

Mathematische Modellierung

Skriptum der Lehrveranstaltung im Sommersemester 2021
von

Sabine **Hittmeir**, Norbert J. **Mauser**, Hans Peter **Stimming**

Fak. f. Mathematik, Univ. Wien

0. Motivation und Ziel dieser Lehrveranstaltung (LVA):

In dieser LVA werden die GrundIdeen/Techniken von "Mathematische Modellierung", sowie an der Fak. Mathematik verwendete Modelle, präsentiert und von den Studierenden in kleineren "Übungsbeispielen" und einem grösseren "Team-projekt" erarbeitet.

Mathematische Modellierung, insbesondere "numerische Modellierung", ist eines der wichtigsten Werkzeuge, dass die Mathematik für Wissenschaft, Wirtschaft, Gesellschaft zur Verfügung stellt. "Mathematik als Schlüsseltechnologie" (das Schlagwort zB des sehr erfolgreichen MATHEON Zentrums in Berlin) setzt bei den beteiligten MathematikerInnen hohe Kompetenz in Mathematische Modellierung voraus, die eben die Kompetenz der "AnwenderInnen" in Biologie, Industrie, Finanz,... ergänzt.

Aktuell sind z.B. "mathematische Modellrechnungen" zentral bei Prognosen für "covid Zahlen", die dann Begründung von "Massnahmen / lockdowns - lockerungen" sind. Eines unserer Ziele ist, derartige Modelle und ihre Grenzen richtig einzuschätzen, z.B. die "SIR Modelle" ("Susceptible, Infected, Removed") als ein Modell von nicht-linearen gekoppelten Differentialgleichungen, wo die Vorhersagen sehr stark von Modellierungsannahmen, von Ungenauigkeiten in Daten und Parametern und von der Qualität der numerischen Verfahren abhängig sind.

Diese LVA ist geeignet für 4. und 2. Semester, natürlich auch 6. Semester. Voraussetzung sind Kenntnisse der Analysis bis zu Taylorreihen, sowie elementare lineare Algebra; die weiteren nötigen Grundideen der "Höheren Mathematik" werden praxisnah vermittelt, in einer Weise, die entsprechenden Vorlesungen entweder vorbereitet oder nachher besser verständlich macht.

Die LVA umfasst Theorie + Beispiele + Teamarbeit - das Format "VU" gibt uns dabei Flexibilität, ohne dass wir die Nachteile von VU aufzwingen ("Anwesenheitspflicht", Benotung in engem Zeitrahmen,...). Die "Teamprojekte" können auch noch im Juli fertig gearbeitet werden.

Für die Übungsbeispiele und das Team-projekt sind teilweise (elementare) Programmierkenntnisse erforderlich, zB Python, MATLAB, oder auch Julia, C++, FORTRAN,... Unterstützung beim Programmieren wird gegeben.

Die "Note" ergibt sich aus den eigenen Ausarbeitungen der Beispiele und des Teamprojekts, dazu noch eine kurze "mündliche Prüfung" als Motivation, die Beispiele nochmal durchzudenken und in den "Stoff" einzubetten.

Einleitung

"Mathematische Modellierung" steht für die Aufgabe, Phänomene der Natur, der Technik, der Wirtschaft, der Gesellschaft, etc., mit den Mitteln der Mathematik zu beschreiben, also mit mathematischer "Terminologie", mit mathematischen "Terminen", insbesondere mit mathematischen "Gleichungen", mit statistischen Beschreibungen, mit "neuralen Netzwerken" u.v.m.

Ein wichtiger Schritt der mathematischen Modellierung ist, sich der Annahmen bewusst zu werden und sie klar zu kommunizieren.

„Mathematik“ bedeutet die exakteste, eindeutigste und universellste Sprache, vgl. <http://sciencev1.orf.at/science/news/152068>.

Mathematische Modellierung ist unverzichtbar insbesondere zur Beschreibung von physikalischen Vorgängen, viele mathematische Begriffe wurden unmittelbar in der Physik entwickelt (zB „Potential“, „Vektorfeld“, oder „Deltafunktion“), die dann in neue mathematische Gebiete gingen. Begriffe wie „Energie“, die vieldeutig in verschiedenen Kontexten verwendet werden, werden dort eindeutig und klar, wo sie aus einer Gleichung definiert werden und dann zB „Energieerhaltung“ aus der Gleichung bewiesen wird.

Deshalb werden wir zunächst einige Grundlagen der Physik mit mathematischen Modellen erfassen, die zur Allgemeinbildung jeder/s MathematikerIn gehören.

Im Bereich der mathematischen Modellierung muss über die Denkart der reinen Mathematik hinausgegangen werden, wo es bei „Definition – Satz – Beweis“ absolute Wahrheiten gibt:

Es gibt nicht „das richtige Modell“, jedes Modell macht Annahmen und Fehler, ausser es wird als Modell einer idealisierten nicht-realen Situation, eines „Gedankenexperiments“ eingeführt: Die „ideale“ Münze mit Kopf und Zahl auf beiden Seiten kann exakt modelliert werden mit einem „Wahrscheinlichkeitsraum“ mit 2 Elementen mit gleicher diskreter Wahrscheinlichkeit $1/2$. Für eine „real existierende“ Münze ist die eine – noch so gute – Näherung.

In vielen Situationen können "Hierarchien von Modellen" erzeugt werden, wo es zwischen einem "exakten" Modell und einem "sehr vereinfachten" Modell eine Reihe von Modellen "dazwischen" gibt mit "mittlerer" Genauigkeit. In der Physik wird z.B. gerne so eine Hierarchie ausgedrückt durch die Begriffe "mikroskopisch - mesoskopisch - makroskopisch". Dabei kann oft ein "kleiner" Parameter identifiziert werden, den man traditionell ϵ "epsilon" nennt. Wenn man "epsilon gleich Null setzt", erhält man das "reduzierte" Problem als die "einfachste" Näherung", wenn man die Lösung des "exakten" Ausgangsproblems in eine formale "Reihe in epsilon" entwickelt und Terme Ordnung epsilon, Ordnung epsilon zum Quadrat" etc behält, bekommt man eine Hierarchie.

Das mathematische Werkzeug dafür ist die "(formale) Asymptotische Analysis", die ein wesentliches Kapitel dieser LVA ist.

1 Mathematische Modelle und Physik

„*Il libro della natura è scritto in lingua matematica*“ (Galilei)

Über lange Zeit waren Mathematik und Physik als Wissenschaftsdisziplinen untrennbar „ineinander verwoben“, zB Archimedes, . . . , Leibniz, Newton, . . . waren in beiden Gebieten gleichzeitig bahnbrechend, und noch die Schöpfer von Relativitätstheorie (Einstein, . . .) und Quantenmechanik (Schrödinger, von Neumann, Dirac, . . .) waren meist sowohl Mathematiker als auch (theoretische) Physiker. Ein typisches Curriculum eines Mathematikstudiums umfasste früher überall Physik, Mechanik.

Erst nach dem zweiten Weltkrieg wurde die Trennung systematisch, heute sind oft keine Physikvorlesungen Pflicht in Mathematik (und Doppelstudien Mathematik+Physik werden durch die "Reformen" zunehmend erschwert.)

!) Physik ist ohne Mathematik unmöglich

Das gilt eigentlich für jede „Wissenschaft“ im Sinne des Ausspruches von Kant im Jahre 1796: „*dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.*“

Nicht nur die „**Theoretische Physik**“ (zB allgemeine Relativitätstheorie ist im Kern nichtlineare partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie,) sondern auch die „**ExperimentalPhysik**“, wo zB zum Aufbau eines Experimentes viel berechnet wird, und bei der Auswertung der „Messungen“, wo die „nackten Zahlen“ erst durch mathematische Modelle ihre Bedeutung erlangen.

Und natürlich die „**ComputerPhysik**“ als modernes 3. Standbein der Physik, wo es im Kern um mathematische Modellierung und numerische Mathematik geht (PhysikerInnen reden oft von „numerischer Modellierung“) – „Scientific Computing“ ist ein Teil der Mathematik.

$$(\text{Angewandte}) \text{ Mathematik} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Modellierung} \\ \text{reine Mathematik (Definition – Satz – Beweis)} \\ \text{Numerik /Simulation/Visualisierung} \end{array} \right.$$

Mathematik ist oft auch der Schlüssel zum (physikalischen) Verständnis, wo (noch) keine mathematische Modellierung, keine Gleichung, bekannt ist: mit statistischen Methoden können Zusammenhänge (Korrelationen) gefunden und quantifiziert werden. Statistik / Wahrscheinlichkeitstheorie sind Teilgebiete der Mathematik, auch „Neurale Netzwerke“, „Machine Learning /Deep Learning“ haben die wissenschaftlichen Wurzeln in der Mathematik.

Jede physikalische **Formel** oder **Gleichung** ist ein mathematisches Objekt.

2 Beispiele für „Formeln“:

2.1 mathematische Modelle für "Elektrizität"

E1) Elektromodell 1: Gleichstrom: „Ohm'sches Gesetz“

In einem Gleichstromkreis mit einem Bauteil mit Widerstand R wird von einer Batterie eine Spannung U angelegt, es fliesst ein elektrischer Strom I gemäss dem „Ohm'schen Gesetz“:

$$\text{(F1a) Formel 1 a : } I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

Dieses simple „makroskopische“ Modell ist linear, die „Strom-Spannungs-Kennlinie“ ist eine Gerade durch den Ursprung.

Es kann auf verschiedene Arten „formuliert“ werden - man beachte die Doppeldeutigkeit des Wortes „formulieren“ : einerseits im Alltagsgebrauch „formulieren“ für „etwas in Worte fassen“ (die meist nicht klar definiert sind), andererseits in der Wissenschaft für „eine Formel mit Symbolen aufstellen“ – welche hoffentlich klar definiert sind, wobei die Definition des Symbols eine Wahl ist, wie wir unten sehen !

„Strom ist Spannung durch Widerstand“, oder:

„Strom ist der Spannung direkt proportional mit Faktor $1/R$ “, oder :

„Spannung ist dem Strom proportional mit Faktor R “ : $U = IR$ $U/I = \text{const} = R$: „Spannung durch Strom ist eine dem Bauteil entsprechende Konstante, die Widerstand genannt wird“

Formel \rightarrow Funktion

Durch Auffassen gewisser Grössen als unabhängige Variable(n), und anderer Grössen als freier aber fester „Parameter“, entstehen Funktionen aus Formeln.

„Ohm'sches Gesetz = 1 Gleichung mit 3 Unbekannten“.

$I = I(U) = 1/R U$... „Strom ist lineare Funktion der Spannung“, R ist ein Parameter

$I = I(U, R)$ = Strom ist linear in Spannung und reziprok („ $1/x$ Funktion“) in Widerstand.

Usw. : 10 mögliche verschiedene Auffassungen der „Formel mit 3 Variablen“ als Funktion !

E2) Elektromodell 2: Wechselstrom: „komplexe Spannungen, Ströme“

Im Modell E1) wurde die Spannung durch eine Batterie erzeugt, sie fliesst in der Zeit konstant gleichmässig in eine Richtung. Wenn Strom durch einen „Rotor“ erzeugt wird, wie in einer Turbine, wie sie in einem Wasserkraftwerk verwendet wird, dann entsteht Wechselstrom, also eine in der Zeit periodische Spannung.

Ein mathematisches Modell für periodische Vorgänge sind die trigonometrischen Funktionen, die Formel für die Spannung lautet in diesem Modell:

$$(F1b) \quad \text{Formel 1 b :} \quad U(t) = U_{\max} \sin(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad U_{\max} \cos(\omega t)$$

oder, mithilfe der Euler'schen Formel:

$$(F1b - \text{bis}) \quad U(t) = U_{\max} e^{i\omega t} \quad = U_{\max} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

Hier wird eine "physikalische Grösse" als komplexe Zahl modelliert, obwohl "Messwerte" natürlich reell sind - zu diesen kommt man durch "Realteil" (bzw Imaginärteil) leicht zurück. Bei der "Wellenfunktion" $\psi(x, t)$ der Schrödingergleichung, welche komplexwertig sein muss, ist der Bezug zur "Realität" komplizierter...

!) Beachte: das Ohm'sche Gesetz ist eine „makroskopische“, „phänomenologische“ Beschreibung von (direkt) messbaren Grössen wie „elektrische Spannung“. Dahinter steckt eine „mikroskopische“ Beschreibung: elektrischer Strom als Transport von Ladungsträgern in einem Medium \rightarrow diskretes Modell: Bewegung von Elektronen (Löchern, Spin) unter dem Einfluss von elektrischen Kräften – „KontinuumModell“ mit Grössen wie Ladungsdichte $n(x, t)$, Stromdichte $J(x, t)$ etc. die z.B. durch „Hydrodynamische Gleichungen“ beschrieben werden.

Dazwischen stehen „mesoskopische“ „kinetische“ Gleichungen“ (Boltzmann Gleichung, Vlasov Gleichung“, ...) aus denen die makroskopischen Grössen berechnet werden können.

Diese 3 Beschreibungsebenen ergeben eine Modellhierarchie vom „exakten“ Modell = N Teilchen Punkt mechanik“ zu „grobe Näherung = Kontinuumsmechanik von 1 Teilchen dichten im physikalischen Raum“ mit den „kinetischen Gleichungen von 1 Teilchen dichten im „Phasenraum“.

2.2 Bewegung : Arbeit, Energie

2a) „Arbeit ist Kraft mal Weg“ :

$$(F2) \quad \text{Formel 2 :} \quad W = F \cdot s \quad (2)$$

?? Arbeit ist ein Skalar, Kraft ist doch ein Vektor ?! Wie kann das passen ? Es muss doch links und rechts einer Gleichung die selbe Klasse von Objekten stehen !

! Beachte: „Weg“ wird als „Vektor“ modelliert, im Allgemeinen ein 3-dimensionaler Vektor, weil ja der Raum 3-dimensional ist ! Genauer gesagt: Kraft längs des Weges mal Weg \rightarrow das „mal“ muss das Skalarprodukt sein. (ergibt also Null, wenn die Kraft senkrecht auf den Weg steht)

2b) „Energie ist Masse mal Geschwindigkeit zum Quadrat“:

$$E_{\text{kin}} = m \frac{v^2}{2}$$

kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = T = mv^2/2$: (GeschwindigkeitsVektor zum Quadrat gibt Zahl !).

?! Stimmen die Einheiten links und rechts überein ?!

$$[T] = [m][v]^2 = kgm^2s^{-2}$$

$$[W] = [F][s] = kgms^{-2}m$$

Die eckige Klammer bedeutet, dass von einer physikalischen Grösse die Einheit genommen wird.

$E = mc^2$ („Einstein’sche Masse-Energie Äquivalenz“)

Eine Ruhemasse m ist zur Energie E äquivalent mit dem Umrechnungsfaktor Quadrat-der-Lichtgeschwindigkeit.

2.3 „2. Newton’sches Gesetz“

„Kraft ist Masse mal Beschleunigung“,

$$(F3) \quad \text{Formel 3 :} \quad F = m \cdot a \quad (3)$$

wobei Kraft und Beschleunigung beides Vektorgrößen sind, das „mal“ also Skalar mal Vektor ist.

Hier verschwindet der Unterschied zwischen „Formel“ und „Gleichung“:
Das „2. Newton’sche Gesetz“ kann nämlich auch als „gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung“ aufgefasst werden:

$$x''(t) = F/m \quad (4)$$

mit Anfangswerten

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

$$x'(0) = v_0 \quad (6)$$

oder (mit Hilfe der Relation zwischen x und v) als System erster Ordnung:

$$x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = F/m$$

3 Grundlagen der „Punkt-Teilchen Mechanik“ : „Kinetik von Massenpunkten“

„Mechanik“ wird in „Statik“ und „Dynamik“ eingeteilt, letztere in „Kinematik“, wo „nur“ die „Geometrie“ der Bewegung von „Punkten“ betrachtet wird, und „Kinetik“, wo auch die Kräfte betrachtet werden, mit dem 2. Newton'schen Gesetz als Kern; dazu „Erhaltungssätze“ wie Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Energieerhaltung. Diese Erhaltungssätze werden über das Noether-Theorem mit „Symmetrien“ und „Variationsrechnung“ verbunden.

Die „Punktmechanik“ beschreibt Systeme von N diskreten Teilchen, die sich unter dem Einfluss von Kräften auf "Bahnen" („Trajektorien“) bewegen, die durch Systeme von $2N$ gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben werden, die Formulierungen des 2. Newton'schen Gesetzes $F = ma$ sind. Solche Systeme tauchen etwa in der „Himmelsmechanik“ (zB Planetenbewegungen) auf, wo N "moderat" ist. Für die meisten realen Systeme ist N sehr gross, etwa ist die Anzahl der Moleküle in Volumen von einem Kubikzentimeter $O(10^{26})$. Auch für grosse N können Teilchensysteme (Flüssigkeiten etc) zB in der „MolekularDynamik“ im Computer „mikroskopisch“ simuliert werden.

Die „Kontinuumsmechanik“ beschreibt solche Systeme durch Funktionen im physikalischen Raum $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$, die skalare „(Massen)dichte“ $\rho(x, t)$, die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}(x, t)$ oder den Impuls $\vec{p}(x, t)$ und die skalare Energie $e(x, t)$ der die Temperatur $T(x, t)$. Die Dynamik wird nun durch gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben, zB die Navier Stokes Gleichungen und ihren "Viskositätsfreien Grenzwert", die Euler Gleichungen.

Der Übergang von Teilchenmechanik zu Kontinuumsmechanik ist in geeigneter Asymptotik $N \rightarrow \infty$ möglich, wo etwa die „empirische Dichte“ einer Summe von N Delta-Distributionen ein offensichtliches Werkzeug ist.

Ähnlich wie in der „klassischen Mechanik (KM) ist es in der Quantenmechanik (QM), wo neue mathematische Konzepte gebraucht und neu erfunden wurden. Der rigorose mathematische Grenzwert $N \rightarrow \infty$ ist übrigens in der QM etwas einfacher als in der KM.

Eine mathematische Behandlung obiger Konzepte der Physik erfordert Generationen von Mathematikern, von Mass-und Wahrscheinlichkeitstheorie, Differentialgeometrie, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, ..., bis zu numerischen Methoden inkl. Monte Carlo Methoden und Machine learning etc.

Die folgende Einführung ist „massgeschneidert“ für diese LVA „Mathematische Modellierung“, anders als es in Skripten/Büchern der Mechanik bzw Physik üblicherweise gebracht wird.

Ein sich bewegendes „sehr kleines Teilchen“ mit konstanter **Masse** \mathbf{m} , ohne innere Struktur, wird so modelliert, dass es ein ausdehnungsloser „Punkt“ im 3-dimensionalen „physikalischen“ Raum ist, dessen Ort sich im Laufe der Zeit ändert. Also ein Element des Vektorraums \mathbb{R}^3 , das zeitabhängig ist :

.) Der **"Ort"** des Teilchens wird so als eine „Kurve“ im \mathbb{R}^3 : $\vec{\mathbf{x}}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ modelliert, die "Teilchenbahn" ("Trajektorie").

Beachte, dass in der „klassische“ („Newton'sche“) Physik der Raum ($\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$) und die Zeit ($t \in \mathbb{R}$) getrennte und sehr verschiedene Rollen spielen. Dies ist grundlegend anders in der „relativistischen“ („Einstein'schen“) Physik, wo die „Raumzeit“ ein 4er-Vektor ist, dessen Komponenten „gemischt“ werden können. In der „allgemeinen Relativitätstheorie“ wird obendrein der Raum selbst nicht-euklidisch und Raum-Zeit-Masse-Energie ineinander verwoben.

.) Weiters wird in der Kine(ma)tik eine „kinetische Variable“ verwendet, zB die **"Geschwindigkeit"**, welche ja der zeitlichen Änderung des Ortes entspricht.

„Änderung“ \rightarrow „Ableitung“

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}'(t)$$

Oft wird in der Physik die (totale) Ableitung nach der Zeit mit einem „Punkt“ notiert : $d/dt x = \dot{x}(t)$ bzw. $d/dt v = \dot{v}(t)$.

Die Änderung der Geschwindigkeit $\dot{v}(t)$ ist die Beschleunigung:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\mathbf{x}}''(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{\mathbf{x}}(t) .$$

Das Teilchen hat einen **"Impuls"**, d.h. Masse mal Geschwindigkeit, der oft statt Geschwindigkeit verwendet wird

$$\vec{\mathbf{p}}(t) = m \vec{\mathbf{v}}(t).$$

Weiters hat es einen **"DrehImpuls"**:

$$\vec{\mathbf{L}}(t) = (\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}_0) \times \vec{\mathbf{p}}(t),$$

wobei x_0 ein beliebig, aber fest gewählter Bezugspunkt ist (der manchmal "vernachlässigt" wird in der Formel.) Beachte, dass auch eine geradlinige Bewegung einen Drehimpuls $\vec{\mathbf{L}} \neq 0$ hat, wenn x_0 nicht auf der Geraden liegend gewählt wird.

Bemerkung 1: das Vektorprodukt \times bedeutet, dass der Drehimpuls senkrecht auf die Ebene ist, die der Ort und der Impuls aufspannen.

Bei der Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω steht der Drehimpuls senkrecht auf die "Drehebene", die durch den Ortsvektor $x(t)$ und die Tangentialgeschwindigkeit $v_{tang}(t)$ aufgespannt wird, wobei bei natürlicher Wahl von x_0 als Kreismittelpunkt

und $|x(t)| = r$ wegen $|v(t)| = \omega r$ gilt $|L| = r m v = m r^2 \omega$. Die Richtung von \vec{L} ergibt sich aus der "rechte Hand Regel" (Daumen zeigt in Richtung des Drehimpulses wenn Impuls wie die Finger gegen den Uhrzeigersinn dreht).

Weiters hat ein bewegtes Teilchen eine **"kinetische Energie"**

$$\mathbf{E}_{\text{kin}} = T = m \frac{\vec{v}^2}{2} = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

(Natürlich ist die Frage interessant, in welchem Bezugssystem festgestellt wird, dass sich ein Teilchen bewegt – zB wenn wir ein Koordinatensystem wählen, dass sich mit dem Teilchen mitbewegt, hat es dann Null kinetische Energie!? Wenn es keinen „absoluten Raum“ gibt („Äther“) dann werden interessante mathematische Modelle benötigt, die Einstein gefunden hat.)

An dieser Stelle wollen wir auch gleich die **potentielle Energie der Höhe** einführen, die eine Masse m "besitzt", die auf die Höhe h gehoben ist:

$$\mathbf{E}_{\text{pot}} = m g h \quad ,$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung ist, an der Erdoberfläche ca $9,81 \text{ms}^{-2}$.

Bemerkung 1: Diese Formel ergibt sich aus der während des "Hebevorganges" verrichteten Arbeit gem. der oben eingeführten Formel $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ für den Fall, dass die "Schwerkraft" konstant mg ist, also g konstant ist von der Höhe Null auf die Höhe h . Im Allgemeinen ist das "Linienintegral" längs der "Hebekurve" zu nehmen $E_{\text{pot}} = W = \int_S m \vec{g} \cdot d\vec{s}$.

Bemerkung 2: das „Gewicht“ G einer Masse m ist eine Kraft: $G = mg$. Erstens ist das Gewicht damit eigentlich ein Vektor, so wie die Beschleunigung, und zweitens hat es nicht die Einheit kg , sondern $\text{Newton} = \text{kg ms}^{-2}$. Bedenken Sie, dass ein Astronaut der Masse 70 kg auf dem Mond „nur ein Sechstel wiegt wie auf der Erde“, weil eben die Gravitationsbeschleunigung an der Mondoberfläche nur $1/6$ ist im Vergleich zur Erde. Während des Raumfluges wiegt unser Astronaut nichts, er ist „schwerlos“, weil eben keine Schwerebeschleunigung auf ihn wirkt. Wir könnten eine „Schwerebeschleunigung“ durch Rotation des Raumschiffes künstlich erzeugen (vgl. etwa im Film „2001: A Space Odyssey“ von S. Kubrick.)

3.1 Kräfte und Newton'sche Gesetze.

Wenn auf ein Teilchen keine Kraft wirkt, dann bewegt es sich „unverändert“ „geradlinig“ mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Etwa so lautet das **1. Newton'sche Gesetz**. Dieses folgt (in einem Inertialsystem) natürlich aus dem 2. Newton'schen Gesetz, es ist als eigenes "1. Gesetz" auch im historischen Kontext zu sehen, dass sei Aristoteles das "Dogma" herrschte, dass ein "sich selbst überlassener Körper" (also "auf den keine Kraft wirkt") sich auf einer Kreisbahn bewegt

als die "vollkommene" ("göttliche") Bewegung. (Weshalb sich vor Kepler die Astronomen bemühten, die Planetenbewegungen mithilfe von "Epizyklen" zu erklären, also "Kreisen auf Kreisen auf Kreisen...", noch Kopernikus verwendete dies in seinem heliozentrischen Modell des "Sonnensystems").

Die *gleichförmige Kreisbewegung* ist "natürlich" eine beschleunigte Bewegung, wo sich die "*Zentripetalkraft*" und die "*Zentrifugalkraft*" genau aufheben und deshalb der Abstand zum Drehmittelpunkt zeitlich konstant ist und die Tangentialgeschwindigkeit sich laufend ändert, nämlich in der Richtung bei konstantem Betrag.

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also $d/dt \vec{v}(t)$, wird verursacht durch Kräfte (die sich nicht „aufheben“, die also in Summe keine „Resultierende“ $\vec{0}$ ergeben).

Der Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung ist das **2. Newton'sche Gesetz** $\vec{F} = m \vec{a} = m \dot{\vec{v}}(t) = \frac{1}{m} \dot{\vec{p}}(t)$, also obige Formel (3) bzw Gleichung (4). Für eindeutige Festlegung der „Trajektorie“ des Teilchens werden noch 2 weitere Informationen benötigt.

Meist Anfangsbedingungen an Ort und Geschwindigkeit wie in (5), (6).

Das **3. Newton'sche Gesetz** steht für das berühmte "actio est reactio" (oft auch im übertragenen Sinn verwendet): Übt das Teilchen 1 auf ein anderes Teilchen 2 eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich grosse, aber entgegen gerichtete Kraft von Teilchen 2 auf Teilchen 1 (reactio).

Für eine **Drehbewegung** um den Punkt x_0 ist das *Drehmoment* definiert als

$$\vec{M} = (\vec{x} - \vec{x}_0) \times \vec{F} \quad (7)$$

Für diese Drehbewegung entspricht dem 2. Newton'schen Gesetz $\vec{F} = \frac{1}{m} \dot{\vec{p}}(t)$ der *Eulersche Drehimpulssatz* = "*Drallsatz*": für die zeitliche Ändernderung des Drehimpuls \vec{L} gilt:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \vec{L} \quad (8)$$

3.1.1 Zentral-Kräfte und Newton'sches Potential.

Eine Zentralkraft ist eine Kraft, die sich schreiben lässt als $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} f$, mit einem skalaren f , das von der Länge von \vec{x} abhängen kann: $f = f(|\vec{x}|)$. Die Kraft wirkt also nur in Richtung einer (gedachten) Linie vom Punktteilchen zum "Kraftzentrum" (wobei dieses auch ein anderes Punktteilchen sein kann, also \vec{x} der "Verbindungsvektor").

Falls \vec{F} eine Zentralkraft ist, dann bleibt der Drehimpuls um das Zentrum erhalten.

Eine "Bahn" kann also nur in einer Ebene liegen und beim "Zwei-Körperproblem" gelten die "Kepler'sche Gesetze".

Newton'sches Potential

Für eine solche Kraft führt man ein skalares "Potential" $U(\vec{x})$ ein, so dass die Kraft der Gradient des Potentials ist :

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x}) . \quad (9)$$

(Das "Minus" vor dem Nabla(-Operator) hat historische Gründe (bzw führt es zur "symplektischen" "Poisson-Klammer", die dann bei der "Quantifizierung" zur "Kommutator-Klammer" wird...))

Die Einführung des Begriffes "Potential" als Ursache des "Kraftfelds" ist ein sehr hilfreiches Modell. Feld und Potential können natürlich auch von der Zeit abhängen, dann $U = U(\vec{x}, t)$. Bei gegebener Kraft ist das Potential natürlich nicht eindeutig festgelegt, die "Integrationskonstante" wird "Eichung" genannt.

Es gibt auch "Vektor-Potentiale", zB ist das *Magnetfeld* $\vec{B}(\vec{x})$ die Rotation des magnetischen Potentials : $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x})$, wobei "Coulomb-Eichung" oder "Lorentz-Eichung" verwendet wird zur Festlegung der "Integrationskonstanten".

Das wichtigste Potential ist das **"Newton'sche" Potential**:

$$U(\vec{x}) = \pm C \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad (10)$$

auch " $\frac{1}{r}$ - Potential" genannt. Dieses tritt z.B. bei der Gravitation, bzw der Elektrostatik auf.

Dann ist die "Kraft proportional zu 1 durch Quadrat der Entfernung", weil gilt:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \simeq \frac{1}{r^2}$$

Diese $\frac{1}{r^2}$ Wechselwirkungskräfte sind ein Modell, dass durch Experimente mit extrem hoher Genauigkeit bestätigt ist. Mathematisch ist es ein "Wunder", denn wenn das Potential nicht exakt $1/r$ wäre, sondern etwa $1/r^{0,9999}$, dann würden viele (mathematische) Resultate nicht gelten und die Materie würde sich anders verhalten.

3.2 N Teilchensysteme

Zur Modellierung der Kinetik von N Teilchen verwenden wir naheliegenderweise die Index-Notation : Masse und Ort des „i-ten“ Teilchens sind m_i und $\vec{x}_i(t)$, wobei die

Masse meist für alle Teilchen gleich ist (oder nur ein paar Arten von Teilchen). Dazu $\vec{v}_i(t)$, $\vec{p}_i(t)$ und $\vec{F}_i(t)$ als die Kraft auf das i-te Teilchen.

Wenn es nur „äussere“ Kräfte gibt, zB alle Teilchen im gleichen Schwerfeld oder im gleichen elektrischen Feld sind, dann sind die N Differentialgleichungen „entkoppelt“.

Interessanter ist der Fall, wo die Teilchen (paarweise) wechselwirken, zB Himmelskörper, die sich durch Gravitation anziehen oder elektrische Ladungen, die sich abstossen (gleiche Ladung, zB 2 Elektronen) oder anziehen (ein Elektron und ein Proton).

Damit wird die Differentialgleichung nichtlinear, denn die Kraft auf das i-te Teilchen $\vec{F}_i(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ hängt von allen Orten $\vec{x}_i(t)$ ab

Bei N Teilchen ergibt sich für die Kraft auf das i-te Teilchen als Summe der Kräfte mit allen anderen N-1 Teilchen

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \vec{F}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \quad (11)$$

Die kinetische Energie eines N Teilchen Systems ist die Summe aller einzelnen kinetischen Energien $E_{\text{kin},i} = T_i$:

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\vec{v}_i^2}{2} \quad (12)$$

Die potentielle Energie des gesamten N Teilchen Systems kann zwei Bestandteile haben:

a) einerseits die Summe der „Einteilchen-potentiellen Energien“ (zB die potentielle Energie jedes Teilchens in einem äusseren Potential $E_{\text{pot},ext}$ wie dem Schwerfeld),
b) andererseits die Doppelsumme als Summe aller einzelnen potentiellen Energien, wenn die Energie nur aus paarweisen Beiträgen additiv zusammengesetzt ist, die "Wechselwirkungen" $W(x_i, x_j)$. Dies ist der Standardfall. Dabei ist die potentielle Energie des i-ten Teilchens die Summe der Beiträge mit allen anderen N-1 Teilchen.

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^N E_{\text{pot},ext}(\vec{x}_i) + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N W(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \quad (13)$$

3.3 Erhaltung von Masse, (Dreh)Impuls und Energie.

Die folgenden Erhaltungssätze im Rahmen der „Teilchenmechanik“ tauchen in der „Kontinuumsmechanik“ wieder auf, wo sie die 1+3+1 partiellen Differentialgleichungen liefern, die als „konstituierende Gleichungen“ dann zB die 1+3 (in)kompressiblen

Navier Stokes Gleichungen ergeben. Wir werden die „Hydrodynamik“ dann später als eigenes „Modellierungskapitel“ genauer betrachten.

1) Massenerhaltung:

Wenn keine Teilchen erzeugt/vernichtet werden, ist die Gesamtmasse eines N Teilchensystems in der Zeit konstant:

$$\sum_{i=1}^N m_i = M = \text{const} \quad (14)$$

Beachte, dass dies auch bei “inelastischen Stößen” gilt, wo Teilchen “zusammenklumpen” und sich N auf N' ändert. (zB zwei Autos mit Masse m_1 und Masse m_2 können sich nach einem schweren Unfall als eine Masse $m_1 + m_2 = m'$ weiterbewegen.) Üblicherweise werden Größen nach dem Stoss mit einem Superskript "Strich" gekennzeichnet:

$$\sum_{i=1}^{N'} m'_i = M$$

2) Impulserhaltung:

Die Summe aller Impulse bleibt in der Zeit erhalten, sowohl bei elastischen Stößen, wo sich $\vec{p}_i(t)$ auf $\vec{p}'_i(t)$ ändert, als auch bei inelastischen Stößen:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) = \text{const} \quad \forall t = \sum_{i=1}^N \vec{p}'_i(t) = \sum_{i=1}^{N'} \vec{p}'_i(t), \quad N' \leq N \quad (15)$$

3) DrehImpulserhaltung:

Die Summe aller Drehimpulse bleibt in der Zeit erhalten, auch dies gilt sowohl bei elastischen als auch bei inelastischen Stößen:

$$\sum_{i=1}^N \vec{L}_i(t) = \text{const} \quad \forall t = \sum_{i=1}^N \vec{L}'_i(t) = \sum_{i=1}^{N'} \vec{L}'_i(t), \quad N' < N \quad (16)$$

4) Energieerhaltung:

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie bleibt in der Zeit erhalten, aber nur bei elastischen Stößen:

$$\sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N E_{pot, ext}(\vec{x}_i) + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N W(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \text{const} \quad \forall t \quad (17)$$

Bei inelastischen Stößen gilt dies nicht, in so einem Fall geht kinetische Energie verloren und wird in „Deformationsenergie“ / „Reibungsenergie“ gewandelt.

4 'Skalierung' = Entdimensionalisierung / 'Dimensionsanalyse'

Mit Mathematischen Modellen werden formale Zusammenhänge zwischen physikalischen (chemischen, biologischen,...) Größen oder anderen Modellgrößen hergestellt. Im ersten Schritt enthalten Modelle noch „(physikalische) Einheiten“, z.B. kann die unbekannte abhängige Funktion $v(x, t)$ eine Geschwindigkeit in „Kilometer pro Stunde“ sein, die unabhängige Variable x ist eine Länge, die in der Einheit Meter gemessen wird, die unabhängige Variable t hat die Einheit Zeit, die in Sekunden gemessen wird, etc. Weiters gibt es neben den (un)abhängigen „Variablen“ noch „Parameter“, die „beliebig, aber fest“ sind.

Natürlich müssen einerseits konsequent die gleichen Einheiten verwendet werden (obwohl diese Trivialität manchmal vergessen wird). Andererseits ist es nötig, die Gleichungen zu „entdimensionalisieren“, also die Einheiten durch „Skalieren“ wegzubekommen, um sinnvoll mathematische Analyse und numerische Rechnungen machen zu können. Dieses „Skalieren“ funktioniert ganz einfach: es werden alle unabhängigen Variablen und auch abhängige Variablen durch eine „Referenzgrösse“ mit der gleichen Einheit dividiert und es sind nicht nur die neuen Variablen dimensionslos, sondern auch „automatisch“ alle Parameter.

Dieses „Skalieren“ ist viel mehr als nur eine „Wahl der richtigen Einheiten“, wenn z.B. „atomare“ oder „astronomische“ Einheiten gewählt werden, wo „Angström“ $= 10^{-10}$ m oder „Lichtjahre“ $/ \approx 9,46 \cdot 10^{15}$ m als Längeneinheit genommen werden.

Weiters kann mit Hilfe der „Dimensionsanalyse“ der Zusammenhang verschiedener physikalischer Größen analysiert bzw. verifiziert werden. Sie bildet auch den Grundbaustein für die „Skalenanalyse“, welche in der Angewandten Mathematik als fundamentales Werkzeug zur Herleitung reduzierter Modelle für komplexe Problemstellungen dient und welche manchmal als „Asymptotische Analyse“ rigoros gemacht werden kann.

Im ersten Schritt der Skalierung werden alle auftretenden unabhängigen Variablen und Parameter zusammen mit ihren Dimensionen aufgelistet, weiters daraus gebildete mögliche Referenzgrößen. Im zweiten Schritt wird entdimensionalisiert, d.h. durch entsprechende Referenzgrößen dividiert. Dabei gibt es meist verschiedene Möglichkeiten und wir haben ausserdem immer die Möglichkeit, in der Problemstellung nicht erwähnte Referenzgrößen heranzuziehen. Die Vorgangsweise kann teils formalisiert werden, teils ist sie heuristisch.

Wir wollen die Methode anhand eines klassischen Beispiels erläutern.

Beispiel 1: Hoher senkrechter Wurf

Ein Körper wird von der Erdoberfläche senkrecht in grosse Höhe geworfen, also bei nichtkonstanter Gravitationskraft. Der Körper bewegt sich dabei entlang einer „Gerade“ durch Wurfpoint und Erdmittelpunkt und wir bezeichnen die Höhe, also

die Distanz von der Erdoberfläche, mit x^* (wir geben der unskalierten dimensionsbehafteten Länge den Superkript „Stern“). Wir möchten z.B. den Zeitpunkt berechnen, an dem der Körper wieder zur Erdoberfläche zurückkehrt.

Für ein vereinfachtes Modell nehmen wir nun an, dass nur die höhenabhängige Gravitation auf den Körper einwirkt und zusätzliche Kräfte wie z.B. der Luftwiderstand und die Corioliskraft vernachlässigt werden.

Die Gravitationskraft, die auf den Körper der Masse M in der Höhe x^* einwirkt, ist

$$F = -Mg \frac{R^2}{(x^* + R)^2}, \quad (18)$$

wobei R der Erdradius ist, $R \approx 6371\text{km}$ und g die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche, $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz ist $F = Ma = M \frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}}$, und der senkrechte Wurf wird als folgendes Anfangswertproblem formuliert :

$$\frac{d^2 x^*(t^*)}{dt^{*2}} = -g \frac{R^2}{(x^*(t^*) + R)^2} \quad (19)$$

$$x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V \quad (20)$$

wobei V die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet, mit der senkrecht nach oben „geworfen“ wird.

Gesucht ist nun jener Zeitpunkt $T^* > 0$, sodass

$$x^*(T^*) = 0.$$

In obiger Formulierung der Problemstellung tauchen die Zeit t^* als einzige unabhängige Variable und der Abstand $x^*(t^*)$ von der Erdoberfläche zum Zeitpunkt t^* als einzige abhängige Variable auf, dazu als Parameter die Masse M des Körpers sowie der Erdradius R , die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche g und die Anfangsgeschwindigkeit V .

Beachte dass

a) die Masse M des Körpers „sich herauskürzt“ und keine Rolle spielt, aber an sich ein Parameter des Problems ist,

b) g definiert ist als $g = \frac{GM_E}{R^2}$, wobei M_E die Erdmasse, $M \sim 5,9722 \cdot 10^{24}\text{kg}$ und $G \sim 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ die Gravitationskonstante ist, eine „Naturkonstante“.

Man könnte im folgenden also auch M , M_E und G als dimensionsbehaftete Parameter dazugeben.

Mit unserer Wahl basiert die „Dimensionsanalyse“ dieses Problems auf der Untersuchung des dreidimensionalen (g, R, V) -Parameterraums. \square

Die **Entdimensionalisierung** erfolgt in zwei Schritten:

Schritt 1: Auflistung aller Variablen und Parametern mit ihren Dimensionen.

Beispiel 1: Für die in diesem Beispiel auftretenden Variablen x^* , t^* und Parameter g, R, V haben wir folgende Einheiten:

Größe	Dimension	Einheit
x^*	Länge	m
t^*	Zeit	s
g	Beschleunigung	m/s ²
R	Länge	m
V	Geschwindigkeit	m/s

Wir bezeichnen im Folgenden die Einheiten einer Größe y^* mit $[y^*]$, sodass

$$[x^*] = [R] = \text{m}, \quad [t^*] = \text{s}, \quad [V] = \text{m/s}, \quad [g] = \text{m/s}^2.$$

Schritt 2: Division durch eine intrinsische Referenzgröße.

Für jede Variable wird als Nächstes eine intrinsische Referenzgröße ausgewählt, welche eine Kombination von Parametern derselben Einheit ist. Dadurch können nun die unabhängigen Variablen dividiert werden. Die Referenzgrößen sollten dabei so gewählt werden, dass sie den „erwarteten“ Größen der Variablen entsprechen.

Aus einer dimensionsbehafteten Größe y^* kann also eine dimensionslose Größe y gewonnen werden, indem durch eine Referenzgröße y_{ref} dividiert wird, welche die gleiche Dimension wie y^* hat:

$$y = \frac{y^*}{y_{\text{ref}}}.$$

Mit $[y_{\text{ref}}] = [y^*]$ folgt $[y] = 1$, d.h. y ist dimensionslos.

Nach Durchführen dieser Vorgehensweise sollte das Problem nur noch dimensionslose Größen enthalten, insbesondere auch *dimensionslose Parameter*, die eine dimensionslose Kombination der ursprünglichen Größen sind.

Beispiel 1: (Fortsetzung) In Beispiel 1 gibt es mehrere Möglichkeiten, die Referenzlänge und Referenzzeit durch die Parameter festzulegen.

Beispiel 1 - Skalierung 1 (mittels Parameter g und V)

Den Erdradius R in den Referenzgrößen zu vernachlässigen könnte man auch damit motivieren, dass unter Annahme einer 'relativ kleinen' Anfangsgeschwindigkeit der Erdradius keine große Rolle spielt (dann ist x^* klein im Vergleich zu R und somit die rechte Seite der Differentialgleichung in etwa $-g$).

Basierend auf g und V kommen somit nur V^2/g mit $[V^2/g] = \text{m}$ als Referenzlänge und V/g mit $[V/g] = \text{s}$ als mögliche Referenzzeit in Frage. Wir führen damit nun die dimensionslosen Variablen x und t

$$x = \frac{x^*}{V^2/g}, \quad t = \frac{t^*}{V/g}$$

ein. Genauer ausgedrückt bedeutet dies

$$x(t) := \frac{x^*(Vt/g)}{V^2/g}.$$

Für die Entdimensionalisierung des Anfangwertproblems berechnen wir nun im ersten Schritt die Ableitungen für $x^* = \frac{V^2}{g}x$:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt^*} &= \frac{dx^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{V^2}{g} \frac{dx}{dt} \frac{1}{V/g} = V \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} &= \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dx^*}{dt^*} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^*}{dt^*} \right) \frac{dt}{dt^*} = V \frac{d^2x}{dt^2} \frac{1}{V/g} = g \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem (19)-(20) lautet nun in skaliert Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{(\varepsilon x + 1)^2} \\ x(0) &= 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1 \end{aligned}$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$\varepsilon = \frac{V^2}{gR}. \quad (21)$$

An dieser Stelle können wir nun konkretisieren, was mit 'relativ klein' oben im Beispiel gemeint war, nämlich dass V klein ist im Vergleich zu \sqrt{gR} , d.h. $V \ll \sqrt{gR}$ bzw. $\varepsilon \ll 1$. Im skalierten Problem wurde die Anzahl der auftretenden Parameter somit auf 1 reduziert. \square

4.1 Grundlagen der Dimensionsanalyse

Wir wollen nun auf die allgemeine Vorgehensweise bei der Entdimensionalisierung in obigem Schritt 2 näher eingehen.

Die Methode der Entdimensionalisierung basiert auf folgender Behauptung bzgl. dimensionsbehafteter Variablen und Parameter, was als **Axiom der Dimensionsanalyse** angesehen werden kann (auch bekannt als Buckingham-II-Theorem):

Theorem 1. *Mathematische Modelle für physikalische (chemische, biologische, ökonomische, ...) Phänomene können in dimensionslose Form gebracht werden. Dimensionslose Parameter und intrinsische Referenzgrößen können als Produkte von Potenzen der ursprünglichen Parameter gewählt werden.*

Eigentlich sind die Voraussetzungen des Theorems zu ungenau formuliert um diese Bezeichnung zu rechtfertigen. Wir wollen an dieser Stelle nur festhalten, dass diese Formulierung auch präzisiert und unter gewissen Annahmen auch bewiesen werden kann. Dieser Satz hat allerdings starke Auswirkungen. Er erlaubt uns sogar, die für ein Problem in Frage kommenden Referenzgrößen und dimensionslosen Parameter ohne Kenntnis eines mathematischen Modells nur aus einer Liste der Variablen und Parameter zu bestimmen.

Typischerweise gibt es gewisse Beziehungen zwischen Dimensionen der Variablen und Parameter, wie z.B. Geschwindigkeit = Länge / Zeit. Dies zeigt sich sobald alle Dimensionen mittels bestimmter fundamentaler Einheiten dargestellt werden.

Um also eine Dimensionsanalyse durchführen zu können, muss zunächst ein **Einheitensystem** für die Grundeinheiten festgelegt werden. Das international am häufigsten verwendete Einheitensystem ist das sogenannte *SI-System*:

SI Basiseinheit		Basisgröße	
Name	Zeichen	Name	Symbol
Meter	m	Länge	l
Kilogramm	kg	Masse	m
Sekunde	s	Zeit	t
Ampere	A	Stromstärke	I
Kelvin	K	Temperatur	T
Mol	mol	Stoffmenge	w
Candela	cd	Lichtstärke	I_v

Das *CGS-System* hingegen basiert auf den Einheiten

Zentimeter (cm), Gramm (gr), Sekunde (s).

Üblicherweise wird die Einheit Gramm mit 'g' abgekürzt. Wir verwenden im Folgenden 'gr', damit es nicht zu Verwechslungen mit der Gravitationsbeschleunigung g kommt.

Wie wir bereits in obigen Beispielen gesehen haben, sind für Modelle aus der Mechanik meist die 3 fundamentalen Dimensionen **Länge, Masse und Zeit** ausreichend. Wir nehmen der Einfachheit halber für folgende Herleitungen ebenfalls an, dass diese 3

Dimensionen hinreichend für die Beschreibung des Problems sind und bezeichnen die Dimensionen Länge, Masse und Zeit mit

$$L, \quad M \quad \text{und} \quad T.$$

Im CGS-System würde dies den Einheiten cm, gr, s entsprechen.

Nehmen wir nun an, wir haben ein Problem mit N Parametern

$$\alpha_1, \dots, \alpha_N$$

mit zugehörigen Dimensionen $[\alpha_1], \dots, [\alpha_N]$. Nach Theorem 1 können diese dargestellt werden als

$$[\alpha_k] = L^{l_k} M^{m_k} T^{t_k},$$

wobei $(l_k, m_k, t_k) \in \mathbb{R}^3$, $k = 1, \dots, N$. Daher wird die Dimension einer Größe charakterisiert durch einen 3-dimensionalen Vektor. Für die Geschwindigkeit(=Länge/Zeit) lautet dieser $(1, 0, -1)$.

Sei nun α eine intrinsische Referenzgröße oder ein dimensionsloser Parameter, dessen Dimension charakterisiert ist durch (l, m, t) . Nach Theorem 1 existieren $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, sodass

$$\alpha = \prod_{k=1}^N \alpha_k^{a_k}.$$

Betrachtet man die entsprechende Gleichung für die Dimensionen, so erhält man

$$L^l M^m T^t = \prod_{k=1}^N L^{a_k l_k} M^{a_k m_k} T^{a_k t_k} = L^{\sum a_k l_k} M^{\sum a_k m_k} T^{\sum a_k t_k},$$

Exponentenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^N a_k l_k = l, \quad \sum_{k=1}^N a_k m_k = m, \quad \sum_{k=1}^N a_k t_k = t,$$

für den Exponentenvektor (a_1, \dots, a_N) . Lösbarkeit dieses Gleichungssystems wird durch Satz 1 garantiert, wenn α die Dimension einer Variablen hat. Sucht man nach dimensionslosen Parametern, die dem Exponentenvektor $(0, 0, 0)$ entsprechen, so muss man das entsprechende homogene System betrachten, wobei gilt: *Die Anzahl N^* der relevanten dimensionslosen Parameter ist gleich der Dimension des Kerns der Koeffizientenmatrix*

$$\begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_N \\ m_1 & \dots & m_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix}. \quad (22)$$

und somit $N - 3 \leq N^* \leq N$. Zwei linear abhängige Elemente des Kerns entsprechen zwei dimensionslosen Parametern β und γ , wobei einer in Form des anderen ausgedrückt werden kann, $\gamma = \beta^\lambda$.

Die Anzahl der Parameter wird im Zuge der Entdimensionalisierung immer reduziert ($N^* < N$) solange die Matrix (22) nicht die Nullmatrix ist, d.h. solange nicht alle ursprünglichen Parameter bereits dimensionslos waren.

Beispiel 1 - Skalierung 1 (Fortsetzung): Im Beispiel des senkrechten Wurfs lautet die zugehörige Exponentenmatrix für die Parameter (g, R, V) , wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei die Zeilen wieder den Einheiten m, kg, s entsprechen und die Spalten den Parametern g, R, V . Diese Matrix hat Rang 2. Daher wäre auch ohne Kenntnis der Modellgleichungen die Aussage möglich gewesen, dass das dimensionslose Problem nur einen Parameter enthält. Der Parameter $\varepsilon = V^2/(gR)$ entspricht dabei dem Element $(-1, -1, 2)$ des Kerns.

Die zweite Zeile hat keinen Einfluss auf das Resultat, da offensichtlich die fundamentale Dimension *Masse* keine Rolle spielt.

In diesem Beispiel gibt es mehrere Möglichkeiten um die intrinsischen Referenzgrößen auszuwählen. Wir wollen daher nun auch andere Skalierungen betrachten.

Beispiel 1 - Skalierung 2 (mittels Parameter R und V)

Alternativ zur Skalierung 1 kann auch eine Entdimensionalisierung der Variablen unter Verwendung der Parameter R und V durchgeführt werden:

$$y = \frac{x^*}{R}, \quad \tau = \frac{t^*}{R/V}.$$

Eine entsprechende Entdimensionalisierung des Anfangswertproblems liefert folgendes dimensionsloses Modell für $y(\tau)$:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(y+1)^2}, \quad (23)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 1 \quad (24)$$

wobei ε derselbe dimensionslose Parameter wie in (21) ist.

Beispiel 1 - Skalierung 3 (mittels Parameter R und g)

Eine weitere Möglichkeit ist die Entdimensionalisierung wie folgt durchzuführen:

$$z = \frac{x^*}{R}, \quad \sigma = \frac{t^*}{\sqrt{R/g}},$$

Das entdimensionalisierte Anfangswertproblem lautet in diesem Fall

$$\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad (25)$$

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz}{d\sigma}(0) = \sqrt{\varepsilon} \quad (26)$$

wobei ε wiederum derselbe dimensionslose Parameter wie in (21) ist.

Die entdimensionalisierten Anfangswertprobleme für die drei unterschiedlichen Skalierungen sind äquivalent solange $\varepsilon > 0$ fixiert ist. Im nächsten Kapitel werden wir allerdings sehen, dass die Modelle sehr unterschiedliche asymptotische Eigenschaften für $\varepsilon \ll 1$ aufzeigen.

Wie weiter oben bereits erwähnt muss für die Entdimensionalisierung eigentlich nicht das genaue Modell bekannt sein, sondern nur die Liste der Variablen und Parameter. Wir wollen dies nun am Beispiel des Pendels demonstrieren.

Beispiel 2: Pendel

Gelingt es bei der Konstruktion eines Pendels, die Reibungseffekte weitgehend zu eliminieren, kann man (annähernd) periodische Schwingungen beobachten. Die Periodendauer T^* einer solchen Schwingung werden wir im Folgenden berechnen. Dazu nehmen wir an, dass der Anfangszustand des Pendels in horizontaler Lage ist und das Pendel keine Geschwindigkeit hat. Nun wird das Pendel durch Einwirken der Gravitation beschleunigt.

Für die Beschreibung der Bewegung eines solchen idealisierten reibungsfreien Pendels sind folgende Größen relevant: die Länge des Pendels L , die Masse am Ende des Pendels M , die Gravitationsbeschleunigung g , die Periode des Pendels T^* .

Für die folgenden Herleitungen treffen wir nun die Annahmen: (i) Die Länge des Pendels ist klein im Vergleich zu seinem Abstand vom Erdmittelpunkt. (ii) Die Gravitationsbeschleunigung g sei konstant. (iii) Die Masse der Pendelstange sei klein im Vergleich zur Masse M am Ende des Pendels, sodass die Masse der Stange vernachlässigt werden kann.

Es ist plausibel, dass die gesuchte Periode T^* nur von den Größen L, M, g abhängt und wir erhalten somit das Modell:

$$T^* = f^*(L, M, g). \quad (27)$$

Im ersten Schritt werden die Einheiten aller auftretenden Größen aufgelistet. Im CGS-System erhalten wir:

$$[T^*] = \text{s}, \quad [L] = \text{m}, \quad [M] = \text{kg}, \quad [g] = \text{m/s}^2.$$

Im nächsten Schritt wollen wir T^* entdimensionalisieren, d.h. gesucht ist ein skaliertes T^* , bezeichnet mit T , welches dimensionslos ist mit $[T] = 1$. Dazu betrachten wir folgenden Ansatz

$$s = [T^*] = [L^{\beta_1} M^{\beta_2} g^{\beta_3}] = \text{m}^{\beta_1} \text{kg}^{\beta_2} \text{m}^{\beta_3} \text{s}^{-2\beta_3}$$

woraus für die Exponenten folgt

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{1}{2},$$

und somit $[T^*] = [\sqrt{L/g}]$. Aufgrund der Invertierbarkeit der Matrix (22), wo die Zeilen den Einheiten (m, kg, s) entsprechen und die Spalten den Parametern (L, M, g) ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

folgt, dass keine dimensionslosen Parameter vorhanden sind. Das dimensionslose Problem und damit auch dessen Lösung T sind also von den Parametern unabhängig. Die eindeutige intrinsische Referenzzeit $\sqrt{L/g}$, wie oben bereits berechnet, erhält man auch von

$$(0, 0, 1) = -\frac{1}{2} \underbrace{(1, 0, -2)}_g + \frac{1}{2} \underbrace{(1, 0, 0)}_L$$

Damit gilt weiters

$$T = \frac{T^*}{[T^*]} = \sqrt{\frac{g}{L}} T^*$$

und es folgt insbesondere, dass

$$T = f(L, M, g) := \sqrt{\frac{g}{L}} \underbrace{f^*(L, M, g)}_{T^*}$$

dimensionslos ist, d.h. $[T] = 1$. Das bedeutet allerdings, dass sich der Wert von f nicht ändert, wenn wir eine oder mehrere der Grundeinheiten ändern. Somit *muss f konstant sein*, d.h. $T = f = \text{konstant}$. Dies impliziert weiters, dass eine dimensionslose Konstante T existiert, sodass $T^* = \sqrt{\frac{L}{g}} T$. Bis auf die Bestimmung der Konstante T haben wir das Problem also gelöst. Diese kann z.B. durch ein Experiment mit einem einzigen Pendel bestimmt werden.

Aus dieser Formel ist insbesondere auch ersichtlich, dass *die Periode des Pendels unabhängig von der Masse* sein muss (Isochronismus des Pendels, Galileo Galilei).

5 Modellhierarchien: Störungsmethoden / Asymptotische Entwicklungen

Die 'Skalenanalyse' ist die Grundlage, um 'Modellhierarchien' herzuleiten, wo ein kleiner Parameter ε vom 'exakten' Modell zum 'reduzierten' Modell ($\varepsilon = 0$) der Genauigkeit $O(\varepsilon)$ führt, mit einer Hierarchie von 'Näherungsmodellen' der Genauigkeiten $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^3)$,... "dazwischen".

In einem 'richtig' skalierten exakten Modell können Größenordnungen der einzelnen Terme verglichen werden, so dass man vernünftige "kleine Parameter" identifizieren kann und so durch das Vernachlässigen kleiner Terme zu Näherungen kommt.

Dieses Verfahren lässt sich erweitern auf Situationen mit mehr als einem kleinen Parameter im exakten Modell, und verallgemeinern für kompliziertere Situationen als nur eine simple 'asymptotische Entwicklung' um die reduzierte Lösung im Fall einer 'regulären' Störung.

Auch wenn 'asymptotische Reihen' oft mithilfe von "Taylor-Reihen" gewonnen werden, sind sie verschiedene Dinge !

Wir betrachten zunächst wieder unser Beispiel des hohen senkrechten Wurfs:

Beispiel: Hoher senkrechter Wurf

Falls $V^2 \ll gR$, so ist der Parameter ε gem Definition (4) in der Skalierung 1 klein, d.h.

$$\varepsilon \ll 1.$$

(Bemerkung: mit $R \sim 6371\text{km}$ und $g = 9.81\text{m/s}^2$ ist dies erfüllt falls $V \ll 7900\text{m/s}$). Wir wollen nun die Kleinheit des Parameters ε bei der Lösung des Problems nutzen. Hier könnte man hoffen, dass man ein geeignetes Näherungsproblem erhält, wenn man im skalierten Problem die zu dem kleinen Parameter gehörenden Terme nicht berücksichtigt, indem man diesen null setzt: $\varepsilon = 0$. Das so für $\varepsilon = 0$ erhaltene Problem nennt man das *reduzierte Problem*.

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, lässt eine unterschiedliche Wahl von Referenzgrößen offensichtlich den dimensionslosen Parameter an verschiedenen Stellen auftreten. Die so entstandenen (dimensionslosen) Probleme werden deshalb zu unterschiedlichen *reduzierten Problemen* führen. Wir werden am Beispiel sehen, dass nicht jedes eine sinnvolle Annäherung darstellt. Die verschiedene Skalierungen unterscheiden sich also grundsätzlich, wenn man zum reduzierten Problem übergeht. Wir werden auf die gute Wahl 'hinunterzählen'.

Skalierung 3 (R und g): Falls wir in Gleichung (7)-(8) den Parameter $\varepsilon = 0$ setzen, erhalten wir das reduzierte Problem (hier bezeichnen wir die Unbekannte

mit z_0)

$$\frac{d^2 z_0}{d\sigma^2} = -\frac{1}{(z_0 + 1)^2},$$

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz_0}{d\sigma}(0) = 0$$

Hier ist die Anfangsgeschwindigkeit 0. Da aufgrund der Differentialgleichung die Beschleunigung negativ ist, ist auch die Lösung des reduzierten Problems für $\varepsilon = 0$ negativ. Dies ist allerdings nicht zulässig, da es bedeuten würde, dass sich der nach oben geworfene Körper von Anfang an nach unten bewegt. Damit scheint dieses Problem keine sinnvolle Näherung zu liefern.

Skalierung 2 (R und V): In diesem Fall, Gleichung (5)-(6), tritt der Parameter ε vor der zweiten Ableitung auf. Das reduzierte Problem für $\varepsilon = 0$ ist:

$$0 = -\frac{1}{(y_0 + 1)^2},$$

$$y_0(0) = 0, \quad \frac{dy_0}{d\tau}(0) = 1$$

Es hat offensichtlich keine Lösung und stellt somit natürlich ebenfalls kein geeignetes Näherungsproblem dar.

Skalierung 1 (V und g):

Das reduzierte Problem für die (im vorigen Kapitel zuerst behandelte) Skalierung 1, die unter Verwendung von g und V vorgenommen wurde, ist

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = -1$$

$$x_0(0) = 0, \quad \frac{dx_0}{dt}(0) = 1$$

($\varepsilon = 0$ im skalierten Problem für x), wobei die Unbekannte hier mit x_0 bezeichnet wird. Einsetzen der Randwerte in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x_0(t) = a + bt - t^2/2$ liefert $a = 0$ und $b = 1$. Somit hat dieses Problem die Lösung

$$x_0(t) = t - \frac{t^2}{2}.$$

Diese Skalierung ergibt als einzige der drei Möglichkeiten eine sinnvolle Lösung, die einen Kandidaten für eine Näherung darstellt. Skalierung 1 ist also die einzig sinnvolle Wahl, falls durch ein reduziertes Problem eine brauchbare Näherung des vollständigen Problems gewonnen werden soll.

Eine in diesem Sinn 'gute' Skalierung ist eine, bei der die Variablen und ihre auftretenden Ableitungen von Ordnung 1 sind, so dass die Größenordnungen aller Terme nur durch die (kleinen) dimensionslosen Parameter bestimmt sind.

Aus der Näherung kann nun der Aufschlagzeitpunkt berechnet werden, an dem der Körper wieder zur Erdoberfläche zurückkehrt:

$$x_0(T_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = 0 \quad \text{oder} \quad T_0 = 2.$$

Hierbei handelt es sich um mit $t^* = tV/g$ skalierte Zeiten, sodass die Näherung für den tatsächlichen Aufschlagzeitpunkt lautet

$$T_0^* = \frac{2V}{g}.$$

Diese Näherung entspricht der vereinfachenden Annahme, dass die durch die Gravitation verursachte Beschleunigung unabhängig vom Abstand zur Erdoberfläche ist. Dieser Bezug zum physikalischen Modell ist ein weiterer Hinweis dafür, dass die so gewonnene Näherung eine sinnvolle ist.

In diesem Fall scheint somit das reduzierte Problem eine sinnvolle Lösung aufzuweisen. Nun stellt sich also die Frage, ob diese auch wirklich eine Approximation für die Lösung des vollen Problems darstellt.

Bevor wir näher auf die Frage eingehen, ob aus der Existenz einer formalen Näherungslösung x_0 für das reduzierte Problem auf die Existenz einer Lösung x_ε des ursprünglichen Problems und deren Konvergenz gegen x_0 für $\varepsilon \rightarrow 0$ geschlossen werden kann, beschäftigen wir uns zunächst noch mit der Berechnung von Korrekturtermen, um die Genauigkeit der Approximation x_0 zu verbessern.

5.1 Asymptotische Entwicklungen

Wir wollen als nächsten Schritt im exakten Modell den Term der Größenordnung ε nicht völlig vernachlässigen wie im reduzierten Problem, sondern eine Reihenentwicklung für die Lösung bezüglich ε vornehmen, um bessere Approximationen zu erhalten. Bevor wir diese Methode der asymptotischen Entwicklung zunächst an einem einfachen Beispiel demonstrieren, sollte hier noch die asymptotische Entwicklung definiert werden. Insbesondere benötigen wir für die folgenden Herleitungen die sogenannten Landau-Symbole, die den Begriff der Größenordnung präzisieren:

Definition 1 (Landau-Symbole). Seien $f(\varepsilon), g(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

- a) $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt genau dann, wenn es eine (von ε unabhängige) Konstante $K > 0$ gibt, sodass $|f(\varepsilon)| \leq K|g(\varepsilon)|$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ gilt.
- b) $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt genau dann, wenn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |f(\varepsilon)/g(\varepsilon)| = 0$ gilt.

Etwas anschaulicher formuliert bedeutet $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$, dass f nicht wesentlich schneller wächst als g , und $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$, dass f langsamer wächst als g für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Beispiel: Sei $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Für $g(\varepsilon) = \varepsilon$ gilt dann $f = o(g)$, und für $g(\varepsilon) = -2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ gilt $f = O(g)$.

Definition 2 (Asymptotisch äquivalent). Für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ seien x_ε und y_ε Elemente eines normierten Raumes $(B, \|\cdot\|)$, die von ε abhängen. Dann bezeichnen wir x_ε und y_ε als asymptotisch äquivalent für $\varepsilon \rightarrow 0$, wenn gilt

$$\|x_\varepsilon - y_\varepsilon\| = o(\|y_\varepsilon\|) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

d.h. wenn der relative Fehler bei der Approximation von x_ε durch y_ε (und umgekehrt) für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0 geht.

Der Ausdruck „äquivalent“ ist gerechtfertigt, da man leicht zeigen kann, dass die obige Definition symmetrisch bzgl. x_ε und y_ε ist.

Betrachtet man y_ε als Approximation für x_ε , so wird y_ε auch als *asymptotische Näherung* für x_ε bezeichnet.

Beispiel: Sei $B = \mathbb{R}$ und $x_\varepsilon = x(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$. Dann ist jede der Funktionen

$$y(\varepsilon) = \varepsilon, \quad y(\varepsilon) = \varepsilon + 2\varepsilon^2, \quad y(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3$$

eine asymptotische Näherung von $x(\varepsilon)$, denn es gilt ja die Entwicklung

$$x(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5)$$

Beispiel 3: Sei $B = C([0, 1])$, und die reelle Funktion $x_\varepsilon \in B$, $x_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x_\varepsilon(t) = t + \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Für positive $t > 0$ konvergiert $x_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen $x_0(t) = t$. Für $t = 0$ hingegen ist 1 eine asymptotische Näherung, siehe Abbildung 5.3.1.

Betrachtet man x_ε als Element des Banachraums $C([0, 1])$ mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|,$$

dann ist x_0 nicht asymptotisch äquivalent mit x_ε , da gilt

$$\|x_\varepsilon - x_0\|_\infty = x_\varepsilon(0) - x_0(0) = 1, \quad \|x_0\|_\infty = 1$$

Es gibt also keine von ε unabhängige asymptotische Näherung für x_ε .

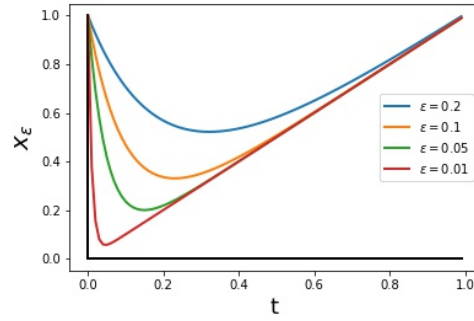


Figure 1: Die Funktion $x_\varepsilon(t)$ in $[0, 1]$ für $\varepsilon = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$

Bsp. 3a: Wählt man hingegen $B = L^p((0, 1))$, mit $1 \leq p < \infty$, als zugrunde liegenden Banachraum und dasselbe $x_\varepsilon(t)$, erhält man ein anderes Ergebnis. Die Norm hier ist die Integralnorm

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Für $p = 1$ gilt

$$\|x_\varepsilon - x_0\|_1 = \int_0^1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}} dt = -\varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \Big|_0^1 \leq \varepsilon, \quad \|x_0\|_1 = \frac{1}{2}.$$

Damit ist x_0 eine asymptotische Näherung an x_ε , im Sinne der L^1 -Norm. Die Anforderungen an die Qualität der Näherung sind hier offensichtlich geringer. \square

Definition 3 (Asymptotische Entwicklung (nach Potenzen von ε)). Seien $x_k \in B$ und es gelte $\|x_k\| = O(1)$ für $k = 0, 1, \dots$. Dann heißt die formale Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k$$

formale asymptotische Entwicklung von x_ε nach Potenzen von ε , falls gilt

$$\left\| x_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k \right\| = o(\varepsilon^n) \quad n = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Es wird auch folgende Schreibweise verwendet

$$x_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k$$

Gilt (39) nur für $n = 0, \dots, N$, spricht man von einer asymptotischen Entwicklung der Ordnung N .

Besteht kein Zweifel über die verwendete Norm, wird (39) auch ohne Norm angeschrieben.

Der Satz von Taylor impliziert, dass Größen, deren Ableitungen *nach* ε bis zur Ordnung $N + 1$ in einer Umgebung um $\varepsilon = 0$ beschränkt sind, asymptotische Entwicklungen der Ordnung N besitzen, deren Koeffizienten unabhängig von ε sind. Diese Koeffizienten haben dann die Form

$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k x_\varepsilon}{d\varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0}.$$

In diesem Fall kann die rechte Seite von (39) durch $O(\varepsilon^{N+1})$ ersetzt werden.

Asymptotische Entwicklung vs. Taylor-Entwicklung:

Asymptotische Entwicklungen und Taylorentwicklungen unterscheiden sich grundsätzlich darin, dass man bei asymptotischen Entwicklungen am Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ bei fester Ordnung N interessiert ist, während bei Taylorentwicklungen die Konvergenz einer unendlichen Reihe mit $N \rightarrow \infty$ für festes ε untersucht wird: $\varepsilon \rightarrow 0$ vs. $N \rightarrow \infty$

Es gibt auch Funktionen, für die asymptotische Entwicklungen zu beliebiger Ordnung existieren können, obwohl die entsprechenden unendlichen Reihen für jedes $\varepsilon > 0$ divergieren.

Wir betrachten nun als erstes ein einfaches Beispiel aus der Algebra.

Beispiel A1 aus der Algebra

Gesucht sind die beiden Nullstellen des Polynoms

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 0.001 \ll 1$$

welche wir nun durch eine Reihentwicklung in der Form

$$x_\varepsilon \sim x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

annähern möchten. Einsetzen der Reihenentwicklung liefert

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) - 1 = 0$$

und somit

$$x_0^2 + 2\varepsilon x_0 x_1 + \varepsilon^2(2x_0 x_2 + x_1^2) + \underbrace{\dots}_{O(\varepsilon^3)} + 2\varepsilon x_0 + 2\varepsilon^2 x_1 + \underbrace{\dots}_{=O(\varepsilon^3)} - 1 = 0$$

Wir sammeln nun die Terme gleicher Größenordnungen. Zu $O(1)$ erhalten wir dabei die Gleichung

$$x_0^2 - 1 = 0$$

mit den Lösungen $x_0 = \pm 1$. Diese Gleichung zu führender Ordnung hat somit insbesondere genauso viele Lösungen wie das ursprüngliche Problem. Wie wir im

nächsten Abschnitt sehen werden, handelt es sich hier um ein regulär gestörtes Problem.

Die Terme der Ordnung $O(\varepsilon)$ liefern die Gleichung

$$2x_0x_1 + 2x_0 = 0, \quad \text{sodass} \quad x_1 = -1.$$

Zur Ordnung $O(\varepsilon^2)$ erhalten wir weiters

$$2x_0x_2 + x_1^2 + 2x_1 = 0, \quad \text{sodass} \quad x_2 = \frac{1}{2x_0} = \pm \frac{1}{2}.$$

Die Näherungen 2. Ordnung $x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$ lauten somit für die beiden Lösungen

$$1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{und} \quad -1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Die Zahlenwerte für die Näherungen sind:

x_0	$x_0 + \varepsilon x_1$	$x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$	exakte Lösungen
1	0.999	0.9990005	0.9990005...
-1	-1.001	-1.0010005	-1.0010005...

Beispiel: Senkrechter Wurf - Skalierung 1 (Fortsetzung)

Wir kehren nun zum Beispiel des Senkrechten Wurfs zurück

$$x'' = -\frac{1}{(\varepsilon x + 1)^2}, \tag{29}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \tag{30}$$

wobei $x' = \frac{dx}{dt}$. Einsetzen der asymptotischen Entwicklung von x

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3)$$

in das Anfangswertproblem (29)-(30) liefert

$$\begin{aligned} x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + O(\varepsilon^3) &= -(1 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + O(\varepsilon^4))^{-2}, \\ x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + O(\varepsilon^3) &= 0, \\ x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + O(\varepsilon^3) &= 1. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun für die rechten Seite der Differentialgleichung die Reihenentwicklung

$$-(1 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 + O(\varepsilon^4))^{-2} = -1 + \varepsilon 2x_0 + \varepsilon^2(2x_1 - 3x_0^2) + O(\varepsilon^3)$$

und vergleichen zuerst die Koeffizienten der Ordnung $O(\varepsilon^0) = O(1)$:

$$x_0'' = -1, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0'(0) = 1.$$

Für die Koeffizienten zur Ordnung $O(\varepsilon^1)$ erhalten wir:

$$x_1'' = 2x_0, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Und weiters für die Koeffizienten der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ gilt:

$$x_2'' = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = x_2'(0) = 0.$$

Das reduzierte Problem zur Ordnung $O(1)$ wurde bereits gelöst:

$$x_0(t) = t - \frac{t^2}{2}.$$

Zu erster und zweiter Ordnung erhalten wir dann weiters als Lösungen:

$$x_1(t) = \frac{t^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4}t\right), \quad x_2(t) = -\frac{t^4}{4} \left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right),$$

Somit lautet die formale Entwicklung

$$x(t) = t - \frac{t^2}{2} + \varepsilon \frac{t^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4}t\right) - \varepsilon^2 \frac{t^4}{4} \left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right) + O(\varepsilon^3). \quad (31)$$

Um nun eine Approximation für die Zeit T zu erhalten, zu der der Körper wieder auf der Erdoberfläche auftritt, machen wir auch für T einen Ansatz der Form

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\varepsilon^2).$$

setzen diesen nun in die Entwicklung von x ein und fassen erneut die Terme gleicher Größenordnung zusammen

$$x(T) = \frac{T_0}{2}(2 - T_0) + \varepsilon \left((1 - T_0)T_1 + \frac{T_0^3}{3} \left(1 - \frac{T_0}{4}\right) \right) + O(\varepsilon^2).$$

Durchführen eines Koeffizientenvergleichs in der Gleichung $x(T) = 0$ liefert nun $T_0 = 2$, $T_1 = 4/3$, und somit

$$T = 2 + \frac{4}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Eine positive Korrektur zu führender Ordnung scheint plausibel, da das volle Problem eine schwächere Gravitation hat als die Approximation zu führender Ordnung, sodass angenommen werden kann, dass das Objekt höher und länger fliegen kann. \square

Die Existenz einer asymptotischen Entwicklung ist a priori nicht garantiert. Für eine mathematisch abgesicherte Modellbildung ist es daher notwendig, das Ergebnis der

formalen asymptotischen Entwicklung zu rechtfertigen, zum Beispiel durch *Herleiten einer Fehlerabschätzung* in der Form

$$\left| x_\varepsilon(t) - \sum_{j=0}^N \varepsilon^j x_j(t) \right| \leq C_N \varepsilon^{N+1}.$$

Beispiel: Senkrechter Wurf (Fehlerabschätzung)

Wir wollen dies am Beispiel des senkrechten Wurfs für $N = 1$ demonstrieren:

$$|x_\varepsilon(t) - x_0(t) - \varepsilon x_1(t)| \leq C\varepsilon^2, \quad (32)$$

und zwar für $t \in (0, t_0)$ für ε klein genug, d.h. $\varepsilon < \varepsilon_0$, wobei ε_0 noch zu spezifizieren ist. Als erstes konstruieren wir eine Differentialgleichung für den *Fehler*

$$z_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - x_0(t) - \varepsilon x_1(t).$$

Aus den Differentialgleichungen für x_ε , x_0 und x_1 folgt

$$z_\varepsilon''(t) = 2\varepsilon z_\varepsilon(t) + \varepsilon^2 R_\varepsilon(t) \quad (33)$$

mit

$$R_\varepsilon(t) = -\frac{3x_\varepsilon^2(t)}{(1 + \varepsilon \vartheta x_\varepsilon(t))^4} + 2x_1(t)$$

für $\vartheta \in [0, 1]$. Zusätzlich gelten die homogenen Randbedingungen

$$z_\varepsilon(0) = 0 \quad z_\varepsilon'(0) = 0.$$

Um $R_\varepsilon(t)$ abzuschätzen, benötigen wir untere und obere Schranken für $x_\varepsilon(t)$. Diese können wir aus der Differentialgleichung für $x_\varepsilon(t)$ zusammen mit folgender Darstellung herleiten:

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= x_\varepsilon(0) + \int_0^t x_\varepsilon'(\tau) d\tau = \int_0^t \left(x_\varepsilon'(0) + \int_0^\tau x_\varepsilon''(s) ds \right) d\tau \\ &= t + \int_0^t \int_0^\tau x_\varepsilon''(s) ds d\tau \end{aligned}$$

wobei wir die Anfangsbedingungen $x_\varepsilon(0) = 0$ und $x_\varepsilon'(0) = 1$ verwendet haben.

Sei nun $t_\varepsilon := \inf\{t \mid t > 0, x_\varepsilon(t) < 0\}$. Offensichtlich folgt dann aus der Differentialgleichung für x_ε dass $x_\varepsilon''(t) \geq -1$ für $0 < t < t_\varepsilon$ und damit auch

$$x_\varepsilon(t) \geq t - \frac{1}{2}t^2.$$

Aufgrund der Stetigkeit von x_ε folgt insbesondere $t_\varepsilon \geq 2$. Wegen $x_\varepsilon''(t) \leq 0$ für $t < t_\varepsilon$ gilt auch $x_\varepsilon(t) \leq t$ für $t < t_\varepsilon$. Sei nun $t_0 \leq t_\varepsilon$ fest gewählt, zum Beispiel $t_0 = 2$. Dann gilt für $t < t_0$, dass $x_\varepsilon(t) \geq 0$ und somit insbesondere auch

$$|R_\varepsilon(t)| \leq 3|x_\varepsilon(t)|^2 + 2|x_1(t)| \leq C_1$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(t_0)$.

Zu einem $C_0 > 0$ definieren wir nun eine weitere Zeit $\tau_\varepsilon > 0$ durch $\tau_\varepsilon = \inf\{t \mid t > 0, |z_\varepsilon(t)| \geq C_0\varepsilon^2\}$. Da z_ε stetig ist und $z_\varepsilon(0) = 0$ gilt, folgt $\tau_\varepsilon > 0$. Für $t < \min\{t_0, \tau_\varepsilon\}$ folgt nun unter Verwendung von (33)

$$|z_\varepsilon(t)| = \left| \int_0^t \int_0^\tau z_\varepsilon''(s) ds d\tau \right| \leq \int_0^t \int_0^\tau |z_\varepsilon''(s)| ds d\tau \leq \frac{1}{2}t_0^2(2C_0\varepsilon + C_1)\varepsilon^2.$$

Für $C_0 > t_0^2 C_1$ gibt es dann ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\frac{1}{2}t_0^2(2C_0\varepsilon_0 + C_1) = \frac{C_0}{2}$, nämlich

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2t_0^2} - \frac{C_1}{2C_0}.$$

Für alle $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ und alle $t \leq \min\{t_0, t_\varepsilon\}$ gilt dann

$$|z_\varepsilon(t)| \leq \frac{C_0}{2}\varepsilon^2.$$

Da z_ε stetig ist, folgt daraus insbesondere $t_\varepsilon \geq t_0$. Damit ist (32) gezeigt mit $C = C_0/2$. \square

5.2 Regulär gestörte Probleme

Das Vorgehen bei der Bestimmung der asymptotischen Entwicklung ist:

- 1) Ansatz $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$
- 2) Einsetzen in Gleichung für u_ε .
- 3) nach Potenzen von ε ordnen, 3b) dabei oft Taylorentwicklungen verwenden.
- 4) Koeffizienten von ε -Potenzen zusammensuchen und 4b) für jede Ordnung eine Gleichung
- 5) Gleichung(en) für u_0, u_1, u_2, \dots lösen.
- 6) formale asymptotische Entwicklung zusammenfassen: $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$

Diese formale Maschinerie kann auch allgemeiner und abstrakter in Banachräumen (d.h. vollständigen, normierten Räumen) formuliert werden. Es seien also nun X und Y Banachräume und $F : X \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow Y$ und wir betrachten das Problem

$$F(x_\varepsilon, \varepsilon) = 0. \quad (34)$$

Wie im vorigen Kapitel erwähnt, ist es naheliegend, das *reduzierte Problem*

$$F(x, 0) = 0 \quad (35)$$

zur Bestimmung von Näherungen für Lösungen x_ε des vollen Problems (34) heranzuziehen. Hat das reduzierte Problem (35) eine Lösung, so stellt sich die Frage nach der *Konvergenz* dieser Approximation: sei x_0 die Lösung von (35), gilt dann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_0 \quad \text{in } X \quad ?$$

Hängt weiters F stetig von ε ab, dann ist die Näherung x_0 zumindest konsistent. Wir definieren das *Residuum* als $r_\varepsilon := F(x_0, \varepsilon)$, also x_0 eingesetzt in das volle Problem. *Konsistenz* bedeutet, dass das Residuum gegen Null konvergiert:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_\varepsilon = 0 \quad \text{in } Y.$$

In diesem Fall bezeichnen wir x_0 auch als *formale asymptotische Näherung* 0-ter Ordnung für die Lösung von (34). Auf die Frage unter welchen Bedingungen aus Konsistenz Konvergenz folgt, wird weiter unten kurz und erst im Master-Studium näher eingegangen.

Um die Approximation zu “verbessern”, versucht man, Terme in einer asymptotischen Entwicklung

$$x_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k \tag{36}$$

zu berechnen. Analog zu oben heißt die N -Term-Entwicklung

$$x_{\varepsilon, N} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k x_k$$

konsistent mit Problem (34), wenn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x_{\varepsilon, N}, \varepsilon) = 0.$$

Bei der Berechnung der Terme höherer Ordnung geht man nun wie folgt vor: Der Ansatz (36) wird in das Problem (34) eingesetzt und die linke Seite nach Potenzen von ε entwickelt. Die Koeffizienten in dieser Entwicklung müssen dann verschwinden. Diese Bedingung liefert Gleichungen zur Bestimmung von x_k in (36). Man nehme nun an, dass $F(x, \varepsilon)$ für festes $x \in X$ eine asymptotische Entwicklung nach Potenzen von ε besitzt, mit Koeffizienten, die glatte Funktionen von x sind:

$$F(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k F_k(x) + O(\varepsilon^{N+1})$$

Dann ist die Durchführbarkeit dieser Methodik wird garantiert. Der führende Term x_0 in der asymptotischen Entwicklung (36) muss dabei das reduzierte Problem (35) lösen. Terme höherer Ordnung sind als Lösungen von linearisierten Versionen des reduzierten Problems zu bestimmen, welche von der Form

$$\partial_x F_0(x_0) x_k + G_k(x_0, \dots, x_{k-1}) = 0, \tag{37}$$

sind, wobei $F_0(x_0) = F(x_0, 0)$. Der Ausdruck $\partial_x F_0(x_0)$ bezeichnet hier die sogenannte *Frechet-Ableitung* von F_0 an der Stelle x_0 . Wegen der Gestalt der Inhomogenitäten können die Terme höherer Ordnung rekursiv berechnet werden unter der bedingung, dass der lineare Operator $\partial_x F_0(x_0)$ invertierbar ist.

Wir wollen diese formale Vorgehensweise bei der Berechnung für die Entwicklung zu 1. Ordnung zeigen:

$$F(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)) = F_0(x_0) + \varepsilon(\partial_x F_0(x_0)x_1 + \partial_\varepsilon F(x_0, 0)) + O(\varepsilon^2).$$

Dann ist nach Definition $F_0(x_0) = 0$, da x_0 die Lösung des reduzierten Problems ist. Setzen wir nun auch die $O(\varepsilon)$ -Terme gleich 0, erhalten wir

$$\partial_x F(x_0)x_1 = -\partial_\varepsilon F(x_0, 0)$$

Und wir sehen wiederum, dass die Lösbarkeit garantiert ist, wenn $\partial_x F(x_0)$ invertierbar ist. Die Inhomogenität $\partial_\varepsilon F(x_0, 0)$ entspricht somit $G_1(x_0)$ in (37).

Für diese so konstruierte Entwicklung von Approximationen

$$x_{\varepsilon,n} = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k$$

gilt

$$F(x_{\varepsilon,n}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (38)$$

Daher wird diese Reihe auch als *formale asymptotische Entwicklung* der Ordnung n bezeichnet.

Definition 4. Ein Problem der Form (34), für das eine formale asymptotische Entwicklung nach Potenzen von ε konstruiert werden kann, nennen wir *regulär gestört*. Anderfalls bezeichnen wir das Problem als *singulär gestört*.

Aufgrund von (38) folgt auch, dass regulär gestörte Probleme konsistent sind. Aus Konsistenz folgt aber i.A. nicht Konvergenz. Dafür sind noch zusätzliche Annahmen über die Glattheit von F notwendig. Das an der formalen Näherung linearisierte Problem muss für beliebige Inhomogenitäten eindeutig lösbar sein und die Lösung muss stetig von den Daten abhängig sein. Diese Eigenschaft wird auch als *Stabilität* bezeichnet, und es gilt ein Prinzip aus der Numerik, das Peter *Lax* für Finite Differenzenverfahren formuliert hat:

$$\text{Konsistenz} + \text{Stabilität} \Rightarrow \text{Konvergenz}$$

Dabei ist meist “Konsistenz” der einfache Teil, und “Stabilität” (mit verschiedenen Definitionen des Begriffs) der knifflige Teil.

Im Rahmen einer Modellierungs-Vorlesung (am Beginn) des Bachelor bleiben wir bei “formaler Asymptotik”, im Master werden in der Vorlesung “Applied Analysis” im Teil “Asymptotische Analysis” dann präzisere Formulierungen und Beweise (für einfache Fälle möglich) behandelt.

Beispiel A1 aus Algebra:

Betrachten wir erneut obiges Beispiel aus der Algebra:

$$F(x, \varepsilon) = x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0.$$

Wie wir oben gesehen haben erhalten wir eine asymptotische Entwicklung der Lösung mit dem Lösungsansatz

$$x_\varepsilon = x_{\varepsilon,m} + o(\varepsilon^m), \quad \text{wobei} \quad x_{\varepsilon,m} = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k,$$

Wir wollen nun demonstrieren, wie die eben beschriebene formale Methodik mit der im vorigen Abschnitt durchgeführten direkten Vorgehensweise zusammenhängt. Einsetzen der Entwicklung von x_ε in F liefert

$$F(x_\varepsilon, \varepsilon) = x_0^2 - 1 + \varepsilon(2x_0x_1 + 2x_0) + \varepsilon^2(x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_1) + O(\varepsilon^3).$$

Das reduzierte Problem zu $O(1)$ lautet

$$\underbrace{x_0^2 - 1}_{=F(x_0,0)=F_0(x_0)} = 0, \quad \text{sodass} \quad x_0 = \pm 1.$$

Zu $O(\varepsilon)$ lautet die Gleichung

$$\underbrace{2x_0x_1}_{=\partial_x F_0(x_0)x_1} = \underbrace{-2x_0}_{=-\partial_\varepsilon F(x_0,0)=-G_1(x_0)} \quad \text{sodass} \quad x_1 = -1.$$

Zu $O(\varepsilon^2)$ erhalten wir

$$\underbrace{2x_0x_2}_{=\partial_x F_0(x_0)x_2} = \underbrace{-x_1^2 - 2x_1}_{=-G_2(x_0,x_1)}, \quad \text{sodass} \quad x_2 = \pm \frac{1}{2}.$$

□

5.3 Singulär gestörte Probleme

Bei den bisher behandelten Beispielen handelt es sich um regulär gestörte Probleme. Wir wollen im Folgenden aber auch singulär gestörte Probleme analysieren, sodass folgende allgemeinere Definition der Asymptotischen Entwicklung erforderlich ist:

Definition 5 (Asymptotische Entwicklung). *Eine Folge von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ mit $\varphi_k : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt asymptotische Folge, falls $\varphi_{k+1} = o(\varphi_k)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ für alle k . Eine Funktion $x_\varepsilon : [0, \varepsilon_0) \rightarrow X$ besitzt eine asymptotische Entwicklung bezüglich dieser Folge (φ_k) , falls es Koeffizienten $x_k \in X$ gibt, für die gilt:*

$$\left\| x_\varepsilon - \sum_{k=0}^n \varphi_k(\varepsilon) x_k \right\| = o(\varphi_n(\varepsilon)) \quad \text{für } n = 0, 1, \dots \quad (39)$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ist $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$, so spricht man von einer asymptotischen Entwicklung von $x(\varepsilon)$ nach Potenzen von ε (siehe Definition 3).

Sei nun wieder $F : X \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow Y$ gegeben und

$$F(x_\varepsilon, \varepsilon) = 0. \quad (40)$$

Wir nehmen nun an, es gibt Lösungen $x_\varepsilon \in X$ und F besitzt eine asymptotische Entwicklung, wobei

$$x_\varepsilon = x_{\varepsilon, m} + o(\varphi_m(\varepsilon)), \quad \text{mit} \quad x_{\varepsilon, m} = \sum_{k=0}^m \varphi_k(\varepsilon) x_k, \quad \text{für alle } m \leq n. \quad (41)$$

Eine Näherung $x_{\varepsilon, m}$ heißt wiederum *konsistent* mit Problem (40), wenn gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x_{\varepsilon, m}, \varepsilon) = 0 \quad \text{in } Y.$$

Lemma 1. *Sei F Lipschitz-stetig, d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass*

$$\|F(x, \varepsilon) - F(y, \varepsilon)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in X, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0).$$

Dann gilt für die Näherungen $x_{\varepsilon, m}$ aus (46)

$$\|F(x_{\varepsilon, m}, \varepsilon)\| = o(\varphi_m), \quad 0 \leq m \leq n. \quad (42)$$

Proof. Der Beweis folgt direkt aus der Definition der Lipschitzbedingung:

$$\|F(x_{\varepsilon, m}, \varepsilon)\| = \|F(x_{\varepsilon, m}, \varepsilon) - \underbrace{F(x_\varepsilon, \varepsilon)}_{=0}\| \leq L\|x_{\varepsilon, m} - x_\varepsilon\| = o(\varphi_m).$$

□

Bemerkung 1. *Existiert die Entwicklung (46) mit $\varphi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$, so handelt es sich bei $F(x_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ um ein regulär gestörtes Problem (siehe voriger Abschnitt). Bei regulär gestörten Problemen folgt aus (42) aufgrund der Beschränktheit von φ_k*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x_{\varepsilon, m}, \varepsilon) = 0.$$

Damit folgt wiederum, dass regulär gestörte Probleme konsistent sind.

Beispiel A2 aus Algebra:

Als weiteres Beispiel betrachten wir nun folgende quadratische Gleichung, bei welcher das ε nun vor dem quadratischen Term auftritt:

$$F(x, \varepsilon) = \varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0. \quad (43)$$

Die exakten Lösungen lauten

$$x_\varepsilon^{(1),(2)} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon}.$$

Mit der Regel von de l'Hospital gilt für $x_\varepsilon^{(1)}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon^{(1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2},$$

während für $x_\varepsilon^{(2)}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon^{(2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}{\varepsilon} = -\infty.$$

Für $\varepsilon = 0$ hat die Gleichung also nur eine einzige Lösung $x_0 = \frac{1}{2}$. Mit dem Ansatz der regulären Störung erhält man asymptotische Näherungen $x_{\varepsilon,m}$ für $x_\varepsilon^{(1)}$, aber nicht für die unbeschränkte Lösungsschar $x_\varepsilon^{(2)}$. Dies liegt daran, dass das Problem nicht regulär sondern singular gestört ist. Der Term εx^2 wird singuläre Störung des Problems $2x - 1 = 0$ genannt.

Heuristische Definition 2 von 'singulär'

Wenn ε als Faktor vor einem Term steht, der für die mathematische Struktur des Problems entscheidend ist, dann handelt es sich typischerweise um eine singuläre Störung. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn ε Faktor für die "höchste Potenz" (zB von Algebraischen Gleichungen) ist, d.h. wenn ε bei Differentialgleichungen Faktor für die höchste auftretende Ableitung ist.

Dabei tritt natürlich i.A. das Problem auf, daß Rand- bzw Anfangsbedingungen vom reduzierten Problem nicht erfüllt werden können. In diesem Fall kann i.A. ein zusätzlicher "Grenzschicht-Term" die Idee retten auch bei singulären Störungen.

Ein besonderes Problem ist der "Rand im Unendlichen", wenn z.B. eine Langzeit-asymptotik mit einer asymptotischen Entwicklung kombiniert wird. In diesem Fall kann oft ein "Mehrskalen-Ansatz" die Idee retten, wo zusätzliche unabhängige Variable eingeführt werden.

Bei singular gestörten Problemen kann also obige formale Vorgehensweise i.A. nur sehr bedingt angewendet werden. Dennoch führt ein passender Entwicklungsansatz für die Lösung, welcher wiederum in das Problem eingesetzt wird, mit anschließendem Koeffizientenvergleich oft zu einer asymptotischen Näherung. Für die asymptotische Näherung $x_{\varepsilon,m}$ muss dabei gelten $F(x_{\varepsilon,m}, \varepsilon) = o(\varphi_m)$, woraus die Koeffizienten berechnet werden können. Dies wollen wir nun am Beispiel A2 demonstrieren.

Fortsetzung Beispiel A2:

Alternativ wählen wir nun folgenden Ansatz für die singuläre Störung:

$$x_{\varepsilon,m} = \varepsilon^\gamma (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^m x_m), \quad \text{mit } \gamma < 0 \quad (44)$$

mit dem zusätzlichen Vorfaktor ε^γ . Wenn dies eine asymptotische Näherung von x_ε darstellt, dann muss gelten $F(x_{\varepsilon,m}, \varepsilon) = o(\varphi_m)$. Daraus kann man dann die Koeffizienten berechnen. Gemäß obigem Ansatz ist $\varphi_0(\varepsilon) = \varepsilon^\gamma$. Setzt man dies in die Gleichung (43) ein, so ergibt sich

$$F(x_{\varepsilon,0}, \varepsilon) = \varepsilon^{2\gamma+1} x_0^2 + 2\varepsilon^\gamma x_0 - 1 = o(\varepsilon^\gamma),$$

dies ist äquivalent zu

$$\varepsilon^{\gamma+1}x_0^2 + 2x_0 - \varepsilon^{-\gamma} = o(1). \quad (45)$$

Für diese Identität gibt es zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall $x_0 = 0$ und $\gamma < -1$ könnte man den Term $\varepsilon^{\gamma+1}$ vor die Klammer im Ansatz (44) ziehen und nochmals neu starten. Darum betrachten wir also im Folgenden $x_0 \neq 0$. Dann kann nur im Fall

$$\gamma = -1$$

der Term $2x_0$ ausbalanciert werden und wir erhalten für x_0 :

$$x_0^2 + 2x_0 = 0 \quad \text{und somit} \quad x_0 = -2.$$

Dann ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(x_0^2 + 2x_0 - \varepsilon) = o(1)$.

Zur nächsten Ordnung $m = 1$ gilt $\varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon = 1$ und $x_{\varepsilon,1} = \varepsilon^{-1}(x_0 + \varepsilon x_1)$, dafür muss gelten

$$\begin{aligned} o(1) = F(x_{\varepsilon,1}, \varepsilon) &= \varepsilon(\varepsilon^{-1}(x_0 + \varepsilon x_1))^2 + 2(\varepsilon^{-1}(x_0 + \varepsilon x_1)) - 1 \\ &= \varepsilon x_1^2 + (2x_0 x_1 + 2x_1 - 1) + \varepsilon^{-1} \underbrace{(x_0^2 + 2x_0)}_{=0} \end{aligned}$$

Dafür folgt also

$$2x_0 x_1 + 2x_1 - 1 = 0,$$

d.h.

$$x_1 = \frac{1}{2(x_0 + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Damit haben wir die ersten beiden asymptotischen Näherungen im singulären Ansatz (44) für $x_\varepsilon^{(2)}$ berechnet:

$$x_{\varepsilon,0} = -\frac{2}{\varepsilon}, \quad x_{\varepsilon,1} = -\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

□

5.3.1 Singuläre Störungen: „Grenzschichten“

In vielen unterschiedlichen Modellierungen, wo das reduzierte Modell für $\varepsilon = 0$ keine Lösung hat, ist es möglich, durch Verwenden von mehreren Skalen eine Näherung zu finden und Modellhierarchien in ε aufzubauen. Dies kann auf verschiedene Arten passieren. Eine typische Situation ist, dass an einer „Stelle“ oder zu einem bestimmten Zeitpunkt etwas „passiert“, das die reguläre formale Asymptotik verhindert. An dieser Stelle können zur reduzierten Lösung spezielle „Zusatzterme“

dazugegeben werden, die über die simplen Terme höherer Ordnung in ε hinausgehen, insbesondere wenn man in der Nähe der kritischen Stelle mit einer „mathematischen Lupe“ vergrößert. Dies ist dann die sogenannte „Grenzschicht“. Hier werden wir als typisches Beispiel ein Randwertproblem für eine singular gestörte Differentialgleichung betrachten. Dabei entstehen *mehrere Skalen* - das Schlagwort *multi-scale* ist ein sehr weit verbreiteter Begriff, der in unserem Zusammenhang mathematisch sauber verständlich wird.

Eine weitere Möglichkeit ist auch, dass die Probleme mit der normalen asymptotischen Entwicklung $\varepsilon \rightarrow 0$ deshalb auftreten, weil Langzeit-Asymptotik $t \rightarrow \infty$ betrachtet wird, wo ausser der intrinsischen Zeitskala auch noch eine weitere, „langsamere“ Zeitskala eine Rolle spielt, d.h. die Standard-zeit t und die „langsame“ Zeit $s = \varepsilon^\alpha t$ für ein $\alpha > 0$, was zur Erweiterung des Ansatzes mit einer zusätzlichen unabhängigen Variablen führt. Hier werden wir als typisches Beispiel für ein solches Problem mit *mehreren Zeit-skalen* im nächsten Abschnitt die Gedämpfte Schwingung näher betrachten.

Der Typ einer Differentialgleichung ist bestimmt durch ihre Ordnung (also die höchste Ableitung) und ist die Klasse aller Zusatzbedingungen, die zu einem sachgemäß gestellten Problem führen. Ein Problem, das aus einer singular gestörten Differentialgleichung und aus Anfangs- und/oder Randbedingungen besteht, ist im allgemeinen ein singular gestörtes Problem. Lösungen der reduzierten Gleichung werden im allgemeinen nicht in der Lage sein, alle Zusatzbedingungen zu erfüllen und/oder nicht die Differenzierbarkeitseigenschaften haben, die von der exakten Lösung erwartet werden. Deshalb gilt folgende heuristische Annahme:

Lösungen von Anfangs- und/oder Randwertprobleme für singular gestörte Differentialgleichungen haben Grenzschichten an Punkten bzw. Mannigfaltigkeiten, an denen Zusatzbedingungen gegeben sind oder an denen ein Glattheitsverlust auftritt.

Wir werden im Rahmen dieser Bachelor LVA nur die Grundidee anhand eines Beispiels erläutern, und nicht näher auf die schwierige mathematische Theorie der Grenzschichten und der rigorosen „asymptotischen Analyse“ eingehen, welche zu den wichtigsten und schwierigsten Gebieten der (partiellen) Differentialgleichungen gehört. Dies wird im Master-Studium im Rahmen der LVA „Applied Analysis“ behandelt.

Beispiel 3 (Fortsetzung): Die Funktion

$$x_\varepsilon(t) = t + e^{-t/\varepsilon} \quad (46)$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\varepsilon x' = -x + t + \varepsilon, \quad x(0) = 1. \quad (47)$$

Das reduzierte Problem

$$0 = -x_0 + t, \quad x_0(0) = 1$$

hat keine Lösung. Das Problem ist daher singular gestört. Die Lösung der reduzierten Differentialgleichung

$$\bar{x}(t) = t$$

approximiert die Lösung für festes $t > 0$, aber nicht in der Nähe von $t = 0$:

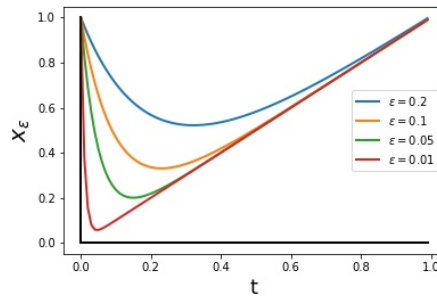


Figure 2: Die Funktion $x_\varepsilon(t)$ in $[0, 1]$ für $\varepsilon = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$

Am Punkt $t = 0$ tritt eine *Grenzschicht* auf (und der Punkt $t = 0$ ist ein einfaches Beispiel einer „Grenzschicht-Mannigfaltigkeit“): Die Funktion \bar{x} beschreibt das Verhalten von x_ε weg von der Grenzschicht. Um die Funktion in der Grenzschicht, d.h. in der Nähe von $t = 0$ genauer betrachten zu können, verwenden wir eine Art „mathematische Lupe“, eine Transformation der unabhängigen Variablen in Bezug auf ε : sei

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (48)$$

für ein $\alpha > 0$. Wir nennen τ lokale Variable oder *Grenzschichtvariable*.

Um nun eine überall gültige Näherung zu erhalten, führen wir

$$\widetilde{x}_\varepsilon = x_\varepsilon - \bar{x}.$$

ein. Diese Funktion ist außerhalb der Grenzschicht klein (falls $\varepsilon \rightarrow 0$), da dort \bar{x} eine Approximation der Lösung ist. Es handelt sich bei $\widetilde{x}_\varepsilon$ also um die Grenzschicht-Korrektur, und wir nehmen nun an, daß diese nur von der Grenzschichtvariable τ abhängt.

Um eine Differentialgleichung für $\widetilde{x}_\varepsilon(\tau)$ zu erhalten, berechnen wir die Ableitung für

$$x_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + \widetilde{x}_\varepsilon(\tau) = t + \widetilde{x}_\varepsilon(\varepsilon^{-\alpha}t)$$

wie folgt

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = 1 + \frac{d\widetilde{x}_\varepsilon}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = 1 + \varepsilon^{-\alpha} \frac{d\widetilde{x}_\varepsilon}{d\tau}$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem (47) liefert

$$\varepsilon^{1-\alpha} \frac{d\tilde{x}_\varepsilon}{d\tau} = -\tilde{x}_\varepsilon, \quad \tilde{x}_\varepsilon(0) = 1. \quad (49)$$

Man sieht nun, dass die lokale Variable

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad \text{für die Wahl} \quad \alpha = 1$$

dadurch ausgezeichnet ist, dass die Terme in der Differentialgleichung „ausbalanciert“ sind, d.h. dieselbe Potenz von ε besitzen. Als Lösung von (49) für $\alpha = 1$ erhalten wir:

$$\tilde{x}_\varepsilon(\tau) = e^{-\tau}.$$

Dies entspricht dem Signifikanten Grenzwert. Für die Wahl der Grenzschichtvariable, d.h. des „richtigen“ α in (48), gilt die heuristische Annahme, dass in der entsprechenden Differentialgleichung möglichst viele, aber mindestens jedoch zwei, Terme enthalten sein sollen.

Und somit erhalten wir

$$x_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = t + e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

Bemerkung 2. Da in diesem Fall die Lösung bereits zu Beginn bekannt ist, kann man auch direkt für die Funktion $x_\varepsilon(t) = t + e^{-t/\varepsilon}$, basierend auf der lokalen Variable (48) die transformierte Funktion

$$X_\varepsilon(\tau) = \varepsilon^\alpha \tau + \exp(-\tau \varepsilon^{\alpha-1})$$

anschreiben. Der Grenzwert existiert für $\alpha \geq 1$ auf τ -Intervallen der Form $(0, T)$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & \text{für } \alpha = 1 \\ 1 & \text{für } \alpha > 1 \end{cases}$$

Für $0 < \alpha < 1$ existiert der Grenzwert für Intervalle der Form (T_1, T_2) mit $T_1 > 0$, und es gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(\tau) = 0$.

Auch hieraus ist also klar ersichtlich, dass $\alpha = 1$ vor anderen Werten ausgezeichnet ist, da die entsprechende Näherung $e^{-\tau}$ die „meiste Information“ enthält. Die anderen möglichen Näherungen (konstant 0 und 1) können mit $\tau = 0$ und $\tau \rightarrow \infty$ daraus berechnet werden.

Bemerkung 3. Es sollte hier noch betont werden, dass es von der konkreten Problemstellung und insbesondere auch von den konkreten Anfangs- bzw. Randbedingungen abhängt, ob bei einem singular gestörten Problem eine Grenzschicht auftritt. Wir betrachten dazu das obige Beispiel mit geänderter homogener Randbedingung

$$\varepsilon x' = -x + t + \varepsilon, \quad x(0) = 0.$$

In diesem Fall ist

$$x(t) = x_0(t) = t$$

und es tritt kein Grenzschichtverhalten auf. Auch wenn $x(0) = \varepsilon$ als Randbedingung gewählt wird, tritt keine Grenzschicht auf, weil die reduzierte Lösung mit der Randbedingung auch für $\varepsilon = 0$ zusammen passt, was natürlich eine ganz spezielle Wahl der Randbedingung ist.

5.4 Mehrskalen-Problem: Die gedämpfte Schwingung

Wir betrachten als Beispiel das bereits entdimensionalisierte Anfangswertproblem für einen „gedämpften Oszillator“, also eine ideale Schwingungsgleichung, die mit einem „Reibungsterm“ gestört wird, in den die erste Ableitung, also die Geschwindigkeit, eingeht:

$$x'' + \varepsilon x' + x = 0, \tag{50}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \tag{51}$$

Für dieses Anfangswertproblem kann man eine explizite Lösung angeben:

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin \left(t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right)$$

Wenn $\varepsilon > 0$ klein ist, so stellt diese Lösung tatsächlich eine Schwingung mit exponentiell fallender Amplitude dar.

Im Fall $\varepsilon = 0$ ist die Lösung ganz einfach:

$$x_0(t) = \sin t$$

Dabei handelt es sich also um eine ungedämpfte Schwingung.

Im Fall $\varepsilon > 0$ ist x_0 nur für kleine Zeiten eine gute Näherung von x_ε , und zwar genau dann wenn $t\varepsilon \ll 1$.

Wenn man dagegen das Verhalten der Funktion für $t \in [0, \infty)$ betrachtet, also das Verhalten im Unendlichen, so stellt x_0 auch für noch so kleine ε keine gute Approximation von x_ε dar!

Setzen wir also nun wieder den Ansatz

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots$$

in die Differentialgleichung (50) ein,

$$x_0'' + \varepsilon x_1'' + \dots + \varepsilon x_0' + \varepsilon^2 x_1' + \dots + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots = 0.$$

Zu $O(1)$ erhalten wir damit das Anfangswertproblem

$$x_0'' + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0'(0) = 1,$$

mit der Lösung

$$x_0(t) = \sin t.$$

Zu $O(\varepsilon)$ lautet das Anfangswertproblem:

$$x_1'' + x_1' + x_1 = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0,$$

mit der Lösung

$$x_1(t) = -\frac{t}{2} \sin t.$$

Damit ist

$$x_{\varepsilon,1} = \left(1 - \varepsilon \frac{t}{2}\right) \sin t$$

eine Näherung 1. Ordnung für x_ε . Falls also $\varepsilon t \ll 1$, so fällt die Amplitude mit der richtigen Zeitskala, aber für $t \rightarrow \infty$ ist die Approximation sogar noch schlechter als mit x_0 . Die Amplitude dieser Funktion stellt eine lineare Approximation des exponentiellen Abklingverhaltens dar. Da x_1 unbeschränkt ist, ist die 'verbesserte' Näherung $x_0 + \varepsilon x_1$ inkonsistent in dem Sinn, dass das Residuum auf $[0, \infty)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ zwar punktweise aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Da die direkte Methode zur Approximation der Lösung hier also versagt, ist das Problem singular gestört.

Die Idee ist daher nun, zwei verschiedene Zeitskalen einzuführen, um eine bessere Näherung zu erhalten. Wir machen also für die gesuchte Funktion folgenden Ansatz

$$X = X(t, s)$$

d.h. die Funktion X hat zwei Zeitskalen

$$t \quad \text{und} \quad s = \varepsilon t,$$

wobei die s -Skala „langsamer“ ist als die t -Skala.

Das klingt auf den ersten Blick natürlich verrückt, denn nun wird aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine partielle !

Die Ableitungen lauten nun:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial X}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \partial_t X + \varepsilon \partial_s X \quad (52)$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \partial_{tt} X + 2\varepsilon \partial_{ts} X + \varepsilon^2 \partial_{ss} X \quad (53)$$

wobei wir hier und im Folgenden die übliche Notation für partielle Differentialgleichungen verwenden

$$\partial_t X = \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \partial_{ts} X = \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s}, \dots$$

Diese Ableitungen in (52)-(53) setzen wir nun in das AWP für $X(t, s)$ ein:

$$\partial_{tt} X + 2\varepsilon \partial_{ts} X + \varepsilon^2 \partial_{ss} X + \varepsilon(\partial_t X + \varepsilon \partial_s X) + X = 0 \quad (54)$$

$$X(0, 0) = 0, \quad \partial_t X(0, 0) + \varepsilon \partial_s X(0, 0) = 1 \quad (55)$$

Wir suchen also nun für x_ε Näherungen der folgenden Form gesucht:

$$X_{\varepsilon,0}(t) = X_0(t, \varepsilon t) \quad \text{bzw.} \quad X_{\varepsilon,1}(t) = X_0(t, \varepsilon t) + \varepsilon X_1(t, \varepsilon t)$$

Aus dem AWP zu führender Ordnung sollte nun X_0 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} X_0 + X_0)(t, s) &= 0 \quad \text{für alle } t, s \\ X_0(0, 0) &= 0, \quad \partial_t X_0(0, 0) = 1. \end{aligned}$$

In diesem Problem treten keine Ableitungen nach s auf, sodass wir die partielle Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung betrachten können, bei der s nur die Rolle eines Parameters hat. Die allgemeine Lösung lautet

$$X_0(t, s) = c_1(s) \sin t + c_2(s) \cos t,$$

wobei aus den Anfangsbedingungen folgt

$$0 = X_0(0, 0) = c_2(0), \quad 1 = \partial_t X_0(0, 0) = c_1(0). \quad (56)$$

Momentan können $c_1(s)$ und $c_2(s)$ noch frei gewählt werden, welche erst bei den Gleichungen zu $O(\varepsilon)$ bestimmt werden. Diese liefern eine partielle Differentialgleichung für X_1 :

$$\partial_{tt} X_1 + \partial_t X_0 + X_1 + 2\partial_{ts} X_0 = 0,$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} X_1 + X_1)(t, s) &= -(\partial_t X_0 + 2\partial_{ts} X_0)(t, s) \\ &= -(c_1(s) + 2c_1'(s)) \cos t + (c_2(s) + 2c_2'(s)) \sin t \end{aligned}$$

Wieder stellt s nur einen Parameter dar. Die Lösung sollte beschränkt bleiben und dazu die rechte Seite verschwinden, d.h.

$$c_1(s) + 2c_1'(s) = 0, \quad c_2(s) + 2c_2'(s) = 0.$$

Mit den Anfangsbedingungen (56) ergibt sich

$$c_1(s) = e^{-s/2}, \quad c_2(s) = 0.$$

Somit erhalten wir

$$X_{\varepsilon,0}(t) = X_0(t, \varepsilon t) = c_1(\varepsilon t) \sin t = e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin t.$$

Dies ist eine deutlich bessere Näherung an die exakte Lösung

$$x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}} e^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \sin \left(t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right)$$

als die oben diskutierten Näherungen x_0 und $x_{\varepsilon,1}$ aus dem Ansatz mit einer Skala.

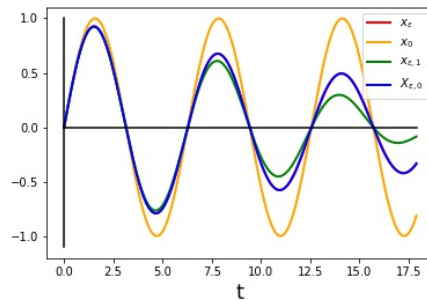


Figure 3: Die exakte Lösung x_ε ist im Intervall $[0, 20]$ fast ident mit der Lösung des Mehrskalenansatzes $X_{\varepsilon,0}$ (und darum auch kaum ersichtlich). Die Näherungen $x_{\varepsilon,0}(t)$ und $x_{\varepsilon,1}(t)$ zeigen jedoch bereits sehr starke Abweichungen.

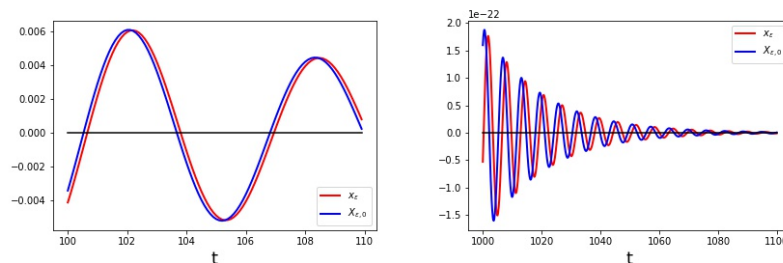


Figure 4: Die Näherung $X_{\varepsilon,0}$ bleibt auch für größere Zeiten eine sehr gute Näherung für x_ε . Links ist das Intervall $[100, 110]$ abgebildet, rechts das Intervall $[1000, 1100]$.

References

- [1] C. Eck, H. Garcke, P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [2] C. Kuttler. *Propädeutikum Mathematische Modellbildung*. TU München, Zentrum Mathematik
(Link: http://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_modellbildung.pdf)

- [3] C. Schmeiser. *Skriptum zur Vorlesung Modellierung*. Universität Wien, Fakultät für Mathematik
(Link: <https://homepage.univie.ac.at/christian.schmeiser/Modellierung.pdf>)
- [4] C. Schmeiser. *Skriptum zur Vorlesung Angewandte Mathematik*. Universität Wien, Fakultät für Mathematik
(Link: https://homepage.univie.ac.at/christian.schmeiser/angmat_gesamt.pdf)
- [5] C. Schmeiser, N. Mauser, H.-P. Stimming. *Skriptum zur Vorlesung Applied Analysis* Universität Wien, Fakultät für Mathematik