннего воздуха $\vec{F}_{\text{внутр}}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (см. рисунок). Условие равновесия пробки в бутылке имеет вид



$$p_0S + F_{\text{тр}} = pS,$$

где p – давление газа в бутылке. Подставляя в это уравнение давление p , найденное из закона Шарля ($V = \text{const}$) для данной массы газа, $p = p_0T/T_0$ и решая полученное уравнение относительно температуры T , до которой нужно нагреть газ в бутылке, найдем

$$T = T_0 \left(1 + \frac{F}{p_0 S} \right) = 405 \text{ К.}$$

2.7. а) уменьшится в 1,18 раза;

б) уменьшить в 1,43 раза;

в) увеличить в 1,33 раза.

2.8. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к порции воздуха, захватываемой насосом при каждом качании, найдем ее массу Δm :

$$\Delta m = \frac{p_a \nu \mu}{RT},$$

где μ – молярная масса воздуха; T – его температура.

Теперь из закона Клапейрона – Менделеева для воздуха в мяче можно найти его давление:

$$p = \frac{n \Delta m}{\mu} RT = \frac{m \nu \nu_a}{V} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

2.9. $p = \Delta p V_2 / (V_1 - V_2)$.

2.10. $\Delta m / m = (T_2 - T_1) / T_2$, где Δm – масса воздуха, покинувшего сосуд; m – масса воздуха в сосуде до нагревания.

2.11. $\Delta m = (n - k)m/n$, $n > k$.

2.12. Поскольку перегородка находится в равновесии, то силы, действующие на нее со стороны газов, равны. Поэтому равны и давления газов. Находя давления газов из закона Клапейрона – Менделеева и приравнявая их, получим

$$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2}.$$

Отсюда находим

$$\nu_2 = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1} \nu_1.$$

2.13. По закону Клапейрона – Менделеева для каждого баллона найдем количество вещества газа ν_1 и ν_2 в каждом баллоне. Имеем:

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT, \quad p_2 V_2 = \nu_2 RT, \quad (1)$$

где T – температура газов. Из формулы (1) находим

$$\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT}, \quad \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT}. \quad (2)$$

Применяя теперь закон Клапейрона – Менделеева к баллонам, соединенным трубкой, и учитывая, что объем такой системы и количество вещества газа в ней суть суммы, соответственно, объемов баллонов и количеств вещества газа в них, получим, используя (2):

$$p(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT = \left(\frac{p_1 V_1}{RT} + \frac{p_2 V_2}{RT} \right) RT = p_1 V_1 + p_2 V_2, \quad (3)$$

где p – давление газа в системе баллонов, соединенных трубкой. Из (3) получаем

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,63 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2.14. Так как объемы сосудов одинаковы, то после установления равновесного состояния газа во втором и третьем сосудах во втором сосуде будут находиться $\nu_2/2$ молей газа. Следовательно, после отсоединения второго сосуда от третьего и соединения его с первым в первом и втором сосуде будут находиться $\nu_1 + (\nu_2/2)$ молей газа. Поэтому закон Клапейрона – Менделеева для первого и второго сосуда дает

$$p2V = \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{2} \right) RT, \quad (1)$$

где V – объем каждого сосуда; T – температура газов в сосудах. С другой стороны, по закону Клапейрона – Менделеева для первого сосуда до его соединения со вторым имеем:

$$p_1 V = \nu_1 RT, \quad (2)$$

где p_1 – давление газа в первом сосуде. Деля уравнение (1) на уравнение (2) и решая полученное уравнение, найдем

$$p_1 = \frac{2\nu_1 p}{\nu_1 + \frac{\nu_2}{2}}.$$

2.15. В условиях термодинамического и механического равновесия температуры и давления водорода и азота слева и справа от поршня равны. Поэтому из закона Клапейрона – Менделеева для азота и водорода имеем:

$$\frac{m_1}{\mu_{\text{H}_2} V_1} = \frac{m_2}{\mu_{\text{N}_2} V_2}, \quad (1)$$

где V_1 и V_2 – части сосуда, занимаемые водородом и азотом соответственно. Из формулы (1) находим, какую часть сосуда занимает водород:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 \mu_{\text{N}_2}}{m_1 \mu_{\text{N}_2} + m_2 \mu_{\text{H}_2}} = \frac{2}{3}.$$

2.16. $l_1 = \mu_{\text{N}_2} l / (\mu_{\text{N}_2} + \mu_{\text{He}}) = 28 \text{ см.}$

2.17. $m = \mu p_0 V (T - T_0) / R T T_0.$

2.18. С одной стороны, молярную массу μ рассматриваемого соединения можно связать с молярными массами водорода, углерода и кислорода:

$$\mu = (3\mu_{\text{C}} + 6\mu_{\text{H}} + \mu_{\text{O}}) n, \quad (1)$$

с другой – найти из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$\mu = \frac{mRT}{pV}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим

$$n = \frac{mRT}{pV(3\mu_{\text{C}} + 6\mu_{\text{H}} + \mu_{\text{O}})} = 2.$$

2.19. Молярная масса соединения равна $\mu = mRT/pV = 44 \text{ г/моль}$ ($T = t + 273 \text{ К}$). Таким образом, неизвестное соединение – углекислый газ CO_2 .

2.20. Опустится на $\Delta h = (V/S)((p/p_0) - 1).$

2.21. $V = (p_2 V_2 - p_1 V_1) / (p_2 - p_1), (p_2 V_2 - p_1 V_1 > 0).$

2.22. Найдем зависимость давления газа от его объема в этом процессе. Для этого из закона Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \quad (1)$$

с помощью данной в условии зависимости V от T исключим температуру. Так как по условию задачи в рассматриваемом процессе $T = \sqrt{V/\alpha}$, то

$$p = \frac{\nu R}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{V}}. \quad (2)$$

Применяя уравнение (2) к начальному ($V = V_1$) и конечному ($V = V_2$) состояниям, получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}.$$

$$\mathbf{2.23.} \quad p_2/p_1 = (V_1/V_2)^2.$$

2.24. Поскольку пробка вылетает при перепаде давлений Δp , а давление газа в левой части до вылета пробки не менялось и равно p , давление газа в правой части сосуда в момент вылета пробки будет равно $p - \Delta p$. Объем V_1 правой части сосуда в этот момент можно найти по закону Бойля – Мариотта, примененному к начальному и конечному состояниям газа в правой части сосуда:

$$pV = (p - \Delta p)V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{pV}{p - \Delta p},$$

где V – объем правой части сосуда до вытаскивания поршня. Отсюда, используя результат задачи 2.13, находим давление в сосуде p_1 после установления равновесия:

$$p_1 = \frac{pV + (p - \Delta p)V_1}{V + V_1} = \frac{2p(p - \Delta p)}{2p - \Delta p}.$$

$$\mathbf{2.25.} \quad p_1 = p + (\Delta p/2).$$

2.26. Пусть масса поршня – M , атмосферное давление – p_a . Тогда условие равновесия поршня без груза имеет вид

$$p_a S + Mg = pS, \quad (1)$$

где S – площадь поршня; p – давление газа в сосуде. Применяя к газу в сосуде закон Клапейрона – Менделеева, получим с учетом (1)

$$p_a + \frac{Mg}{S} = \frac{\nu RT}{V}, \quad (2)$$

где ν и T – число молей и температура газа в сосуде; V – объем сосуда. Когда на поршень положили груз m , давление газа в сосуде увеличится на mg/S , поэтому с учетом того, что объем сосуда уменьшился в n раз, закон Клапейрона – Менделеева для газа в сосуде имеет вид:

$$p_a + \frac{Mg}{S} + \frac{mg}{S} = \frac{n\nu RT}{V}. \quad (3)$$

Вычитая уравнение (2) из уравнения (3), найдем

$$\frac{\nu RT}{V} = \frac{mg}{S(n-1)}. \quad (4)$$

Пусть, для того чтобы уменьшить объем сосуда еще в k раз, на поршень необходимо положить груз m_1 . Тогда закон Клапейрона – Менделеева для газа в этом случае имеет вид:

$$p_a + \frac{Mg}{S} + \frac{mg}{S} + \frac{m_1 g}{S} = \frac{kn\nu RT}{V}. \quad (5)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (5) и используя формулу (4), получим

$$m_1 = \frac{n(k-1)m}{n-1} = 4 \text{ кг}.$$

2.27. Исследуем условия равновесия системы поршней, связанных стержнем (см. рисунок). Для этой системы внешними силами являются: силы, действующие на поршни со стороны газа между ними, $\vec{F}_{г,1}$ и $\vec{F}_{г,2}$ и со стороны внешнего атмосферного воздуха $\vec{F}_{а,1}$ и $\vec{F}_{а,2}$. Условие равновесия поршней дает

$$\vec{F}_{r,1} + \vec{F}_{r,2} + \vec{F}_{a,1} + \vec{F}_{a,2} = 0 \quad (1)$$

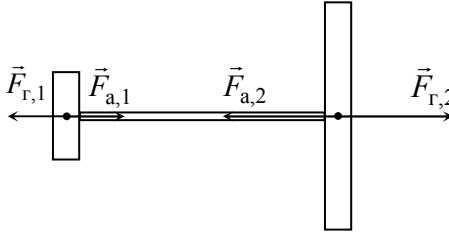
или

$$pS_1 - p_a S_1 + p_a S_2 - pS_2 = 0, \quad (2)$$

где p – давление газа между поршнями. Из формулы (2) получаем

$$p(S_2 - S_1) = p_a(S_2 - S_1). \quad (3)$$

Поскольку площадь труб различна $S_1 \neq S_2$, из формулы (3) следует, что давление газа между поршнями равно атмосферному: $p = p_a$. (Если бы трубы были одинаковы, то условие (3) выполнялось бы благодаря равенству нулю скобок $(S_1 - S_2)$ в правой и левой частях равенства, а давление газа могло бы быть любым.) При нагревании или охлаждении газа между поршнями давление газа должно остаться равным атмосферному (иначе нарушатся условия равновесия), и, следовательно, процесс, происходящий с газом между поршнями, является изобарическим. Это значит, что при нагревании газа между поршнями поршни должны сместиться так, что объем газа между ними должен возрасти (для этого поршни сместятся вправо), при охлаждении поршни сместятся влево.



Поскольку при смещении поршня вправо до стыка труб объем газа станет равен $2S_2l$ (l – расстояние от поршня до стыка в начальном состоянии), а в начальном состоянии он равен $S_1l + S_2l$, по закону Гей-Люссака

$$\frac{S_1l + S_2l}{T_0} = \frac{2S_2l}{T_1} \quad (4)$$

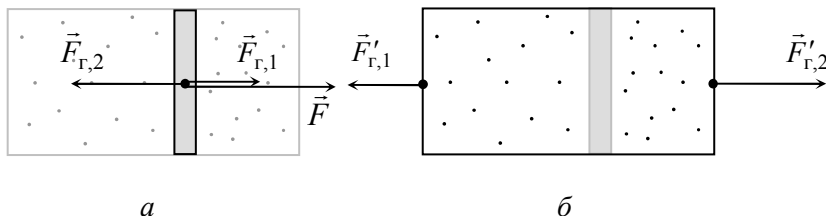
находим температуру газа

$$T_1 = \frac{2S_2 T_0}{S_1 + S_2}. \quad (5)$$

Аналогично можно найти температуру T_2 , до которой газ нужно охладить, чтобы правый поршень сместился до стыка труб

$$T_2 = \frac{2S_1 T_0}{S_1 + S_2}. \quad (6)$$

2.28. Слова «при установившемся движении» означают при одинаковом ускорении поршня и сосуда. Поэтому можно из второго закона Ньютона для поршня и сосуда при условии одинаковости их ускорений найти силы, действующие на эти тела, затем давления газа справа и слева от поршня, а потом по закону Клапейрона – Менделеева их объемы. При этом очевидно, что давления газов справа и слева от поршня будут различны (и, следовательно, будут различны объемы правой и левой частей сосуда), поскольку именно разность сил, действующих на переднюю и заднюю стенку сосуда со стороны внутреннего газа, и заставляет сосуд двигаться с ускорением.



На поршень действуют следующие силы: внешняя сила \vec{F} и силы со стороны правого $\vec{F}_{r,1}$ и левого $\vec{F}_{r,2}$ газов (см. рисунок *a*). На сосуд действуют: на его заднюю стенку – сила со стороны левого газа $\vec{F}'_{r,1}$ (которая равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{r,1}$, действующей со стороны этого газа на поршень),

на переднюю стенку – сила $\vec{F}'_{\Gamma,2}$ (которая равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{\Gamma,2}$, действующей на поршень). Поэтому второй закон Ньютона для поршня и сосуда (в проекциях на горизонтальную ось, направленную вправо) имеет вид

$$ma = F + F_{\Gamma,1} - F_{\Gamma,2}, \quad ma = F_{\Gamma,2} - F_{\Gamma,1} \quad (1)$$

(m – массы сосуда и поршня, которые равны по условию). Из уравнений (1) находим разность давлений газов справа p_2 и слева p_1 от поршня:

$$p_2 - p_1 = \frac{F}{2S}, \quad (2)$$

где S – площадь сечения сосуда.

Теперь можно найти, на сколько сместился поршень по отношению к середине сосуда при его движении. Пусть это смещение равно Δl . Тогда закон Клапейрона – Менделеева для левого и правого газов имеет вид

$$p_1 = \frac{RT}{(l/2 + \Delta l)S}, \quad p_2 = \frac{RT}{(l/2 - \Delta l)S} \quad (3)$$

(напомним, что по условию справа и слева от поршня находится по одному молю газа). Из формул (3), (2) получаем уравнение относительно Δl :

$$\frac{RT}{(l/2 - \Delta l)} - \frac{RT}{(l/2 + \Delta l)} = \frac{F}{2}, \quad (4)$$

которое с помощью элементарных преобразований приводится к квадратному:

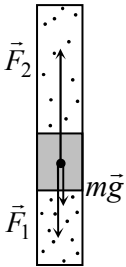
$$\Delta l^2 + \frac{4RT}{F}\Delta l - \frac{l^2}{4} = 0. \quad (5)$$

Решение квадратного уравнения дает

$$\Delta l = -\frac{2RT}{F} + \sqrt{\frac{4R^2 T^2}{F^2} + \frac{l^2}{4}} \quad (6)$$

(второй корень уравнения (5) является отрицательным). Полученное смещение поршня по сравнению с серединой сосуда (6) удовлетворяет двум очевидным предельным случаям: при $F \rightarrow 0$ можно пренебречь вторым слагаемым под корнем по сравнению с первым и, следовательно, $\Delta l \rightarrow 0$, т.е. при малой силе, когда сосуд практически не движется, поршень и не смещается. При $F \rightarrow \infty$ можно пренебречь первым слагаемым под корнем по сравнению со вторым и, следовательно, $\Delta l \rightarrow l/2$. Это верный результат, поскольку при бесконечно большой силе ускорение сосуда и поршня будет бесконечно большим, и чтобы сообщить такое ускорение сосуду объем правой части сосуда должен стать очень малым (чтобы давление газа в нем стало очень большим).

2.29. Рассмотрим равновесие столбика ртути в трубке, расположенной вертикально. На ртуть действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ (m – масса ртути); силы со стороны верхнего \vec{F}_1 и нижнего \vec{F}_2 воздуха (см. рисунок). Условие равновесия ртути дает



$$p_2 - p_1 = \rho g l, \quad (1)$$

где p_1 и p_2 – давления воздуха сверху и снизу от ртути; ρ – плотность ртути; l – длина столбика ртути.

Давления воздуха p_1 и p_2 найдем, применяя закон Бойля – Мариотта к воздуху сверху и снизу от ртути. Имеем

$$p_1 = \frac{pV}{V_{\text{в}}}, \quad p_2 = \frac{pV}{V_{\text{н}}}, \quad (2)$$

где p – давление воздуха в горизонтально расположенной трубке; V – объемы воздуха справа и слева от столбика ртути, когда трубка была расположена горизонтально; $V_{\text{н}}$ и $V_{\text{в}}$ – объемы воздуха внизу и вверх от ртути в вертикально расположенной трубке. По условию $V_{\text{в}} = 2V_{\text{н}}$. Кроме того, для этих объемов существует еще одно условие. Поскольку объем столбика ртути не изменялся, сумма

объемов воздуха сверху и снизу от ртути равна сумме объемов воздуха справа и слева от ртути в горизонтально расположенной трубке. Отсюда имеем

$$V_{\text{н}} = \frac{2}{3}V, \quad V_{\text{в}} = \frac{4}{3}V. \quad (3)$$

Теперь по формулам (2) можно найти давления воздуха сверху p_1 и снизу p_2 от столбика ртути, а затем подставить эти давления в формулу (1). Получаем

$$p = \frac{4}{3}\rho g l.$$

2.30. $p_a = 2\rho g x(l-x)/(l-2x).$

2.31. Обозначим высоту столбика воздуха в трубке, опущенной в жидкость, как x . Тогда чтобы жидкость находилась в этом положении в равновесии, давление воздуха в трубке должно равняться давлению жидкости на глубине x . Поэтому условие равновесия имеет вид

$$p = p_a + \rho g x, \quad (1)$$

где p – давление воздуха в трубке, погруженной в жидкость. Давление p можно найти по закону Бойля – Мариотта для воздуха в трубке:

$$px = p_a l. \quad (2)$$

В результате из (1), (2) имеем

$$p_a(l-x) = \rho g x^2. \quad (3)$$

Решение квадратного уравнения (3) дает искомую высоту столбика воздуха в трубке

$$x = -\frac{p_a}{2\rho g} + \sqrt{\frac{p_a^2}{4\rho^2 g^2} + \frac{p_a l}{\rho g}}$$

(отрицательный корень отброшен, как не имеющий физического смысла).

2.32. Условие равновесие поршня до нагревания дает

$$\frac{mg}{S} + p_1 = p_2, \quad (1)$$

где m – масса поршня; p_1 и p_2 – давления газа в верхней и нижней частях сосуда. Применяя к газу в этих частях сосуда закон Клапейрона – Менделеева и учитывая, что количество вещества газа ν в верхней и нижней частях сосуда – одинаковое, а объем верхней части вдвое больше объема нижней, получим из (1)

$$\frac{mg}{S} = \frac{\nu RT_1}{2V}, \quad (2)$$

где V – объем нижней части сосуда. После нагревания газа в сосуде до температуры T_2 условие равновесия поршня имеет вид

$$\frac{mg}{S} = \frac{\nu RT_2}{V_2} - \frac{\nu RT_2}{V_1}, \quad (3)$$

где V_1 и V_2 – объемы верхней и нижней частей сосуда после нагревания. Поскольку $V_1 + V_2 = 3V$, то из (2), (3) получаем

$$\frac{3T_1}{2(V_1 + V_2)} = \frac{T_2}{V_2} - \frac{T_2}{V_1}. \quad (4)$$

Вынося за скобку объем V_2 в знаменателях правой и левой частей равенства (4) и вводя для отношения объемов обозначение $x = V_1/V_2$, получим из (4)

$$\frac{3T_1}{2(x+1)} = T_2 - \frac{T_2}{x}. \quad (5)$$

После элементарных преобразований получаем из (5) квадратное уравнение для отношения объемов x :

$$x^2 - \frac{3T_1}{2T_2}x - 1 = 0. \quad (6)$$

Из квадратного уравнения (6) находим отношение верхнего объема к нижнему после нагревания

$$x = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3T_1}{4T_2} + \sqrt{\frac{9T_1^2}{16T_2^2} + 1}$$

(отрицательный корень отброшен, как не имеющий физического смысла).

2.33. При наличии воздуха над ртутью в трубке условие равновесия ртути при атмосферном давлении p_1 имеет вид

$$p_1 = \rho gh + p_0 = \rho gh + \frac{\nu RT}{S(l-h)}, \quad (1)$$

где h – высота столбика ртути в трубке, которая определяет показания барометра $p'_1 = \rho gh$; ν и T – число молей и температура воздуха над ртутью в трубке; S – площадь сечения трубки. Из формулы (1) можно найти величину, которая определяет разность истинного давления и показаний барометра:

$$\frac{\nu RT \rho g}{S} = (p_1 - p'_1)(\rho gl - p'_1). \quad (2)$$

Теперь из условия равновесия ртути при показании барометра p'_2 и формулы (2) находим истинное давление в этом случае:

$$p_2 = p'_2 + \frac{(\rho gl - p'_1)(p_1 - p'_1)}{\rho gl - p'_2}.$$

2.34. Из условия равновесия поршней до нагревания заключаем, что количество вещества газа в каждом отсеке одинаково. После нагревания газа в левом отсеке его давление увеличится, что приведет к перемещению всех поршней вправо. При этом поскольку температуры газов во всех отсеках, кроме крайнего левого, одинаковы, то из условия равновесия поршней следует, что объемы этих отсеков должны быть одинаковы. Это значит, что если правый поршень сместился вправо на Δx , то второй справа – на $2\Delta x$, третий – на $3\Delta x$, ..., самый левый – на $n\Delta x$.

Отсюда находим, что объем каждого отсека, за исключением самого левого, уменьшился на $S\Delta x$, объем левого отсека увеличился на $nS\Delta x$, где S – площадь сечения сосуда. Поэтому условие равновесия самого левого поршня имеет вид

$$\frac{\nu RT}{\left(\frac{l}{n+1} + n\Delta x\right)S} = \frac{\nu RT_0}{\left(\frac{l}{n+1} - \Delta x\right)S}, \quad (1)$$

где ν – число молей газа в каждом отсеке; $lS/(n+1)$ – первоначальные объемы отсеков. Решая уравнение (1), находим перемещение самого правого поршня $\Delta x = \frac{l(T - T_0)}{(n+1)(nT_0 + T)}.$

3. Графические задачи на газовые законы

3.1. Очевидно, гипербола $y = \alpha/x$ ($\alpha > 0$) с ростом параметра α будет подниматься вверх в первой четверти координатной плоскости $y - x$. Поэтому из закона Клапейрона – Менделеева

$$p = \frac{(mRT / \mu)}{V}$$

закключаем, что из двух, приведенных на рисунке в условии задачи изотерм, более высокая отвечает большей массе газа m (при одинаковой молярной массе μ и температуре T для обеих изотерм), или меньшей молярной массе (при одинаковой массе и температуре).

3.2. Прямая, расположенная под бóльшим углом к оси температуры, отвечает большей массе (при одинаковой молярной массе и объеме для обеих изохор) или меньшей молярной массе (при одинаковой массе и объеме).

3.3. Прямая, расположенная под бóльшим углом к оси температуры, отвечает большей массе (при одинаковой молярной массе и давлении для обеих изобар) или меньшей молярной массе (при одинаковой массе и давлении).

3.4. Из данного в условии задачи графика следует, что максимальной будет температура газа в состоянии 3, минимальной в состоянии 1. Действительно, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева температура идеального газа пропорциональна произведению его давления на его объем. Поскольку в состоянии 3 это произведение максимально среди всех состояний, проходимых газом в рассматриваемом процессе, а в состоянии 1 минимально, то получаем сделанное выше утверждение. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к состояниям 1 и 3

$$pV = \nu RT_1, \quad npkV = \nu RT_3,$$

где ν – число молей газа; T_1 и T_3 – температуры газа в состояниях 1 и 3, и деля второе равенство на первое, получим отношение максимальной и минимальной температур газа в рассматриваемом процессе

$$\frac{T_3}{T_1} = nk.$$

3.5. Рассмотрим сначала процесс 1 – 2 данного цикла. Поскольку зависимость объема от температуры в этом процессе – линейная,

продолжение которой проходит через начало координат, процесс 1 – 2 – изобарический с ростом объема и температуры (см. задачу 3.1). На плоскостях $p - T$ и $p - V$ ему отвечают горизонтальные прямые, проходимые в сторону возрастания объема и температуры (см. рисунок).

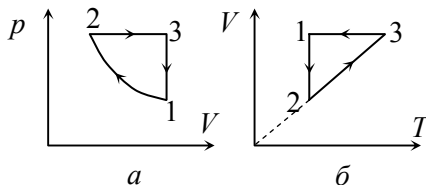
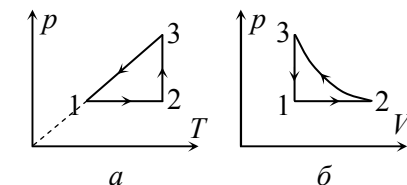
Процесс 2 – 3 – изотермический, в котором убывает объем (и, как это следует из закона Клапейрона – Менделеева, растет давление). Поэтому на плоскости $p - T$ ему отвечает вертикальная прямая (см. задачу 3.1), проходимая газом в направлении роста давления (см. рисунок *а*). На плоскости $p - V$ этот процесс изображается гиперболой, проходимой газом в направлении роста давления и убывания объема (см. рисунок *б*).

Процесс 3 – 1 является изохорическим, в котором убывает температура (и, как это следует из закона Клапейрона – Менделеева, убывает давление). На плоскости $p - T$ ему отвечает прямая, продолжение которой проходит через начало координат, и замыкающая цикл (см. рисунок *а*). На плоскости $p - V$ этот процесс изображается вертикальной прямой, замыкающей цикл (см. рисунок *б*).

Температуру газа T_3 в состоянии 3 можно найти из следующих соображений. Поскольку процесс 2 – 3 – изотермический, $T_3 = T_2$ (T_2 – температура газа в состоянии 2). Процесс 1 – 2 – изобарический, поэтому равны давления газа в состояниях 1 и 2: $p_2 = p_1$. Применяя теперь закон Клапейрона – Менделеева к состоянию 2, получим

$$p_2 V_2 = \nu R T_2 \Rightarrow T_2 = T_3 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} = \frac{p_1 V_2}{\nu R}.$$

3.6. Графики зависимости давления от объема и объема от температуры для рассматриваемого циклического процесса приведены на рисунке.



Массу газа можно найти из следующей цепочки равенств

$$m = \rho_{\max} V_{\min} = \rho_0 \frac{V_{\max} T_1}{T_3} = \frac{\rho_0 V_0}{n}.$$

3.7. $\mu = nR\rho_0 T_0/p_0.$

3.8. $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}.$

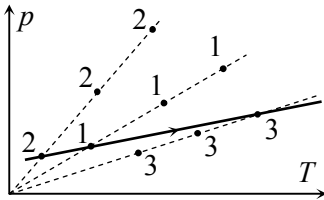


Рис. 1

3.9. Чтобы понять, как изменяется объем газа в данном в условии процессе, можно рассуждать следующим образом. Рассмотрим состояния, которым отвечают точки, лежащие на плоскости $p(T)$ на одной прямой, выходящей из начала координат (точки, помеченные цифрами 1 на рис. 1). Как показано в задаче 3.1, все такие прямые описывают изохорические

процессы, поэтому объем газа во всех таких состояниях одинаков. Точки, лежащие на других прямых, проходящих через начало координат на плоскости $p(T)$, также описывают состояния, в которых объем газа одинаков. Это значит, что одинаков объем газа в состояниях, отмеченных цифрами 2 на рис. 1, или в состояниях, отмеченных цифрами 3. Однако поскольку состояния 1 или 2, или 3 принадлежат разным изохорам, то $V_1 \neq V_2 \neq V_3$ (V_1 , V_2 и V_3 – объем газа в состояниях 1, 2 или 3 соответственно). В задаче 3.1 показано, что изохоры, расположенные более полого на плоскости $p(T)$, отвечают большему объему, поэтому

$$V_1 < V_2 < V_3.$$

Следовательно, в процессе, данном в условии (на рис. 1 это – сплошная прямая), объем газа растет.

Для нахождения зависимости объема от температуры из данного в условии графика найдем зависимость давления от температуры в рассматриваемом процессе, а затем с ее помощью исключим давление из закона Клапейрона – Менделеева. Поскольку данная в условии зависимость – растущая прямая, продолжение которой пересекает ось давлений при некотором положительном давлении, имеем

$$p = kT + b, \quad (1)$$

где k и b – некоторые положительные числа (размерность величины b – паскаль (Па), величины k – паскаль, деленный на кельвин, (Па/К)). Подставляя зависимость (1) в закон Клапейрона – Менделеева и выполняя простые преобразования, получим

$$V = \frac{\nu RT}{kT + b}, \quad (2)$$

где ν – число молей газа; R – универсальная газовая постоянная. График зависимости (2) можно построить из следующих соображений. При малых температурах величиной kT в знаменателе формулы (2) можно пренебречь по сравнению с величиной b , и, следовательно, при малых температурах зависимость (2) приближенно сводится к

$$V = \frac{\nu R}{b} T, \quad (3)$$

т.е. является растущей прямой, проходящей через начало координат. При больших температурах можно, наоборот, пренебречь величиной b по сравнению с kT в знаменателе формулы (2):

$$V = \frac{\nu RT}{kT} = \frac{\nu R}{k}, \quad (4)$$

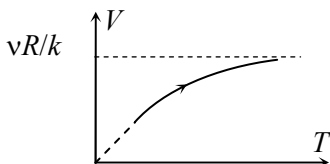
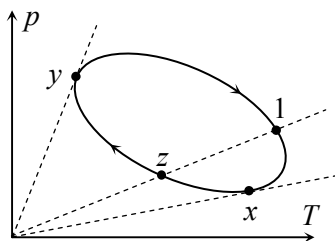


Рис. 2



и, следовательно, зависимость $V(T)$ при больших T стремится к постоянной величине $\nu R/k$. Качественный график зависимости $V(T)$ приведен на рис. 2 («нижняя» часть графика показана пунктиром, поскольку при малых температурах газ может перестать быть газом, закон Клапейрона – Менделеева перестанет работать, и все рассмотренные зависимости изменятся).

3.10. Объем газа максимален в таком состоянии (на рисунке оно обозначено буквой x), через которое проходит одна из двух (более пологая) касательных к данному циклу, пересекающих начало координат.

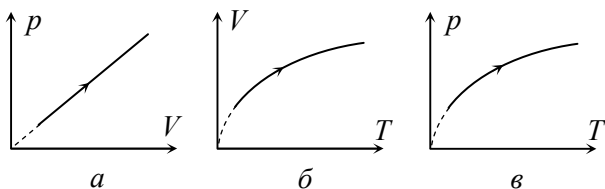
Объем газа минимален в состоянии y , через которое проходит более крутая касательная к данному циклу, пересекающая начало координат. В состоянии z , которое лежит на прямой, проходящей через состояние 1 и начало координат, объем газа совпадает с его объемом в состоянии 1.

3.11. Уменьшается.

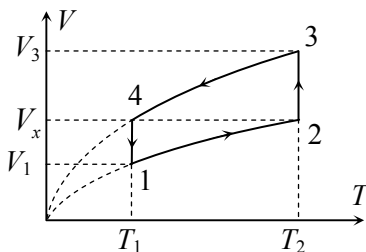
3.12. Графики зависимости $p(V)$, $V(T)$ и $p(T)$ для рассматриваемого процесса представлены на рисунке. Первая зависимость фактически дана в условии. Вторая и третья получаются с помощью подстановки данной зависимости в закон Клапейрона – Менделеева:

$$(\alpha V)V = \nu RT, \quad V = \beta \sqrt{T},$$

где β – положительная постоянная, $\beta = \sqrt{\nu R / \alpha}$. Аналогичные рассуждения приводят к зависимости $p = \sqrt{\nu R \alpha} \sqrt{T}$ в рассматриваемом процессе.



3.13. Изотермам на графике процесса на координатной плоскости $V(T)$ отвечают вертикальные прямые, участкам процесса 1 – 2 и 3 – 4, на которых давление линейно зависит от объема, – зависимости $V \sim \sqrt{T}$ (см. задачу 3.12) с разными коэффициентами пропорциональности. График данного циклического процесса в координатах $V - T$ приведен на рисунке.



С помощью этого графика легко найти объем газа в состояниях 2 и 4 V_x . Пусть зависимость объема от температуры в процессах 1 – 2 и 2 – 3 описывается, соответственно, формулами

$$V_{1-2} = \alpha\sqrt{T}, \quad V_{3-4} = \beta\sqrt{T}, \quad (1)$$

где α и β – некоторые постоянные; температура газа в состояниях 1 и 4 равна T_1 , в состояниях 2 и 3 – T_2 . Тогда для объемов V_1 и V_x , лежащих на первой из зависимостей (1), имеем

$$V_1 = \alpha\sqrt{T_1}, \quad V_x = \alpha\sqrt{T_2}, \quad (2)$$

а для объемов V_x и V_3 из второй зависимости (1) –

$$V_x = \beta\sqrt{T_1}, \quad V_3 = \beta\sqrt{T_2}. \quad (3)$$

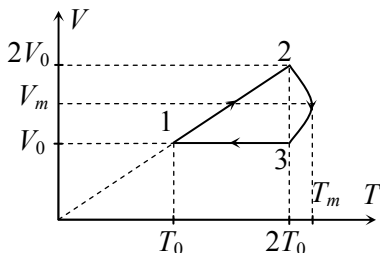
Деля первые формулы (2), (3) на вторые, получим

$$\frac{V_1}{V_x} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}, \quad \frac{V_x}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \quad (4)$$

Приравняв первую и вторую формулы (4), найдем объем газа в состояниях 2 и 4:

$$V_x = \sqrt{V_1 V_3}.$$

3.14. Из трех процессов, из которых состоит рассматриваемый цикл, два являются изопроцессами: 1 – 2 – изохорический процесс, 3 – 1 – изобарический. А вот процесс 2 – 3, несмотря на то, что температура газа в состояниях 2 и 3 одинакова (так как одинаковы произведения давления газа на его объем в этих состояниях), изотермическим процессом не является. Для изотермического процесса зависимость $p(V)$ является гиперболической (см. задачу 3.1), а не линейной, как в этой задаче.



Поэтому построим сначала графики процессов 1 – 2 и 3 – 1, а затем подробно исследуем процесс 2 – 3. Графики изобарического процесса 1 – 2 и изохорического 3 – 1 строятся элементарно: это растущая прямая 1 – 2, продолжение которой проходит через нача-

ло координат, и горизонтальная прямая 3 – 1 (см. рисунок). Причем «заканчивается» прямая 1 – 2 и «начинается» прямая 3 – 1 при одной и той же температуре, которая обозначена на графике как $2T_0$ ($T_0 = p_0 V_0 / \nu R$).

Чтобы найти зависимость объема от температуры для процесса 2 – 3, определим зависимость давления от объема из данного в условии графика, а затем с ее помощью исключим давление из закона Клапейрона – Менделеева. Из данного в условии задачи графика находим

$$p(V) = -\frac{p_0}{V_0} V + 3p_0. \quad (1)$$

Поэтому из закона Клапейрона – Менделеева получаем

$$\nu RT = \left(-\frac{p_0}{V_0} V + 3p_0 \right) V = -\frac{p_0}{V_0} V^2 + 3p_0 V, \quad (2)$$

или

$$T = -\frac{p_0}{\nu R V_0} V^2 + \frac{3p_0}{\nu R} V. \quad (3)$$

Как следует из (3), зависимость $T(V)$ (3) является квадратичной. Поэтому графиком функции $V(T)$ является парабола, но расположенная «не в вертикальном», а «горизонтальном» положении, причем ее ветви направлены в сторону отрицательных значений T , так как коэффициент при квадратичном члене в (3) отрицателен. Эта зависимость показана на рисунке, из которого видно, что в течение процесса 2 – 3 температура сначала возрастает, затем достигает некоторого максимального значения T_m , а затем убывает до первоначального значения $2T_0$.

Максимальное значение температуры T_m и значение объема газа, при котором достигается максимальная температура V_m , можно найти, исследуя функцию (3) на максимум. Предоставляем читателю провести это исследование самостоятельно. Приведем только ответ:

$$T_m = \frac{9}{4} T_0, \quad V_m = \frac{3}{2} V_0.$$

4. Смеси газов. Закон Дальтона

4.1. В соответствии с законом Дальтона давление смеси p равно сумме парциальных давлений каждой компоненты p_1 и p_2 , причем последние можно найти из уравнения состояния идеального газа, примененного к каждой компоненте (считаем смесь идеальным газом)

$$p = p_1 + p_2 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right), \quad (1)$$

где V – объем смеси; T – абсолютная температура, $T = t + 273$ К; μ_1 и μ_2 – молярные массы водорода и кислорода, $\mu_1 = 2$ г/моль и $\mu_2 = 32$ г/моль. По определению плотность смеси есть $\rho = (m_1 + m_2)/V$. Поэтому из (1) имеем

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{RT((m_1/\mu_1) + (m_2/\mu_2))} = 520 \text{ г/м}^3.$$

4.2. $\rho = P(n+1)\mu_{\text{N}_2}\mu_{\text{O}_2} / RT(n\mu_{\text{N}_2} + \mu_{\text{O}_2}) = 1,24 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$

4.3. Количество молей гелия ν_{10} и неона ν_{20} в одной лазерной трубке связаны законом Дальтона

$$p_0 = \frac{\nu_{10}RT}{V_0} + \frac{\nu_{20}RT}{V_0} \quad (1)$$

и условием

$$\nu_{10} = k\nu_{20}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), найдем

$$\nu_{10} = \frac{k}{k+1} \frac{p_0 V_0}{RT}, \quad (3)$$

$$\nu_{20} = \frac{1}{k+1} \frac{p_0 V_0}{RT}. \quad (4)$$

Количество молей гелия ν_1 и неона ν_2 в баллонах можно найти из закона Клапейрона – Менделеева для каждого баллона:

$$v_1 = \frac{p_1 V}{RT}, \quad v_2 = \frac{p_2 V}{RT}. \quad (5)$$

Следовательно, имеющегося количества гелия хватит на

$$N_{\text{He}} = \frac{v_1}{v_{10}} = \frac{k+1}{k} \frac{p_1 V}{p_0 V_0} = 333 \text{ трубки};$$

$$N_{\text{He}} = \frac{v_2}{v_{20}} = \frac{k+1}{1} \frac{p_1 V}{p_0 V_0} = 667 \text{ трубок}.$$

Таким образом, имеющимся количеством газа можно заполнить $N = N_{\text{He}} = 333$ трубки.

4.4. Давление смеси газов можно найти по закону Дальтона

$$p = \frac{RT}{V} (v_1 + v_2 + v_3) = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (1)$$

Средняя молярная масса смеси определяется, как молярная масса однородного газа, который бы при той же массе, температуре и объеме оказывал то же самое давление, что и смесь газов. Поскольку масса смеси газов

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2 + v_3 \mu_3, \quad (2)$$

где m_1 , m_2 и m_3 – массы водорода, кислорода и углекислого газа; μ_1 , μ_2 и μ_3 – молярные массы этих газов, из (1) имеем

$$\frac{RT}{V} \frac{v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2 + v_3 \mu_3}{\mu} = \frac{RT}{V} (v_1 + v_2 + v_3), \quad (3)$$

где μ – средняя молярная масса смеси газов. Из (3) получаем

$$\mu = \frac{v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2 + v_3 \mu_3}{v_1 + v_2 + v_3}. \quad (4)$$

Так как $\mu_1 = 2$ г/моль, $\mu_2 = 32$ г/моль, $\mu_3 = 44$ г/моль, формула (4) дает

$$\mu = 30,7 \text{ г/моль}.$$

4.5.

$$N = \frac{\eta_2 p V N_A}{RT \mu_{O_2} \left(\frac{\eta_1}{\mu_{N_2}} + \frac{\eta_2}{\mu_{O_2}} + \frac{\eta_3}{\mu_{Ar}} \right)} = 2,5 \cdot 10^{21}.$$

4.6. Из закона Клапейрона – Менделеева для каждого сосуда находим объемы сосудов

$$V_1 = \frac{N_1 k T}{p_1}, \quad V_2 = \frac{N_2 k T}{p_2}, \quad (1)$$

где V_1 и V_2 – объемы сосудов; T – температура газов; k – постоянная Больцмана. После соединения сосудов в объеме $V_1 + V_2$ будут находиться $N_1 + N_2$ молекул. Поэтому по закону Дальтона имеем

$$p(V_1 + V_2) = (N_1 + N_2)kT. \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) объемы V_1 и V_2 (1), получим

$$p = \frac{(N_1 + N_2)p_1 p_2}{N_1 p_2 + N_2 p_1}.$$

4.7. После установления равновесия молекулы газа первого сорта распределятся равномерно по всему сосуду, и, следовательно, в объеме V_1 будет находиться $v'_1 = v_1 V_1 / (V_1 + V_2)$ молей этого газа, в объеме V_1 : $v''_1 = v_1 V_2 / (V_1 + V_2)$ молей. Молекулы газа второго сорта будут находиться только в объеме V_2 . Поэтому в объеме V_2 будет смесь v_2 молей газа второго сорта и v''_1 молей газа первого сорта. В объеме V_1 будет находиться газ первого сорта в количестве v'_1 молей. Применяя к первому объему закон Клапейрона – Менделеева, а ко второму – закон Дальтона, получим

$$p_1 V_1 = v'_1 RT = \frac{v_1 V_1}{V_1 + V_2} RT \Rightarrow p_1 = \frac{v_1 RT}{V_1 + V_2};$$

$$p_2 V_2 = (v''_1 + v_2) RT = \left(\frac{v_1 V_2}{V_1 + V_2} + v_2 \right) RT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{\nu_1 V_2 + \nu_2 (V_1 + V_2)}{V_2 (V_1 + V_2)} RT,$$

где T – температура газов. Следовательно, отношение давлений газов

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\nu_1 V_2}{\nu_1 V_2 + \nu_2 (V_1 + V_2)}.$$

4.8.

$$\frac{V_1}{V_2} = \beta - 1, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\beta - 1}{\beta(\alpha - 1)},$$

где V_1 – объем той части сосуда, в которой находится водород; m_1 – масса водорода; V_2 – объем той части сосуда, в которой первоначально находился гелий; m_1 – масса гелия; μ_1 и μ_2 – молярные массы водорода и гелия.

4.9. $V_1/V_2 = \nu_1/\nu_1 - \nu_2$.

4.10. Если бы диссоциация двухатомных молекул не происходила, то число молекул в сосуде определялось соотношением

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \quad (1)$$

где μ – молярная масса двухатомного йода, $\mu = 254$ г/моль; N_A – число Авогадро. В процессе диссоциации вместо одной молекулы J_2 появляются два атома йода. Поэтому если ΔN двухатомных молекул диссоциировало, то новое число частиц в сосуде

$$N_1 = N - \Delta N + 2\Delta N = N + \Delta N. \quad (2)$$

Поэтому для давления смеси газов (двух- и одноатомный йод) в сосуде имеем по закону Дальтона

$$pV = \frac{N_1}{N_A} RT = \frac{N + \Delta N}{N_A} RT = \frac{m}{\mu} \left(1 + \frac{\Delta N}{N} \right) RT, \quad (3)$$

где T – температура газа в сосуде; V – объем сосуда.

Из формулы (3) находим степень диссоциации йода в сосуде:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\mu p V}{m R T} - 1 = 0,2.$$

4.11. После диссоциации ηN молекул газа (N – полное число молекул до диссоциации) число молекул в сосуде равно: $(1 - \eta)N$ двухатомных и $2\eta N$ одноатомных. Поэтому законы Клапейрона – Менделеева для начального и Дальтона для конечного состояний газа дают

$$p_0 V = N k T_0, \quad p_1 V = ((1 - \eta)N + 2\eta N) k T_1, \quad (1)$$

где p_0 , T_0 и p_1 , T_1 – начальные и конечные давления и температура газа; V – объем газа; k – постоянная Больцмана. Деля вторую формулу (1) на первую, получим

$$1 + \eta = \frac{p_1 T_0}{p_0 T_1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отсюда находим $\eta = \alpha/\beta - 1 = 0,05$.

4.12. $p = (1 + \alpha)mRT/\mu V = 1,9 \cdot 10^5$ Па.

4.13. Пусть первоначальное количество двухатомных молекул, помещенных в сосуд, равно N , а начальная температура газа в сосуде – T . При этой температуре в сосуде будут находиться $N - \alpha N$ двухатомных молекул, и $2\alpha N$ одноатомных. Поэтому закон Дальтона при температуре T дает

$$p_1 V = \frac{N(1 + \alpha)}{N_A} R T, \quad (1)$$

где V – объем сосуда. Аналогично при температуре nT имеем из закона Дальтона

$$p_2 V = \frac{N(1 + \alpha)}{N_A} R nT. \quad (2)$$

Деля формулу (2) на формулу (1) и решая полученное уравнение, находим

$$p_2 = \frac{n(1 + \beta)p_1}{(1 + \alpha)}.$$

4.14. Закон Дальтона для начального состояния смеси газов дает

$$p_1 V = (v_1 + v_2) R T_1, \quad (1)$$

где V – объем сосуда.

Так как при температуре T_2 весь водород диссоциировал, причем из каждой молекулы молекулярного водорода H_2 получается две молекулы атомарного водорода H , то число молей атомарного водорода в сосуде равно $2v_2$. Поэтому закон Дальтона для конечного состояния смеси дает

$$p_2 V = (v_1 + 2v_2) R T_2. \quad (2)$$

Выражая из формулы (1) объем газа и подставляя его в формулу (2), получим

$$p_2 = \frac{p_1 T_2 (v_1 + 2v_2)}{T_1 (v_1 + v_2)} = 0,44 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

4.15. Пусть первоначально в сосуде содержалось v молей озона и v_1 молей всех остальных газов. Тогда закон Дальтона для первоначальной смеси дает

$$\frac{p_0 V_0}{R T_0} = v + v_1. \quad (1)$$

Поскольку при химической реакции распада озона



из каждых двух молекул озона образуется три молекулы кислорода, из v молей озона получается $3v/2$ молей кислорода. Поэтому закон Дальтона для газа после распада озона дает

$$\frac{p_0 V}{R T} = \frac{3}{2} v + v_1. \quad (3)$$

Вычитая из формулы (3) формулу (1) и решая получившееся уравнение, находим

$$v = \frac{2p_0}{R} \left(\frac{V}{T} - \frac{V_0}{T_0} \right).$$

4.16.

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{2p_1 T_2 - p_2 T_1}{2(p_2 T_1 - p_1 T_2)}.$$

4.17.

$$p_2 = \frac{p_1 T_2 (v_1 + 2v_2)}{T_1 (v_1 + v_2)} = 0,44 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

4.18. Пусть первоначальное количество молекул озона в сосуде равно N . Поскольку при превращении озона в кислород согласно уравнению реакции



каждые две молекулы озона превращаются в три молекулы кислорода, то после превращения α -й части молекул озона в кислород в сосуде будут находиться

$$N - \alpha N + \frac{3}{2} \alpha N = N + \frac{1}{2} \alpha N \quad (2)$$

молекул. Поэтому закон Дальтона для состояния, в котором диссоциировала α -я часть молекул, дает

$$pV = \frac{N(1 + (1/2)\alpha)}{N_A} RT, \quad (3)$$

где V и T – объем сосуда и температура газа. Аналогично при диссоциации β -й части молекул имеем

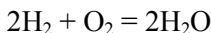
$$p_1 V = \frac{N(1 + (1/2)\beta)}{N_A} RT. \quad (4)$$

Из уравнений (4), (3) находим $p_1 = \frac{2 + \beta}{2 + \alpha} p$.

4.19. Закон Дальтона для смеси водорода и кислорода дает

$$p_0 V = 2\nu RT, \quad (1)$$

где V и T – объем сосуда и температура смеси; ν – количество вещества кислорода и водорода в первоначальной смеси газов (которые по условию одинаковы). В химической реакции образования воды



к каждым двум молекулам водорода присоединяется одна молекула кислорода с образованием двух молекул воды. Это значит, что в реакцию вступает вдвое большее количество вещества водорода, чем кислорода. Поэтому в рассматриваемых условиях водород

прореагирует полностью с образованием такого же количества вещества v воды, половина вещества кислорода $v/2$ будет в избытке, и количество вещества в сосуде после прохождения химической реакции будет равно $3v/2$. Применяя теперь закон Дальтона к конечному состоянию, получим

$$p_1 V = \frac{3}{2} v R T, \quad (2)$$

где p_1 – конечное давление. Деля уравнение (2) на уравнение (1), получим $p_1 = \frac{3}{4} p_0$.

4.20. Первоначальное давление в сосуде $p_0 = \frac{4T_0 p}{3T} = 10^5$ Па.

4.21. Пусть после диссоциации в смеси осталось N_1 молекул углекислого газа, а N_2 молекул углекислого газа прореагировали. Поскольку в реакции



из каждой двух молекул углекислого газа образуется две молекулы угарного газа и одна – кислорода, после реакции в сосуде будут содержаться: N_1 молекул углекислого газа, N_2 молекул – угарного и $N_2/2$ – кислорода. Поэтому закон Дальтона для смеси газов дает

$$pV = \frac{N_1 + (3/2)N_2}{N_A} RT. \quad (2)$$

С другой стороны, для первоначального количества молекул CO_2 в сосуде справедливо соотношение

$$N_1 + N_2 = \frac{m}{\mu} N_A, \quad (3)$$

где μ – молярная масса углекислого газа, $\mu = 44$ г/моль. Решая систему уравнений (2), находим отношение числа молекул CO_2 к числу молекул CO в смеси:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2(pV\mu - RTm)}{(3RTm - 2pV\mu)} = 0,5.$$

5. Термодинамика идеального газа: внутренняя энергия, количество теплоты, первый закон термодинамики

5.1. Приращение внутренней энергии ΔU идеального газа определяется приращением его температуры ΔT . Для одноатомного газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (1)$$

где ν – число молей газа. Найдем приращение температуры газа. По закону Клапейрона – Менделеева имеем

$$\nu R \Delta T = p_1 V_1 - p_0 V_0, \quad (2)$$

где p_0 и V_0 – давление и объем газа в начальном состоянии; p_1 и V_1 – в конечном. По условию $V_1 = n V_0$, $p_0 = \text{const} / V_0^2$, $p_1 = \text{const} / V_1^2$ (const – постоянная, данная в условии). Поэтому из (1) получаем

$$\begin{aligned} \nu R \Delta T &= p_1 V_1 - p_0 V_0 = \frac{\text{const}}{n V_0} - \frac{\text{const}}{V_0} = \frac{\text{const}}{V_0} \frac{1-n}{n} = \\ &= p_0 V_0 \frac{1-n}{n} = R T_0 \frac{1-n}{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда

$$\Delta U = \frac{3(1-n)}{2n} R T_0 = -1,9 \text{ кДж}.$$

Знак минус показывает, что в рассматриваемом процессе внутренняя энергия газа уменьшилась.

5.2. При $n = 1$ не изменяется, при $n > 1$ убывает.

5.3. $U = 3(mg + P_0 S)h/2$.

5.4. Поскольку объем газа не меняется, газ не совершает работу. Поэтому сообщенное газу количество теплоты равно приращению его внутренней энергии ΔU :

$$Q = \Delta U. \quad (1)$$

Для одноатомного газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (2)$$

где ν – число молей газа; ΔT – приращение температуры. Величину ΔT найдем через изменение средней скорости молекул газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3k} (mv_1^2 - mv_0^2), \quad (3)$$

где k – постоянная Больцмана; v_1 и v_0 – средние скорости молекул газа в конечном и начальном состояниях. Поскольку $v_1 = \nu v_0$, то из (3) имеем

$$\Delta T = \frac{mv_0^2}{3k} (n^2 - 1) = T(n^2 - 1). \quad (4)$$

Поэтому согласно (1), (4) получаем:

$$Q = \frac{3}{2} \nu RT(n^2 - 1).$$

$$\mathbf{5.5.} \quad Q = (3/2)pV(n - 1) = 0,75 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

5.6. В изохорическом процессе газ не совершает работу ($A_V = 0$), при изобарическом нагревании совершает положительную работу, $A_p > 0$ (так как объем газа увеличивается), при адиабатическом нагревании – отрицательную ($A_Q < 0$). (Последнее можно доказать с помощью первого закона термодинамики, который для адиабатического процесса дает $\Delta U = -A_Q$. Отсюда следует, что при $\Delta U > 0$ работа газа отрицательна.) Поэтому

$$A_p > A_V > A_Q. \quad (1)$$

Что касается теплоты, то в адиабатическом процессе газ по определению теплоты не получает. Сравнение количеств теплоты, полученной газом в изохорическом Q_V и изобарическом Q_p процессах, можно выполнить на основе первого закона термодинамики: при одинаковых приращениях внутренней энергии и соотношении (1) для работ газа в этих процессах имеем

$$Q_p > Q_V.$$

5.7. Отношение работ, совершенных газами в этих процессах, можно найти из первого закона термодинамики.

Для изотермического процесса

$$Q = A_T,$$

где A_T – работа газа.

Для изобарического процесса

$$Q = \Delta U + A_p = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + p \Delta V = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} A_p,$$

где ΔU – приращение внутренней энергии газа; ν – количество вещества газа; ΔT – приращение температуры; p – давление газа; ΔV – изменение его объема. Отсюда находим, что

$$\frac{A_T}{A_p} = \frac{5}{2}.$$

5.8. Из первого закона термодинамики для адиабатического процесса ($Q = 0$) имеем

$$\Delta U_Q = -A. \quad (1)$$

Для изобарического процесса связь приращения внутренней энергии и работы можно установить, используя формулу (5.11) для работы газа и закон Клапейрона – Менделеева

$$\Delta U_p = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} p \Delta V = \frac{3}{2} A_p. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим отношение приращений внутренних энергий газа в этих процессах

$$\frac{\Delta U_p}{\Delta U_Q} = -\frac{3}{2}. \quad (3)$$

Знак «-» объясняется тем, что при изобарическом расширении ($A_p > 0$) газ нагревается ($\Delta U_p > 0$), при адиабатическом ($A_Q > 0$) – охлаждается ($\Delta U_Q < 0$) и наоборот.

5.9. $Q_V/Q_p = 3/5$.

5.10. Первый закон термодинамики в применении к изобарическому процессу дает

$$\begin{aligned}
 Q_p &= \Delta U_p + A_p = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + p \Delta V = \\
 &= \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} A_p,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где Q_p , ΔU_p , A_p – количество теплоты, приращение внутренней энергии и работа газа в изобарическом процессе, $\Delta U_p = (3/2)\nu R \Delta T$ и $A_p = p \Delta V = \nu R \Delta T$; p – давление газа; ΔV и ΔT – приращения его объема и температуры в этом процессе; ν – число молей. Поскольку в изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, то первый закон термодинамики для изотермического процесса имеет вид

$$Q_T = A_T, \tag{2}$$

где Q_T и A_T – количество теплоты и работа газа в изотермическом процессе. Деля (1) на (2) и учитывая, что по условию $A_p/A_T = n$, получим

$$\frac{Q_p}{Q_T} = \frac{5n}{2}.$$

5.11. В соответствии с первым законом термодинамики сообщенное газу количество теплоты Q было израсходовано на приращение внутренней энергии ΔU и на работу A , совершенную газом:

$$Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Для одноатомного газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \tag{2}$$

где ν – количество вещества газа; ΔT – приращение его температуры. Работа газа при изобарическом расширении

$$A = p \Delta V = \nu R \Delta T. \tag{3}$$

Из (1) – (3) заключаем, что $Q = (5/2)\nu R \Delta T$, и, следовательно,

$$\Delta U = \frac{3}{5} Q = 18 \text{ кДж}.$$

5.12. Для первого процесса

$$Q = A,$$

для второго

$$nQ = \Delta U + A_1,$$

где nQ – количество теплоты, сообщенное газу в изобарическом процессе; ΔU и A_1 – приращение внутренней энергии и работа газа в этом процессе. Как следует из решения задачи 5.7, приращение внутренней энергии газа в изобарическом процессе составляет $3/5$ от переданного газу количества теплоты, работа газа – $2/5$. Поэтому

$$A_1 = \frac{2nA}{5} = 800 \text{ Дж}.$$

5.13. $A = -3\nu R\Delta T / 2$.

5.14. Работу газа в изобарическом процессе $A = p\Delta V$ с помощью закона Клапейрона – Менделеева можно связать с приращением его температуры:

$$A = p\Delta V = pV_2 - pV_1 = \nu RT_2 - \nu RT_1 = \nu R\Delta T = \frac{m}{\mu} R\Delta T = 3750 \text{ кДж}.$$

Здесь ΔV – приращение объема газа, $\Delta V = V_2 - V_1$ (V_2 и V_1 – конечный и начальный объем газа); ν – число молей газа; T_2 и T_1 – абсолютные температуры; ΔT – приращение температуры, $\Delta T = T_2 - T_1$; m – масса; μ – молярная масса газа.

5.15. Так как объем газа не изменяется, то газ не совершает работу ($A = 0$). Поэтому по первому закону термодинамики имеем

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R\Delta T,$$

где ΔT – приращение температуры газа в рассматриваемом процессе. Из закона Шарля

$$\frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{1}{n}$$

(p , T и p_1 , T_1 – начальные и конечные объем и абсолютная температура газа) находим $\Delta T = T(n - 1)$. Отсюда

$$Q = \frac{3}{2} \nu RT = 7,5 \text{ кДж.}$$

5.16. Работа A , совершенная газом в изобарическом процессе, равна

$$A = p(V_2 - V_1), \quad (1)$$

где p – давление газа в этом процессе; V_2 и V_1 – объем газа в конечном и начальном состояниях. Выражая объемы V_1 и V_2 через концентрацию молекул n и полное число частиц ($V = N/n$) и учитывая, что концентрация изменилась в рассматриваемом процессе в q раз, получим

$$A = p \left(\frac{N}{n_2} - \frac{N}{n_1} \right) = p \left(\frac{qN}{n_1} - \frac{N}{n_1} \right) = \frac{pN(q-1)}{n_1} = pV_1(q-1). \quad (2)$$

Пользуясь далее законом Клапейрона – Менделеева для начального состояния, найдем

$$A = (q-1)\nu RT_1 = 5 \text{ кДж.}$$

5.17. В условии задачи дана работа, совершаемая внешними силами над газом, а не работа газа (в первый закон термодинамики в данной выше формулировке (5.7) входит именно последняя величина). Установим связь между этими величинами.

Очевидно, при медленных движениях поршней или стенок, ограничивающих сосуд, (а это практически всегда предполагается в термодинамике) работа газа и работа внешних сил совпадают по величине, но отличаются знаком. Действительно, при медленных перемещениях поршней или стенок силы, действующие на них со стороны газа, и внешние силы компенсируют друг друга, и потому в формулах для работы газа и работы внешних сил над газом углы между этими силами и перемещением поршня отличаются на π , а указанные работы – знаком:

$$A' = -A.$$

Поэтому если в первом законе термодинамики использовать работу газа A' , этот закон будет отличаться знаком от закона (5.7). Для рассматриваемого адиабатического процесса имеем

$$A' = \Delta U. \quad (1)$$

Так как газ – идеальный, то

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_0) = \frac{3}{2} \frac{p_0 V_0}{T_0} (T_1 - T_0), \quad (2)$$

где T_1 – конечная температура газа (в (2) использован также закон Клапейрона – Менделеева). Подставляя приращение внутренней энергии (2) в формулу (1) и решая полученное уравнение, находим

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{2A}{3p_0 V_0} \right) = 360 \text{ К.}$$

5.18. $Q = (5/2)mRT_0(n-1)/\mu.$

Указание. Процесс, происходящий с газом в данных условиях, – изобарический.

5.19. Поскольку в изохорическом процессе давление газа уменьшилось в n раз, то, как это следует из закона Клапейрона – Менделеева, его температура также уменьшилась в n раз. Поэтому в изобарическом процессе температура газа возросла от значения T/n до значения T . Работа газа в изобарическом процессе равна $p(V_2 - V_1)$, где p – давление газа в этом процессе; V_2 и V_1 – конечный и начальный объемы газа в этом процессе. Используя для начального и конечного состояний в изобарическом процессе закон Клапейрона – Менделеева, получим

$$A = p(V_2 - V_1) = pV_2 - pV_1 = \nu RT - \nu R \frac{T}{n} = \frac{\nu RT(n-1)}{n},$$

откуда

$$T = \frac{An}{R(n-1)} = 300 \text{ К.}$$

5.20. $Q = \nu(c(T_2 - T_1) + (c + R)(T_3 - T_2)).$

5.21. Равновесному состоянию рассматриваемой системы газов в сосуде и неподвижной теплопроницаемой перегородки отвечает равенство температур газов. При этом если потеря энергии не происходит, то вся внутренняя энергия, содержащаяся в сосуде в начале процесса, останется в нем и в конце процесса. Таким образом, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{3}{2}v_1RT_1 + \frac{3}{2}v_2RT_2 = \frac{3}{2}v_1RT_x + \frac{3}{2}v_2RT_x, \quad (1)$$

где T_x – установившаяся температура. Из уравнения (1) находим

$$T_x = \frac{v_1T_1 + v_2T_2}{v_1 + v_2}. \quad (2)$$

Разница конечной и первоначальной внутренней энергии каждого газа будет передана ему в процессе теплообмена от другого газа, т.е. в виде теплоты:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2}v_2RT_x - \frac{3}{2}v_2RT_2 = \frac{3v_1v_2(T_1 - T_2)}{2(v_1 + v_2)}, \quad (3)$$

при этом, очевидно, один газ другому передает положительное количество теплоты, а второй первому – отрицательное. Из формулы (3) получается очевидный частный случай: тепло не будет передаваться, если температуры газов равны.

Если перегородка является подвижной, то процесс установления равновесия будет гораздо более сложным: в этом случае должны будут выровняться не только температуры газов, но и их давления. Тем не менее, закон сохранения энергии (1) будет по-прежнему справедлив, так как газ в сосуде не обменивается теплом и не совершает работы над внешней средой. Поэтому установившаяся температура газов будет такой же, как и в первом случае, т.е. будет определяться формулой (2). Поэтому не изменится также полная энергия, переданная от одного газа к другому в процессе установления равновесия (она будет определяться формулой (3)). Однако в случае подвижной перегородки эта энергия будет частично теплотой, а частично работой, поскольку в процессе установления равновесия газы будут совершать работу друг над другом.

$$5.22. \quad T = (V_1T_1 + V_2T_2)/(V_1 + V_2),$$

$$E_{1 \rightarrow 2} = (3/2)nk(T_1 - T_2)V_1V_2/(V_1 + V_2).$$

$$5.23. \quad Q = 2p_0V_0(n^2 - 1).$$

Указание. В данном процессе давление газа линейно зависит от его объема, поэтому работу газа легко посчитать по графику зависимости давления от объема. Далее нужно использовать первый закон термодинамики.

5.24. Исходим из определения теплоемкости газа:

$$C = \frac{Q}{\Delta T}, \quad (1)$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; ΔT – приращение температуры газа при сообщении ему этого количества теплоты Q . Найдем теплоемкость газа для изопроцессов.

Изохорический процесс. Сообщим газу некоторое количество теплоты. Поскольку в изобарическом процессе газ не совершает работу, первый закон термодинамики дает

$$Q = \Delta U, \quad (2)$$

где ΔU – приращение внутренней энергии газа. Поскольку газ – одноатомный, $U = (3/2)\nu RT$ (ν – число молей газа), и

$$Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T, \quad (3)$$

откуда

$$\Delta T = \frac{2Q}{3\nu R}, \quad (4)$$

и из формулы (1) находим теплоемкость газа в изохорическом процессе:

$$C_V = \frac{3}{2}\nu R. \quad (5)$$

Изобарический процесс. Поскольку работа газа в изобарическом процессе равна $p\Delta V$, первый закон термодинамики для изобарического процесса имеет вид

$$Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T. \quad (6)$$

Выражая из формулы (6) величину ΔT и пользуясь формулой (1), находим теплоемкость газа в изобарическом процессе:

$$C_p = \frac{5}{2}\nu R. \quad (7)$$

Теплоемкости газа в изотермическом C_T и адиабатическом C_Q процессах можно найти непосредственно из определения (1):

$$C_T = \infty, \quad C_Q = 0. \quad (8)$$

(Физический смысл этих формул заключается в том, что в изотермическом процессе газ является очень «емким для тепла», поскольку вообще не нагревается, сколько бы теплоты ему не сообщали. В адиабатическом процессе газ является «малоемким для тепла», так как нагревается вообще без сообщения теплоты.)

5.25. Для нахождения теплоемкости сообщим смеси газов некоторое количества теплоты Q , по первому закону термодинамики найдем приращение температуры смеси газов ΔT , вычислим их отношение.

Первый закон термодинамики для изохорического процесса ($A = 0$) имеет вид

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} \nu_1 R \Delta T + \frac{5}{2} \nu_2 R \Delta T = \left(\frac{3}{2} \nu_1 + \frac{5}{2} \nu_2 \right) R \Delta T. \quad (1)$$

Отсюда находим приращение температуры смеси ΔT при сообщении ей количества теплоты Q :

$$\Delta T = \frac{Q}{\left(\frac{3}{2} \nu_1 + \frac{5}{2} \nu_2 \right) R}, \quad (2)$$

и теплоемкость смеси газов при постоянном объеме:

$$c_V = \left(\frac{3}{2} \nu_1 + \frac{5}{2} \nu_2 \right) R. \quad (3)$$

В изобарическом процессе смесь газов будет совершать работу A , поэтому первый закон термодинамики для этого процесса имеет вид

$$Q = \Delta U + A = \left(\frac{3}{2} \nu_1 + \frac{5}{2} \nu_2 \right) R \Delta T + A. \quad (4)$$

Работу смеси газов в изобарическом процессе легко найти по закону Дальтона

$$A = p\Delta V = (v_1 + v_2)R\Delta T. \quad (5)$$

Из (4), (5) находим приращение температуры смеси и ее теплоемкость при постоянном давлении

$$c_p = \left(\frac{5}{2}v_1 + \frac{7}{2}v_2 \right) R. \quad (6)$$

5.26. Чтобы найти теплоемкость в рассматриваемом процессе, сообщим газу в этом процессе малое количество теплоты δQ , по первому закону термодинамики найдем приращение его температуры ΔT , вычислим их отношение, которое по определению и есть теплоемкость.

Согласно первому закону термодинамики имеем

$$\delta Q = \Delta U + \delta A, \quad (1)$$

где ΔU и δA – приращение внутренней энергии и работа газа в рассматриваемом процессе при сообщении ему количества теплоты δQ . Так как газ – одноатомный, то

$$\Delta U = \frac{3}{2}vR\Delta T, \quad (2)$$

где v – число молей газа; ΔT – приращение его температуры. Поскольку количество теплоты δQ мало, то давление газа в рассматриваемом процессе практически не менялось, и, следовательно, работу газа можно приближенно определить так же, как в изобарическом процессе,

$$\delta A \approx p\Delta V, \quad (3)$$

где ΔV – изменение объема газа.

(Отметим, что продолжить равенство (3) с помощью закона Клапейрона – Менделеева вот таким образом: $p\Delta V = vR\Delta T$, было бы неправильно. Закон Клапейрона – Менделеева для малых приращений давления Δp , объема ΔV и температуры ΔT по сравнению со значениями p , V и T дает:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = vR(T + \Delta T), \quad (4)$$

или

$$p\Delta V + \Delta pV = \nu R\Delta T \quad (5)$$

(произведение $\Delta p\Delta V$ является малой величиной по сравнению с $p\Delta V$ и $V\Delta p$ – как принято говорить в математике, *бесконечно малой величиной второго порядка малости* – и потому отброшено в формуле (5)). Таким образом, правильным продолжением формулы (3) для неизобарического процесса было бы равенство $p\Delta V = \nu R\Delta T - \Delta pV$, которое, однако, далее нам не понадобится.)

Подставляя (2) и (3) в формулу (1) и деля правую и левую части полученного равенства на приращение температуры ΔT , получим

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{3}{2}\nu R + p \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (6)$$

Так как ΔV и ΔT малы, отношение $\Delta V/\Delta T$ представляет собой производную зависимости объема газа от температуры по температуре. Выражая, наконец, давление газа через температуру с помощью закона Клапейрона – Менделеева и данной в условии зависимости $V = f(T)$, получим

$$C = \frac{3}{2}\nu R + \frac{\nu RT}{V(T)} \frac{dV(T)}{dT}. \quad (7)$$

Как следует из формулы (7), теплоемкость газа в рассматриваемом процессе, вообще говоря, зависит от его температуры. Поэтому имеет смысл говорить о «мгновенной» теплоемкости при какой-то температуре, или о «средней» теплоемкости газа в процессе перехода из определенного начального в определенное конечное состояние.

Из формулы (7) следует также, что теплоемкость газа не изменяется при переходе от состояния к состоянию, если зависимость объема от температуры является степенной $V(T) = \beta T^\alpha$, где α и β – некоторые числа. Действительно, теплоемкость газа в этом случае

$$C = \frac{3 + 2\alpha}{2}\nu R$$

не зависит от температуры. Процессы, в которых теплоемкость не меняется от состояния к состоянию, называются политропическими.

5.27. а) По формуле (7) из предыдущей задачи (в которой первое слагаемое нужно заменить на C_V , а ν взять равным 1 моль⁻¹) получим

$$C = C_V + 2R$$

(для одноатомного идеального газа $C = 7R/2$).

б) По закону Клапейрона – Менделеева находим, что в рассматриваемом процессе

$$V = \frac{R}{\alpha} T^4$$

($\nu = 1$ моль⁻¹). Поэтому по формуле (7) из предыдущей задачи получаем

$$C = C_V + 4R$$

(для одноатомного идеального газа $C = 9R/2$).

в) По закону Клапейрона – Менделеева находим, что в рассматриваемом процессе

$$V = \sqrt{\frac{RT}{\alpha}}$$

($\nu = 1$ моль⁻¹). Поэтому по формуле (7) из предыдущей задачи получаем

$$C = C_V + \frac{R}{2}$$

(для одноатомного идеального газа $C = 2R$).

5.28. Подставляя зависимость $p(V)$ в закон Клапейрона – Менделеева, находим зависимость объема от температуры в рассматриваемом процессе

$$V = \alpha + 1 \sqrt{\frac{RT}{\beta}}. \quad (1)$$

Теперь по формуле (7) из задачи 5.26 получаем

$$C = \frac{(5 + 3\alpha)\nu R}{2(\alpha + 1)} \quad (2)$$

(для одноатомного идеального газа $C = 2R$).

Из формулы (2) получаем два частных случая, которые уже были рассмотрены (см. задачу 5.24): $C = \infty$ при $\alpha = -1$ (изотермический процесс) и $C = 0$ при $\alpha = -5/3$ (адиабатический процесс). Интересно отметить, что, как это следует из формулы (2), при $-5/3 < \alpha < -1$ (процесс, график которого лежит между адиабатой и изотермой) теплоемкость газа отрицательна.

5.29. Поскольку скорость левого поршня больше скорости правого, то объем газа начнет уменьшаться, и, следовательно, поршни совершают над газом положительную работу. Однако действие газа на поршни приведет к тому, что правый поршень будет разгоняться, а левый тормозиться в процессе движения. Поэтому через некоторое время после начала движения скорости поршней сравняются друг с другом, и, начиная с этого момента, объем газа будет увеличиваться, а поршни начнут совершать над газом отрицательную работу. Поэтому температура газа будет максимальной в тот момент времени, когда скорости поршней будут одинаковы. Эту скорость (обозначим ее v_1) можно найти по закону сохранения импульса. Пренебрегая массой газа по сравнению с массой поршней, получим

$$mv + m2v = 2mv_1, \quad (1)$$

откуда

$$v_1 = \frac{3}{2}v. \quad (2)$$

Применим теперь к системе «газ – поршни» закон сохранения энергии. Приравнявая начальную энергию системы к ее энергии в тот момент, когда скорости поршней равны, получим

$$\frac{3}{2}vRT + \frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = \frac{3}{2}vRT_1 + \frac{2mv_1^2}{2}, \quad (3)$$

где v – число молей газа; T_1 – температура газа в тот момент, когда скорости поршней одинаковы, т.е. когда температура максимальна. (В формуле (3) мы снова пренебрегли массой газа по сравнению с массой поршней.) Решая уравнение (3), находим максимальную температуру газа

$$T_1 = T + \frac{mv^2}{6vR}.$$

5.30. По закону сохранения энергии внутренняя энергия газа в начальном состоянии будет равна внутренней энергии газа в конечном и энергии деформации пружины:

$$\frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} \nu RT_1 + \frac{1}{2} k \Delta x^2, \quad (1)$$

где T и T_1 – температуры газа в начальном и конечном состояниях; ν – число молей газа; k – жесткость пружины; Δx – ее деформация. Используя закон Клапейрона – Менделеева, получим из (1):

$$\frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} p_1 2V + \frac{1}{2} p_1 V, \quad (2)$$

где p_1 – давление газа в конечном состоянии (в (2) использовано также, что в равновесии $p_1 S = k \Delta x$, и $\Delta x = V/S$, где S – площадь сечения цилиндра). Из (2) находим, что

$$p_1 = \frac{3p}{7}. \quad (3)$$

Теперь по закону Клапейрона – Менделеева можно найти конечную температуру:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_1 2V}{T_1}. \quad (4)$$

Подставляя в (4) давление p_1 (3) и решая полученное уравнение, находим

$$T_1 = \frac{6T}{7}.$$

5.31. Пусть в начальном состоянии в сосуде имеется N одноатомных молекул. Тогда начальная внутренняя энергия газа E_0 определяется соотношением

$$E_0 = \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT, \quad (1)$$

где N_A – число Авогадро; R – универсальная газовая постоянная. В конечном состоянии в сосуде находятся $N/2$ одноатомных молекул и $N/4$ двухатомных. Тогда конечная внутренняя энергия газа

$$E_1 = \frac{3}{2} \frac{N}{2N_A} RT_1 + \frac{5}{2} \frac{N}{4N_A} RT_1, \quad (2)$$

где T_1 – температура газа в конечном состоянии. Поскольку при образовании $N/4$ двухатомных молекул выделилась энергия $N\varepsilon/4$, т.е. произошло преобразование потенциальной энергии взаимодействия атомов, объединяющихся в молекулу, в кинетическую энергию молекул, то разность энергии (2) и энергии (1) равна указанному значению:

$$\frac{3}{2} \frac{N}{2N_A} RT_1 + \frac{5}{2} \frac{N}{4N_A} RT_1 - \frac{3}{2} \frac{N}{N_A} RT = N\varepsilon/4. \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим температуру газа в конечном состоянии

$$T_1 = T(12/11 + 2\varepsilon/(11kT)), \quad (4)$$

где $k = R/N_A$ – постоянная Больцмана. Давление газа в конечном состоянии p_1 найдем по закону Дальтона

$$p_1 V = \left(\frac{N}{2N_A} + \frac{N}{4N_A} \right) RT_1, \quad (5)$$

где V – объем сосуда. Подставляя в формулу (5) температуру газа T_1 и учитывая, что для начального состояния газа $pV = (N/N_A)RT$, получим

$$p_1 = p(18kT + 3\varepsilon)/(22kT).$$

В заключении решения этой задачи приведем небольшой комментарий, касающийся баланса внутренней энергии при объединении атомов в молекулу. В идеальном газе молекулы практически не взаимодействуют, и потому потенциальная энергия их взаимодействия равна нулю. Когда молекулы этого газа объединяются в более сложные молекулы, потенциальная энергия их взаимодействия друг с другом становится значительной и ее необходимо учитывать в балансовых соотношениях. Очевидно, эта потенциальная энергия отрицательна, поскольку при диссоциации молекулы внешние си-

лы должны были бы совершить положительную работу. А поскольку полная внутренняя энергия газа в процессе образования сложных молекул не меняется (если, конечно, нет теплообмена с окружающей средой, и внешними силами не совершается работа), то при образовании сложных молекул должна увеличиться их кинетическая энергия. Об этой «лишней» кинетической энергии говорят, что она *выделяется* при образовании сложной молекулы.

5.32. $N_1/N_2 = (2\varepsilon + kT_2)/[5k(T_1 - T_2)]$, где k – постоянная Больцмана.

Указание. Приравнять начальную и конечную энергии газа. Учесть, что энергия одноатомного газа – $(3/2)\nu RT$, двухатомного – $(5/2)\nu RT$.

5.33.

$$Q = \frac{5}{2} p_0 Sh + \frac{3}{2} \rho gh V_0 + 2\rho gh^2 S.$$

Указание. При данных условиях давление газа в резервуаре является линейной функцией его объема $p(V) = p_0 + \rho g(V - V_0)/S$. Работу газа можно вычислить по графику $p(V)$, а приращение внутренней энергии – по закону Клапейрона – Менделеева. Затем использовать первый закон термодинамики.

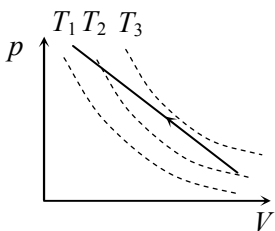
6. Графическое представление процессов в термодинамике идеального газа

6.1. Найдем, как изменялась температура газа в данных процессах. В первом процессе растут и давление, и объем, поэтому из закона Клапейрона – Менделеева заключаем, что повышается температура газа, поэтому растет и внутренняя энергия. Процесс, представленный на графике 3, – изотермический, т.е. температура газа, а следовательно, и его внутренняя энергия не менялись в течение этого процесса.

Исследуем теперь вопрос об изменении температуры газа в процессе, представленном в условии на графике 2. Из закона Клапейрона – Менделеева следует, что давление и объем газа в состояниях с одинаковой температурой удовлетворяют условию $pV = \text{const}$.

Это соотношение выполняется для всех точек, лежащих на плоскости $p - V$ на одной и той же гиперболе

$$p(V) = \frac{\text{const}}{V}, \quad (1)$$



которым, таким образом, отвечает одна и та же температура. Из закона Клапейрона – Менделеева следует также, что чем «выше» расположена гипербола на плоскости $p - V$, тем большей является температура состояний на ней. Этот вывод иллюстрируется рисунком, на котором всем состояниям, лежащим на одной и той же гиперболе, отвечает од-

на и та же температура, причем $T_1 < T_2 < T_3$. Поэтому изменение температуры газа в рассматриваемом процессе происходит следующим образом: сначала температура газа растет (прямая пересекает гиперболы, отвечающие большей температуре, чем температура начального состояния), затем начинает уменьшаться и может стать меньше температуры начального состояния. Таким же является и изменение внутренней энергии газа: сначала она растет, затем убывает. (Конечно, на сколько уменьшится внутренняя энергия газа зависит от того, где «кончается» данный в условии задачи процесс. Если данная прямая является достаточно «короткой», температура газа в течение этого процесса будет только возрастать.)

Знак работы газа определяется тем, как изменяется его объем: если газ расширяется, то сила, действующая на какой-то перемещающийся поршень или стенку сосуда со стороны газа, и перемещение этого поршня или стенки направлены одинаково, и, следовательно, работа, совершенная газом над этим поршнем или стенкой, положительна. Если объем газа уменьшается, то перемещение поршня или стенки и сила, действующая на них со стороны газа, направлены противоположно, работа газа отрицательна. Поэтому в процессах, данных на графиках 1 и 3 условия работа газа положительна, на графике 2 отрицательна.

Чтобы ответить на вопрос, получал или отдавал газ тепло, по первому закону термодинамики найдем знак количества теплоты,

полученного газом в каждом процессе. Если это количество положительно, газ получает тепло, если отрицательно – отдает. По первому закону термодинамики имеем

$$Q = \Delta U + A, \quad (2)$$

где Q , ΔU и A – количество теплоты, сообщенное газу, приращение внутренней энергии газа и совершенная им работа. Для процесса, представленного на графике 1, ΔU и A положительны (см. выше), поэтому положительна и величина Q – газ получает тепло. Для процесса, представленного на графике 3, $\Delta U = 0$ и $A > 0$, следовательно, $Q > 0$ – газ получает тепло.

Гораздо более сложным для анализа является процесс 2: в этом процессе $A < 0$, величина ΔU сначала положительна, потом отрицательна. Поэтому в зависимости от «длины» и «наклона» данного графика возможны разные варианты: газ может получать или отдавать тепло на разных участках этого процесса (примером анализа графика такого рода является задача 10.20).

6.2.

1. $\Delta U > 0, A > 0, Q > 0$;

2. $\Delta U < 0, A > 0, Q$ может быть положительно, может быть отрицательно;

3. $\Delta U > 0, A > 0, Q > 0$.

6.3.

1. $\Delta U > 0, A > 0, Q > 0$;

2. $\Delta U < 0, A > 0, Q$ может быть положительно, может быть отрицательно;

3. $\Delta U > 0, A = 0, Q > 0$.

6.4. Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, сообщенное газу Q , приращение его внутренней энергии ΔU и работа газа A следующим образом связаны друг с другом

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Получим из закона (1) связь Q и A для перечисленных процессов.

Изотермический процесс. Поскольку внутренняя энергия одноатомного идеального газа определяется соотношением $U = (3/2)\nu RT$, где ν – число молей газа; T – его абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная, то изменение внут-

ренной энергии газа в изотермическом процессе равно нулю, т.е. $\Delta U = 0$, и из (1) следует, что количество теплоты, сообщенное газу в изотермическом процессе, равно совершенной им работе:

$$Q = A. \quad (2)$$

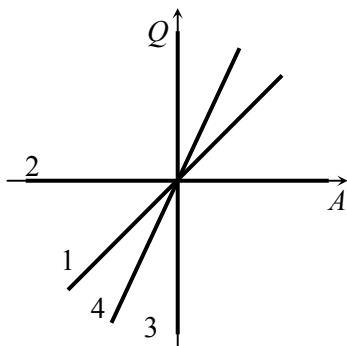


График зависимости Q от A (2) представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат и лежащую в первой и третьей четвертях координатной плоскости. Если для осей Q и A выбран одинаковый масштаб, то эта прямая расположена под углом 45° к координатным осям. График зависимости Q от A (2) отмечен на рисунке цифрой 1.

Адиабатический процесс. В адиабатическом процессе газ не обменивается теплом с окружающими телами, поэтому

$$Q = 0. \quad (3)$$

График зависимости Q от A (3) отмечен на рисунке цифрой 2.

Изохорический процесс. В изохорическом процессе объем газа не изменяется, поэтому газ не совершает работу:

$$A = 0. \quad (4)$$

График зависимости Q от A (4) отмечен на рисунке цифрой 3.

Изобарический процесс. В изобарическом процессе газ совершает работу $A = p\Delta V$, где p – давление газа; ΔV – изменение его объема в этом процессе. Поэтому из закона Клапейрона – Менделеева имеем для работы газа в изобарическом процессе

$$A = \nu R\Delta T. \quad (5)$$

Поскольку для одноатомного идеального газа $\Delta U = (3/2)\nu R\Delta T$, то из (1), (5) следует, что

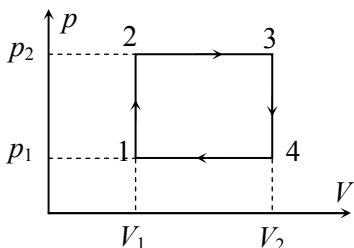
$$Q = (3/2)\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = (5/2)\nu R\Delta T = (5/2)A. \quad (6)$$

График зависимости Q от A (6) отмечен на рисунке цифрой 4.

6.7. Работа, совершенная газом за цикл, равна площади цикла, изображенного в координатах $p - V$. Поэтому

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1), \quad (1)$$

где p_2 – давление газа в состояниях 2 и 3; p_1 – давление в состояниях 1 и 4; V_1 – объем газа в состояниях 1 и 2; V_2 – объем газа в состояниях 3 и 4 (см. рисунок), причем эти величины нам неизвестны. Свяжем эти величины с данными в условии задачи температурами. Для этого раскроем в формуле (1) скобки и воспользуемся законом Клапейрона – Менделеева:



$$A = p_2 V_2 - p_2 V_1 - p_1 V_2 + p_1 V_1 = \nu R(T_3 + T_1 - 2T_2) \quad (2)$$

(здесь использовано, что по условию $T_2 = T_4$). Температуру T_2 можно найти из следующих соображений. Так как процессы 1 – 2 и 3 – 4 – изохорические, и температуры газа в состояниях 2 и 4 по условию задачи совпадают, то

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}, \quad \frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}. \quad (3)$$

Деля первое из равенств (3) на второе, получим

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (4)$$

откуда

$$T_2 = \sqrt{T_1 T_3}. \quad (5)$$

Подставляя температуру T_2 (5) в формулу (2) находим работу газа за цикл

$$A = \nu R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3}) = \nu R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2. \quad (6)$$

Чтобы найти количество теплоты, полученное газом в процессе 1 – 2 – 3, используем для этого процесса первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A, \quad (7)$$

где Q – количество тепла, сообщенное газу в этом процессе; ΔU – приращение его внутренней энергии; A – работа, совершенная газом. Найдем две последние величины.

Поскольку газ – одноатомный, приращение внутренней энергии газа в процессе 1 – 2 – 3 определяется соотношением:

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1). \quad (8)$$

Работа, совершенная газом в процессе 1 – 2 – 3, равна площади фигуры под графиком процесса в координатах «давление – объем». Находим

$$A = p_2(V_2 - V_1) = p_2 V_2 - p_2 V_1 = \nu R (T_3 - T_2) \quad (9)$$

(здесь использован закон Клапейрона – Менделеева). Подставляя температуру T_2 из (5) в формулу для работы газа (9), получим из (7), (8), (9):

$$Q = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1) + \nu R T_3 - \nu R \sqrt{T_1 T_3} = \frac{5}{2} \nu R T_3 - \frac{3}{2} \nu R T_1 - \nu R \sqrt{T_1 T_3}.$$

6.8. Так как график исследуемого процесса убывает быстрее изотермы 0 – 1, то газ на любом малом участке процесса переходит на изотерму, отвечающую меньшей температуре (см. также решение задачи 6.1). Поэтому его температура уменьшается.

На адиабате 0 – 2 газ не получает энергии в виде теплоты, поэтому $Q = 0$ или

$$\Delta U + A = 0. \quad (1)$$

В процессе 0 – 3 работа газа больше его работы в адиабатическом процессе (больше площадь под графиком $p(V)$), и изменение внутренней энергии газа больше изменения внутренней энергии в адиабатическом процессе 0 – 2 (конечное состояние выше конечного состояния на адиабате). Поэтому для процесса 0 – 3

$$\Delta U + A > 0. \quad (2)$$

А поскольку по первому закону термодинамики сумма (2) есть количество теплоты, полученное газом в этом процессе, то $Q > 0$, и, следовательно, в процессе 0 – 3 газ получает тепло.

Таким образом, в процессе 0 – 3 газ получает тепло, но его температура убывает. Это связано с тем, что в этом процессе газ совершает положительную работу, большую полученного тепла, и, следовательно, затрачивает на это часть своей внутренней энергии.

Поэтому теплоемкость газа в таком процессе отрицательна (о том, как практически осуществить такой процесс, см. задачу 10.19).

$$6.9. Q = 2\nu R(T_2 - T_1).$$

$$6.10. A = 0.$$

6.11. Применение первого закона термодинамики ко всему процессу 1 – 2 – 3 – 1 дает: $Q = A$ (приращение внутренней энергии газа в течение всего процесса равно нулю, поскольку газ возвращается в первоначальное состояние). Так как работа газа за цикл численно равна площади цикла на координатной плоскости $p - V$, то

$$Q = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

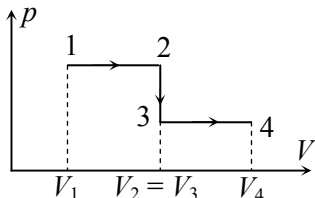
6.12. Воспользуемся первым законом термодинамики для всего процесса 1 – 4:

$$Q = \Delta U + A, \quad (1)$$

где ΔU – приращение внутренней энергии газа в этом процессе; A – работа газа. Изменение внутренней энергии газа в рассматриваемом процессе определяется соотношением:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T. \quad (2)$$

Чтобы найти работу газа, построим график рассматриваемого процесса в координатах $p - V$ и найдем площадь под графиком процесса. График приведен на рисунке (V_1 , $V_2 = V_3$ и V_4 – объемы газа в состояниях 1, 2 и 3, 4). Из графика находим



$$A = p_1(V_2 - V_1) + p_4(V_4 - V_2). \quad (3)$$

Раскрывая в формуле (3) скобки и пользуясь законом Клапейрона – Менделеева, получим

$$\begin{aligned} A &= p_1V_2 - p_1V_1 + p_4V_4 - p_4V_2 = \\ &= \nu RT_4 - \nu RT_1 + \nu RT_4 - \nu RT_1 = 2\nu R\Delta T. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (1), (2), (4) находим $Q = \frac{7}{2}\nu R\Delta T$.

6.13. $Q = (1/2)\nu R\Delta T$.

6.14. Поскольку в процессе 2 – 3 газ не совершает работы, его работа за цикл складывается из работы на участке изобарического расширения 1 – 2 и работы на участке адиабатического сжатия 3 – 1

$$A = A_{1-2} + A_{3-1}, \quad (1)$$

причем величина A (1) известна. Поэтому для нахождения работы A_{3-1} необходимо вычислить работу A_{1-2} .

Так как процесс 1 – 2 – изобарический, то

$$A_{1-2} = p\Delta V = p(V_2 - V_1), \quad (2)$$

где p – давление газа в процессе 1 – 2; ΔV – приращение объема газа в процессе 1 – 2, $\Delta V = V_2 - V_1$. Используя далее условие $V_2 = nV_1$ и закон Клапейрона – Менделеева для состояния 1, найдем

$$A_{3-1} = A - \nu RT_1(n - 1).$$

6.15. Поскольку процесс 3 – 1 – изотермический, приращения температуры газа в процессах 2 – 1 и 3 – 2 связаны соотношением

$$\Delta T_{2-1} = -\Delta T_{3-2}. \quad (1)$$

С другой стороны, по первому закону термодинамики для адиабатического процесса 1 – 2 имеем

$$A_{2-1} = -\Delta U_{2-1} = -\frac{3}{2}\nu R\Delta T_{2-1}, \quad (2)$$

а для изобарического

$$\begin{aligned} Q_{3-2} &= \Delta U_{3-2} + A_{3-2} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{3-2} + p\Delta V_{3-2} = \\ &= \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{3-2} + \nu R\Delta T_{3-2} = \frac{5}{2}\nu R\Delta T_{3-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате из формул (1) – (3) находим

$$Q_{3-2} = \frac{5}{3}A_{2-1}.$$

7. Термодинамика жидкостей и твердых тел: теплообмен, уравнение теплового баланса, фазовые превращения

7.1. Нет. Отсутствует поток тепла от окружающей среды ко льду в пробирке. Это связано с тем, что поток тепла возникает только при наличии разности температур. В рассматриваемой же ситуации стенки пробирки и лед, содержащийся в ней, имеют одинаковую температуру $t = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

7.2. Нет. В плавающей кастрюле не будет потока тепла от ее дна и стенок к содержащейся в ней воде, так как дно и вся вода в кастрюле находятся при температуре $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$.

7.3. Человеческий организм непрерывно вырабатывает тепло, избыток которого при температуре окружающей среды, меньшей температуры тела, передается во внешнюю среду. При температуре окружающей среды, выше нормальной человеческой температуры, отдача вырабатываемого тепла во внешнюю среду за счет теплопроводности невозможна.

7.4. Скорость теплообмена пропорциональна разности температур соприкасающихся тел. Поскольку при измерении температуры тела разность температур тела и термометра постепенно уменьшается, процесс теплообмена замедляется. Поэтому при измерении температуры тела основное время тратится на нагревание термометра при температурах, близких к температуре тела $t \sim 36 - 36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$. Когда термометр оказывается снова на воздухе, между ним и окружающим воздухом имеет место достаточно большая разность температур $\Delta t \sim 10 - 15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Поэтому остывание термометра на несколько градусов происходит очень быстро, затем остывание замедляется. Следовательно, объем ртути быстро уменьшается до таких значений, что в колбе с ртутью образуется пустое пространство, и при встряхивании термометра ртуть можно «сбросить» из трубки в колбу.

7.5. Удельная теплота парообразования для воды $r = 2,3 \cdot 10^6\text{ Дж/кг}$, а ее удельная теплоемкость $c = 4,2 \cdot 10^3\text{ Дж/(кг} \times \times \text{К)}$. Поэтому при контакте с телом человека одинаковых количеств пара и кипятка за счет конденсации пара выделятся пример-

но в 5 раз большее количество тепла, чем при охлаждении кипятка от 100 °С до температуры тела.

7.6. $m_2 > m_1$. Так как теплота, полученная одним образцом, равна теплоте, отданной другим, то $cm_1(\theta - t_1) = cm_2(t_2 - \theta)$, где c – удельная теплоемкость металла, из которого изготовлены образцы; m_1 и m_2 – массы образцов; t_1 и t_2 – их первоначальные температуры; θ – установившаяся температура. Из данного в условии графика заключаем, что $(\theta - t_1) \approx (t_2 - \theta)$. Поэтому $m_2 \approx 2m_1$.

7.7. Пусть мощность нагревателя равна P . Тогда за время t нагреватель выделит $Q = Pt$ количества теплоты, которое по условию полностью потратилось на нагревание воды. Поэтому

$$Pt = cm(T_1 - T_0).$$

Отсюда находим мощность нагревателя

$$P = \frac{cm(T_1 - T_0)}{t} \text{ [Вт]}.$$

7.8. Равновесное состояние системы будет устанавливаться при передаче тепла газу от более горячего куска железа. Уравнение теплового баланса в этом случае имеет вид

$$C_V(T_x - T_0) = cm(T - T_x), \quad (1)$$

где C_V – теплоемкость газа; T_x – установившаяся температура; R – универсальная газовая постоянная. Поскольку объем газа в рассматриваемом процессе не изменяется, отклик газа на полученное от железа тепло определяется его теплоемкостью при постоянном объеме, что и отражено в использованном для теплоемкости газа обозначении. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме есть $c_V = (3/2)R$, поэтому теплоемкость газа в сосуде определяется соотношением

$$C_V = \frac{3}{2} R \frac{M}{\mu}, \quad (2)$$

где M и μ – масса и молярная масса газа соответственно. Подставив в (2), (1) комбинацию MR/μ , определенную из уравнения состояния газа по характеристикам его начального состояния

$$\frac{MR}{\mu} = \frac{p_0 V}{T_0}, \quad (3)$$

и разрешив полученное уравнение относительно T_x , найдем

$$T_x = \frac{cmT + (3/2)p_0V}{cm + (3/2)(p_0V/T_0)}. \quad (4)$$

Давление газа p в равновесном состоянии найдем из закона Шарля ($V = \text{const}$):

$$p = p_0 \frac{T_x}{T_0} = p_0 \frac{3p_0V + 2mcT}{3p_0V + 2mcT_0} = 1,66 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (5)$$

7.9.

$$M = \frac{cm(t_k - t)}{q\eta} = 7,3 \text{ г}.$$

7.10. Каждая порция воды получила при смешивании следующее количество теплоты:

$$Q_i = cm_i(t - t_i), \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость воды; m_i и t_i – масса и температура i -й порции воды ($i = 1, 2, 3$); t – температура смеси (для каких-то порций воды количество теплоты Q_i положительно, для каких-то отрицательно). Поскольку теплообмен с окружающей средой по условию отсутствует, количество отданной теплоты равно количеству полученной. Поэтому уравнение теплового баланса дает

$$m_1(t - t_1) + m_2(t - t_2) + m_3(t - t_3) = 0. \quad (2)$$

Решая уравнение (2), находим

$$t = \frac{m_1t_1 + m_2t_2 + m_3t_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

7.11.

$$m_1 = \frac{cm(t - t_{\text{пл}})}{\lambda} = 0,56 \text{ кг}.$$

7.12. Термометр всегда показывает свою собственную температуру. При этом из-за ненулевой теплоемкости термометра требуется некоторое количество теплоты, чтобы нагреть его, когда он опускается в горячую воду, или термометр выделяет некоторое ко-

личество теплоты, когда он опускается в холодную воду. В любом случае установившаяся температура системы «вода – термометр» (которую и измерит термометр) будет несколько отличаться от первоначальной температуры воды, которую измеряем.

Чтобы найти первоначальную температуру воды t , составим уравнение теплового баланса

$$cm(t - t_1) = C(t_1 - t_2).$$

Отсюда находим

$$t = t_1 + \frac{C(t_1 - t_2)}{mc} = 32,6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Таким образом, из-за того, что термометр имеет некоторую теплоемкость, он покажет температуру $32,4 \text{ } ^\circ\text{C}$, меньшую истинной температуры воды $32,6 \text{ } ^\circ\text{C}$.

7.13.

$$\Delta m = \frac{cm(t_4 - t_1)}{r + c(t_2 - t_3)} = 0,68 \text{ кг}.$$

7.14. Пусть нагревание воды происходило в течение времени t_1 , кипение – времени t_2 . Поскольку тепло подводилось к сосуду равномерно, отношение времени t_1 ко времени t_2 равно отношению количеств теплоты, необходимых для нагревания и испарения воды. Поэтому

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{cm(t_1 - t_0)}{mr} = \frac{c(t_1 - t_0)}{r}. \quad (1)$$

Из формулы (1) и условия $t_1 + t_2 = t$ находим время, в течение которого выкипала вода,

$$t_2 = \frac{tr}{r + c(T_1 - T_0)} = 8,5 \text{ мин}.$$

Обратим внимание читателя на то, что в приведенном решении мы пренебрегали испарением воды в процессе ее нагревания, а считали, что вода испаряется только в процессе кипения.

7.15. На проходящие в рассматриваемом явлении процессы расходуются следующие количества теплоты:

$Q_1 = c_1 m_1 (t_2 - t_1)$ – на нагревание чайника от начальной температуры $t_1 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100 \text{ } ^\circ\text{C}$;

$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_1)$ – на нагревание содержащейся в чайнике воды от начальной температуры $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$;

$Q_3 = \Delta m r$ – на испарение Δm воды.

Нагреватель за искомое время T выделил количество теплоты NT , η -я часть которого пошла на перечисленные выше процессы. Поэтому из уравнения теплового баланса

$$\eta NT = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

находим

$$T = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_2 - t_1) + \Delta m r}{\eta N} = 625 \text{ с} = 10 \text{ мин } 25 \text{ с.}$$

7.16. Пусть Δm – масса образовавшегося льда, тогда $m - \Delta m$ – масса воды, откачанной из колбы в виде водяных паров.

Составим уравнение теплового баланса. Количество теплоты, отданное водой, претерпевшей фазовый переход из жидкого состояния в твердое, $Q_1 = \Delta m \lambda$. Количество теплоты, полученное водой, претерпевшей фазовый переход из жидкого состояния в газообразное, $Q_2 = (m - \Delta m)r$. При отсутствии теплообмена с окружающей средой

$$Q_1 = Q_2.$$

Откуда $\Delta m = \frac{rm}{\lambda + r} = 508 \text{ г.}$

7.17. Обозначим:

$Q_{\text{конд}}$ – количество теплоты, которое сможет выделиться при конденсации всего пара;

$Q_{\text{плав}}$ – количество теплоты, необходимое для плавления всего льда;

$Q_{\text{нагр}}$ – количество теплоты, требующееся на нагревание воды от температуры плавления льда $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Из данных условия находим:

$$Q_{\text{конд}} = m_2 r = 2,3 \cdot 10^5 \text{ Дж}; \quad (1)$$

$$Q_{\text{плав}} = m_1 \lambda = 3,3 \cdot 10^4 \text{ Дж}; \quad (2)$$

$$Q_{\text{нагр}} = m_1 c (t_2 - t_1) = 4,2 \cdot 10^4 \text{ Дж}. \quad (3)$$

Из (1) – (3) видим, что $Q_{\text{конд}} > Q_{\text{плав}} + Q_{\text{нагр}}$. Поэтому весь лед растает, получившаяся вода нагреется до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$, но сконденсируется только часть впущенного в сосуд водяного пара.

Пусть Δm – количество сконденсировавшегося пара. Тогда уравнение теплового баланса будет иметь вид

$$Q_{\text{конд}}^{(1)} = Q_{\text{плав}} + Q_{\text{нагр}}, \quad (4)$$

где $Q_{\text{конд}}^{(1)} = \Delta m r$ – количество теплоты, выделившееся при конденсации того количества пара Δm , которое сконденсируется в рассматриваемом процессе. Из (2) – (4) находим

$$\Delta m = \frac{m_1 \lambda + c m_1 (t_2 - t_1)}{r} = 33 \text{ г.}$$

Таким образом, в калориметре будет находиться $m_1 + \Delta m = 133$ г воды и $m_2 - \Delta m = 67$ г пара при температуре $t_2 = 100$ °С.

7.18. Вначале в калориметре будут происходить охлаждение воды и нагревание льда. Дальнейшее зависит от того, какая из субстанций – лед или вода – первой достигнет температуры фазового перехода, а затем либо вода, остывшая до температуры фазового перехода $t = 0$ °С, будет превращаться в лед, отдавая тепло на нагревание льда, либо лед, достигший температуры фазового перехода $t = 0$ °С, начнет таять, получая тепло от остывающей воды. Чтобы определить, каким путем устанавливается равновесие, посчитаем количество теплоты Q_1 , которое выделится при охлаждении воды до температуры замерзания $t = 0$ °С, и количество теплоты Q_2 , необходимое для нагревания льда до температуры плавления $t = 0$ °С. Очевидно,

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t) = 4,2 \cdot 10^4 \text{ Дж}; \quad (1)$$

$$Q_2 = c_2 m_2 (t - t_2) = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \quad (2)$$

Сравнивая Q_1 и Q_2 , заключаем, что первой остынет вода и начнет замерзать, отдавая тепло на нагревание льда. Количество замерзшей воды Δm найдем из условия теплового баланса

$$Q_2 = c_1 m_1 (t_1 - t) + \Delta m \lambda \Rightarrow \Delta m = 1,15 \text{ кг}. \quad (3)$$

Таким образом, при нагревании куска льда до $t = 0$ °С замерзнет только часть налитой в калориметр воды, и в калориметре будет находиться $m'_2 = m_2 + \Delta m = 6,15$ кг льда и $m'_1 = m_1 - \Delta m = 0,85$ кг воды при температуре $t = 0$ °С. Следовательно, температура содержимого калориметра составит $t = 0$ °С.

7.19. Поскольку в отсутствие нагревателя вода остывает, существует теплообмен между сосудом и окружающей средой, который необходимо учитывать при составлении уравнений теплового баланса. Пусть в единицу времени сосуд теряет количество теплоты q . (Поскольку скорость теплообмена зависит от разности температур тел, обменивающихся теплом, то величина q зависит от температуры воды в сосуде. Однако поскольку речь в задаче идет о процессах, в которых температура воды в сосуде изменяется мало, можно считать $q = \text{const.}$) Тогда уравнения теплового баланса при нагревании и охлаждении воды имеют вид

$$Pt_1 = cm\Delta T + qt_1; \quad (1)$$

$$cm\Delta T = qt_2. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), (2), получим

$$m = \frac{Pt_1 t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} = 0,79 \text{ кг.}$$

7.20. Если бы теплопотери отсутствовали, то при уменьшении мощности нагревателя вдвое время нагрева воды увеличивалось бы ровно вдвое. В данной задаче время нагрева увеличивается более, чем вдвое, поэтому есть теплопотери. Пусть скорость теплопотерь в рассматриваемых условиях – q . Составим уравнения теплового баланса для нагревателя мощности P и $P/2$:

$$Pt_1 = cm\Delta T + qt_1; \quad (1)$$

$$\frac{P}{2}t_2 = cm\Delta T + qt_2, \quad (2)$$

где c и m – удельная теплоемкость и масса воды в сосуде. Решая систему уравнений (1), (2), получим

$$q = \frac{P(t_2 - t_1)}{2(t_2 - t_1)}, \quad cm\Delta T = \frac{Pt_1 t_2}{2(t_2 - t_1)}. \quad (3)$$

Используя теперь формулы (3) в уравнении теплового баланса для случая нагревателя мощности $2P$:

$$2Pt_3 = cm\Delta T + qt_3, \quad (4)$$

где t_3 – искомое время нагрева воды нагревателем мощности $2P$,

найдем $t_3 = \frac{t_1 t_2}{3t_2 - 2t_1} = 4,9 \text{ с.}$

8. Насыщенные и ненасыщенные пары. Влажность

8.1. Абсолютная влажность воздуха определяется плотностью содержащихся в воздухе паров воды. При фиксированной температуре эта плотность максимальна для насыщенного пара и быстро увеличивается при фиксированной относительной влажности с ростом температуры воздуха, поскольку при повышении температуры растет плотность насыщенного пара. Поэтому абсолютная влажность максимальна в тех местах на Земле, где, во-первых, пар близок к насыщенному (т.е. над акваториями океанов, озер или рек), а, во-вторых, температура достигает наибольших значений (т.е. в тропических областях).

8.2. Запотевание окон – конденсация паров воды, содержащихся в теплом и влажном воздухе комнаты, на холодной поверхности оконного стекла. Оно возможно, если температура воздуха на улице меньше температуры воздуха в комнате и такова, что плотность насыщенного пара при температуре улицы меньше плотности пара в комнате. Естественно, что запотевают внутренние поверхности стекол. Аналогичный эффект имеет место, если холодную стеклянную пластинку поместить в теплый воздух. Воздух вблизи пластинки охлаждается, и плотность содержащихся в нем паров воды может стать больше плотности насыщенного пара при этой температуре. Тогда происходит конденсация воды, и на пластинке оседают маленькие капельки воды.

8.3. При открывании форточки некоторое количество воздуха выходит из комнаты на улицу и охлаждается. Поскольку плотность насыщенного пара сильно убывает при уменьшении температуры, то пар, который был ненасыщенным в комнате, становится при охлаждении «перенасыщенным» и частично конденсируется с образованием капелек тумана. Конденсация пара с образованием тумана происходит и в комнате из-за того, что холодный уличный воздух, попадая в комнату, охлаждает содержащийся в ней воздух.

Воздух с капельками тумана имеет более низкую температуру по сравнению с температурой воздуха в комнате, но более высокую по сравнению с температурой воздуха на улице. Поэтому клубы тумана в комнате будут опускаться, а на улице подниматься.

8.4. Испарение воды с белья будет происходить, если влажность окружающего белье воздуха меньше 100 %, причем чем меньше

относительная влажность, тем интенсивнее будет испарение. Если не открывать окон, то, как можно предположить на основании условия, белье сохнуть не будет, поскольку относительная влажность будет близка к 100 %. Посмотрим, что будет, если открыть окна.

По условию задачи естественно полагать, что на улице водяной пар будет насыщенным, а температура воздуха на улице меньше температуры воздуха в комнате. Когда воздух с улицы попадает в комнату, он нагревается, а вот его абсолютная влажность (т.е. количество содержащихся в нем паров воды) изменяется мало. Последнее связано с тем, что быстрое изменение абсолютной влажности возможно только при конденсации пара (которой здесь происходить не будет), испарение же воды (в частности, с влажного белья) – процесс медленный. А поскольку давление насыщенного пара при температуре комнаты больше давления насыщенного пара при температуре улицы (на улице холодно), то относительная влажность воздуха, которая на улице была близка к 100 %, в комнате станет существенно меньше 100 %. Поэтому испарение воды с влажного белья будет происходить, и, следовательно, белье будет сохнуть.

8.5. Зимой имеет место большая разность температур в домах и на улице. Поэтому даже если уличный воздух имеет влажность, близкую к 100 % (на улице), то при попадании в дом плотность водяных паров в нем станет существенно меньше плотности насыщенного пара при комнатной температуре. Следовательно, относительная влажность воздуха в домах зимой меньше относительной влажности летом, или, другими словами, зимой воздух в домах является более сухим. Поэтому для ощущения комфорта зимой и для того, чтобы не «рассыхалась» мебель и паркет, воздух в домах необходимо увлажнять.

8.6. Отношение абсолютных влажностей воздуха в июле и декабре определяется соотношением:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varphi_2 p_{\text{нп},2} T_2}{\varphi_1 p_{\text{нп},1} T_1} = 3,4,$$

T_1 , T_2 – абсолютные температуры «декабрьского» и «июльского» воздуха, $T_1 = t_1 + 273$ К и $T_2 = t_2 + 273$ К. Таким образом, «июльский» воздух при рассматриваемых условиях содержит в 3,4 раза

больше воды, чем «декабрьский». Если «декабрьский» воздух нагреть до температуры $t_3 = 20^\circ\text{C}$, то его относительная влажность

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 p_{\text{нп},1} T_3}{p_{\text{нп},3} T_1} = 27 \, \%.$$

8.7. Давление влажного воздуха складывается из парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара, причем последнее составляет φ -ю часть от давления насыщенного пара. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к водяному пару и Дальтона к влажному воздуху, находим массы воды m_1 и собственно воздуха m_2 во влажном воздухе

$$m_1 = \frac{\mu_1 \varphi p_{\text{нп}} V}{RT}, \quad m_2 = \frac{\mu_2 (p - \varphi p_{\text{нп}}) V}{RT}, \quad (1)$$

где μ_1, μ_2 – молярная масса воды и средняя молярная масса воздуха, $\mu_1 = 18$ г/моль и $\mu_2 = 29$ г/моль; V и T – объем сосуда и температура воздуха. Применяя теперь закон Клапейрона – Менделеева к сухому воздуху при том же давлении и температуре и находящемуся в том же объеме, найдем его массу

$$m_3 = \frac{\mu_2 p V}{RT}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) находим отношение масс влажного и сухого воздуха

$$\frac{m_1 + m_2}{m_3} = \frac{\mu_1 \varphi p_{\text{нп}} + \mu_2 (p - \varphi p_{\text{нп}})}{\mu_2 p} = 1 + \frac{(\mu_2 - \mu_1) \varphi p_{\text{нп}}}{\mu_2 p}.$$

8.8. Вода испарится полностью, если давление получившегося при испарении пара будет меньше давления насыщенного пара при данной температуре. Если же при испарении части воды пар станет насыщенным, то испарение прекратится. Поэтому для ответа на вопрос о полном или неполном испарении воды нужно найти давление пара при условии, что вода испарится полностью, и сравнить это давление с давлением насыщенного пара. Итак, применяя к $m = 1$ г воды в объеме $V = 10$ дм³ при температуре $T = 293$ К, най-

дем парциальное давление, которое имел бы водяной пар при условии полного испарения воды:

$$p = \frac{mRT}{\mu V} = 13,5 \cdot 10^3 \text{ Па}, \quad (1)$$

где μ – молярная масса воды, $\mu = 18$ г/моль. Давление (1) больше давления насыщенного пара при данной температуре $p_{\text{нп}} = 2,3 \cdot 10^3$ Па. Поэтому испарится такая масса воды Δm , которая даст парциальное давление, равное давлению насыщенного пара. Очевидно

$$\Delta m = \frac{p_{\text{нп}} \mu V}{RT} = 0,17 \text{ г}. \quad (2)$$

8.9. Парциальное давление пара после испарения дополнительной массы m воды можно найти, применяя к парам воды закон Клапейрона – Менделеева

$$p = \frac{(m_0 + m)RT}{\mu V}, \quad (1)$$

где m_0 – первоначальная масса пара в сосуде; T – абсолютная температура; μ – молярная масса воды, $\mu = 18$ г/моль; V – объем сосуда. Деля давление (1) на давление насыщенного пара, находим относительную влажность воздуха после испарения дополнительной воды

$$\varphi_1 = \frac{p}{p_{\text{нп}}} = \varphi + \frac{mRT}{\mu V} = 59 \%. \quad (2)$$

(Поскольку результат вычисления влажности по формуле (2) оказался меньше 100 %, приведенное решение верно. Если бы результат вычисления по формуле (2) оказался бы больше 100 %, решение нужно было бы исправить. В этом случае после достижения относительной влажности воздуха 100 %, процесс испарения воды прекратился бы. Поэтому относительная влажность была бы равна 100 %, а количество испарившейся воды можно было найти из этого условия.)

8.10.

$$m = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)\mu V}{RT},$$

где μ – молярная масса воды.

8.11. Применяя закон Клапейрона – Менделеева к водяному пару в баллонах и учитывая, что давления паров в баллонах равны $\varphi_1 p_{\text{нп}}$ и $\varphi_2 p_{\text{нп}}$ (где $p_{\text{нп}}$ – давление насыщенного пара при температуре воздуха в баллонах), найдем массу газа m_1 и m_2 в каждом

$$\varphi_1 p_{\text{нп}} V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT \Rightarrow m_1 = \frac{\mu \varphi_1 p_{\text{нп}} V_1}{RT}; \quad (1)$$

$$\varphi_2 p_{\text{нп}} V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT \Rightarrow m_2 = \frac{\mu \varphi_2 p_{\text{нп}} V_2}{RT}, \quad (2)$$

где μ – молярная масса воды. Применяя теперь закон Клапейрона – Менделеева к смеси газов и учитывая, что масса пара равна сумме масс пара в первом и втором баллоне, найдем парциальное давление пара p в смеси

$$p(V_1 + V_2) = p_{\text{нп}}(\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2). \quad (3)$$

Из формулы (3) находим относительную влажность смеси газов

$$\varphi = \frac{p}{p_{\text{нп}}} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

8.12. Поскольку температура $t = 100^\circ\text{C}$ – температура кипения воды при атмосферном давлении, то давление насыщенного пара при этой температуре равно атмосферному:

$$p_{\text{нп},0}(100^\circ\text{C}) = 10^5 \text{ Па}. \quad (1)$$

Поэтому данных условия достаточно, чтобы найти массу водяного пара. Применяя к пару в начальном состоянии закон Клапейрона – Менделеева и учитывая, что его давление составляет φ -ю часть от давления насыщенного пара (1), получим

$$m = \frac{\mu \varphi p_{\text{нп},0} V}{RT}, \quad (2)$$

где μ – молярная масса воды, $\mu = 18$ г/моль; T – абсолютная температура в начальном состоянии, $T = 273 + 100 = 373$ К.

В конечном состоянии роса не выпадет, если давление не будет превосходить давление насыщенного пара. Поэтому закон Клапейрона – Менделеева для водяного пара в конечном состоянии дает

$$p_{\text{нп}} V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1, \quad (3)$$

где V_1 – искомый объем; T_1 – абсолютная температура в конечном состоянии, $T_1 = 273 + 20 = 293$ К. Подставляя в формулу (3) массу пара (2), получим

$$V_1 = \frac{\varphi p_{\text{нп},0} T_1 V}{p_{\text{нп}} T} = 13,6 \text{ л.}$$

8.13.

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 p_{\text{нп},1} V_1 T_2}{p_{\text{нп},2} V_2 T_1}, \quad \text{если} \quad \frac{\varphi_1 p_{\text{нп},1} V_1 T_2}{p_{\text{нп},2} V_2 T_1} < 100 \%,$$

и

$$\varphi_2 = 100 \%, \quad \text{если} \quad \frac{\varphi_1 p_{\text{нп},1} V_1 T_2}{p_{\text{нп},2} V_2 T_1} < 100 \%.$$

8.14. Давление насыщенного пара при температуре кипения воды $t = 100$ °С равно нормальному атмосферному давлению $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па. Поэтому испарится такое количество воды Δm , чтобы водяной пар при $t = 100$ °С имел это давление. Применяя к пару закон Клапейрона – Менделеева, найдем

$$\Delta m = \frac{\mu p_{\text{нп}} V}{R T} = 5,9 \text{ г,}$$

где μ – молярная масса воды, $\mu = 18$ г/моль; T – абсолютная температура, $T = t + 273$ К. Поскольку найденное значение меньше массы воды в сосуде, приведенное решение справедливо. В противном случае вода испарилась бы полностью, но ее пар в сосуде не был бы насыщенным.

8.15. Основная идея решения этой задачи заключается в том, чтобы применить закон Дальтона к начальной и конечной смеси воздуха с водяным паром. При этом поскольку давления насыщенного пара при температурах $t = 0^\circ\text{C}$ и $t_1 = 82^\circ\text{C}$ сильно отличаются друг от друга (приблизительно в сто раз), можно считать, что давление смеси при $t = 0^\circ\text{C}$ определяется фактически только давлением воздуха, при $t_1 = 82^\circ\text{C}$ – массой воздуха и всей массой воды (по условию в этот момент пропадают все капельки воды в воздухе, т.е. вся вода испаряется).

Пусть масса сухого воздуха в сосуде – m , масса воды – Δm . Тогда по закону Клапейрона – Менделеева для начального состояния получим (как отмечено выше, вкладом водяного пара в давление можно пренебречь):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

где μ – средняя молярная масса воздуха, $\mu = 29$ г/моль; T – абсолютная температура начального состояния, $T = 273$ К. Закон Дальтона для конечного состояния дает

$$p_1 V = \left(\frac{m}{\mu} + \frac{\Delta m}{\mu_1} \right) RT_1, \quad (2)$$

где μ_1 – молярная масса воды, $\mu_1 = 18$ г/моль; T_1 – абсолютная температура конечного состояния, $T_1 = 355$ К. Выражая число молей воздуха в сосуде из формулы (1) и подставляя это выражение в (2), получим

$$\Delta m = \frac{\mu_1 V (p_1 T - p T_1)}{R T T_1} = 304 \text{ г.}$$

8.16. Разберемся сначала, в какой части сосуда находится сухой воздух, а в какой – влажный. Из закона Клапейрона – Менделеева для сухого воздуха и Дальтона для влажного следует, что пока конденсации воды не происходит, давления сухого и влажного воздуха при уменьшении температуры убывают одинаково. Поэтому поршень будет находиться в равновесии до того момента, когда начнет конденсация воды в сосуде с влажным воздухом. После этого из-за увеличения количества сконденсировавшейся воды при дальнейшем уменьшении температуры давление влажного воздуха будет

падать быстрее, чем сухого, и поршень будет перемещаться в направлении той части сосуда, в которой находится влажный воздух. А поскольку по условию $n > m$ и через некоторое время после начала процесса поршень окажется посередине сосуда, то влажный воздух находится в той части сосуда, объем которой пропорционален n . Следовательно, сухой воздух находится в другой части сосуда.

Для ответа на второй вопрос задачи используем условия равновесия поршня. Поскольку в начальном состоянии давление сухого воздуха равно давлению влажного, которое складывается из парциальных давлений воздуха и пара, из закона Клапейрона – Менделеева имеем

$$\frac{\nu RT(n+m)}{mV} = \frac{\nu' RT(n+m)}{nV} + \frac{\nu_{\text{п}} RT(n+m)}{nV}, \quad (1)$$

где ν' – число молей воздуха в той части сосуда, в которой находится влажный воздух; $\nu_{\text{п}}$ – число молей водяного пара в сосуде; T – температура газов в сосуде; $nV/(n+m)$ и $mV/(n+m)$ – объемы частей сосуда (V – объем всего сосуда). После сокращения и умножения на n формула (1) дает

$$\frac{\nu n}{m} = \nu' + \nu_{\text{п}}. \quad (2)$$

Условие равновесия поршня в конечном состоянии, в котором объемы частей сосуда одинаковы, дает

$$\nu = \nu' + \tilde{\nu}_{\text{п}}, \quad (3)$$

где $\tilde{\nu}_{\text{п}}$ – число молей водяного пара в сосуде после того, как его часть сконденсировалась. Вычитая формулу (3) из формулы (2), находим количество вещества сконденсировавшегося пара $\Delta \nu = \nu_{\text{п}} - \tilde{\nu}_{\text{п}}$:

$$\Delta \nu = \frac{\nu(n-m)}{m}, \quad (4)$$

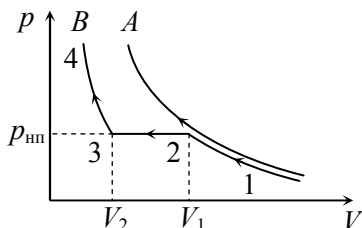
а затем и массу образовавшейся воды

$$\Delta m = \Delta \nu \mu = \frac{\nu(n-m)\mu}{m} = 12 \text{ г},$$

где μ – молярная масса воды, $\mu = 18 \text{ г/моль}$.

8.17. При изотермическом сжатии идеального газа растет концентрация молекул и, как следствие, давление газа увеличивается по закону (кривая A на рисунке)

$$p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (1)$$



При изотермическом сжатии пара, пока пар не стал насыщенным, выполняется закон (1) (участок 1 – 2 на кривой B на рисунке). Однако поскольку при сжатии давление пара растет, при некотором объеме V_1 пар станет насыщенным. При последующем сжатии давление

пара не может расти, поскольку оно должно оставаться неизменным (и равным давлению насыщенного пара при данной температуре $p_{\text{нп}}$). Поэтому будет оставаться неизменной и концентрация молекул пара. «Излишек» молекул конденсируется. Этот участок графика отмечен цифрами 2 – 3. После того как весь пар сконденсируется, и в сосуде останется только вода объемом V_2 , сжатие сосуда возможно только при приложении очень больших давлений, поэтому зависимость давления от объема будет резко возрастать (участок 3 – 4 на кривой B на рисунке).

8.18. Процесс испарения воды может начаться только тогда, когда давление насыщенного пара станет больше внешнего давления. А поскольку внешнее давление – нормальное атмосферное, то испарение начинается только тогда, когда вода нагревается до 100°C (именно при этой температуре давление насыщенного пара равно атмосферному). До этой температуры поршень лежит на поверхности воды, и между ним и поверхностью нет пара*.

При температуре 100°C начинается испарение воды (кипение), и между водой и поршнем будет находиться насыщенный пар.

* Это положение имеет место только в том случае, если в воде не растворены какие-то газы, входящие в состав воздуха (в этой задаче это, конечно, предполагается). В таком случае при нагревании газы будут выходить из воды, между поршнем и водой образуется слой воздуха, давление которого и будет держать поршень. В этот слой будет происходить испарение воды.

Температура вплоть до полного выкипания воды возрастать не будет, поскольку внешнее давление в течение всего процесса равно атмосферному. Поэтому в тот момент, когда вся вода выкипит, температура насыщенного пара под поршнем будет равна $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Это и позволяет найти, на сколько поднимется поршень из условия, что вся вода под поршнем превратится в насыщенный пар при температуре $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Применяя к этому пару закон Клапейрона – Менделеева и учитывая, что его давление равно атмосферному, получим

$$p_a Sh = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

где h – высота, на которую поднимется поршень в момент ее полного испарения; μ – молярная масса воды, $\mu = 18\text{ г/моль}$; T – абсолютная температура воды в этот момент, $T = 373\text{ }^{\circ}\text{C}$. Отсюда находим

$$h = \frac{mRT}{\mu p_a S} = 14,4\text{ см.}$$

8.19. Пока пробирка не погружена в воду, давление воздуха в ней, которое в соответствии с законом Дальтона складывается из парциального давления сухого воздуха $p_{\text{взд}}$ и давления насыщенного пара $p_{\text{нп}}$, равно атмосферному давлению p_a :

$$p_{\text{взд}} + p_{\text{нп}} = p_a. \quad (1)$$

Давление воздуха в погруженной в воду пробирке больше атмосферного на величину гидростатического давления столба воды высотой H , поэтому

$$p'_{\text{взд}} + p_{\text{нп}} = p_a + \rho g H, \quad (2)$$

где $p'_{\text{взд}}$ и $p_{\text{нп}}$ – парциальное давление сухого воздуха и давление насыщенного пара в погруженной в воду пробирке. Поскольку по условию температура пара не изменялась, то давление насыщенного пара в (1) и (2) одинаковое. Поэтому переносим в формуле (2) $p_{\text{нп}}$ в правую часть и используя (1), получаем

$$p'_{\text{взд}} = p_{\text{взд}} + \rho g H. \quad (3)$$

По закону Бойля – Мариотта для парциальных давлений сухого воздуха имеем

$$p_{\text{взд}} l S = p'_{\text{взд}} \left(\frac{l}{2} + H \right). \quad (4)$$

Решая систему уравнений (3), (4), можно найти давление сухого воздуха в пробирке, которая не погружена в воду, $p_{\text{взд}}$, а затем по формуле (1) давление насыщенного пара

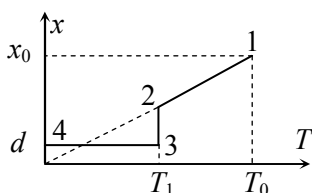
$$p_{\text{нп}} = p_{\text{а}} - \frac{\rho g H \left(\frac{l}{2} + H \right)}{\left(\frac{l}{2} - H \right)} = 0,145 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

8.20.

$$A = \frac{\Delta m R T}{\mu},$$

где μ – молярная масса воды.

Указание. Учесть, что в изотермическом процессе давление пара не изменяется и остается равным давлению насыщенного пара.



8.21. Так как поршень может свободно перемещаться вдоль сосуда, то давление пара в сосуде p_0 при любой температуре будет равно сумме атмосферного давления $p_{\text{а}}$ и давления, создаваемого весом поршня mg/S , где m и S – масса и площадь поршня:

$$p_0 = p_{\text{а}} + \frac{mg}{S}. \quad (1)$$

Таким образом, процесс, который происходит с газом, – изобарический при давлении p_0 (1). Найдём зависимость $x(T)$. По условию пар в начальном состоянии – ненасыщенный, следовательно, воды в сосуде нет. Применяя к пару закон Клапейрона – Менделеева, получим

$$p_0 Sx = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2)$$

где $Sx = V$ – объем сосуда; m – масса всей воды в сосуде; μ – молярная масса воды. Из формулы (2) заключаем, что зависимость $x(t)$ – линейная, продолжение которой проходит через начало координат. Начинается рассмотренный участок зависимости от температуры T_0 , которая определяется по формуле (2) через начальную высоту сосуда x_0 :

$$T_0 = \frac{p_0 Sx_0 \mu}{mR}. \quad (3)$$

Рассмотренный участок зависимости отмечен на рисунке цифрами 1 – 2.

Будем уменьшать температуру пара. Ясно, что в некоторый момент мы достигнем такой температуры T_1 , при которой давление насыщенного пара равно давлению в сосуде (1):

$$p_{\text{нп}}(T_1) = p_0.$$

В этот момент пар станет насыщенным, и при дальнейшем уменьшении температуры давление пара (которое теперь равно давлению насыщенного пара при данной температуре) должно стать меньше, чем (1). Однако в этом случае условие равновесия поршня не будет выполнено, поршень начнет опускаться вниз, пар продолжит конденсироваться и полностью превратится в воду (участок графика 2 – 3). Таким образом, при температуре $T < T_1$ весь пар сконденсируется, а поршень опустится на дно сосуда (если не пренебрегать объемом жидкости, то поршень опустится не на дно, а на поверхность сконденсировавшейся воды, т.е. будет иметь координату $x = d = m/\rho S$, где ρ – плотность воды). При дальнейшем уменьшении температуры поршень будет лежать на поверхности жидкости, и, если пренебречь изменением объема жидкости, расстояние $x = d$ изменяться не будет. Этот участок графика отмечен на рисунке цифрами 3 – 4.

8.22. В соответствии с законом Дальтона давление в сосуде складывается из парциальных давления сухого воздуха $p_{\text{взд}}$ и паров воды $p_{\text{п}}$, причем если часть воды остается в жидкой фазе, то давление паров не может превосходить давления насыщенных паров при

заданной температуре $p_{\text{нп}}$. Поэтому прежде всего необходимо выяснить: будет ли пар насыщенным или нет? Для этой цели посчитаем массу воды m_1 , которая потребуется для образования, насыщенного пара при температуре $t = 100^\circ\text{C}$. Из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$m_1 = \frac{\mu p_{\text{нп}} V}{RT}, \quad (1)$$

где $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па – давление насыщенных паров воды при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ (или $T = 373$ К).

Для варианта а) условия задачи находим из (1)

$$m_1 = 11,6 \text{ г}. \quad (2)$$

Поскольку в сосуде находится большее количество воды, чем (2) в случае а) испарится только часть воды. Пар в сосуде будет насыщенным, а его парциальное давление будет равно давлению насыщенного пара при данной температуре, т.е. 10^5 Па. Парциальное давление $p_{\text{взд}}$ сухого воздуха в сосуде при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ найдем по закону Шарля

$$p_{\text{взд}} = \frac{p_a T}{T_0}. \quad (3)$$

Поэтому давление смеси воздуха и пара в сосуде будет определяться соотношением:

$$p = p_{\text{взд}} + p_{\text{нп}} = \frac{p_a T}{T_0} + p_{\text{нп}} = 2,38 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (4)$$

Для варианта б) расчет по формуле (1) показывает, что для того, чтобы в объеме $V = 30$ л пар был насыщенным, в сосуд надо поместить, как минимум, $m_1 = 17,5$ г воды. Так как $m < m_1$, то пар в сосуде не будет насыщенным, поэтому его парциальное давление нужно определить, используя уравнение Клапейрона – Менделеева. В итоге

$$p = p_{\text{взд}} + p_{\text{п}} = \frac{p_a T}{T_0} + \frac{mRT}{\mu V} = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (5)$$

9. Основные принципы работы тепловых двигателей. Второй закон термодинамики. Цикл Карно

9.1. Поскольку работа газа в циклическом процессе равна площади фигуры, ограниченной циклом, изображенном в координатных осях $p - V$, то из графика находим работу газа

$$A = \pi \frac{(V_2 - V_1)}{2} \frac{(p_2 - p_1)}{2}$$

и КПД процесса

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\pi(V_2 - V_1)(p_2 - p_1)}{4Q}.$$

9.2. Используя формулу для КПД цикла Карно, получаем (T – температура холодильника):

$$\eta = \frac{nT - T}{nT} = \frac{n - 1}{n}.$$

9.3. Поскольку в адиабатическом процессе газ не получает и не отдает энергию в виде теплоты, в цикле Карно газ получает тепло от нагревателя на «верхней» изотерме, отдает холодильнику – на «нижней». Поскольку для изотермического процесса $Q = A$, то

$$Q_{\text{н}} = A_{\text{в}}, \quad Q_{\text{х}} = A_{\text{н}}, \quad (1)$$

где $A_{\text{в}}$ и $A_{\text{н}}$ – работа, совершенная газом на верхней изотерме цикла, и работа, совершенная над газом на нижней изотерме. Поскольку по условию

$$\frac{A_{\text{в}}}{A_{\text{н}}} = n$$

имеем из (1) для КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_{\text{н}} - Q_{\text{х}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{n - 1}{n}.$$

9.4. Ясно, что данная в условии температура T – температура на «верхней» изотерме цикла. Найдём температуру T_1 на «нижней» изотерме. Так температуры T и T_1 – температуры начального и ко-

нечного состояний для адиабатического расширения, в котором газ, с одной стороны, не получает энергию в виде теплоты, а с другой, совершает данную в условии работу A , то первый закон термодинамики для этого процесса дает

$$A = -\frac{3}{2} \nu R (T_1 - T),$$

где ν – количество вещества рабочего тела. Отсюда находим

$$T_1 = T - \frac{2A}{3\nu R}.$$

Используя теперь формулу (9.4) для КПД цикла Карно, получим

$$\eta = \frac{2A}{3\nu RT}.$$

9.5. Пусть первоначальные температуры нагревателя и холодильника – T_1 и T_2 . Тогда первоначальный КПД цикла Карно есть

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1)$$

Аналогично находим КПД циклов η_1 и η_2 с увеличенной температурой нагревателя и уменьшенной температурой холодильника:

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2 + \Delta T}{T_1 + \Delta T}, \quad \eta_2 = \frac{T_1 - T_2 + \Delta T}{T_1}. \quad (2)$$

Очевидно, $\eta_2 > \eta_1$, поскольку в обеих формулах (2) одинаковы числители, но во второй формуле меньше знаменатель.

9.6. Очевидно, на любом малом участке процесса $1 - 2$ газ получал тепло, на любом малом участке процесса $2 - 1$ – отдавал. Поэтому в процессе $1 - 2$ газ получал тепло от нагревателя, в процессе $2 - 1$ – отдавал холодильнику. Следовательно,

$$Q_x = Q_{2-1} \quad (1)$$

(обратим внимание читателя на то, что количество теплоты Q_{2-1} названо в условии задачи «отданным», поэтому с учетом того, что

в процессе $2 - 1$ газ отдает энергию в виде тепла, величина Q_{2-1} положительна). Из закона сохранения энергии находим количество теплоты, полученное от нагревателя,

$$Q_n = Q_{2-1} + A, \quad (2)$$

а затем КПД двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{A}{Q_{2-1} + A} = \frac{(A/Q_{2-1})}{1 + (A/Q_{2-1})} = \frac{n}{1 + n}.$$

9.7. Используем определение КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_n}, \quad (1)$$

где A – работа газа за цикл; Q_n – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла. Найдём эти величины.

Работа газа за цикл равна площади цикла, изображенного в координатах $p - V$. Из данного в условии графика находим

$$A = p_0 V_0. \quad (2)$$

Очевидно, газ получает тепло от нагревателя в процессах $1 - 2$ и $2 - 3$, и отдает тепло холодильнику в процессах $3 - 4$ и $4 - 1$. В качестве примера рассмотрим доказательство для процесса $1 - 2$. В этом процессе работа газа равна нулю (не изменяется объем газа), а его температура растет (это можно увидеть, применяя к этому процессу закон Клапейрона – Менделеева). Поэтому приращение внутренней энергии газа ΔU в этом процессе положительно, и из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A \quad (3)$$

следует, что количество теплоты, полученное газом в процессе $1 - 2$, положительно, т.е. газ получает тепло. Аналогично рассматриваются и другие участки циклического процесса $1 - 2 - 3 - 4 - 1$.

Для нахождения количества теплоты, полученного газом от нагревателя, применим к процессу $1 - 2 - 3$, в котором газ получает тепло от нагревателя, первый закон термодинамики

$$Q_{\text{н}} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3}. \quad (4)$$

Приращение внутренней энергии найдем с помощью данного в условии графика и закона Клапейрона – Менделеева

$$\begin{aligned} \Delta U_{1-2-3} &= \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_1) = \frac{3}{2} (\nu R T_3 - \nu R T_1) = \\ &= \frac{3}{2} (2 p_0 2 V_0 - p_0 V_0) = \frac{9}{2} p_0 V_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Работу газа в процессе 1 – 2 – 3 найдем из графика, как площадь под графиком зависимости $p(V)$ в этом процессе:

$$A_{1-2-3} = 2 p_0 V_0. \quad (6)$$

Из формул (4) – (6) находим

$$Q_{\text{н}} = \frac{13}{2} p_0 V_0, \quad (7)$$

а затем из формул (1), (2) и (7) – КПД рассматриваемого циклического процесса

$$\eta = \frac{2}{13}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что в рассматриваемом процессе только 2/13 части количества теплоты, полученного от нагревателя в процессе 1 – 2 – 3, двигатель превращает в работу. Остальные 11/13 частей этого количества теплоты газ отдает холодильнику в процессе 3 – 4 – 1.

Найдем теперь КПД цикла Карно, который работает с нагревателем и холодильником, имеющими температуры, равные максимальной и минимальной температурам газа в данном цикле. Из закона Клапейрона – Менделеева следует, что максимальной температурой газ обладает в состоянии 3, минимальной – в состоянии 1 (так как произведение давления газа на его объем максимально и минимально именно в этих состояниях). Кроме того, из этого закона заключаем, что

$$T_{\text{max}} = 4 T_{\text{min}}. \quad (9)$$

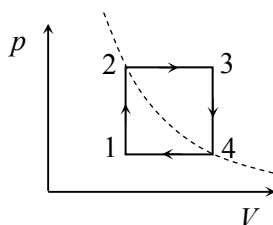
Из формулы (9) находим КПД соответствующего цикла Карно

$$\eta_K = \frac{4T_{\min} - T_{\min}}{4T_{\min}} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, цикл Карно, который работает с нагревателем и холодильником, имеющими температуры, равные максимальной и минимальной температурам газа в данном цикле, использует для производства механической энергии три четверти тепловой энергии, которую он получает от нагревателя.

$$\mathbf{9.8.} \quad \eta = \frac{(n-1)(k-1)}{(5/2)kn - k - (3/2)}.$$

9.9. Перестроение графика процесса в координатах $p - V$ (эти координаты являются наиболее удобными, поскольку именно на этом графике работа под кривой процесса имеет смысл работы газа в данном процессе) приводит к графику, изображенному на рисунке. При этом поскольку температура газа в состояниях 2 и 4 одинакова (это следует из данного в условии графика), то состояния 2 и 4 лежат на одной изотерме (которая показана на рисунке пунктиром).



Обозначим температуру газа в состояниях 2 и 4 как T_{24} . Найдем количество теплоты, полученное газом от нагревателя в процессах $1 - 2 - 3$ и отданное холодильнику в процессе $3 - 4 - 1$.

Применение первого закона термодинамики к процессу $1 - 2 - 3$ дает

$$\begin{aligned} Q_{1-2-3} &= \frac{3}{2} \nu R(T_3 - T_1) + p_{23}(V_3 - V_2) = \\ &= \frac{5}{2} \nu RT_3 - \frac{3}{2} \nu RT_1 - \nu RT_{24}, \end{aligned} \quad (1)$$

где p_{23} — давление газа в состояниях 2 и 3; V_2 и V_3 — объемы газа в состояниях 2 и 3 (в (1) использован закон Клапейрона — Менделеева).

Применяя теперь первый закон термодинамики к процессу $3 - 4 - 1$, найдем количество теплоты Q_{3-4-1} , полученное газом в этом процессе (оно, очевидно, отрицательное):

$$\begin{aligned}
 Q_{3-4-1} &= \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3) + p_{14}(V_1 - V_4) = \\
 &= \frac{5}{2} \nu R T_1 - \frac{3}{2} \nu R T_3 - \nu R T_{24}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где p_{14} – давление газа в состояниях 1 и 4; V_1 и V_4 – объемы газа в состояниях 1 и 4.

Учитывая, что работа, совершенная газом в течение цикла, равна $Q_{1-2-3} + Q_{3-4-1}$, и используя формулы (1), (2), находим КПД процесса

$$\eta = \frac{Q_{1-2-3} + Q_{3-4-1}}{Q_{1-2-3}} = \frac{(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2}{(5/2)T_3 - (3/2)T_1 - T_{24}}. \quad (3)$$

Найдем температуру T_{24} . Из закона Шарля для изохорических процессов 1 – 2 и 3 – 4 имеем

$$\frac{p_{23}}{T_{24}} = \frac{p_{14}}{T_1}, \quad \frac{p_{23}}{T_3} = \frac{p_{14}}{T_{24}}. \quad (4)$$

Деля первую формулу (4) на вторую, получим $T_{24} = \sqrt{T_1 T_3}$. Откуда находим КПД рассматриваемого цикла

$$\eta = \frac{(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2}{(5/2)T_3 - (3/2)T_1 - \sqrt{T_1 T_3}}. \quad (5)$$

9.10. Пусть в процессе 3 – 1 газ отдал холодильнику количество теплоты Q . Тогда по условию в процессе 2 – 3 газ совершил работу $A = nQ$. Найдем работу, совершенную газом на участке 3 – 1. Так как давление газа зависит от его объема в процессе 3 – 1 по закону $p = \alpha V$, где α – постоянная (это можно увидеть из данного в условии графика), то в этом процессе газ совершает следующую работу:

$$A_{3-1} = \frac{1}{2} \alpha (V_1^2 - V_3^2), \quad (1)$$

где V_1 и V_3 – объем газа в состояниях 1 и 3 (формулу (1) можно получить, вычисляя площадь под графиком $p(V)$). Приращение внутренней энергии газа в этом процессе найдем с помощью закона Клапейрона – Менделеева

$$\Delta U_{1-3} = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2} (p_1 V_1 - p_3 V_3) = \frac{3}{2} \alpha (V_1^2 - V_3^2), \quad (2)$$

где T_1, p_1 и T_3, p_3 – температуры и давления газа в состояниях 1 и 3 соответственно. Применяя теперь первый закон термодинамики к процессу 3 – 1

$$Q_{3-1} = \Delta U_{1-3} + A_{3-1} \quad (3)$$

и учитывая, что газ получает в этом процессе количество теплоты $Q_{3-1} = -Q$, получим

$$-Q = \frac{1}{2} \alpha (V_1^2 - V_3^2) + \frac{3}{2} \alpha (V_1^2 - V_3^2) = 2\alpha (V_1^2 - V_3^2) = 4A_{3-1}. \quad (4)$$

Отсюда находим, что в процессе 3 – 1 газ совершает работу $A_{3-1} = -Q/4$. Поэтому с учетом того, что в процессе 1 – 2 газ не совершает работу, находим работу газа за цикл $A = A_{2-3} + A_{3-1} = nQ - Q/4 = (4n - 1)Q/4$. Поскольку газ контактирует с холодильником только в процессе 3 – 1, то $Q_{\text{н}} = Q$, и по последней формуле (9.3) находим КПД рассматриваемого процесса

$$\eta = \frac{A}{A + Q} = \frac{4n - 1}{4n + 3}. \quad (5)$$

$$\mathbf{9.11.} \quad \eta = \frac{(n-1)^2}{5n^2 - 2n - 3} = \frac{n-1}{5n+3}.$$

9.12. Применяем определение КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}}, \quad (1)$$

где A – работа газа за цикл; $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла. Найдем эти величины.

Пусть давление газа в состоянии 1 равно p_0 . Поскольку зависимость $p(V)$ на участке 1 – 2 является линейной, проходящей через начало координат, давление газа в состоянии 2 равно np_0 . Работа газа за цикл равна площади цикла, изображенного в координатах $p - V$. Из данного в условии графика находим

$$A = \frac{p_0 V_0 (n-1)(n-2)}{4}. \quad (2)$$

Газ получает тепло от нагревателя в процессе 1 – 2. Поэтому для нахождения Q_n применяем к этому процессу первый закон термодинамики:

$$Q_n = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}, \quad (3)$$

где ΔU_{1-2} – приращение внутренней энергии; A_{1-2} – работа газа в этом процессе. Из графика имеем

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2} (np_0 n V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (n^2 - 1); \quad (4)$$

$$A_{1-2} = \frac{(p_0 + np_0)}{2} (nV_0 - V_0) = \frac{1}{2} p_0 V_0 (n^2 - 1). \quad (5)$$

В результате из (1) – (5) находим количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл,

$$Q_n = 2p_0 V_0 (n^2 - 1) \quad (6)$$

и КПД процесса

$$\eta = \frac{n-2}{8(n+1)}.$$

9.13. Используем определение КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_n} = \frac{A}{A + Q_x}, \quad (1)$$

где A – работа газа за цикл; Q_n – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла; Q_x – количество теплоты, отданное газом холодильнику в течение цикла.

Работа газа за цикл равна площади цикла, изображенного в координатах $p - V$. Из данного в условии графика заключаем, что основание этого треугольника – V_0 , высота – $2p_0$ (где p_0 – значение давления газа в состоянии 1). Поэтому

$$A = \frac{p_0 V_0}{2}. \quad (2)$$

Очевидно, газ получает тепло от нагревателя в процессах 1 – 2 и 2 – 3, и отдает тепло холодильнику в процессе 3 – 1. Найдём Q_x .

Для этого применяем к процессу 3 – 1 первый закон термодинамики

$$Q_{3-1} = \Delta U_{3-1} + A_{3-1}. \quad (3)$$

Приращение внутренней энергии найдем с помощью данного в условии графика и закона Клапейрона – Менделеева

$$\Delta U_{3-1} = \frac{3}{2} \nu R(T_1 - T_3) = \frac{3}{2} (p_0 V_0 - 6 p_0 V_0) = -\frac{15}{2} p_0 V_0, \quad (4)$$

где T_1 и T_3 – температуры газа в состояниях 1 и 3; ν – количество вещества газа. Работу газа в процессе 3 – 1 найдем как площадь под графиком зависимости $p(V)$ в этом процессе:

$$A_{3-1} = -3 p_0 V_0. \quad (5)$$

Из формул (3) – (5) находим Q_{3-1} и Q_x :

$$Q_{3-1} = -\frac{21}{2} p_0 V_0 \Rightarrow Q_x = |Q_{3-1}| = \frac{21}{2} p_0 V_0, \quad (6)$$

а затем из формул (1), (2) и (6) – КПД рассматриваемого циклического процесса

$$\eta = \frac{1}{22}.$$

9.14.

$$\eta = \frac{1}{16}.$$

9.15.

$$\eta = \frac{(\sqrt{n} - 1)}{8(\sqrt{n} + 1)}.$$

Указание. Использовать определение КПД и то обстоятельство, что давление и объем газа в состоянии 3 отличаются от давления и объема в состоянии 1 в \sqrt{n} раз.

9.16. Пусть в процессе 1 – 2 газ совершает работу A_{1-2} , а приращение его внутренней энергии в процессе 3 – 1 равно ΔU_{3-1} . По-

скольку процесс $3 - 1$ – адиабатический, имеем для работы газа в этом процессе:

$$A_{3-1} = -\Delta U_{3-1}. \quad (1)$$

Так как в процессе $2 - 3$ газ не совершал работу, его работа за цикл

$$A = A_{1-2} + A_{3-1} = A_{1-2} - \Delta U_{3-1}. \quad (2)$$

Газ получал тепло только в процессе $1 - 2$, поэтому КПД циклического процесса $1 - 2 - 3 - 1$ определяется соотношением:

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-2}} = \frac{A_{1-2} - \Delta U_{3-1}}{Q_{1-2}}. \quad (3)$$

Поскольку процесс $1 - 2$ – изобарический, полученное газом в течение этого процесса количество теплоты Q_{1-2} и его работа A_{1-2} связаны соотношением (см. задачу 6.4):

$$Q_{1-2} = \frac{5}{2} A_{1-2}. \quad (4)$$

Подставляя количество теплоты (4) в формулу для КПД (3), получим

$$\frac{\Delta U_{3-1}}{A_{1-2}} = 1 - \frac{5}{2} \eta.$$

9.17.

$$\frac{A}{\Delta U} = \frac{5}{3} \eta - \frac{2}{3}.$$

9.18. Очевидно, температура минимальна в данном процессе во всех состояниях, лежащих на изотерме $2 - 3$, максимальна – в состоянии 1. Поэтому фактически данное в условиях значение ΔT – приращение температуры в изохорическом процессе $3 - 1$. Применение первого закона термодинамики к этому процессу позволяет найти количество теплоты, полученное в этом процессе

$$Q_{3-1} = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (1)$$

где ν – количество вещества газа (в (1) учтено, что в изохорическом процессе газ не совершает работу).

Поскольку процесс $3 - 2$ – изотермический, в котором по условию над газом совершена работа A , то применение первого закона термодинамики к этому процессу дает

$$Q_{3-2} = -A. \quad (2)$$

Так как в процессе $1 - 2$ газ не отдавал и не получал энергии в виде тепла, то для рассматриваемого цикла

$$Q_n = Q_{3-1}, \quad Q_x = |Q_{3-2}|, \quad (3)$$

поэтому из формул (1), (2) и определения КПД теплового двигателя находим

$$\eta = \frac{Q_n - Q_x}{Q_n} = 1 - \frac{2A}{3\nu R \Delta T}.$$

9.19. Поскольку площади обоих циклов одинаковы, газ совершает в них одинаковую работу. Поэтому для сравнения их КПД сравним количества теплоты, полученные газом в этих циклах от нагревателей. В первом цикле газ получает тепло в процессе $1 - 2 - 3$, во втором – в процессе $5 - 6 - 7$. Используя первый закон термодинамики для этих процессов, найдем

$$Q_{1-2-3} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{1-2-3} + A_{1-2-3} = \frac{9}{2} pV + 2pV = \frac{13}{2} pV, \quad (1)$$

где ν – количество вещества газа; ΔT_{1-2-3} – приращение температуры газа в процессе $1 - 2 - 3$; A_{1-2-3} – его работа в этом процессе (в (1) использован закон Клапейрона – Менделеева и геометрический смысл работы как площади под графиком процесса в координатах $p - V$). Аналогичные вычисления для цикла $5 - 6 - 7 - 8 - 5$ дают

$$Q_{5-6-7} = \frac{19}{2} pV. \quad (2)$$

Таким образом, в цикле $5 - 6 - 7 - 8 - 5$ газ получает в $19/13$ раз большее количество теплоты, чем в цикле $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ и, следовательно, при одинаковой работе последний цикл имеет в $13/19$ раз

меньший КПД: $\eta_1 = \frac{13}{19} \eta$.

9.20. Применяем к циклическим процессам $1-2-3-4-1$ и $1-3-4-1$ определение КПД

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-2-3}}; \quad (1)$$

$$\eta_1 = \frac{(A/2)}{Q_{1-3}}, \quad (2)$$

где A – работа, совершенная газом в процессе $1-2-3-4-1$; Q_{1-2-3} и Q_{1-3} – количества теплоты, полученные газом в соответствующих процессах. В формулах (1), (2) учтено, что работа, совершенная газом в циклическом процессе $1-3-4-1$, вдвое меньше работы в процессе $1-2-3-4-1$, и что в процессе $1-2-3-4-1$ газ получал тепло на участке $1-2-3$, а в процессе $1-3-4-1$ – на участке $1-3$.

Свяжем количества теплоты Q_{1-2-3} и Q_{1-3} . Для этого применяем к этим процессам первый закон термодинамики

$$Q_{1-2-3} = \Delta U_{1,3} + A_{1-2-3}; \quad (3)$$

$$Q_{1-3} = \Delta U_{1,3} + A_{1-3}, \quad (4)$$

где $\Delta U_{1,3}$ – приращение внутренней энергии газа; A_{1-2-3} и A_{1-3} – работы газа в процессах $1-2-3$ и $1-3$ соответственно. Вычитая из формулы (3) формулу (4) и учитывая, что работа газа в любом процессе равна площади под графиком процесса в координатах $p-V$, и потому разность $A_{1-2-3} - A_{1-3}$ равна площади треугольника 123, т.е. $A/2$, получим

$$Q_{1-2-3} - Q_{1-3} = A/2. \quad (5)$$

Выражая Q_{1-3} из формулы (5), подставляя это выражение в (2) и учитывая (1), получим для КПД цикла $1-3-4-1$

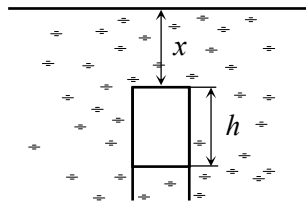
$$\eta_1 = \frac{(A/2)}{Q_{1-2-3} - (A/2)} = \frac{(A/Q_{1-2-3})}{2 - (A/Q_{1-2-3})}, \quad (6)$$

или

$$\eta_1 = \frac{\eta}{2 - \eta}.$$

10. Комбинированные задачи повышенной сложности

10.1. При погружении стакана в воду из-за роста давления воды объем воздуха в стакане уменьшается, что приводит к уменьшению действующей на стакан выталкивающей силы. Поэтому при определенной глубине погружения стакан утонет. Очевидно, стакан начнет тонуть при такой глубине погружения x , когда выталкивающая сила станет меньше действующей на стакан силы тяжести:



$$\rho g V = \rho g S h \leq M g, \quad (1)$$

где M и S – масса и площадь сечения стакана; V и h – объем и высота столба воздуха в стакане, погруженном на глубину x . Условие равновесия стакана, опущенного в воду вниз дном, дает

$$M g = \rho g S y. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) находим условие на высоту столба воздуха в стакане, при которой он начнет тонуть,

$$h \leq y. \quad (3)$$

Таким образом, чтобы стакан утонул, его нужно погрузить в воду на такую глубину x , при которой высота столба воздуха в нем станет равна y . Эту глубину найдем из закона Клапейрона – Менделеева для воздуха в стакане. Так как в стакане – атмосферный воздух, температура которого не меняется при погружении, то

$$p S y = p_0 S H. \quad (4)$$

С другой стороны, давление воздуха в погруженном в воду стакане равно гидростатическому давлению в воде на той глубине, на которой находится поверхность воздуха в погруженном стакане. Поэтому

$$p = p_0 + \rho g (x + y). \quad (5)$$

Подставляя давление воздуха p из формулы (5) в формулу (4), получим

$$p_0 H = p_0 y + \rho g y (x + y). \quad (6)$$

Решая уравнение (6), найдем глубину погружения дна стакана x , при которой он начнет тонуть,

$$x = \frac{p_0(H - y)}{\rho g y} - y.$$

10.2. Условия равновесия воздуха в большом шаре в вакууме и в малом шаре, который находится внутри большого, дают

$$p_1 = \frac{\alpha}{r_1}, \quad p_2 = p_1 + \frac{\alpha}{r_2} = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\alpha}{r_2}, \quad (1)$$

где p_1 и r_1 – давление внутри большого шара и его радиус; p_2 и r_2 – аналогичные величины для малого шара. Применяя теперь к газу внутри большого и малого шаров закон Клапейрона – Менделеева, получим из (1)

$$v_1 RT = \frac{\alpha(V_1 - V_2)}{r_1}, \quad v_2 RT = \frac{\alpha V_2}{r_1} + \frac{\alpha V_2}{r_2}, \quad (2)$$

где V_1 и V_2 – объемы большого и малого шаров; v_1 и v_2 – количества вещества газа в них; T – температура газов. Складывая первое и второе уравнения (2), получим

$$(v_1 + v_2)RT = \frac{\alpha V_1}{r_1} + \frac{\alpha V_2}{r_2} = \frac{4}{3} \pi r_1^2 + \frac{4}{3} \pi r_2^2. \quad (3)$$

Применим теперь закон Клапейрона – Менделеева к газу внутри большого шара, когда в нем разорвался малый. Так как количество вещества газа в нем равно $v_1 + v_2$, а температура не изменилась, то этот закон дает

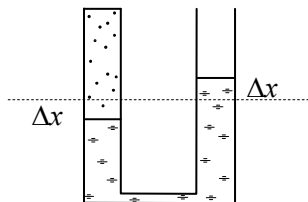
$$(v_1 + v_2)RT = p_3 V_3, \quad (4)$$

где p_3 – давление газа; V_3 – его объем. Учитывая, что $p_3 = \alpha/r_3$ (условие равновесия газа в шаре); $V_3 = (4/3)\pi r_3^3$ (r_3 – радиус шара), а величина $(v_1 + v_2)RT$ определяется формулой (3), получим из (4)

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

10.3. Напомним, что для того, чтобы найти частоту колебаний, нужно сделать следующее*. Надо мысленно вывести жидкость из положения равновесия на очень малую величину Δx , найти силу, которая будет возвращать жидкость в положение равновесия («возвращающую» силу) и которая окажется пропорциональной величине Δx ; квадратный корень из отношения коэффициента пропорциональности между возвращающей силой и величиной отклонения к массе жидкости и даст круговую частоту колебаний ω .

Пусть величина указанного отклонения жидкости от положения равновесия равна Δx (см. рисунок). Тогда на жидкость действуют избыточная сила тяжести в одном колене трубки по сравнению с другим $2\rho\Delta x Sg$ (ρ – плотность жидкости, S – площадь сечения трубки) и избы-



точная сила давления воздуха на поверхность в одном колене по сравнению с другим. Возникновение последней силы объясняется следующим. Когда жидкость находится в равновесии, давление воздуха в запаянном колене равно атмосферному. Когда жидкость выводят из положения равновесия, объем воздуха в запаянном колене изменяется, следовательно, изменяется и давление воздуха в нем, в то время как давление воздуха на поверхность в открытом колене равно атмосферному. Поэтому со стороны воздуха на жидкость действует сила $(p_0 - p)S$, где p – давление воздуха в запаянном колене; p_0 – атмосферное давление. В результате для возвращающей силы имеем

$$F = 2\rho\Delta x Sg + (p_0 - p)S. \quad (1)$$

Давление воздуха в запаянном колене найдем по закону Бойля – Мариотта для воздуха в запаянном колене (по условию его температура не изменяется):

$$p_0 V_0 = p(V_0 - \Delta x S), \quad (2)$$

* См., например: Задачи по физике. Ч. I. Механика / А.Н. Долгов, С.Е. Муравьев, В.П. Протасов, Б.В. Соболев. М.: МИФИ, 2004.

где V_0 – объем воздуха в запаянной трубке в положении, когда жидкость находится в равновесии, $V_0 = hS$, h – высота столба воздуха в этом положении. Из формулы (2) находим

$$p - p_0 = \frac{p\Delta x S}{V_0} = \frac{p\Delta x}{h}. \quad (3)$$

Учтем теперь малость величины отклонения Δx . В этом случае правая часть формулы (3) будет мала из-за входящей в нее величины Δx , и, следовательно, давление воздуха в закрытом колене будет слабо отличаться от атмосферного, и этим отличием в правой части формулы (3) можно пренебречь, т.е. считать, что давление p , которое входит в правую часть формулы (3), равно атмосферному p_0 :

$$p - p_0 \approx \frac{p_0 \Delta x}{h}. \quad (4)$$

(Отметим, что «пренебречь» разницей давлений воздуха p и p_0 в левой части формулы (3) нельзя – поскольку именно это отличие давлений (вместе с избыточной силой тяжести) возвращает жидкость в положение равновесия. В правой части пренебрежение отличием давления газа от атмосферного приводит только к поправкам, которые являются малыми.) Поэтому возвращающая сила определяется соотношением

$$F = \left(2\rho g + \frac{p_0}{h} \right) S \Delta x. \quad (5)$$

Как и должно быть, для малых отклонений возвращающая сила оказывается пропорциональной величине отклонения Δx с коэффициентом пропорциональности $(2\rho g + (p_0/h))S$. Деля этот коэффициент на массу колеблющейся жидкости и извлекая квадратный корень из этого отношения, находим круговую частоту колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{(2\rho g + (p_0/h))S}{m}}.$$

10.4. Задача очень похожа на предыдущую, только с газом в запаянном колене происходит не изотермический (как в предыдущей задаче), а адиабатический процесс. Ясно, что все идеи и формулы

предыдущей задачи останутся справедливыми, за исключением закона Бойля – Мариотта (2), который позволял найти изменение давления газа в запаянном колене (3) (см. решение предыдущей задачи). Здесь найдем это изменение с помощью уравнения адиабаты

$$p(V) = \frac{\text{const}}{V^{5/3}}, \quad (1)$$

которое дано в указании в условии задачи. Из определения производной получаем, что для малых отклонений поршня от положения равновесия (а именно такие отклонения мы и должны рассматривать), или, другими словами, для малых изменений объема воздуха в запаянном колене справедливо приближенное соотношение

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx p'(V), \quad (2)$$

где $p'(V)$ – производная давления по объему. Отсюда находим, дифференцируя уравнение адиабаты (1) и отбрасывая знак « \rightarrow », абсолютную величину изменения давления газа в запаянном колене при отклонении поршня на Δx :

$$\Delta p = \frac{5}{3} \frac{\text{const}}{V^{5/3}} \frac{\Delta x S}{V}. \quad (3)$$

Так же, как и в предыдущей задаче, пренебрегаем изменением объема воздуха при малых отклонениях поршня. Поэтому формула (3) приводится к виду

$$\Delta p = \frac{5}{3} p_0 \frac{\Delta x}{h}. \quad (4)$$

Из сравнения формул (4) в этой и предыдущей задачах видим, что разница между ситуациями, когда при колебаниях жидкости не меняется температура газа или когда отсутствует его теплообмен с окружающей средой, сводится к множителю $5/3$ в формуле для избыточного давления при колебаниях в случае изотермического процесса. Поэтому частота колебаний жидкости в этом случае определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{(2\rho g + (5p_0/3h))S}{m}}. \quad (5)$$

Таким образом, частота колебаний жидкости в случае адиабатического процесса с газом больше частоты колебаний в случае изотермического. Для периодов колебаний ($T = 2\pi/\omega$) соотношение обратное. Этот результат объясняется тем, что в случае адиабатического сжатия (расширения) газа его давление возрастает (падает) быстрее, чем в случае изотермического, что приводит к большей возрастающей силе и более быстрому возвращению жидкости к положению равновесия, т.е. к меньшему периоду колебаний.

И последний вопрос, на который нужно ответить в связи с двумя рассмотренными задачами. В одном случае по условию с газом происходил изотермический процесс, во втором – адиабатический. А какой процесс будет происходить в действительности, если провести такой опыт? Это зависит от условий, главными из которых являются теплопроводность и размеры трубок. Если теплопроводность трубок велика, а их размеры очень малы, то при колебаниях жидкости газ будет успевать обмениваться теплом с окружающим воздухом, и его температура будет в любой момент времени близка к температуре окружающего воздуха. Поэтому в этом случае процесс, происходящий с газом, будет изотермическим. Если теплопроводность трубок мала, а объем газа – большой, то теплообменом газа с окружающей средой можно пренебречь и считать процесс адиабатическим.

10.5. На систему двух поршней, скрепленных стержнем, действуют силы со стороны трех газов: p_1S , $p_2\alpha S$ – направо, и p_2S , $p_3\alpha S$ – налево (см. рисунок в условии задачи). Поэтому условие равновесия поршней в сосуде дает:

$$p_1S + p_2\alpha S - p_2S - p_3\alpha S = 0. \quad (1)$$

Отсюда с учетом условия

$$\frac{p_3}{p_1} = \beta \quad (2)$$

находим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - 1}. \quad (3)$$

Складывая, далее, законы Клапейрона – Менделеева для каждого газа и учитывая, что объемы частей сосуда $V_1 = lS/2$ (левая часть), $V_2 = lS(\alpha + 1)/2$ (часть сосуда между поршнями) и $V_3 = lS\alpha/2$ (правая часть), получим

$$\frac{lS}{2}(p_1 + p_2(\alpha + 1) + p_3\alpha) = \nu RT, \quad (4)$$

где ν – количество вещества газа во всем сосуде; T – температура газа в сосуде. Выражая теперь давления газа во второй и третьей частях сосуда из отношений (2), (3), найдем давление газа в первой части сосуда до нагревания

$$p_1 = \frac{(\alpha - 1)\nu RT}{lS(\alpha^2\beta - 1)}. \quad (5)$$

Рассмотрим процесс нагревания газа. Так как по условию температура оставалась одинаковой во всех частях сосуда, то давление увеличивалось в них в одинаковое количество раз, и, следовательно, условие равновесия системы поршней (1) при нагревании не нарушилось. Таким образом, несмотря на то, что поршни не закреплены при одинаковом нагревании газов в трех отсеках, поршни не будут перемещаться. Поэтому процесс для каждого газа – изохорический; отношения давлений газов в трех отсеках (3) сохраняются. Однако сами давления, конечно, изменятся.

Чтобы найти изменение давления воздуха в сосуде, применим к газу в каждом отсеке первый закон термодинамики и сложим эти уравнения. В результате найдем приращение температуры газа

$$\Delta T = \frac{2Q}{3\nu R}, \quad (6)$$

а затем из формулы (5) искомое приращение давления в левом отсеке сосуда

$$\Delta p_1 = \frac{2(\alpha - 1)\Delta T}{3lS(\alpha^2\beta - 1)}.$$

10.6. Рассмотрим некоторое состояние газа в рассматриваемом процессе. Пусть объем газа в этом состоянии – V_1 , тогда его давле-

ние $p_1 = \alpha - \beta V_1^2$. Рассмотрим процесс, в течение которого объем газа вырос на малую величину $\Delta V \ll V_1$ (элементарный процесс). Найдём полученное газом в течение элементарного процесса количество теплоты δQ как функцию объема V_1 : если окажется, что $\delta Q > 0$, то при таких значениях объема V_1 газ получает, если $\delta Q < 0$ – отдает тепло.

Количество полученной газом в течение элементарного процесса теплоты найдём по первому закону термодинамики

$$\delta Q = \Delta U + \delta A, \quad (1)$$

где ΔU и δA – приращение внутренней энергии и работа газа в этом процессе. Изменение внутренней энергии газа найдём, используя закон Клапейрона – Менделеева

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} ((p_1 + \Delta p)(V_1 + \Delta V) - p_1 V_1), \quad (2)$$

где Δp – приращение давления газа в течение элементарного процесса, которое можно найти, используя связь давления и объема

$$\begin{aligned} \Delta p &= \alpha - \beta(V_1 + \Delta V)^2 - (\alpha - \beta V_1^2) = \\ &= -2\beta V_1 \Delta V - \beta \Delta V^2 \approx -2\beta V_1 \Delta V \end{aligned} \quad (3)$$

(поскольку ΔV – малая по сравнению с V_1 величина, слагаемым, содержащим ΔV^2 , можно пренебречь). Раскрывая в (2) скобки и учитывая, что ΔV и Δp – малые величины, и потому их произведением также можно пренебречь, получим

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2} (p_1 \Delta V + V_1 \Delta p) = \frac{3}{2} ((\alpha - \beta V_1^2) \Delta V - 2\beta V_1^2 \Delta V) = \\ &= \frac{3}{2} (\alpha - 3\beta V_1^2) \Delta V. \end{aligned} \quad (4)$$

Работу газа в течение элементарного процесса можно найти следующим образом. Так как в течение этого процесса объем газа меняется на малую величину, то приближенно элементарный про-

цесс можно считать изобарическим^{*}, и потому работа газа в элементарном процессе определяется соотношением:

$$\delta A \approx p_1 \Delta V = (\alpha - \beta V_1^2) \Delta V. \quad (5)$$

Из формул (4), (5) находим количество теплоты, переданное газу в элементарном процессе,

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{3}{2}(\alpha - 3\beta V_1^2) \Delta V + (\alpha - \beta V_1^2) \Delta V = \\ &= \frac{1}{2}(5\alpha - 11\beta V_1^2) \Delta V. \end{aligned} \quad (6)$$

Из формулы (6) заключаем, что при расширении газа ($\Delta V > 0$) в рассматриваемом процессе до объема

$$V_1 = \sqrt{\frac{5\alpha}{11\beta}} \quad (7)$$

количество переданного газу тепла положительно, и, следовательно, газ получает тепло. Когда объем газа становится больше величины V_1 (7), то при его дальнейшем расширении количество переданного газу тепла δQ отрицательно, и, следовательно, газ отдает тепло.

10.7. После теплоизоляции сосуда система «поршень – газ» становится замкнутой, и, следовательно, ее энергия сохраняется. Поэтому будем использовать для решения закон сохранения энергии.

Выберем в качестве начала отсчета потенциальной энергии поршня в поле силы тяжести уровень его первоначального расположения. Тогда энергия системы в начале процесса (до нагревания) равна внутренней энергии газа

$$E_1 = \frac{3}{2} \nu R T_0 = \frac{3}{2} p V, \quad (1)$$

^{*} Конечно, это относится только к рассматриваемому элементарному процессу, в течение которого объем вырос на малую величину ΔV . Если рассмотреть конечное изменение объема, сравнимое по величине с объемом V_1 , то такой процесс нельзя считать изобарическим.

где ν – количество вещества газа; p и V – давление газа и его объем. Так как в начальном положении поршень находится в равновесии, то $p = mg/S$, где m – масса поршня; S – площадь сечения сосуда. В результате формулу для первоначальной энергии газа (1) можно переписать так:

$$E_1 = \frac{3}{2} mgH, \quad (2)$$

где H – высота поршня над дном сосуда в начальном положении.

После двукратного увеличения температуры газа (при том, что поршень удерживают на том же месте) энергия системы увеличивается вдвое, т.е.

$$E_2 = 3mgH. \quad (3)$$

Поскольку затем систему теплоизолируют, ее энергия сохраняется. Поэтому если в конце процесса поршень остановился на высоте x над первоначальным уровнем, а температура газа будет равна T_1 , то*:

$$3mgH = mgx + \frac{3}{2} \nu RT_1 = mgx + \frac{3}{2} p_1 V_1, \quad (4)$$

где p_1 и V_1 – давление газа и его объем в конечном состоянии, $p_1 = mg/S$ (условие равновесия поршня), $V_1 = S(H + x)$. Поэтому из (4) имеем

$$3mgH = mgx + \frac{3}{2} mg(x + H). \quad (5)$$

Из уравнения (5) находим величину x :

$$x = \frac{3}{5} H \quad (6)$$

и внутреннюю энергию E газа в конечном состоянии:

$$E = \frac{3}{2} mg(x + H) = \frac{12}{5} mgH. \quad (7)$$

* При наличии атмосферного давления формула (4) не имела бы места, поскольку даже в случае теплоизоляции система «поршень – газ» не была бы замкнутой. Поэтому конечная и начальная энергии системы отличались бы на работу сил атмосферного давления.

Из формул (1), (7) заключаем, что внутренняя энергия газа в конце процесса E в $8/5$ раз больше внутренней энергии газа в начале процесса E_1 , и, следовательно, конечная температура газа

$$T_1 = \frac{8}{5} T_0.$$

10.8. Так как атмосферным давлением по условию можно пренебречь, после теплоизоляции сосуда система «газ в сосуде – поршень» становится замкнутой, и ее энергия сохраняется. Поэтому для исследования процесса опускания поршня можно использовать закон сохранения энергии. Перед отпусканьем поршня энергия системы определяется соотношением:

$$E = mgh + \frac{3}{2} \nu RT, \quad (1)$$

где первое слагаемое – потенциальная энергия поршня (его первоначальное положение выбрано за уровень отсчета потенциальной энергии), второе слагаемое – внутренняя энергия газа (ν и T – количество вещества газа и его температура). Так как температура газа при поднятии поршня не изменилась (а для этого при поднятии поршня должен быть обеспечен теплообмен между газом и окружающей средой), то согласно закону Клапейрона – Менделеева произведение νRT равно произведению давления газа на его объем в начальном (до поднятия поршня) состоянии:

$$\nu RT = pV, \quad (2)$$

где p и V – давление и объем газа до поднятия поршня. Так как в этом положении поршень находился в равновесии, а атмосферное давление по условию мало, то

$$p = \frac{mg}{S}, \quad V = SH, \quad (3)$$

где m – масса поршня; S – площадь сечения сосуда; H – высота расположения поршня над дном сосуда до поднятия. В результате формула (1) для энергии системы перед отпусканьем поршня принимает вид

$$E = mgh + \frac{3}{2} mgH. \quad (4)$$

После отпускания поршня он совершит какое-то количество колебаний, которые через некоторое время затухнут и поршень остановится. Пусть окончательная остановка поршня произошла на высоте x над его первоначальным положением. Тогда энергию системы в конечном состоянии можно найти как

$$E = mgx + \frac{3}{2} \nu RT_1, \quad (5)$$

где T_1 – температура газа после остановки поршня. Используя закон Клапейрона – Менделеева для газа после остановки поршня и условие равновесия поршня, получим из (5)

$$E = mgx + \frac{3}{2} mg(x + H). \quad (6)$$

Приравняв энергию системы до и после опускания поршня и решая полученное уравнение, найдем

$$x = \frac{2}{5} h.$$

10.9. Применим к рассматриваемому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A, \quad (1)$$

где Q – количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы поршень поднялся на высоту $2h$; ΔU – приращение внутренней энергии газа в этом процессе; A – его работа. Так как газ – одноатомный, то

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (p_1 V_1 - p_0 V_0), \quad (2)$$

где p_1 , V_1 и p_0 , V_0 – конечные и начальные давления газа и его объемы. По условию

$$V_0 = Sh, \quad V_1 = 3Sh, \quad (3)$$

где S – площадь сечения сосуда. Давления газа p_1 и p_0 найдем из условий равновесия поршня. В начале процесса

$$p_0 = \frac{mg}{S} + p_a. \quad (4)$$

В конце

$$p_1 = \frac{mg + \lambda hg}{S} + p_a. \quad (5)$$

Поэтому

$$\Delta U = \frac{3}{2}(2mgh + 3\lambda h^2 g + 2p_a). \quad (6)$$

Работу газа найдем по графику зависимости давления газа от его объема в рассматриваемом процессе. Поскольку по условию процесс – медленный, поршень во время всего процесса находится в равновесии. Поэтому пока поршень не коснулся веревки, сила, действующая на него со стороны воздуха в сосуде, уравнивает силу тяжести поршня и силу, действующую на поршень со стороны атмосферного воздуха. А поскольку последние силы постоянны, с газом происходит изобарический процесс при давлении

$$p = p_a + \frac{mg}{S}. \quad (7)$$

После того как поршень коснется веревки, масса поршня с лежащей на нем веревкой будет линейно возрастать с ростом объема, причем в конце процесса сила со стороны газа будет уравнивать силы тяжести поршня mg и веревки λh и силу со стороны атмосферного воздуха. Поэтому в самом конце процесса давление газа можно найти как

$$p = p_a + \frac{mg + \lambda hg}{S}. \quad (8)$$

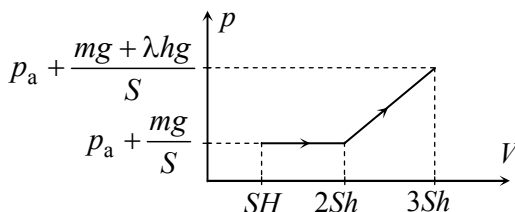


График зависимости давления газа от его объема, построенный в соответствии с проведенными рассуждениями, приведен на рисун-

ке. Из графика находим работу газа в рассматриваемом процессе (как площадь под графиком)

$$A = 2 \left(p_a + \frac{mg}{S} \right) Sh + \frac{\lambda h^2 g S}{2}. \quad (9)$$

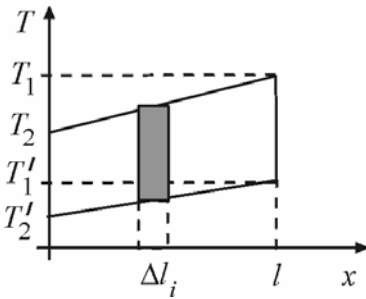
В результате из формул (1), (6) и (9) получаем количество теплоты, которое надо подвести к газу в рассматриваемом процессе,

$$Q = 5h(mg + p_a S + \lambda hg).$$

10.10. Сложность данной задачи связана с тем, что температура стержня меняется от точки к точке, и потому применение формулы

$$Q = cm(T - T') \quad (1)$$

для количества потерянной теплоты ко всему стержню невозможно (не ясно, какие температуры подставлять в формулу (1)). Поэтому необходимо разбить стержень на малые элементы, применить формулу (1) к каждому такому элементу, просуммировать полученные результаты.



Итак, мысленно разобьем стержень на элементы, настолько малые, что температуру каждого можно считать неизменной. Рассмотрим i -й элемент длиной Δl_i с начальной температурой T_i , конечной — T'_i . Очевидно такой элемент стержня потерял при охлаждении следующее количество тепла

$$\delta Q_i = c \Delta m_i (T_i - T'_i) = c \frac{m \Delta l_i}{l} (T_i - T'_i), \quad (2)$$

где l — длина стержня; Δm_i — масса рассматриваемого элемента стержня, $\Delta m_i = \Delta l_i m / l$. Поэтому полное количество тепла, потерянного стержнем,

$$Q = \frac{cm}{l} \sum_i \Delta l_i (T_i - T'_i). \quad (3)$$

Сумма (3) имеет следующий геометрический смысл. Построим графики зависимости температуры точек стержня $T(x)$ от расстояния x от этих точек до одного из его концов (например, с температурой T_1 в начальном состоянии и T_1' в конечном). Эти графики показаны на рисунке; по условию они представляют собой прямые линии. Очевидно, произведение $\Delta l_i (T_i - T_i')$ имеет смысл площади прямоугольника с шириной Δl_i , а высотой $(T_i - T_i')$, т.е. прямоугольника, заштрихованного на рисунке. Поэтому количество теплоты (3) равно площади трапеции между двумя зависимостями $T(x)$, умноженной на cm/l . Находя площадь трапеции, получим

$$Q = cm \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_1' + T_2'}{2} \right). \quad (4)$$

10.11. На первый взгляд, очень мало данных. Давайте, посчитаем неизвестные величины, которые определяют установившуюся температуру, когда в калориметр наливают ложку горячей воды. Неизвестны: теплоемкость калориметра, масса содержащейся в нем воды и первоначальная температура калориметра (три величины), масса воды в ложке и начальная температура горячей воды (еще две). И это при том, что у нас есть только два условия – при налипании в калориметр одной, а затем еще одной ложки горячей воды.

С другой стороны, количество важных для решения неизвестных меньше. Например, теплоемкость калориметра и масса первоначально содержащейся в нем воды по отдельности нам не нужны. Нужна только теплоемкость калориметра со всем, что в нем есть. Поэтому неизвестных не пять, а четыре. На самом деле их еще меньше. Дело в том, что равновесная температура при тепловом контакте двух тел определяется не теплоемкостями этих тел по отдельности, а только отношением их теплоемкостей. Кроме того, для задачи в рассматриваемой постановке, когда нужно найти не температуру смеси, а то, на сколько увеличилась температура калориметра, важны не сами температуры калориметра и горячей воды, а только их разность. Поэтому неизвестных, фактически, две: отношение теплоемкостей ложки и калориметра, разность температур горячей воды и начальной температуры калориметра. Следовательно, из двух условий эти неизвестные можно найти, а затем рас-

смотреть процесс наливания в калориметр еще n ложек горячей воды. Реализуем этот план.

Пусть теплоемкость калориметра (с первоначально содержащейся в нем водой) равна C_0 , теплоемкость воды в одной ложке – C_1 . Разность температур горячей воды и калориметра – t . Тогда уравнение теплового баланса для процесса наливания одной ложки воды в калориметр имеет вид

$$C_0\Delta T_1 = C_1(t - \Delta T_1), \quad (1)$$

где ΔT_1 – приращение температуры калориметра при наливании в него одной ложки горячей воды. После деления уравнения (1) на C_1 оно дает

$$x\Delta T_1 = t - \Delta T_1, \quad (2)$$

где $x = C_0/C_1$ – отношение теплоемкостей калориметра и воды в одной ложке.

Когда в калориметр (содержащий по сравнению с первоначальным состоянием одну лишнюю ложку воды и потому имеющий теплоемкость $C_0 + C_1$) наливают еще одну ложку воды, уравнение теплового баланса дает

$$(C_0 + C_1)\Delta T_2 = C_1(t - \Delta T_1 - \Delta T_2), \quad (3)$$

где ΔT_2 – приращение температуры калориметра (по сравнению с его новой температурой) при наливании в него еще одной ложки горячей воды. После деления уравнения (3) на C_1 имеем

$$(x + 1)\Delta T_2 = t - \Delta T_1 - \Delta T_2. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (2), (4) относительно неизвестных величин x и t , отношение теплоемкостей сосуда и ложки воды и разность температур горячей воды и калориметра

$$x = \frac{2\Delta T_2}{\Delta T_1 - \Delta T_2}, \quad t = \frac{\Delta T_1(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{\Delta T_1 - \Delta T_2}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь процесс наливания в калориметр (который содержит две лишние ложки воды и потому имеет теплоемкость $C_0 + 2C_1$) еще n ложек горячей воды. Уравнение теплового баланса в этом случае имеет вид

$$(C_0 + 2C_1)\Delta T_3 = nC_1(t - \Delta T_1 - \Delta T_2 - \Delta T_3), \quad (6)$$

где ΔT_3 – приращение температуры калориметра (по сравнению с его последней температурой) при наливании в него n ложек горячей воды. После деления уравнения (6) на C_1 имеем

$$(x + 2)\Delta T_3 = nt - n\Delta T_1 - n\Delta T_2 - n\Delta T_3. \quad (7)$$

Подставляя в формулу (7) отношение теплоемкостей x и разность температуры горячей воды и первоначальной температуры калориметра t (5) и решая получившееся уравнение, получим окончательно

$$\Delta T_3 = \frac{n\Delta T_2(\Delta T_1 + \Delta T_2)}{(n + 2)\Delta T_1 - n\Delta T_2}.$$

10.12. Эта задача похожа на предыдущую. Основная идея ее решения заключается в том, нагревание или охлаждение тел при теплообмене определяется отношением их теплоемкостей, сами же теплоемкости не нужны. Поэтому из первого условия – в сосуд опустили одно тело – можно определить отношение теплоемкостей тела и сосуда, а затем с помощью этого отношения исследовать процесс опускания в сосуд двух таких тел.

Итак, пусть теплоемкость сосуда равна C_0 , тела – C_1 . Тогда закон теплового баланса для первого процесса дает

$$C_0(t_2 - t_1) = C_1(t_0 - t_2). \quad (1)$$

Из формулы (1) находим отношение теплоемкостей сосуда и тела

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{t_0 - t_2}{t_2 - t_1}. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим случай, когда в сосуд, температура которого уже равна t_2 , и в нем уже лежит одно тело, опускают еще два таких же тела. Поскольку теплоемкость сосуда с телом равна $C_0 + C_1$, а двух тел – $2C_1$, то условие теплового баланса имеет вид

$$(C_0 + C_1)(t_x - t_2) = 2C_1(t_0 - t_x), \quad (3)$$

где t_x – искомая температура. Разделив формулу (3) на C_1 , перепишем ее в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{C_1} + 1 \right) (t_x - t_2) = t_0 - t_x. \quad (4)$$

Поскольку отношение теплоемкостей сосуда и тела C_0/C_1 нам известно (формула (2)), из формулы (4) можно определить искомую температуру t_x .

Дальнейшие вычисления проще всего сделать «в числах». Подставляя в формулу (2) данные условия задачи, получим

$$\frac{C_0}{C_1} = 7. \quad (5)$$

Отсюда находим отношение теплоемкостей сосуда с телом и двух тел, которое определяет установившуюся температуру во втором случае

$$\frac{1}{2} \left(\frac{C_0}{C_1} + 1 \right) = 4. \quad (6)$$

В результате из формулы (4) имеем:

$$t_x = \frac{4t_2 + t_0}{5} = 44 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

10.13. Основная идея решения этой задачи заключается в следующем. С одной стороны, при установившейся температуре в комнате поток тепла из комнаты на улицу* равен мощности батарей в комнате P_1 . С другой стороны, по закону теплопроводности этот поток пропорционален разности температур между комнатой и улицей

$$P_1 = k(t_2 - t_1), \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, который зависит от множества факторов: материала стен и окон, теплоизоляции комнаты, площади и геометрии стен и др., но не зависит от температур в комнате и на улице. Вычислить этот коэффициент для реальных стен реальных комнат, исходя из их геометрии и коэффициентов

* Поток тепла называется количество теплоты, переносимое через некоторую поверхность в единицу времени.

теплопроводностей материалов, конечно, невозможно. Однако в этой задаче важно, что коэффициент k , определяющий поток тепла из комнаты на улицу, одинаков для разных температурных режимов. Поэтому его можно найти, рассматривая один тепловой режим, а затем использовать в другом.

Итак, из формулы (1) имеем

$$k = \frac{P_1}{t_2 - t_1}. \quad (2)$$

Когда температура на улице стала равна t_3 , а в комнате включили дополнительный нагреватель мощности P , имеем для потока тепла

$$P_1 + P = k(t_2 - t_3), \quad (3)$$

или, используя (2):

$$P_1 + P = \frac{P_1(t_2 - t_3)}{t_2 - t_1}. \quad (4)$$

Решая уравнение (4), находим мощность батарей в комнате

$$P_1 = \frac{P(t_2 - t_1)}{t_1 - t_3}.$$

10.14. В отсутствие оболочки при установившейся температуре поверхности поток тепла от станции в окружающее пространство (количество энергии, излучаемое поверхностью станции по всем направлениям в единицу времени) равен мощности P всех источников тепла внутри станции (рис. 1). Поэтому

$$P = \sigma T^4 4\pi R^2, \quad (1)$$

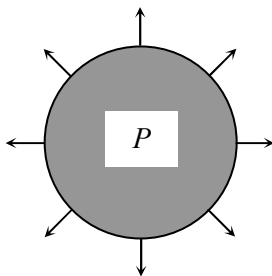


Рис. 1

где R – радиус станции; σ – коэффициент пропорциональности, о котором говорится в условии.

Если окружить станцию оболочкой, то оболочка нагреется до такой температуры, что ее внешняя поверхность будет излучать столько же теплоты, сколько ее производит работающее оборудо-

вание внутри станции. Кроме того, нагреется и поверхность станции. Это связано с тем, что внутренняя поверхность оболочки бу-

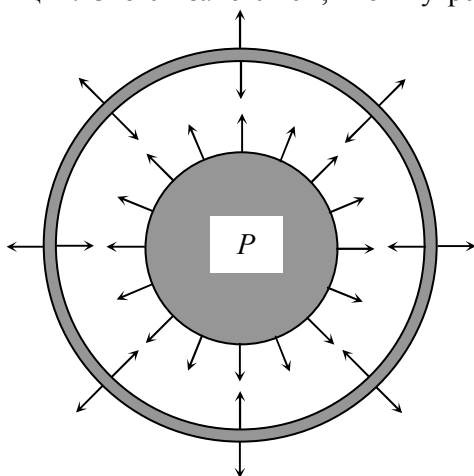


Рис. 2

дет излучать энергию не только наружу, но и внутрь, в направлении станции (рис. 2), и, следовательно, часть энергии, излученная станцией, вернется к ней назад. Составим новые балансовые соотношения, которые и будут определять все температуры.

Из условия, что поток тепла от внешней поверхности оболочки в окружающее пространство должен равняться мощности всех источников тепла внутри станции, находим

$$P = \sigma T_1^4 4\pi(2R)^2, \quad (2)$$

где T_1 – установившаяся температура оболочки; $2R$ – ее радиус. Приравнявая (1) и (2), находим

$$T_1 = \frac{T}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Так как оболочка по условию – тонкая, температура и площадь ее внутренней поверхности, соответственно, равны температуре и площади внешней. Следовательно, оболочка будет излучать внутрь такую же энергию, как и наружу. Поэтому в установившемся режиме поток излучения от поверхности станции вырастет вдвое по сравнению с (1) так, чтобы разность излученного и поглощенного станцией потоков равнялась мощности источников внутри станции:

$$\sigma T^4 4\pi R^2 = 2\sigma T_2^4 4\pi R^2, \quad (4)$$

где T_2 – новая температура поверхности станции. Отсюда находим температуру, которую приобретет поверхность станции, после того как ее окружают тонкой оболочкой:

$$T_2 = \sqrt[4]{2} T .$$

Если бы оболочка была не тонкая, задача стала бы существенно более сложной. В этом случае оболочка излучала бы наружу и внутрь разные количества энергии. Это происходило бы потому, что, во-первых, площади наружной и внутренней поверхностей оболочки были бы разные, а во-вторых, внутри оболочки установилось бы некоторое распределение температуры, и температуры внутренней и внешней поверхности оболочки также были бы различными.

В заключении решения этой задачи отметим, что использованный в ней закон для потока тепла, излучаемого единицей поверхности нагретого тела,

$$p = \sigma T^4 ,$$

где T – абсолютная температура тела; σ – постоянная, действительно имеет место в природе и называется законом Стефана – Больцмана.

10.15. Чтобы найти теплоемкость газа, мысленно сообщим ему некоторое малое количество теплоты δQ , найдем приращение температуры газа ΔT в рассматриваемом процессе, вычислим их отношение

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} . \quad (1)$$

Для нахождения величины ΔT используем первый закон термодинамики для рассматриваемого процесса

$$\delta Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \delta A , \quad (2)$$

где ν – количество вещества газа. Так как сообщенное газу количество теплоты δQ мало, давление газа в рассматриваемом процессе практически не изменилось. Поэтому работа газа определяется следующим приближенным соотношением

$$\delta A \approx p \Delta V , \quad (3)$$

где ΔV – приращение объема газа. Поэтому из (2) имеем

$$\delta Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + p \delta V. \quad (4)$$

Чтобы из формулы (4) найти приращение температуры ΔT , свяжем его с приращением объема с помощью закона Клапейрона – Менделеева. Для малых изменений давления, объема и температуры имеем

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = \nu R(T + \Delta T) \Rightarrow V \Delta p + p \Delta V = \nu R \Delta T \quad (5)$$

(слагаемое $\Delta p \Delta V$ во второй формуле отброшено; см. также решение задачи 5.25). Используя теперь определение производной, находим связь приращений давления и объема

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx f'(V) \Rightarrow \Delta p \approx f'(V) \Delta V. \quad (6)$$

Поэтому

$$\nu R \Delta T = (V f'(V) + f(V)) \Delta V \quad (7)$$

и из формулы (4) получаем

$$\delta Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \frac{\nu R \Delta T f(V)}{V f'(V) + f(V)}. \quad (8)$$

Отсюда согласно формуле (1) находим теплоемкость газа

$$C = \frac{3}{2} \nu R + \frac{\nu R f(V)}{V f'(V) + f(V)}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что теплоемкость газа, вообще говоря, зависит от объема и, следовательно, меняется в рассматриваемом процессе.

10.16. Используя формулу (9) из решения предыдущей задачи, получим

$$C = \frac{5}{6} \nu R.$$

10.17. Ясно, что данная конструкция сосуда определяет процесс, идущий с газом, или, другими словами, определяет зависимость его давления от объема $p = f(V)$. Поэтому теплоемкость газа в сосуде может быть определена. Чтобы найти теплоемкость газа, получим

указанную зависимость, а затем воспользуемся результатами задачи 10.15. Для рассматриваемого сосуда это сделать несложно. Так как длина пружины в недеформированном состоянии равна длине сосуда, то деформация пружины Δx связана с объемом газа соотношением $\Delta x = V/S$, где S – площадь сечения сосуда. А поскольку поршень находится в состоянии равновесия, то силы, действующие на него со стороны газа и пружины, равны друг другу по величине. Поэтому для рассматриваемого процесса зависимость давления газа от его объема такова:

$$p = kV,$$

где k – жесткость пружины. Используя теперь формулу (9) из решения задачи 10.15, находим теплоемкость газа в данном сосуда

$$C = 2\nu R.$$

10.18. Эта задача является обратной по отношению к нескольким задачам, рассмотренным ранее (10.15, 10.16, 10.17), в которых для определенного процесса нужно найти теплоемкость. Здесь надо по известной зависимости теплоемкости газа от его температуры восстановить характерные особенности процесса, и, в частности, установить, при какой температуре объем газа максимален.

Для ответа на поставленный вопрос можно получить формулу для теплоемкости газа, считая зависимость $V(T)$ известной, затем из этой формулы найти указанную зависимость, исследовать ее на экстремумы. Можно, однако, поступить и более простым способом, который не даст так много информации о процессе, как первый способ, но на вопрос о максимальном объеме ответить позволит. Идея этого способа заключается в том, чтобы найти теплоемкость газа в том состоянии процесса, когда его объем достигает экстремума (а это сделать легко, поскольку газ не совершает работы при сообщении ему малого количества теплоты), а затем сравнить данную в условии теплоемкость с этой величиной.

Итак, мысленно сообщим газу малое количество теплоты δQ в том состоянии, когда объем газа достигает экстремума (максимума или минимума). В этом процессе газ не будет совершать работу, поскольку его объем не будет изменяться. Действительно, приращение объема газа ΔV при малом приращении температуры ΔT

можно приближенно найти, как $\Delta V \approx V'(T)\Delta T$, где $V'(T)$ – производная объема, как функции температуры, но в точке максимума $V'(T) = 0$, откуда и получается сделанное выше утверждение. Поэтому первый закон термодинамики дает

$$\delta Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T, \quad (1)$$

где ΔT – изменение температуры газа. Поэтому теплоемкость газа в состоянии, когда объем достигает экстремума, есть

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{3}{2} \nu R. \quad (2)$$

С другой стороны, теплоемкость газа в рассматриваемом процессе следующим образом зависит от температуры:

$$C(T) = \nu R \frac{T_0^2}{T^2}, \quad (3)$$

поэтому объем газа будет достигать экстремума при такой температуре T_1 , когда теплоемкость (3) будет равна теплоемкости (2):

$$\nu R \frac{T_0^2}{T^2} = \frac{3}{2} \nu R. \quad (4)$$

Отсюда находим, что

$$T_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} T_0. \quad (5)$$

Докажем, что температура T_1 (5) отвечает максимальному объему газа. Из формулы для теплоемкости газа (3) видим, что при $T < T_1$ количество теплоты, полученной газом в процессе увеличения температуры на малую величину $\delta Q = C \Delta T$, больше изменения его внутренней энергии в этом процессе

$$\nu R \frac{T_0^2}{T^2} \Delta T > \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (6)$$

Поэтому из первого начала термодинамики следует, что работа газа в этом процессе положительна, т.е. газ расширяется. При $T > T_1$ ко-

личество теплоты, полученной газом в процессе увеличения температуры на малую величину $\delta Q = C\Delta T$, меньше изменения его внутренней энергии (6)

$$\nu R \frac{T_0^2}{T^2} \Delta T < \frac{3}{2} \nu R \Delta T,$$

следовательно, работа газа отрицательна, т.е. газ сжимается. Таким образом, в процессе нагревания до температуры T_1 газ расширяется, после такой температуры сжимается, это и означает, что температура T_1 отвечает максимальному объему газа.

10.19. Исследуем сначала вопрос о возможности устойчивого равновесия поршня в таком сосуде. Для этого нужно мысленно вывести поршень из положения равновесия и найти силы, которые будут при этом возникать. Если силы будут возвращать поршень в первоначальное положение – равновесие будет устойчивым, если силы будут продолжать отклонять поршень от равновесия, то равновесие будет неустойчивым, и оно не может быть реализовано.

При этом поскольку рассматриваемые в таком исследовании отклонения поршня от равновесия – маленькие, газ не будет успевать обмениваться с внешней средой теплом, и, следовательно, процесс, который будет происходить с газом при таких отклонениях поршня, можно считать адиабатическим.

В равновесии давление газа в сосуде равно гидростатическому давлению слоя жидкости:

$$p = \rho gh, \quad (1)$$

его объем

$$V = S(H - h), \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости; S – площадь сечения сосуда.

Пусть объем газа уменьшился на малую величину по сравнению с (2) (т.е. поршень сместится вниз). Тогда давление газа увеличится, а внешнее давление не изменится, поскольку не изменится количество жидкости на поршне. В результате возникает сила, действующая на поршень со стороны жидкости и газа, направленная вверх, которая и вернет поршень в положение равновесия.

Пусть теперь объем газа увеличивается на малую величину ΔV по сравнению с (2). Тогда уменьшаются давление газа в сосуде и

сила, действующая на поршень со стороны жидкости, поскольку часть жидкости вытекает из сосуда и уменьшается ее количество. Поэтому здесь возможны варианты: если сила, действующая на поршень со стороны жидкости, будет уменьшаться слабее силы, действующей со стороны газа в сосуде, суммарная сила, действующая на поршень, будет направлена вниз и вернет поршень в положение равновесия. В обратном случае положение поршня будет неустойчиво. Сравним эти силы в нашем случае.

При увеличении объема газа на величину ΔV поршень поднимется на $\Delta h = \Delta V/S$, и гидростатическое давление уменьшится на $\rho g \Delta V/S$. Уменьшение давления газа Δp найдем из уравнения адиабаты

$$p = \frac{\text{const}}{V^{5/3}}. \quad (3)$$

Поскольку рассматриваемое изменение объема газа мало, справедливо приближенное равенство

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx p'(V), \quad (4)$$

где $p'(V)$ – производная зависимости давления газа от его объема (3). Дифференцируя зависимость давления от объема, находим

$$\Delta p = -\frac{5}{3} \frac{\text{const}}{V^{8/3}} \Delta V = -\frac{5}{3} \frac{p}{V} \Delta V = -\frac{5}{3} \frac{\rho g h}{S(H-h)} \Delta V, \quad (5)$$

где использованы равновесные значения давления и объема жидкости (1), (2). (Знак « \leftarrow » в (5) означает, что давление газа уменьшается; величина этого уменьшения равна модулю выражения (5).)

Таким образом, равновесие поршня будет устойчивым, если

$$\frac{\rho g \Delta V}{S} \leq \frac{5}{3} \frac{\rho g h \Delta V}{S(H-h)}. \quad (6)$$

Решая неравенство (6) относительно высоты h слоя жидкости, находим, что равновесие будет устойчивым, если

$$h \geq \frac{3}{8} H. \quad (7)$$

Поскольку данное в условии значение h ($h = 11H/24$) больше критического значения $3H/8$ (7), равновесие поршня в рассматриваемой ситуации будет устойчивым.

Определим теперь теплоемкость газа. Для этого найдем зависимость давления газа от объема, а затем воспользуемся формулой (9) из решения задачи 9.15. Чтобы построить эту зависимость, заметим, что давление газа в любой момент равно гидростатическому давлению столба жидкости над поршнем. Поэтому если высота столба жидкости равна x , то давление газа есть

$$p = \rho g x = \rho g (H - l) = \rho h H - \frac{\rho g}{S} V, \quad (8)$$

где l – высота части сосуда, занятой воздухом; V – его объем, $V = Sl$. Формула (8) и дает искомую зависимость давления газа от его объема. Используя теперь формулу (9) из решения задачи 10.15, находим теплоемкость газа ($\nu = 1$):

$$C = \frac{3}{2} R + \frac{R \left(H - \frac{V}{S} \right)}{H - \frac{2V}{S}}. \quad (9)$$

Учитывая, что $V = S(H - h)$, получим из (9):

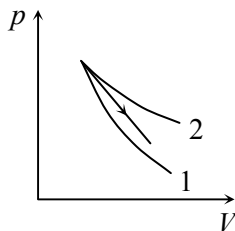
$$C = \frac{(8h - 3H)R}{2h - H}. \quad (10)$$

Подставляя в формулу (1) значение $h = 11H/24$, получаем

$$C = -\frac{8}{3} R, \quad (11)$$

т.е. теплоемкость газа в сосуде при $h = 11H/24$ отрицательна, это означает, что при сообщении газу тепла его температура уменьшается.

Отрицательность теплоемкости газа связана с тем, что график рассматриваемого процесса при $h = 11H/24$ (прямая на рисунке) лежит между адиабатой (отмечена цифрой 1 на рисунке) и изотермой (цифра 2).



Действительно, как показал проведенный выше анализ, при $h = 3H/8$ наклон зависимости $p(V)$ для рассматриваемого процесса совпадает с наклоном адиабаты. Можно таким же способом доказать (предлагаем читателю сделать это самостоятельно), что наклон нашей зависимости будет совпадать с наклоном изотермы при $h = H/2$. Данное в условии значение высоты h ($h = 11H/24$) удовлетворяет неравенству

$$\frac{3}{8}H < h < \frac{1}{2}H, \quad (12)$$

откуда и следует сделанное выше утверждение. Отметим, что формула (10) дает два рассмотренных в задаче 5.24 частных случая. При $h = 3H/8$ график процесса «пойдет» по адиабате, и теплоемкость газа, как это следует из формулы (10), равна нулю. При $h = H/2$ процесс «пойдет» по изотерме, и теплоемкость газа равна бесконечности.

10.20. Исходим из определения КПД циклического процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}}, \quad (1)$$

где A – работа газа за цикл; $Q_{\text{н}}$ – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла. Работа газа за цикл равна площади внутренней части графика, описывающего цикл в координатах $p - V$, и легко находится из данных, приведенных на рисунке в условии:

$$A = \frac{p_0 V_0}{2}. \quad (2)$$

Очевидно, что газ получает тепло от нагревателя в течение процесса 1 – 2, и отдает тепло холодильнику в течение процесса 3 – 1. Поскольку процесс 1 – 2 является изохорическим, количество теплоты, полученное газом в этом процессе, равно изменению внутренней энергии газа, которое может быть найдено с помощью закона Клапейрона – Менделеева из данных, приведенных на графике в условии задачи:

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2} R \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2} (2p_0 V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0. \quad (3)$$

Исследуем теперь процесс 2 – 3. Докажем, что в течение части этого процесса газ получает (и, следовательно, контактирует с нагревателем), а в течение части – отдает тепло (и, следовательно, контактирует с холодильником). Для этого возьмем некоторое промежуточное состояние газа с объемом V_* в этом процессе, затем рассмотрим малое увеличение объема газа ΔV (элементарный процесс), вычислим количество теплоты δQ , полученное газом в этом элементарном процессе, исследуем эту величину в зависимости от V_* (аналогичные вычисления были сделаны в решении задачи 10.6). Количество теплоты, полученное газом в элементарном процессе, можно найти по первому закону термодинамики (при этом поскольку давление газа меняется в течение элементарного процесса незначительно, работа газа в этом процессе δA может быть вычислена как $\delta A \approx p_* \Delta V$):

$$\delta Q = \Delta U + \delta A = \frac{3}{2} R \Delta T + p_* \Delta V, \quad (4)$$

где ΔU – приращение внутренней энергии газа в элементарном процессе; p_* – давление газа в рассматриваемом состоянии. Используя далее закон Клапейрона – Менделеева и отбрасывая слагаемое, содержащее произведение малых величин Δp (приращение давления в течение элементарного процесса) и ΔV , получим из (3)

$$\begin{aligned} \delta Q &= \frac{3}{2} ((p_* + \Delta p)(V_* + \Delta V) - p_* V_*) + p_* \Delta V = \\ &= \frac{3}{2} (V_* \Delta p + p_* \Delta V) + p_* \Delta V. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку на участке $2 \rightarrow 3$ циклического процесса давление следующим образом зависит от объема:

$$p(V) = -\frac{p_0}{V_0} V + 3p_0 \quad (6)$$

(эту формулу можно получить из графика), то давление p_* в рассматриваемом состоянии и его изменение в элементарном процессе Δp определяются соотношениями

$$p_* = 3p_0 - \frac{p_0 V_*}{V_0}, \quad \Delta p = -\frac{p_0 \Delta V}{V_0}. \quad (7)$$

Подставляя p_* и Δp (7) в формулу (5), найдем количество теплоты, полученное газом в элементарном процессе

$$\delta Q = \frac{p_0 \Delta V}{2} \left(15 - \frac{8V_*}{V_0} \right). \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что газ получает тепло ($\delta Q > 0$), если $V_* < 15V_0/8$, и отдает ($\delta Q < 0$), если $V_* > 15V_0/8$, т.е. в течение процесса 2–3 при расширении от начального объема V_0 до объема $V_1 = 15V_0/8$ газ получает тепло от нагревателя, а при расширении от объема V_1 до конечного значения $2V_0$ – отдает тепло холодильнику.

Найдем полное количество теплоты Q , полученное газом при расширении от объема V_0 до объема V_1 . По первому закону термодинамики и закону Клапейрона – Менделеева имеем

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{2}(p_1 V_1 - 2p_0 V_0) + A = \\ &= \frac{3}{2}(p_1 V_1 - 2p_0 V_0) + \frac{(p_1 + p_0)(V_1 - V_0)}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $p_1 = 9p_0/8$ – давление газа в состоянии, когда его объем равен V_1 , а работа газа $A = (p_1 + p_0)(V_1 - V_0)/2$ найдена как площадь под графиком зависимости давления от объема в рассматриваемом процессе. Подставляя в формулу (9) p_1 и V_1 , найдем количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение процесса 2–3,

$$Q = \frac{49p_0 V_0}{32}. \quad (10)$$

Полное количество теплоты, полученное газом в течение цикла, находится как сумма (3) и (5)

$$Q_{\text{н}} = \frac{97p_0 V_0}{32}. \quad (11)$$

Подставляя теперь количество теплоты, полученное газом за цикл (11), и работу, совершенную газом в течение цикла (2), в определение КПД (1), получим окончательно для КПД рассматриваемого циклического процесса

$$\eta = \frac{16}{97}. \quad (12)$$

10.21. Пусть в процессе 1 – 2 газ получил количество теплоты Q_{1-2} , в процессе 2 – 3 отдал Q_{2-3} . Тогда поскольку процесс 3 – 1 – адиабатический,

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_{2-3}}{Q_{1-2}}. \quad (1)$$

Аналогично

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{3-4}}{Q_{4-1}}, \quad (2)$$

где Q_{4-1} и Q_{3-4} – количества теплоты, которые газ получил в процессе 4 – 1 и отдал в процессе 3 – 4 соответственно.

Поскольку процессы 2 – 3 и 4 – 1 происходят между одними и теми же изотермами, и в этих процессах газ не совершает работу,

$$Q_{4-1} = Q_{2-3}. \quad (3)$$

Обозначим это количество теплоты как q и выразим через него с помощью формул (1) и (2) количества теплоты Q_{1-2} и Q_{3-4} . Имеем

$$Q_{1-2} = \frac{q}{1 - \eta_1}, \quad Q_{3-4} = q(1 - \eta_2). \quad (4)$$

В процессе 1 – 2 – 3 – 4 – 1 газ получает тепло на участках 4 – 1 и 1 – 2 и отдает на участках 2 – 3 и 3 – 4. Поэтому КПД η процесса 1 – 2 – 3 – 4 – 1 определяется соотношением

$$\eta = \frac{Q_{4-1} + Q_{1-2} - Q_{2-3} - Q_{3-4}}{Q_{4-1} + Q_{1-2}} = \frac{Q_{1-2} - Q_{3-4}}{q + Q_{1-2}}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) количества теплоты Q_{1-2} и Q_{3-4} из (4), получим после сокращения величины q

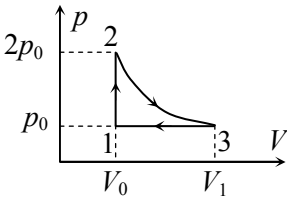
$$\eta = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2}{2 - \eta_1}.$$

10.22. $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2$.

10.23. Исходим из определения КПД теплового двигателя (см. гл. 9)

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}, \quad (1)$$

где Q_H – количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла; Q_X – количество теплоты, отданное газом холодильнику в течение цикла.



Поскольку процесс 2 – 3 – адиабатический, и, следовательно, проходит без теплообмена, газ контактирует с нагревателем и холодильником только в процессах 1 – 2 и 3 – 1. Очевидно, контакт с нагревателем происходит в процессе 1 – 2, с холодильником – в 3 – 1. Поэтому

$$Q_H = Q_{1-2}, \quad Q_X = |Q_{3-1}|, \quad (2)$$

где Q_{1-2} и Q_{3-1} – количества теплоты, полученные газом в процессах 1 – 2 и 3 – 1.

Применяем к процессу 1 – 2 первый закон термодинамики. Имеем

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \quad (3)$$

Так как процесс 1 – 2 – изохорический, работа газа в этом процессе $A_{1-2} = 0$. Поэтому

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2} p_0 V_0, \quad (4)$$

где p_0 и V_0 – давление и объем газа в состоянии 1. Чтобы найти количество теплоты, полученное газом в процессе 3 – 1, вычислим объем газа V_3 в состоянии 3. Поскольку состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, то

$$2p_0V_0^{5/3} = p_0V_3^{5/3}. \quad (5)$$

Из уравнения (5)

$$V_3 = 2^{3/5}V_0. \quad (6)$$

Количество теплоты, полученное газом в процессе 3 – 1, можно найти, применяя к этому процессу первый закон термодинамики:

$$\begin{aligned} Q_{3-1} &= \Delta U_{3-1} + A_{3-1} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{3-1} + p_0 \Delta V_{3-1} = \frac{5}{2} p_0 \Delta V_{3-1} = \\ &= \frac{5}{2} p_0 V_0 (1 - 2^{3/5}) \end{aligned} \quad (7)$$

(здесь использован также закон Клапейрона – Менделеева). Таким образом, газ отдал холодильнику в процессе 3 – 1 количество теплоты

$$Q_x = |Q_{3-1}| = \frac{5}{2} p_0 V_0 (2^{3/5} - 1). \quad (8)$$

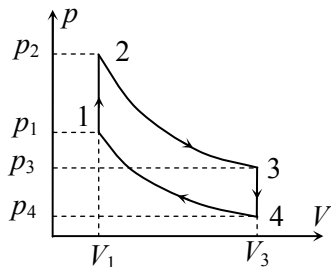
Подставляя количества теплоты, полученное газом от нагревателя и отданное холодильнику, в формулу (1), получим

$$\eta = \frac{8 - 5 \cdot 2^{3/5}}{3} \approx 0,14.$$

10.24. Газ получает тепло от нагревателя на изохоре 1 – 2, отдает холодильнику – на изохоре 3 – 4. Поэтому

$$\eta = \frac{Q_{1-2} - Q_{3-4}}{Q_{1-2}}, \quad (1)$$

где Q_{1-2} – количество теплоты, полученное газом в процессе 1 – 2; Q_{3-4} – тепло, отданное газом в процессе 3 – 4. Поскольку процессы 1 – 2 и 3 – 4 – изохорические, газ не совершает в них работу. Поэтому



$$Q_{1-2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{1-2} = \frac{3}{2} V_1 (p_2 - p_1), \quad (2)$$

где $\Delta T_{1-2} = T_2 - T_1$; T_1, p_1 и T_2, p_2 – температуры и давления газа в состояниях 1 и 2. Аналогично находится количество теплоты, которое газ отдает в изохорическом процессе 3 – 4

$$Q_{3-4} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{4-3} = \frac{3}{2} V_3 (p_3 - p_4), \quad (3)$$

где $\Delta T_{4-3} = T_3 - T_4$, T_3, p_3 и T_4, p_4 – температуры и давления газа в состояниях 3 и 4.

Используем теперь уравнения адиабат 2 – 3 и 4 – 1. Поскольку состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, то

$$p_2 = \frac{\text{const}}{V_1^{5/3}}, \quad p_3 = \frac{\text{const}}{V_3^{5/3}}, \quad (4)$$

где const – одна и та же постоянная, которая входит в уравнение адиабаты 2 – 3: $pV^{5/3} = \text{const}$. Аналогично для давлений в состояниях 1 и 4 имеем

$$p_1 = \frac{\text{const}'}{V_1^{5/3}}, \quad p_4 = \frac{\text{const}'}{V_3^{5/3}}, \quad (5)$$

где const – одна и та же постоянная, которая входит в уравнение адиабаты 4 – 1: $pV^{5/3} = \text{const}'$ (но эта постоянная отличается от постоянной в уравнении адиабаты 2 – 3). Подставляя давления (4), (5) в формулы для количеств теплоты (2) и (3), полученных газом от нагревателя и отданных холодильнику, найдем

$$Q_{1-2} = \frac{3}{2} V_1^{2/3} (\text{const} - \text{const}'),$$

$$Q_{3-4} = \frac{3}{2} V_3^{2/3} (\text{const} - \text{const}'). \quad (6)$$

Теперь из формул (1) и (6) находим КПД рассматриваемого процесса (при этом разность $(\text{const} - \text{const}')$, входящая в формулы для количеств теплоты, сокращается)

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_3} \right)^{2/3}. \quad (7)$$

Рассмотренный циклический процесс реализуется в двигателях внутреннего сгорания и называется циклом Отто по имени немецкого инженера Н.А. Отто, впервые осуществившего этот процесс в 1876 г. (об этом процессе см. также теоретическое введение к гл. 9). Как видно из формулы (7), КПД цикла Отто тем выше, чем больше *степень сжатия* рабочего тела (воздуха с парами бензина) на адиабате 4 – 1 перед сжиганием горючего на изохоре 1 – 2. В современных двигателях внутреннего сгорания степень сжатия рабочего тела обычно лежит в интервале $V_3/V_1 \sim 8 \div 12$, что приводит к следующему интервалу значений КПД цикла Отто (для воздуха, который представляет собой двухатомный газ, показатель степени в формуле (7) отличается от показателя степени для одноатомного газа $2/3$ и равен $2/5 = 0,4$): $\eta \sim 0,56 \div 0,63$. Дальнейшее увеличение степени сжатия рабочего тела в двигателях внутреннего сгорания невозможно из-за самовоспламенения горючей смеси в цилиндре двигателя при сжатии.

Формулу для КПД двигателя внутреннего сгорания можно выразить и через другие величины. Из уравнения адиабаты $pV^{\gamma/3} = \text{const}$ и уравнения Клапейрона – Менделеева следует, что в адиабатическом процессе объем и температура одноатомного идеального газа связаны соотношением

$$TV^{2/3} = \text{const}_1, \quad (8)$$

где const_1 – постоянная*. Из уравнения (8) следует, что, во-первых, отношения максимальной и минимальной температур на адиабатах 2 – 3 и 4 – 1 одинаковы:

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4}, \quad (9)$$

* Которая, конечно, отличается от постоянной, входящей в уравнение $pV^{\gamma/3} = \text{const}$ (в том числе и по размерности).

а во-вторых, КПД цикла Отто (7) можно выразить через отношения максимальной и минимальной температур на адиабатах, т.е.

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_1 - T_4}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}. \quad (10)$$

Из (10) видим, что КПД цикла Отто определяется той же формулой, что и КПД цикла Карно, которая, однако, имеет здесь другое содержание. В формулу Карно входят температуры нагревателя и холодильника; температуры, входящие в формулу (10), не имеют смысла температур нагревателя и холодильника для цикла Отто, а представляют собой максимальную и минимальную температуры на адиабатах.

10.25.

$$\eta = 1 - \frac{1}{n^{2/5}}.$$

10.26. Поскольку возможны различные равновесные состояния системы «вода – пар – поршень – газ» (вода испарилась полностью, вода испарилась частично, вода вообще не испарилась), в этой задаче необходим анализ равновесного состояния системы.

Случай а. Пусть в одну часть сосуда вводят $m_1 = 74$ г воды, во вторую – $m_2 = 10$ г водорода.

Если бы насыщенный пар при температуре $T = 373$ К занимал весь сосуд, масса пара m_{\max} равнялась бы

$$m_{\max} = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{нп}} V}{RT} = 58 \text{ г}, \quad (1)$$

где $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па – давление насыщенных паров воды при температуре $T = 373$ К. Поскольку масса воды в сосуде в случае *а* равна $m_1 = 74$ г, то вся вода испариться в этом случае заведомо не может. Поэтому в той части сосуда, куда поместили воду, в случае *а* могут находиться либо вода и пар, либо только вода, причем первый случай реализуется, если внешнее давление равно давлению насыщенных паров воды, второй – если внешнее давление больше давления насыщенных паров.

Внешнее давление на воду и пар найдем, применяя закон Клайпейрона – Менделеева для водорода в другой части сосуда. Из это-

го закона следует, что водород будет оказывать давление, большее, чем 10^5 Па. Действительно, если бы даже водород занимал весь сосуд, его давление равнялось бы

$$p = \frac{m_2 RT}{\mu_{\text{H}_2} V} = 1,55 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad (2)$$

т.е. было бы больше того давления, которое имеет пар в другой части сосуда. Поэтому пар в другой части сосуда полностью сконденсируется, и вода будет целиком находиться в жидком состоянии. Пренебрегая объемом воды по сравнению с объемом сосуда, заключаем, что в случае *a* весь объем сосуда занят водородом под давлением p (2), в другой части сосуда будет находиться вода.

Случай б. Реализуется другой вариант равновесного состояния системы, а именно – в той части сосуда, куда помещалась вода, будет находиться смесь воды в жидком состоянии и насыщенного водяного пара. При этом давление в сосуде будет равно $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па, т.е. давлению насыщенного пара при температуре $T = 373$ К. Это обусловлено тем обстоятельством, что давление $m_2 = 74$ г углекислого газа в объеме всего сосуда $V = 100$ л при температуре $T = 373$ К равно

$$p = \frac{m_2 RT}{\mu_{\text{CO}_2} V} = 5,2 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad (3)$$

что меньше давления насыщенного пара при этой температуре. Поэтому углекислый газ займет такой объем V_1 , что его давление будет равно давлению насыщенного пара $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па. Этот объем можно найти из закона Клапейрона – Менделеева для углекислого газа:

$$V_1 = \frac{m_2 RT}{\mu_{\text{CO}_2} p_{\text{нп}}} = 52 \text{ л}. \quad (4)$$

Насыщенный водяной пар с водой будут занимать объем $V_2 = V - V_1 = 48$ л. Масса насыщенного водяного пара m_3 , т.е. количество испарившейся воды, составит

$$m_3 = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{нп}} V}{RT} = 28 \text{ г}, \quad (5)$$

а $m_1 - m_3 = 46$ г воды не испарится и будет находиться в жидкой фазе (в расчетах пренебрегали отличием объема, занимаемого паром, от объема той части сосуда, где находится вода и пар, т.е. пренебрегали объемом неиспарившейся воды по сравнению с объемом сосуда).

Случай с. Реализуется третий вариант возможного равновесного состояния системы: вода испарится полностью и в обеих частях сосуда будет содержаться только газ, причем в той части сосуда, в которую наливалась вода, будет находиться ненасыщенный водяной пар. Следовательно, давление p в сосуде будет меньше давления насыщенных паров воды при температуре $T = 373$ К, т.е. меньше чем $p_{\text{нп}} = 10^5$ Па. Проверка этой гипотезы и составляет суть решения. Складывая по частям равенства, выражающие уравнения состояния пара в одной части сосуда и газа в другой

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} RT \quad \text{и} \quad pV_2 = \frac{m_2}{\mu_{\text{N}_2}} RT \quad (6)$$

(где V_1 и V_2 – объемы частей сосуда, в которых содержится водяной пар и азот соответственно), находим

$$p = \left(\frac{m_1}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} + \frac{m_2}{\mu_{\text{N}_2}} \right) \frac{RT}{V} = 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па.} \quad (7)$$

Поскольку давление (7) меньше давления насыщенного пара воды при температуре $T = 373$ К, то сделанные выше утверждения относительно равновесного состояния системы в случае с справедливы.

10.27. Процесс кипения жидкости заключается в следующем. Из-за хаотического теплового движения молекул в жидкостях все время образуются микроскопические пузырьки, заполненные паром этой жидкости. Поскольку эти пузырьки очень маленькие, то за очень короткое время пар в них становится насыщенным, а давление p в пузырьках становится равным давлению насыщенного пара

$$p = p_{\text{нп}}. \quad (1)$$

Дальнейшее поведение пузырька с насыщенным паром зависит от соотношения внешнего давления, которое для небольших сосу-

дов практически равно атмосферному $p_{\text{атм}}$, и давления пара в пузырьке, которое согласно (1) равно давлению насыщенного пара. Если атмосферное давление больше давления насыщенного пара, пузырек будет сжиматься, а молекулы пара переходить в жидкость. Если давление насыщенного пара будет больше атмосферного давления, пузырек будет расти в размерах, при этом будет идти процесс испарения жидкости внутрь этого пузырька, что будет поддерживать состояние насыщенности пара в нем. Другими словами, в этом случае в жидкости будут образовываться пузырьки пара (уже не микроскопические), т.е. жидкость будет кипеть. Таким образом, условием кипения является равенство

$$p = p_{\text{атм}}. \quad (2)$$

Поскольку внешнее давление не зависит от температуры, а давление насыщенного пара с ростом температуры растет, то при малых температурах давление насыщенного пара будет меньше атмосферного, а при увеличении температуры давление насыщенного пара сравняется с атмосферным и начнется кипение.

Исследуем теперь кипение неоднородной жидкости, рассматриваемой в данной задаче. Очевидно, что наиболее благоприятные для начала процесса кипения условия складываются на границах раздела слоев жидкости и вот почему. В пузырьках, которые образуются внутри каждой жидкости, будет находиться насыщенный пар только этой жидкости. Если же пузырек образуется на границе раздела между жидкостями (например, i -й и j -й), в него будет происходить испарение обеих жидкостей, и в соответствии с законом Дальтона давление внутри него будет складываться из парциальных давлений насыщенного пара каждой из жидкостей:

$$p = p_{\text{нп}}(i) + p_{\text{нп}}(j). \quad (3)$$

Поэтому процесс кипения начнется на одной из двух границ раздела жидкостей: 1 – 2 или 2 – 3, при такой температуре, когда суммарное давление насыщенных паров двух жидкостей станет равно атмосферному:

$$p_{\text{нп}}(i) + p_{\text{нп}}(j) = p_{\text{атм}}. \quad (4)$$

Используя данные в условии зависимости давления насыщенного пара каждой жидкости от температуры, из формулы (4) получаем уравнение для температуры кипения на границе $i-j$:

$$\alpha(i)(T_{\text{кип}}(i, j) - T_{\text{пл}}(i))^2 + \alpha(j)(T_{\text{кип}}(i, j) - T_{\text{пл}}(j))^2 = p_{\text{атм}}, \quad (5)$$

где $T_{\text{кип}}(i, j)$ – температура, при которой на границе i -й и j -й жидкостей будут образовываться пузырьки пара.

Чтобы из этого уравнения найти температуру кипения на границах, вычислим для каждой жидкости значение коэффициента α . Из (1), (2) находим

$$\alpha(k) = \frac{p_{\text{атм}}}{(T_{\text{кип}}(k) - T_{\text{пл}}(k))^2}. \quad (6)$$

Подставляя коэффициенты $\alpha(i)$ и $\alpha(j)$ (6) в формулу (5), получим квадратное уравнение относительно температуры кипения $T_{\text{кип}}(i, j)$:

$$\frac{(T_{\text{кип}}(i, j) - T_{\text{пл}}(i))^2}{(T_{\text{кип}}(i) - T_{\text{пл}}(i))^2} + \frac{(T_{\text{кип}}(i, j) - T_{\text{пл}}(j))^2}{(T_{\text{кип}}(j) - T_{\text{пл}}(j))^2} = 1. \quad (7)$$

Дальнейший расчет проще всего сделать «в числах». Подставляя температуры плавления и кипения 1-й и 2-й жидкостей в уравнение (7), получим уравнение относительно $T_{\text{кип}}(1, 2)$

$$\frac{(T_{\text{кип}}(1, 2) - 300)^2}{100^2} + \frac{(T_{\text{кип}}(1, 2) - 300)^2}{80^2} = 1 \quad (8)$$

(здесь числа 300, 100 и 80 имеют размерность «кельвины»). Решая уравнение (8), найдем температуру кипения на границе первой и второй жидкостей

$$T_{\text{кип}}(1, 2) = 362 \text{ К.}$$

Аналогично получим уравнение на границе второй и третьей жидкостей

$$\frac{(T_{\text{кип}}(2, 3) - 300)^2}{80^2} + \frac{(T_{\text{кип}}(2, 3) - 250)^2}{100^2} = 1 \quad (9)$$

(здесь числа 300, 250, 100 и 80 имеют размерность «кельвины»). Решая уравнение (9), найдем температуру кипения на границе второй и третьей жидкостей

$$T_{\text{кип}}(2, 3) = 338 \text{ К} \quad (10)$$

(вторые корни квадратных уравнений дают температуры $T_{\text{кип}}(1, 2) = 238 \text{ К}$ и $T_{\text{кип}}(2, 3) = 223 \text{ К}$, что ниже температур плавления каждой из жидкостей). Из формул (9), (10) следует, что кипение жидкости в сосуде начнется на границе раздела слоев 2 и 3 при температуре $T = 338 \text{ К}$.

*Александр Николаевич Долгов
Сергей Евгеньевич Муравьев
Борис Васильевич Соболев*

**ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД
ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ**

Молекулярная физика и термодинамика

Под редакцией С.Е. Муравьева

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет изготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 05.05.2008. Формат 60х84 1/16
Уч.-изд.л. 15,5. Печ.л. 15,5. Тираж 2000 экз. Изд. № 007-1

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК