1. Matematikai alapok ismétlése

Írta: Verasztó Zsolt

Lektorálta: Veréb Szabolcs

A következő pár oldalon áttekintjük a tananyag további részeihez szükséges matematikai alapokat. Nincs szükség arra, hogy minden apró részletet megjegyezz. Ha valamelyik fogalommal még nem találkoztál, akkor szánj időt a megértésére.

NAGYSÁGRENDEK KEZELÉSE

Valós számok segítségével leírt fizikai mennyiségeink gyakran nagyon nagy, vagy nagyon kis nagyságrendbe esnek. A probléma szemléltetéséhez tekintsük az alábbi példát!

A proton töltése: $q_e = 0{,}0000000000000000001602$ [C]

A paksi atomerőmű teljesítménye: $P_{Paks} = 2000000000$ [W]

Látható, hogy ilyen számokkal dolgozni rendkívül kényelmetlen, kimondani őket nehézkes, írásban könnyen hibát véthetünk. Ebben a fejezetben két megoldást ismertetünk, az egyik a normálalak, a másik a prefixumok használata. Mindkettő alapvetően a 10 hatványainak egy egyszerűsített jelölésén alapul.

NORMÁLALAK

A normálalak alkalmazásánál egy *a* számot

$$a = \alpha \cdot 10^{\beta}$$

alakban írunk fel. Ez a felírás azonban még nem egyértelmű, végtelen sok α és β szám kielégítheti az egyenlőséget, ezért további megkötésekre van szükségünk, amelyek tudományterületenként eltérhetnek. Természettudományokban elterjedt, hogy α-t a következőképpen választjuk meg:

$$1 \leq \alpha < 10 \qquad \text{vagy} \qquad -10 < \alpha \leq -1$$

A műszaki gyakorlatban szokásos mérnöki-, vagy műszaki normálalak esetén a β kitevőt választjuk hárommal osztható számnak.

Lássuk hát a fenti példáinkat az így bevezetett normálalakok segítségével.

- A proton töltése normálalakban: $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ [C]
- A proton töltése műszaki normálalakban: $q_e = 0{,}1602 \cdot 10^{-18}$ [C]
- A paksi atomerőmű teljesítménye mindkét normálalakban: $P_{Paks} = 2 \cdot 10^{9}$ [W]

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

Kitekintés

Az így definiált normálalakkal a nulla szám jelölése még nem definiált, hiszen nem írható fel egyik fenti alakban sem. A nulla ábrázolása csak '0' alakban lehetséges, normálalakja nem értelmezett.

PREFIXUMOK

A mértékegységgel rendelkező mennyiségek esetén lehetőségünk van még a 10 hatványainak megfelelő előtag, azaz prefixum használatára. Az SI mértékegységrendszer ezeket 10^{-24}és 10^{24} közötti hárommal osztható kitevőjű tízhatványokra rögzíti. Ezek a következők:

SI prefixumok		
Név	Jel	Számérték
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
milli	m	10^{-3}
mikro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

A gyakorlatban ritkán használjuk a 10^{-15}-nél kisebb és 10^{15}-nél nagyobb számok prefixumos jelölését. Ilyen esetben a normálalak a szokásos. Természetesen ahogy a normálalak, így a prefixumos jelölésmód sem kötött, ahogy azt az előző példákon be is mutatjuk:

- A proton töltése normálalakban: $q_e = 160{,}2\ [\mathrm{zC}] = \ 0{,}1602\ [\mathrm{aC}]$
- A paksi atomerőmű teljesítménye mindkét normálalakban: $P_{Paks} = 2\ [\mathrm{GW}] = 2000\ [\mathrm{MW}]$

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

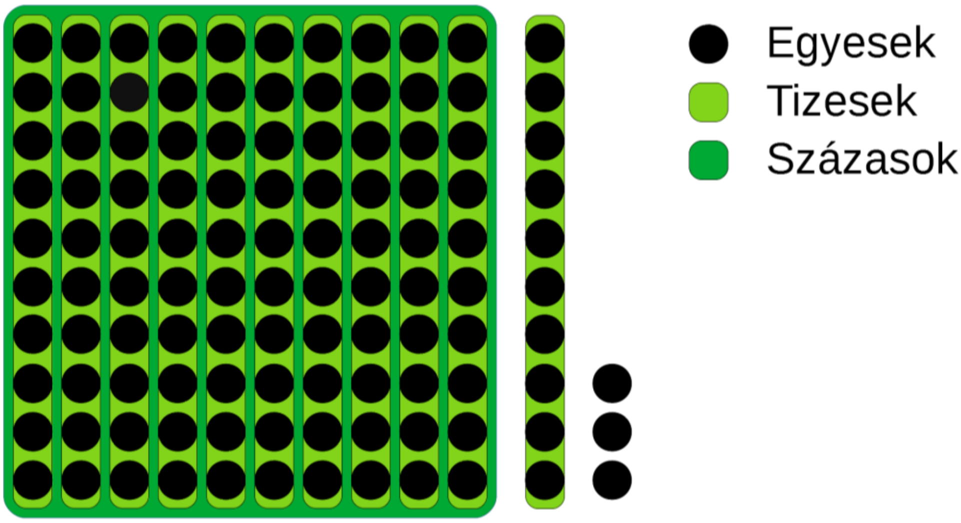
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

Egyes területeken annyira elterjedt egy-egy mértékegység prefixumával megszokott alakja, hogy akkor sem választanak más prefixumot, ha nagyon nagy, vagy nagyon kis számokkal dolgoznak. Jó példa erre a tömeg, melynek SI mértékegysége a [kg]. Így például:

- A proton tömege: $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ [kg]
- A Föld tömege: $m_{Föld} = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ [kg]

SZÁMRENDSZEREK

Mind a tudományos életben, mind a mindennapokban a számokat többnyire számjegyek segítségével ábrázoljuk. A számjegyes ábrázolás alapgondolatának megértéséhez vegyünk *n* darab pontot (az ábra az *n*=113 esetet mutatja).



1. Ábra - Számjegyes ábrázolás

Az ábrán látható módon rendezzük a pontokat tízes csoportokba. A tízes csoportokat rendezhetjük ismét tízes csoportokba, ezzel százas csoportokat kapva, ami a tíz második hatványának felel meg.

$$n = 113 = 11 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = (10 + 1) \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Így juthatunk el a tíz egyre nagyobb hatványait tartalmazó csoportokig. Könnyű belegondolni, hogy ha újabb tízes csoportokat vezetünk be, tetszőlegesen sok pontot tudunk egyértelműen csoportokba rendezni. A számokat úgy írjuk le, hogy az egyes ilyen csoportok számosságait egymás után írjuk. Esetünkben ez 1, 1, 3, azonban minden további nélkül lehetne akár 3, 1, 1 is. Annak érdekében, hogy egyértelmű legyen, hogy melyik szám melyik csoportra vonatkozik, bevezették a helyiérték fogalmát. Világszerte az az elfogadott írásmód, hogy a legnagyobb helyiértéket írjuk a szám legelejére. A számjegyek száma adja meg, hogy pontosan milyen helyiértékek is szerepelnek az adott számban. A példában a háromjegyű számunk esetén három helyiértékünk van: százasok (10^2), tízesek (10^1) és egyesek (10^0). Tehát a helyiértékek nem mások, mint a számrendszer alapszámának egyes hatványai. Ez a gyakorlatban senkinek sem jelent különösebb fejtörést, hiszen kisiskolás korunk óta úgy nevelnek minket, hogy helyiértékes formában írjuk a számokat.

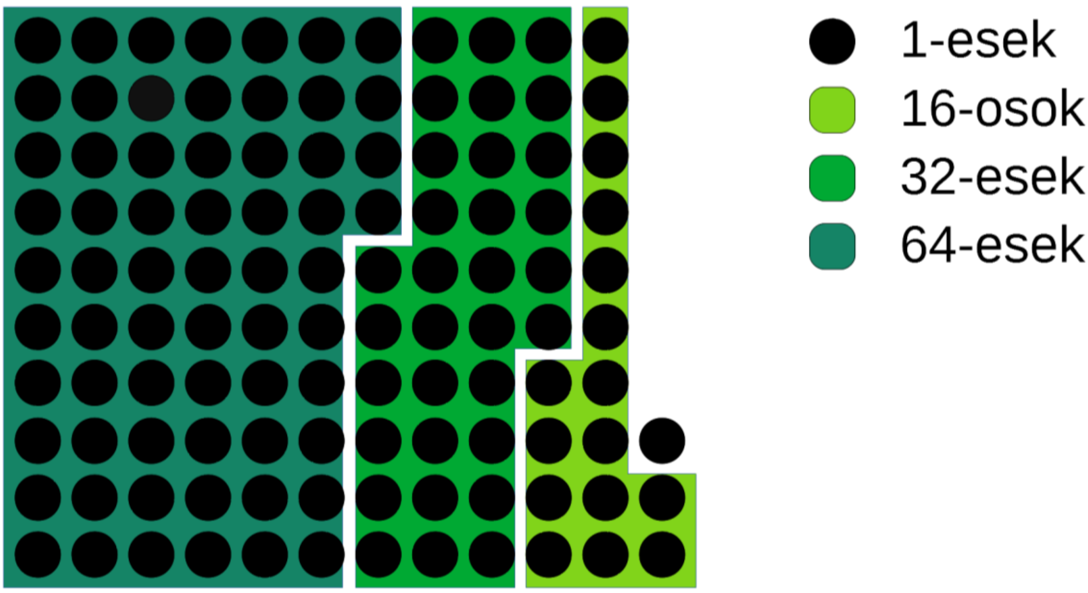
Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

Ezzel eljutottunk a mindennapokban leggyakrabban használt tízes (idegen szóval decimális) számrendszerhez. A pontok számának azonosításához összesen 10 darab szimbólumra lesz szükségünk, hiszen ha már tíz darab van tíz egy adott hatványából, azt úgy tekintjük, hogy egy darab van az eggyel nagyobb hatványból. Így például 10 darab 100-as csoport ad ki egy 1000-es csoportot. A szükséges szimbólumok a jól ismert számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Egy tetszőleges szám egymás utáni számjegyei tehát jobbról balra egyre magasabb tíz hatványok számát adja meg. Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy miért pont tízes csoportokba kezdtünk rendezni a számokat. Ennek oka csak annyi, hogy az ember az ujjain tanul számolni, ezért hamar természetesnek tekintjük a tízes csoportok szerinti rendezést.

BINÁRIS SZÁMRENDSZER

Természetes gondolat, hogy alapszámnak mást is választhatunk, ezért a tízes számrendszerhez hasonlóan vezessük be a gyakorlat számára nagyon fontos kettes (vagy más néven bináris) számrendszert. Kettes számrendszerben kettes csoportokat rendezünk a kettő egyre magasabb hatványainak csoportjába, két kettes csoport egy négyest, két négyes egy nyolcast tesz ki, és így tovább. Ebben az esetben két szimbólummal, egyesekkel és nullákkal dolgozhatunk, hiszen ha bármely csoportból már kettő lenne, az egyenértékű egy kétszer akkora csoporttal. Ezzel eljutottunk a lehető legegyszerűbb számjegyes leírásig. Az alábbi ábrán látható az előző példában lévő 113 felbontása/csoportosítása kettes számrendszer esetén.



2. Ábra - Csoportosítás 2-es számrendszerben

A kettes számrendszer elméleti jelentőségén kívül számos gyakorlati alkalmazással rendelkezik. Villamosmérnöki (digitális elektronikai) és informatikai alkalmazásokban is a kettes alapszám terjedt el, így itt is ezt mutatjuk majd be részletesebben.

Tíznél nagyobb alapszám használata esetén kényelmetlen, hogy egyre több szimbólumra van szükségünk. A gyakorlatban az ilyen számrendszerek közül a 16-os terjedt el egyedül, ez informatikai

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

alkalmazásokban jelenik meg (később egyértelművé válik, hogy miért). Tízesnél magasabb, például tizenhatos számrendszer esetén 16 szimbólumra van szükségünk, ezért a 0...9 számokat ki kell egészíteni még hat szimbólummal. Ezek az angol ABC nagybetűi, A, B, C, D, E és F. A tizenhatos számrendszert szokás hexadecimális számrendszernek is nevezni.

A további tárgyaláshoz vezessük be az $a_{(b)}$ jelölést, mely azt jelenti, hogy az adott a számot b által definiált számrendszerben értjük. Az egyszerűség kedvéért a tízes számrendszerben megadott számokat nem jelöljük a szokásostól eltérően. A jelölést használva

$$113_{(10)} = 71_{(16)} = 1110001_{(2)}$$

SZÁMRENDSZEREK KÖZTI ÁTVÁLTÁS

Mivel a gyakorlatban a kettes, tízes és tizenhatos számrendszer a legelterjedtebb, az átváltások többségét is ezeken keresztül mutatjuk be. Tízes számrendszerből a másik számrendszerbe történő átváltást a másik alapszámával történő maradékos osztásra vezetjük vissza, melynek lényege, hogy csak egész számokkal dolgozunk. Így az osztás műveletnek lesz egy hányadosa, illetve egy maradéka. Például 16-ot 3-mmal osztva a hányados 5, a maradék 1, vagy 113-at 5-tel osztva a hányados 22, a maradék 3. Ilyenkor azt mondjuk, hogy „16 hármas maradéka 1”, vagy hasonlóan „113 ötös maradéka 3”.

Az átlátható számításhoz célszerű mindig tízes számrendszeren keresztül végezni az átváltást és az itt bemutatott elrendezést használni:

$$
\left.\begin{array}{r|l}
\mathbf{113} & \mathbf{1}\ \text{Írjuk fel a 113-at, és mellé a kettes maradékát!} \\
\mathbf{56} & \mathbf{0}\ \text{2-vel osztás után a hányados 56, kettes maradéka 0.} \\
\mathbf{28} & \mathbf{0}\ \text{56/2=28, mely szintén páros szám.} \\
\mathbf{14} & \mathbf{0}\ \text{28/2=14, maradék 0.} \\
\mathbf{7} & \mathbf{1}\ \text{14/2=7, maradék 1.} \\
\mathbf{3} & \mathbf{1}\ \text{7/2=3, maradék 1.} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1}\ \text{3/2=1, maradék 1.} \\
\mathbf{0} & \text{A maradékokat alulról olvasva megkapjuk a végeredményt.}
\end{array}\right\uparrow \Rightarrow \mathbf{1110001_{(2)}}
$$

Gyakorlás gyanánt állítsuk elő ugyanennek a számnak a hármas, ötös és nyolcas számrendszerbeli alakját is. Természetesen ilyenkor a maradékos osztást rendre hárommal, öttel és nyolccal végezzük.

$$
\begin{array}{c}10 \to 3 \\ \left.\begin{array}{r|l}
\mathbf{113} & \mathbf{2} \\
\mathbf{37} & \mathbf{1} \\
\mathbf{12} & \mathbf{0} \\
\mathbf{4} & \mathbf{1} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} &
\end{array}\right\uparrow\end{array} \Rightarrow \mathbf{11012_{(3)}}
\quad
\begin{array}{c}10 \to 5 \\ \left.\begin{array}{r|l}
\mathbf{113} & \mathbf{3} \\
\mathbf{22} & \mathbf{2} \\
\mathbf{4} & \mathbf{4} \\
\mathbf{0} &
\end{array}\right\uparrow\end{array} \Rightarrow \mathbf{423_{(5)}}
\quad
\begin{array}{c}10 \to 8 \\ \left.\begin{array}{r|l}
\mathbf{113} & \mathbf{1} \\
\mathbf{14} & \mathbf{6} \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} &
\end{array}\right\uparrow\end{array} \Rightarrow \mathbf{161_{(8)}}
$$

Ahhoz, hogy a tetszőleges számrendszerből 10-es számrendszerbe váltsuk a számot, az egyes számjegyeket össze kell szorozni a helyiértékükkel, majd összegezni kell az így kapott számokat.

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

$$\mathbf{11012}_{(3)} = \mathbf{1} \cdot 3^4 + \mathbf{1} \cdot 3^3 + \mathbf{0} \cdot 3^2 + \mathbf{1} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^0 = \mathbf{1} \cdot 81 + \mathbf{1} \cdot 27 + \mathbf{0} \cdot 9 + \mathbf{1} \cdot 3 + \mathbf{2} \cdot 1 = 113$$

$$\mathbf{423}_{(5)} = \mathbf{4} \cdot 5^2 + \mathbf{2} \cdot 5^1 + \mathbf{3} \cdot 5^0 = \mathbf{4} \cdot 25 + \mathbf{2} \cdot 5 + \mathbf{3} \cdot 1 = 113$$

A tízes számrendszer közbeiktatására akkor nincsen szükség, ha a két számrendszer alapszáma egymás hatványa. Például, ha kettes számrendszerből négyes, nyolcas vagy tizenhatos (esetleg magasabb kettő hatványú) számrendszerbe kell átváltani.

Ilyenkor a szám kettes számrendszerbeli alakját felhasználva nagyon egyszerű a magasabb számrendszerekbe történő átváltás, csak csoportosítanunk kell annak számjegyeit. Egy kettes számrendszerbeli szám két egymás utáni számjegye lehet a 00, a 01, az 10 vagy az 11 variáció, melyek egyértelműen megfelelnek egy négyes számrendszerbeli szám egy számjegye által leírható 0, 1, 2 vagy 3 számoknak. Hasonlóan belátható, hogy a számjegyek hármas csoportosításával a nyolcas számrendszerhez, a négyes csoportosításával pedig a 16-os számrendszerhez juthatunk. Az eljárás bemutatásához tekintsük az $11000111101000000001011011011111_{(2)}$ számot. Figyeljünk arra, hogy a csoportosítást a legalacsonyabb helyiértéknél kell kezdeni, tehát jobbról. Ha szükséges, a legnagyobb helyiértékű csoport elejét egészítsük ki nullákkal.

Képezve a kettes csoportosítást és a csoportokat egyenként átváltva:

$$\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{11}_{3}$$

$$11000111101000000001011011011111_{(2)} = 3013220001123133_{(4)}$$

Hasonlóan nyolcas számrendszerben a felosztás és a csoportonkénti átváltás:

$$\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{000}_{0}\,\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{000}_{0}\,\underbrace{000}_{0}\,\underbrace{001}_{1}\,\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{011}_{3}\,\underbrace{111}_{7}$$

$$11000111101000000001011011011111_{(2)} = 30750013337_{(8)}$$

Mint látható, itt a legnagyobb csoportban csak két számjegy lenne, ezt kiegészítettük egy nullával.

Négyes csoportok létrehozásával megkaphatjuk a tizenhatos számrendszerbeli alakot:

$$\underbrace{1100}_{\mathrm{C}}\,\underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{1010}_{\mathrm{A}}\,\underbrace{0000}_{0}\,\underbrace{0001}_{1}\,\underbrace{0110}_{6}\,\underbrace{1101}_{\mathrm{D}}\,\underbrace{1111}_{\mathrm{F}}$$

$$11000111101000000001011011011111_{(2)} = \mathrm{C7A016DF}_{(16)}$$

Végül nézzük meg, hogy a $113_{(10)}$ hogyan alakítható át hexadecimális számmá a kettes számrendszer közbeiktatásával. A legnagyobb helyiértékű csoportot itt is ki kellett egészíteni 4 számjegyre.

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

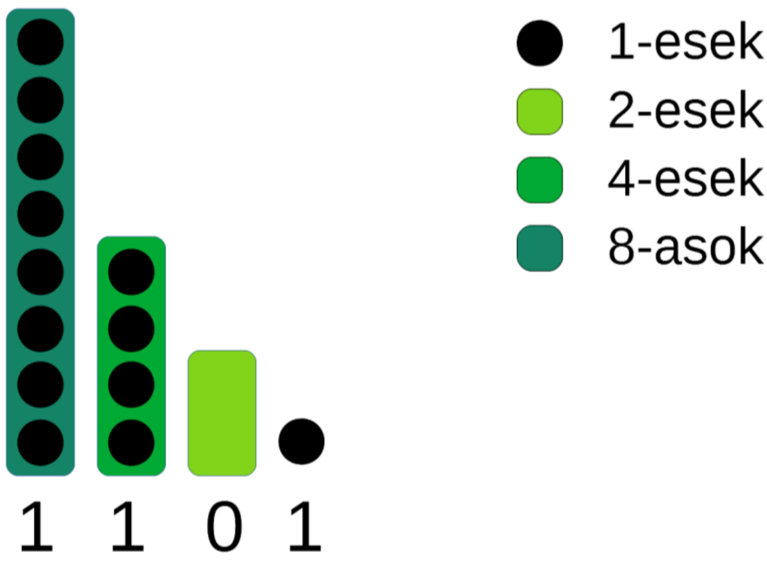
$$\begin{array}{r|c|} 113 & \mathbf{1} \\ 56 & \mathbf{0} \\ 28 & \mathbf{0} \\ 14 & \mathbf{0} \\ 7 & \mathbf{1} \\ 3 & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{1} \\ 0 & \end{array}\uparrow \rightarrow 1110001_{(2)} \rightarrow \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0001}_{1} \rightarrow 71_{(16)}$$

LOGIKAI, AVAGY BOOLE ALGEBRA

A logikai algebra az olyan állítások matematikája, amik egyértelműen egy "igaz" vagy egy "hamis" kategóriába sorolhatók. A továbbiakban a hamis állításokat a 0 számjegy, az igazakat az 1 számjegy fogja jelölni, tehát a logikai változók értéke vagy 0, vagy 1 lehet.

Ilyen módon bármi, ami leírható eldöntendő kérdések sorozatára adott válaszokkal, kódolható a logikai algebra segítségével. Ezt a kódot rögtön számjegyek segítségével le is lehet írni, mely alakilag meg fog egyezni egy kettes számrendszerbeli számmal. Ha visszaemlékszünk a helyiértékes ábrázolás lényegére, rájövünk, hogy magára a kettes számrendszerbeli felírásra is gondolhatunk így, csak meg kell adnunk az eldöntendő kérdések sorozatát.

Vegyük például a $13_{(10)}$számot, majd képzeljük el a bináris számrendszereknél bemutatott kettes csoportosítását!



3. Ábra - Kettes számrendszer és a Boole-algebra kapcsolata

Az első eldöntendő kérdés lehet: "Van-e pontosan egy elemet tartalmazó csoport?". A fenti ábra alapján látjuk, hogy igen, így az erre adott válasz igaz, kódolva tehát 1. A második kérdés: "Van-e pontosan két elemet tartalmazó csoport?". Látjuk, hogy nincs, hamis, tehát 0. A "Van-e pontosan négy elemet

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

tartalmazó csoport?" kérdésre szintén igaz a válasz, tehát 1. Az utolsó, "Van-e pontosan nyolc elemet tartalmazó csoport" kérdésre válaszként ismét egyest írunk le. A helyiértékek megfelelő sorbarendezésével a szám kettes számrendszerbeli alakja előállt, $1101_{(2)}$.

LOGIKAI MŰVELETEK

Az igazságértékekkel mint logikai változókkal matematikai műveletek végezhetőek. A legegyszerűbb ilyen művelet a tagadás, vagy más szóval negálás (angolul NOT), mely az igaz értékhez hamisat, a hamishoz igazat rendel. Egy A logikai változó negáltját szóban „A negált”-nak, vagy egyszerűen „nem A”-nak nevezzük, jele $\bar{A}$. A logikai műveleteket legkönnyebben igazságtáblával szemléltethetjük, mely a változók lehetséges értékei mellett mutatja meg a művelet által visszaadott értéket.

tagadás (NOT)	
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Az első olyan ismertetésre kerülő művelet, amely két logikai változóval dolgozik, a „vagy” művelet (angolul OR), melyet + jelöl. $A + B$ állítás akkor igaz, ha vagy az A, vagy a B változó igaz (1) értéket vesz fel. A vagy művelet igazságtáblájában így az elvégzett művelet értéke csak akkor lesz 0, ha mindkét változó 0 volt. A „vagy” művelet igazságtáblája:

vagy (OR)		
A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A második kétváltozós művelet az „és” (angolul AND), jele „·” (pont). $A \cdot B$ állítás csak akkor igaz, ha egyenként mindkét állítás igaz. Ez jól követhető az „és” művelet igazságtábláján:

és (AND)		
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

1	1	1

Megjegyzés: az „és” és a „vagy” kapcsolatok ilyen jelölése a matematikában nem szokásos, viszont a digitális elektronikai alkalmazásokban ez terjedt el.

Bár ezekkel a műveletekkel már tetszőleges logikai állítás megfogalmazható, a gyakorlatban, elsősorban digitális elektronikai alkalmazásokban továbbiakat is be szoktak vezetni. Ezek közül a három leggyakoribb a „nemés” a „nemvagy” és a „kizáró vagy”. A „nemés” és a „nemvagy” műveletek rendre az „és” és a „vagy” függvények negáltjai. Ezek igazságtáblái:

nemvagy (NOR)		
A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

nemés (NAND)		
A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A „kizáró vagy” művelet abban különbözik a „vagy” művelettől, hogy csak akkor igaz, ha kizárólag az egyik, vagy a másik változójának értéke igaz. Próbáljuk meg ezt a logikai kapcsolatot felírni az eddig bevezetett függvényeink segítségével. Ez a függvény akkor lesz igaz, ha A igaz és B nem igaz, vagy ha A nem igaz és B igaz, azaz $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$. Ezt a logikai kapcsolatot szokás még a $\oplus$ szimbólummal is jelölni, vagyis $A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = A \oplus B$. Ellenőrizzük igazságtábla segítségével, hogy tényleg azt kaptuk-e, amit szerettünk volna:

kizáró vagy (XOR)		
A	B	$A \oplus B$

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

LOGIKAI AZONOSSÁGOK

A „kizáró vagy” esetében könnyen meg tudtuk fejteni, hogyan írható fel az alapműveleteink segítségével az állítás. Próbálkozzunk még két hasonló feladattal, írjuk fel a „nemés” és a „nemvagy” függvények megfelelőit „és”, „vagy” és „negálás” felhasználásával.

Mivel az „és” művelet kimenete hamis volt, ha A nem igaz, vagy B nem igaz, ezért a „nemés” éppen ezekben az esetekben lesz igaz, tehát a sejtésünk szerint $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$.

Hasonló okfejtéssel egy „vagy” kapcsolat hamis, ha A nem igaz és B nem igaz, tehát a „nemvagy” ugyanebben az esetben igaz, így $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$. Ezek az azonosságok - melyeket igazságtáblájukkal könnyen ellenőrizhetünk is - az úgynevezett ***de Morgan-azonosságok***.

nemvagy (NOR)			
A	B	$\overline{A + B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

nemés (NAND)			
A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\bar{A} + \bar{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

KÉTISMERETLENES LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

Egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer általánosan felírható

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

alakban, ahol az egyenletet x és y változókra szeretnénk megoldani. Az ilyen egyenletek megoldásánál három különböző esetre juthatunk, mely eseteket példákon keresztül fogjuk bemutatni.

> Megjegyzés: ez az alak sem teljesen általános, ezek csak a két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek.

A megoldás menetére két egyszerű lehetőség van.

Egyrészt, megpróbálhatjuk az egyik egyenletből kifejezni az egyik ismeretlent, majd a kapott összefüggést beírhatjuk a másik egyenletbe. Így már kaphatunk az egyik változóra egy egyenletet.

A másik lehetőség szerint az egyik egyenletet megszorozzuk egy olyan számmal, hogy a két egyenletben valamely ismeretlen együtthatója megegyező vagy ellentett legyen. Ilyenkor kivonva vagy összeadva a két egyenletet egymásból ismét egy egyismeretlenes egyenletet kapunk. Lássuk a példákat!

EGYÉRTELMŰ MEGOLDÁS VAN

Oldjuk meg a

$$-3x - 2y = 10$$

$$2x + 8y = 20$$

egyenletrendszert! Szorozzuk meg az első egyenletet néggyel, így a

$$-12x - 8y = 40$$

$$2x + 8y = 20$$

egyenletrendszert kapjuk. Adjuk össze a két egyenletet, melyből a

$$-10x = 60$$

egyenletet kapjuk. Ennek megoldása $x = -6$. Helyettesítsük ezt a második egyenletbe,

$$2 \cdot (-6) + 8y = 20$$

Ennek megoldása $y = 4$. Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = -6, y = 4$.

Oldjuk meg ugyanezt az egyenletrendszert a másik módszerrel is! Fejezzük ki az x változót a második egyenletből, a következő módon. Rendezzük x-re az egyenletet, majd osszuk le x szorzójával, azaz kettővel.

$$2x = 20 - 8y$$

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

$$x = 10 - 4y$$

Ezt helyettesítsük be az első egyenletbe, és oldjuk meg y-ra:

$$(-3) \cdot (10 - 4y) - 2y = 10$$

$$-30 + 12y - 2y = 10$$

$$10y = 40$$

$$y = 4$$

Ezt visszahelyettesítve az $x = 10 - 4y$ egyenletbe, megkapjuk a megoldásunkat, azaz $x = -6, y = 4$. Nem meglepő, hogy ez megegyezik a másik módszer megoldásával.

ELLENTMONDÁS

Oldjuk meg a

$$-3x + 2y = 12$$

$$6x - 4y = -20$$

egyenletrendszert! Szorozzuk meg az első egyenletet kettővel:

$$-6x + 4y = 24$$

$$6x - 4y = -20$$

Az egyenleteket összeadva a

$$0 = 4$$

ellentmondásra jutunk. Az egyenletrendszernek nincs megoldása.

VÉGTELEN SZÁMÚ MEGOLDÁS

Oldjuk meg a

$$-3x + 2y = 10$$

$$6x - 4y = -20$$

egyenletrendszert! Szorozzuk meg az első egyenletet kettővel és adjuk össze őket:

$$-6x + 4y = 20$$

$$6x - 4y = -20$$

$$0x + 0y = 0$$

A két egyenlet egymástól csak konstans szorzóban tért el, a két egyenlet ekvivalens. Ilyenkor, tulajdonképpen egy egyenletünk van két ismeretlenre. Az egyik egyenletet ennek megfelelően elhagyva azt kapjuk, hogy a

$$-3x + 2y = 10$$

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

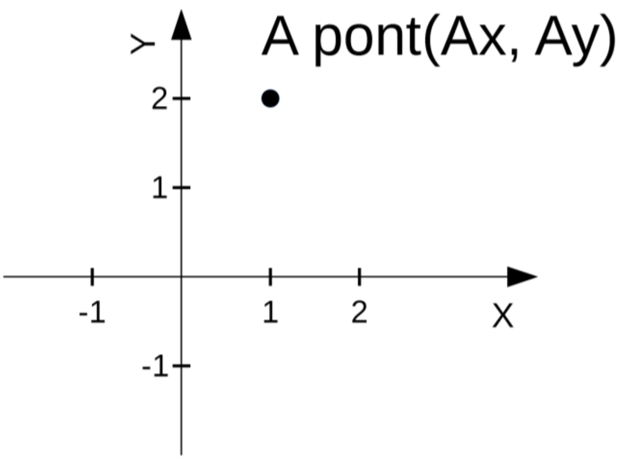
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

egyenletet kielégítő összes számpár megoldása az egyenletrendszernek. Ez az egyenlet egy egyenes egyenlete, így a megoldások az x, y síkon egy egyenesen helyezkednek el.

FÜGGVÉNYEK

DESCARTES-FÉLE DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTARENDSZER

A mérnöki gyakorlatban nagyon sokszor bizonyos összefüggéseket nehéz képlet formájába önteni, ezért inkább grafikusan ábrázolják őket. A derékszögű koordinátarendszer a legelterjedtebb ábrázolási forma. Gyakorlatilag két számegyenesből áll, melyeket tengelyeknek nevezünk. A vízszintes tengelyt gyakran x tengelynek nevezzük el, a függőlegest pedig y tengelynek. Ebben a koordinátarendszerben pontokat tudunk kijelölni, minden pontnak van egy x és y koordinátája, amely egyértelműen leírja a pont helyét a koordinátarendszerben. Az alábbi ábrán az A pontot jelöltük meg, melynek x koordinátája $A_x = 1$ és y koordinátája $A_y = 2$, röviden $A(1,2)$.



4. Ábra - Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer

Tegyük fel, hogy valaki minden gyalogos lépésért cserébe két aranytallért ad nekünk. Ezt egyenletként valahogy így lehetne leírni:

$$\text{aranytallér} = 2 \cdot \text{lépések száma}$$

Azért, hogy ne kelljen mindig kiírni az “aranytallér” és “lépések száma” kifejezést, használjunk betűket a jelölésekre

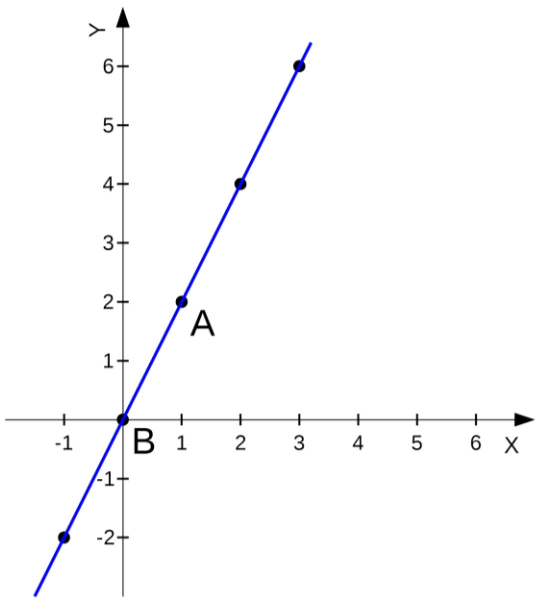
$$y = 2 \cdot x$$

Az x és y helyett használhattunk volna más karaktert is. Az ilyen kifejezéseket függvényeknek szokás hívni, ebben a példában y függ x-től. Ezt a függést az $y(x)$ jelzéssel szokás kifejezni:

$$y(x) = 2 \cdot x$$

A derékszögű koordinátarendszerben ez az összefüggés így néz ki:

http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.



5. Ábra - Egyenes a Descartes-koordinátarendszerben

A grafikus ábrázolást el lehet képzelni úgy is, hogy az egyenletbe x helyére beírjuk a vízszintes tengely értékeit egyesével, így minden x értékhez kapunk egy y értéket majd az összetartozó x-y párokat egy ponttal reprezentáljuk a koordinátarendszerben. Például $x = 1$ esetén $y = 2 \cdot 1 = 2$ (A pont), $x = 0$ esetén $y = 2 \cdot 0 = 0$ (B pont). Ha elegendő sok pontot veszünk fel, akkor a függvény kirajzolódik a koordinátarendszerben.

Szögfüggvények

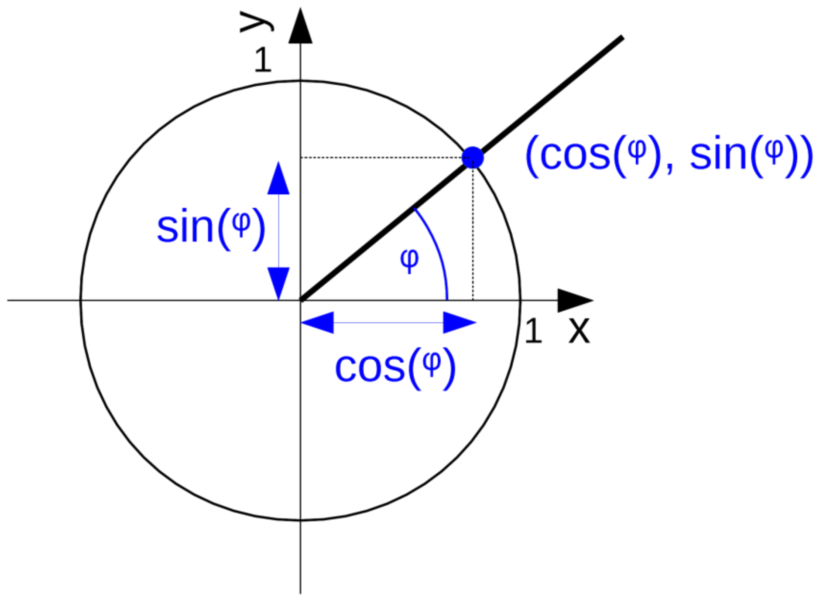
Szöget kétféle mértékegységben szokás mérni, fokban és radiánban. A fok jele a [°] karakter, egy teljes kör szöge fokban 360°. A radián jele [rad], egy teljes kör szöge radiánban mérve 2π [rad]. Ebből az információból kiszámítható egy radián fokban kifejezett értéke:

$$1\ [\mathrm{rad}] = \frac{360\ [°]}{2\pi} = 57.2958\ [°]$$

A szögfüggvények ismeretét derékszögű háromszögekben ismertnek tekintjük és átvesszük, hogy hogyan lehet a szinusz és koszinusz függvényeket 90°-nál, azaz $\pi/2$ radiánnál nagyobb szögekre definiálni.

A szögfüggvények definiálásában nagy segítségünkre van egy, a szokásos derékszögű koordinátarendszer origójába rajzolt egységsugarú körnek, melyet egységkörnek hívunk. Vegyünk egy egyenest, amely az x tengely pozitív felével egy adott φ szöget zár be. Az egyenes és az egységkör metszéspontjának koordinátái definíció szerint $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. A továbbiakban ezt tekintjük a szinusz és koszinusz függvények definíciójának. Könnyen látható, hogy $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ szögekre ez a definíció megegyezik az elemi trigonometriában tanultakkal. Mivel a háromszög átfogója egység hosszú, a befogók hossza éppen $\sin(\varphi)$ és $\cos(\varphi)$. A definíció előnye, hogy láthatóan tetszőleges valós számra értelmezett függvényeket kaptunk.

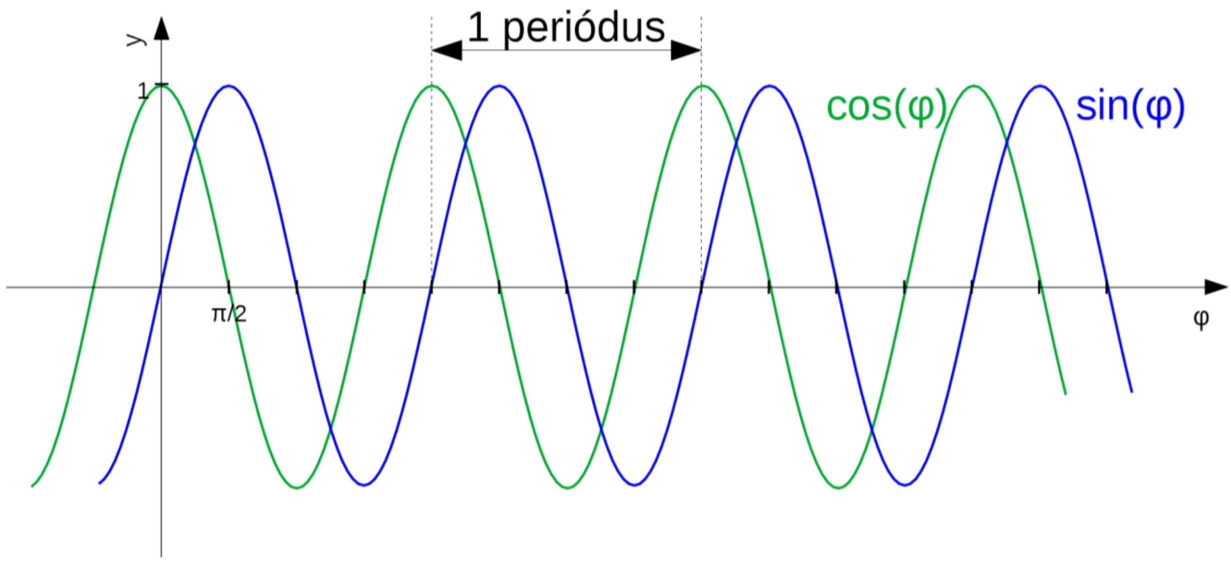
Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.



6. Ábra – Szögfüggvények az egység sugarú körön

Periodikus függvények

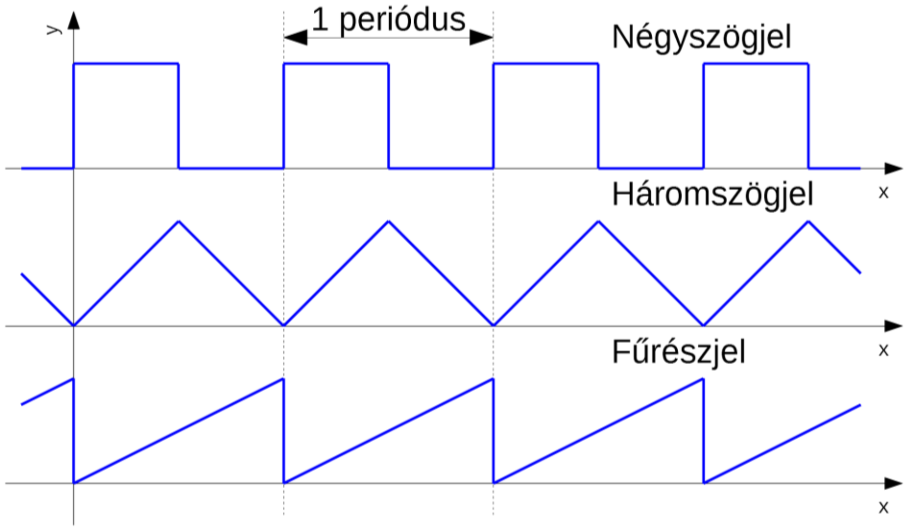
A bevezetett szinusz és koszinusz függvényeink periodikusak, köznapi értelemben véve egy véges szakaszuk ismétlődik. Precízebben szólva igaz rájuk, hogy található olyan $p > 0$ valós szám, melyre igaz, hogy $f(\varphi + p) = f(\varphi)$. A legkisebb ilyen p számot nevezzük a függvény periódusának. A szinusz és koszinusz függvényekre ez $p = 2\pi$ [rad].



7. Ábra - Szögfüggvények ábrázolása

A négyszög-, háromszög- és fűrészjel olyan periodikus függvények, amelyek gyakran előfordulnak elektronikai alkalmazásokban, mint különböző jelalakok. Közös bennük, hogy egyenletként nehéz őket leírni, míg ábrázolásuk egyszerű.

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.



8. Ábra – Jellemző periodikus függvények

Szögfüggvények, mint periodikus függvények mérnöki szempontból

Az előzőekben megnéztük az elemi szögfüggvények definícióit. A szinusz és koszinusz függvényeket gyakran valamilyen időben változó periodikus jel modellezésére használjuk. Ha az időt tekintjük változónak, akkor ezen függvények elemi transzformáltjai általánosan megadhatók:

$$A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + A_0$$

alakban. Ebben az alakban az A_0 egy a függőleges tengely pozitív irányába történő eltolás, melyet az alkalmazásokban **középértéknek** nevezünk. Az $\boldsymbol{A}$ szorzónak, mely a függőleges tengelyen egy $\boldsymbol{A}$-szoros nyújtás, amely a jel **amplitúdója**. A φ_0, mely a vízszintes tengely negatív irányába tol el $\boldsymbol{\varphi_0}$ értékkel, a függvény **fázisa**. Az ω paraméter, melyet a vízszintes tengely irányába nyújt, vagy zsugorít, **körfrekvenciának** nevezzük.

Az előző részben bevezetett módon $\sin(\varphi)$ függvény periodikus volt $p = 2\pi$ periódussal. Most nézzük meg, hogy a fenti függvénynek mennyi a **periódusideje**, azaz a t változó szerinti periódusa. Jelölje ezt T, tehát

$$A \cdot \sin(\omega \cdot (t + T) + \varphi_0) + A_0 = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + A_0$$

Mindkét oldalból kivonva A_0-t, leosztva A-val, majd felbontva a zárójelet

$$\sin(\omega t + \omega T + \varphi_0) = \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Mivel a $\sin(\varphi)$ függvény periódusa $p = 2\pi$, látható, hogy $\omega T = p = 2\pi$, tehát a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

Szinusz függvények felbontása

A szinusz függvény fenti transzformáltja megegyezik két azonos fázisban lévő (tehát φ_0 értéke megegyező), de akár különböző amplitúdójú szinusz és koszinusz függvény összegével. Ezt vezessük is le, elvégre egy tanulságos kétismeretlenes egyenletrendszerre vezet. Az állítás, amit be szeretnénk látni, hogy

$$A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) + A_0 = A_s \sin(\omega t) + A_c \cos(\omega t) + A_0$$

állítás A és φ_0 konstansok megfelelő megválasztásával minden t-re teljesül. Ehhez vonjunk ki mindkét oldalból A_0-t és a baloldalt bontsuk szét az ide vonatkozó addíciós tétel ($\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$) szerint,

$$A \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi_0) + A \cdot \sin(\varphi_0) \cdot \cos(\omega t) = A_s \sin(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$$

A jobb és a baloldal csak akkor lehet egyenlő, ha $sin(\omega t)$ és $cos(\omega t)$ tagoknak mindkét oldalon megegyezik az együtthatójuk. Ebből egy két egyenletből álló egyenletrendszert kapunk,

$$A \cdot \cos(\varphi_0) = A_s$$

$$A \cdot \sin(\varphi_0) = A_c$$

A két egyenletet négyzetre emelve és összeadva kapjuk, hogy

$${A_s}^2 + {A_c}^2 = A^2(\sin^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0)) = A^2$$

Megfelelő A tehát:

$$A = \sqrt{{A_s}^2 + {A_c}^2}$$

Ha az egyenletrendszert alkotó egyenleteket elosztjuk egymással (jobboldalt a jobboldallal, baloldalt a baloldallal) akkor a

$$\frac{A \cdot \sin(\varphi_0)}{A \cdot \cos(\varphi_0)} = \operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{A_c}{A_s}$$

egyenletet kapjuk. Ebből már φ_0 értéke számológéppel számítható, tehát valóban találtunk tetszőleges $A_s \neq 0$, $A_c \neq 0$ amplitúdókhoz megfelelő A és φ_0 értékeket. (Ha valamelyik vagy mindkettő amplitúdó nulla, egyenletrendszer triviálisan megoldható.)

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.
http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.

A szinusz és koszinusz függvények kiszámítása egymást követő pontokban

Jogosan vetődik fel a kérdés, hogy hogyan számíthatjuk ki a szinusz és a koszinusz függvények értékét egy adott pontban. Erre terjedelmi okokból teljes körű választ ugyan nem adunk, a módszer ismertetése nélkül elfogadjuk, hogy ezek tetszőleges pontossággal kiszámíthatók, azonban nagyon sok számítás árán. Sokszor elegendő azonban véges sok pontban ismernünk a szinusz és a koszinusz függvények értékeit. Erre remek alkalmazási példa, amikor egy időben szinuszosan változó jelet szeretnénk előállítani, mindig azonos időközönként frissítve az értéket.

A definíciókból tudjuk, hogy $\sin(0) = 0$ és $\cos(0) = 1$. Ezeken az értékeken kívül fogadjuk el, hogy meghatároztuk még egy pontban a szögfüggvényeink értékét. A példa kedvéért legyen ez a $\varphi_0 = 0{,}01$. Ekkor már ismertek a szögfüggvények a 0 és a $0{,}01$ pontban. A feladat, hogy további bonyolult számítás nélkül kiszámíthassuk a függvények felvett értékeit 0,02, 0,03, 0,04 stb. pontokban. Nézzük tehát a

$$\sin(0{,}02) = \sin(0{,}01 + 0{,}01) \text{ és}$$

$$\cos(0{,}02) = \cos(0{,}01 + 0{,}01)$$

kifejezéseket. Használva az addíciós tételeket látható, hogy

$$\sin(0{,}01 + 0{,}01) = \sin(0{,}01) \cdot \cos(0{,}01) + \sin(0{,}01) \cdot \cos(0{,}01)$$

$$\cos(0{,}01 + 0{,}01) = \cos(0{,}01) \cdot \cos(0{,}01) - \sin(0{,}01) \cdot \sin(0{,}01)$$

Mivel a $\sin(0{,}01)$ és $\cos(0{,}01)$ értékek ismertek voltak, $\sin(0{,}02)$ és $\cos(0{,}02)$ értékét néhány elemi művelet segítségével meg tudtuk határozni, így már ezek is ismertek. Tovább folytatva az eljárást

$$\sin(0{,}03) = \sin(0{,}02 + 0{,}01) = \sin(0{,}02) \cdot \cos(0{,}01) + \sin(0{,}01) \cdot \cos(0{,}02)$$

$$\cos(0{,}03) = \cos(0{,}02 + 0{,}01) = \cos(0{,}02) \cdot \cos(0{,}01) - \sin(0{,}02) \cdot \sin(0{,}01)$$

Látható, hogy ismét csak a már ismert pontokban volt szükség a szögfüggvények értékére. További pontokban a szögfüggvényeink értéke négy szorzás és két összeadás segítségével meghatározható.

Ez a példány Rába Ármin kizárólagos használatú példánya.

http://kristalytisztaelektronika.hu | Minden jog fenntartva Xtalin Mérnöki Tervező Kft.