$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\, p(x) \\ \phi(0) = 5 \\ \phi(3) = 2 \end{cases} \qquad \Omega = \langle 0,3 \rangle \qquad p(x) = \begin{cases} -10 & x \in (0,1) \\ 1 & x \in \langle 1,2) \\ -10 & x \in \langle 2,3) \end{cases}$$

$\phi(0) = 5$, $\phi(3) = 2$ – niezerowe warunki Dirichleta

$G = 1$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\, p(x)$$

$$\phi'' = 4\pi G\, p(x) \quad / \cdot v$$

$$\int_0^3 \phi'' v \, dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v \, dx$$

$$\int_0^3 \phi'' v \, dx = \begin{vmatrix} u = v & u' = v' \\ v' = \phi'' & v = \phi' \end{vmatrix} = \phi' v \Big|_0^3 - \int_0^3 \phi' v' \, dx$$

$$= \phi'(3) \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v(3)}} - \phi'(0) \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{v(0)}} - \int_0^3 \phi' v' \, dx$$

(ponieważ v zeruje się na brzegach)
z warunków Dirichleta

$$(1) \qquad -\int_0^3 \phi' v' \, dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v \, dx$$

W związku z niezerowymi warunkami Dirichleta nie wyznaczymy bezpośrednio ϕ.

Niech $\phi = w + \bar{u}$, gdzie w zeruje się na brzegach Ω tzn $w(0)=0$ i $w(3)=0$, wobec tego:

$$\phi(0) = 5 = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w(0)}} + \bar{u}(0) \Rightarrow \bar{u}(0) = 5$$

$$\phi(3) = 2 = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w}}(3) + \bar{u}(3) \Rightarrow \bar{u}(3) = 2$$

Zakładamy, że $\bar{u}$ mogę zapisać jako równanie liniowe:

$$\bar{u}(0) = 5 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 5$$

$$\bar{u}(3) = 2 = a \cdot 3 + b = 3a + 5$$

$$-3 = 3a$$
$$-1 = a$$

$$\bar{u}(x) = -x + 5$$

Czyli:

$$\phi = w - x + 5$$

$$\phi' = w' - 1$$

Podstawiając do (1) otrzymamy:

$$-\int_0^3 (w' - 1) \cdot v' \, dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v \, dx$$

$$-\int_0^3 w' v' dx + \int_0^3 v' dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v \, dx$$

$$-\int_0^3 w'v'dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v\,dx + \int_0^3 v'dx$$

$$-\int_0^3 w'v'dx = \int_0^3 4\pi G p(x) v\,dx + \overset{0}{\overset{\parallel}{v(3)}} - \overset{0}{\overset{\parallel}{v(0)}}$$

$$-\int_0^3 \underbrace{w'v'dx}_{b(w,v)} = \int_0^3 \underbrace{4\pi G p(x) v\,dx}_{l(v)}$$

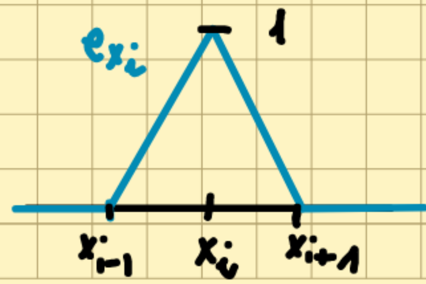
Szukamy $w, v \in H_0^1$

Niech $W_h \subset H_0^1$, ale W_h będzie podprzestrzenią skończoną. Przestrzeń Ω podzielimy na n części o długości $h = \frac{3}{n}$. Wtedy $x_0 = 0$, $x_n = 3$, $x_{i+1} = x_i + \underset{(h)}{\underset{\parallel}{\frac{3}{n}}}$, $x_{i-1} = x_i - \underset{(h)}{\underset{\parallel}{\frac{3}{n}}}$

Niech $W_n = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ w związku z warunkami Dirichleta nie bierzemy pod uwagę e_0 i e_n (nie zerują się na brzegach)

gdzie

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle \\[2ex] \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$



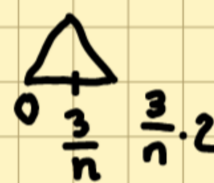
Czyli

$$e_i = \begin{cases} \frac{n}{3}(x - x_{i-1}) = \frac{n}{3}x - \frac{n \cdot x_{i-1}}{3} & x \in (x_{i-1}, x_i\rangle \\ \frac{n}{3}(x_{i+1} - x) = -\frac{n}{3}x + \frac{n \cdot x_{i+1}}{3} & x \in (x_i, x_{i+1}\rangle \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

$$e_i' = \begin{cases} \frac{n}{3} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{n}{3} & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{w innych przypadkach} \end{cases}$$

(x_{i-1} i x_{i+1} stałe dla konkretnego i)

Przybliżamy:



$w_n \in H_n$

$$w_n = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \ldots + w_{n-1} e_{n-1}$$

Można przyjąć $v_n = e_n$ bo $e_n \in H_n$ (ta sama podprzestrzeń)

Nasze równanie będzie postaci:

$$b(w_n, v_n) = l(v_n)$$

$$b(w_1 e_1 + w_2 e_2 + \ldots + w_{n-1} e_{n-1}, v_j) = l(v_j)$$

Korzystamy z biliniowości b otrzymując:

$$w_1 \cdot b(e_1, v_j) + w_2 \cdot b(e_2, v_j) + \ldots + w_{n-1} b(e_{n-1}, v_n) = l(v_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i b(e_i, v_j) = l(v_j)$$

Przyjmujemy $v_j = e_j$

135 − 200
1 − 65

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i\, b(e_i, e_j) = l(e_j)$$

Mamy zatem układ n−1 równań.

Macierz rozwiązań:

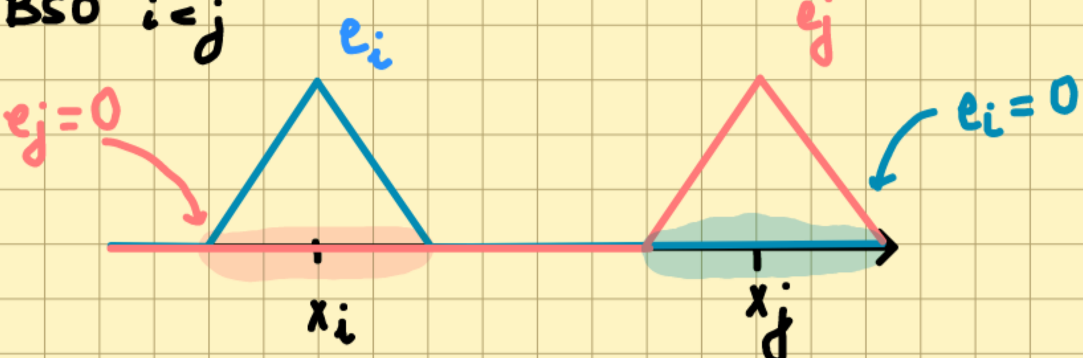
$$\begin{bmatrix} b(e_1,e_1) & b(e_2,e_1) & \dots & b(e_{n-1},e_1) \\ b(e_1,e_2) & b(e_2,e_2) & \dots & b(e_{n-1},e_2) \\ b(e_1,e_3) & b(e_2,e_3) & \dots & b(e_{n-1},e_3) \\ \vdots & & & \\ b(e_1,e_{n-1}) & & & b(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(e_1) \\ l(e_2) \\ \vdots \\ l(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Gdzie

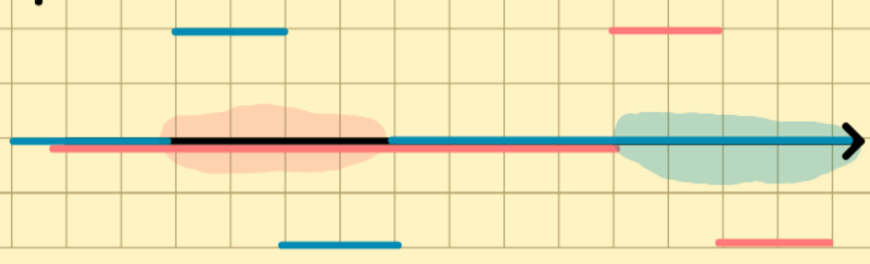
$$b(e_i, e_j) = -\int_0^3 e_i' e_j' \,dx$$

gdy $|j-i| > 1$

BSO $i<j$



pochodne:

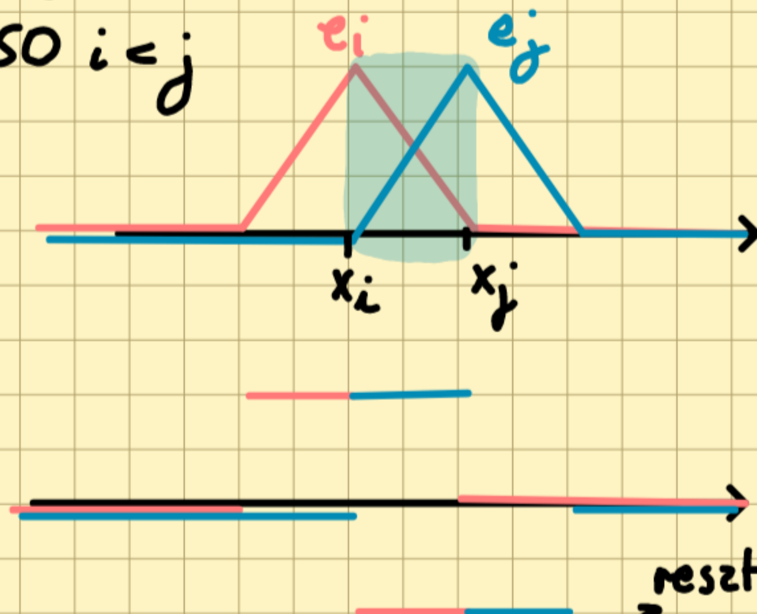


W tym przypadku zawsze jedna z pochodnych równa 0, czyli

$$b(e_i, e_j) = 0$$

Gdy $|j-i| = 1$

BSO $i<j$



reszta przedziałów = 0

$$b(e_i, e_j) = -\int_0^3 e_i' e_j' \, dx = -\int_{x_i}^{x_j} e_i' \cdot e_j' \, dx = \int_{x_i}^{x_j} \frac{n^2}{9} dx = \left[\frac{n^2}{9} x\right]_{x_i}^{x_j} =$$

$$\frac{n^2}{9}[h] = \frac{n^2}{9} \cdot \frac{3}{n} = \frac{n}{3}$$

gdyż reszta przedziału = 0

Gdy $j = i$

$$b(e_i, e_i) = -\int_0^3 e_i' e_i' \, dx = -\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{n^2}{9} dx = -\left[\frac{n^2}{9} x\right]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} =$$

$$-\frac{n^2}{9}[x_i + h - x_i + h] = -\frac{n^2}{9} \cdot \frac{6}{n} = -\frac{2n}{3}$$

Macierz B będzie wyglądała tak:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} & \frac{n}{3} & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; \frac{n}{3} & -\frac{2n}{3} \end{bmatrix}$$

Pozostało nam rozpisanie $l(e_i)$:

$$\int_0^3 \underbrace{4\pi G\, p(x) v \, dx}_{l(v)} = 4\pi G \cdot -10 \int_0^1 e_i \, dx + 4\pi G \cdot \int_1^2 e_i \, dx$$

$$+ 4\pi G \cdot -10 \int_2^3 e_i \, dx$$

Po rozwiązaniu układu równań i wyliczeniu $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ otrzymamy $w_n = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \ldots + w_{n-1} e_{n-1}$. Jednakże chcieliśmy się dowiedzieć jak będzie wyglądało Φ. Dodając przesunięcie mamy:

$$\Phi = w - x + 5$$

Do wyliczenia całek wykorzystam metodę prostokątów