Universität Wien
Fakultät für Physik

Laborpraktikum Theoretische Physik 2021S
Symmetriegruppen von Differentialgleichungen

Milutin Popovic & Tim Vogel

Betreuer: Olaf Krüger

6. Juni, 2021

Contents

1 Grundlagen

Die Symmetriegruppe einer Differentialgleichung, oder eines Systems von Differentialgleichungen, ist eine Gruppe von Transformationen, die auf die abhängigen und unabhängigen Variablen wirkt und die es ermöglicht, aus einer Lösung der Differentialgleichung(en) andere Lösungen zu konstruieren. Es existiert ein expliziter Weg, die Symmetriegruppe einer oder mehrerer Differentialgleichungen zu finden, der in diesem Protokoll vorgestellt und auf die Fokker-Planck Gleichungen angewandt wird. Bis dorthin müssen allerdings einige Bergrillfichkeiten erklärt und hergeleitet und die mathematische Basis geschaffen werden. Bevor wir mit der Symmetriegruppe von Differentialgleichungen beginnen, wird das Konzept anhand von Symmetrien von Gleichungen eingeführt und erläutert.

1.1 Symmetrien von Gleichungen

Wir betrachten zunächst eine glatte, reele, differenzierbare Funktion $F(x)$, die auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit M definiert ist. Sei nun x eine Lösung der Gleichung:

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

Die Symmetriegruppe G dieser Funktion, ist nun eine Transformation auf M, die aus der Lösung x andere Lösungen dieser Gleichung bereitstellen kann. Ist als g ein Element dieser Gruppe, so fordern wir:

$$F(g \cdot x) = 0 \tag{2}$$

Damit löst auch $g \cdot x$ die Gleichung, und wir erhalten eine neue Lösung. Betrachten wir hierzu ein kurzes Beispiel: Gegeben sei die Funktion $F(t,x) = ct - x = 0$ und eine Translation als Transformation $(t,x) \to (t+\varepsilon, x+c\varepsilon)$ Und somit ergibt sich als Lösung:

$$F(g \cdot t, g \cdot x) = c(t+\varepsilon) - (x+c\varepsilon) = ct - x = 0 \tag{3}$$

Betrachten wir nun das Folgenede: G^i_ε ist eine Symmetriegruppe einer Gleichung $F(x) = 0$. Dann folgt daraus

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} G^i_\varepsilon F(x) = 0 \tag{4}$$

Wir definieren nun:

$$v_i = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} G^i_\varepsilon \tag{5}$$

Und nennen v_i einen Generator der Symmetriegruppe. Diese infinitesimale Betrachtung wird einen essentiellen Teil dazu beitragen, die Symmetriegruppen von Differentialgleichungen zu ermitteln und nimmt daher eine sehr wichtige Rolle ein.

2 Differentialgleichungen und der Jet-Space

Wenden wir die Methoden der vorherigen Sektion nun auf Differentialgleichungen an, kommen wir schnell auf die folgende Definition: Betrachten wir eine Differentialgleichung $F(t,x,u)$, in welcher u eine abhängige Variable ist, und gibt es eine Transformationsgruppe G mit Elementen g und löst $u = f(x)$ diese Differentialgleichung, so löst auch $u = g \cdot f(x)$ diese Gleichung.
Wir wollen nun auch hier die infinitesimale Komponente miteinbringen. Hierfür betrachten wir die Punkte $(t,x,u) \in X \times U$. Hier sind t,x unabhängige und u abhängige Variablen. Das bedeutet, der Raum $X \times U$ beschreibt genau diese Variablen. Das heißt, für die infinitesimalen Komponenten, müssen wir diesen Raum "prolongieren", indem wir auch die verschiedenen partiellen Ableitungen der Variablen berücksichtigen. Dies funktioniert wie folgt: Gibt es eine Funktion $U = f(x)$, sodass $f : X \to U$, so existiert eine weitere Funktion $u^{(n)} = pr^{(n)} f(x)$, die wir die n-te Prolongation von f nennen, die definiert ist, als:

$$u^\alpha_f = \partial_f f^\alpha(x) \tag{6}$$

Dies bedeutet, dass die Prolongation eine Funktion von X nach $U^{(n)}$ ist und für jedes x ind X die Werte von f und die Werte aller Ableitungen von 1 bis n an der Stelle x repräsentiert. Zum Beispiel ergibt die zweite Prolongation von $f(t,x) = u$:

$$pr^{(2)}f(t,x) = (u;u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx}) = (f;\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) \tag{7}$$

Der Raum $X \times U^{(n)}$, in dem die abhängigen und unabhängigen Variablen enthalten sind und die partiellen Ableitungen der abhängigen Variablen, wird der n-te Jet-Space genannt.
Dies bedeutet also, dass wir für jede Ableitung, eine Koordinatenachse hinzufügen, und die Differentialgleichung somit sowohl abhängig von ihren Variablen, als auch von deren (n-ten) Ableitungen machen. Ein System von Differentialgleichungen kann somit auch als Untervarietät des Jet-Spaces beschrieben werden.

3 Prolongation von Gruppenwirkungen

Ähnlich wie zuvor, kann eine Prolongation auch auf die Gruppen von Transformationen bzw. Gruppenwirkungen angewandt werden und wird als $pr^{(n)}G$ notiert. Hierbei werden die Ableitungen der Funktionen $u = f(x)$ in die jeweils gleichen Ableitungen, der transformierten Funktion $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ überführt. Ein wichtiger Aspekt ist, dass die erste Prolongation von G etwa, genauso auf den Punkt (x,u) wirkt, wie G selbst. Einzig die Wirkung auf u_x bietet neue Information. Dies ist allgemein gültig, ergo unterscheiden sich nachfolgende Prolongationen immer nur in ihren letzten Einträgen.
Diese Prolongation bietet uns nun folgende Möglichkeit: Existiert eine Symmetriegruppe G, die Lösungen einer Differentialgleichung in andere Lösungen überführt, und wird diese Differentialgleichung durch eine Untervarietät im zugehörigen Jet-space beschrieben, so ist G eine Symmetriegruppe dieser Differentialgleichung, wenn sie die Untervarietät invariant lässt. Dadurch lässt sich das finden einer Symmetriegruppe einer Differentialgleichung im Großen und Ganzen darauf reduzieren, heruaszufinden, ob eine Gruppe von Transformationen diese Varrietät unverändert lässt. Über diesen Weg, können wir das Problem ähnlich behandeln, wie das zuvor beschriebene finden von Symmetriegruppen von Gleichungen.

4 Finden von Symmetriegruppen einer Differentialgleichung

Wir verwenden die infinitesimale Betrachtungen aus Sektion 1.1, und beginnen mit einem beliebigen Vektorfeld:

$$v = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{8}$$

Wir lösen nun ein System von einfacheren partiellen Differentialgleichungen um die Funktionen $\tau, \xi und \phi$ zu ermitteln. Nun wollen wir das eben ermittelte Vektorfeld prolongiern. Dies funktioneirt mit folgender Formel, die hier nciht näher hergeleitet werden will:

$$pr^n v = v + \sum_{J:1\leq|J|\leq n} \phi^J(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u_J} \tag{9}$$

J ist in diesem Falle ein Multiindex, der sämtliche $1-(n-te)$ partielle Ableitungen durchläuft. Die Koeffizienten $\phi^J(t,x,u)$ sind rekursiv definiert:

$$\phi^{Jk} = D_k\phi^J - u_{Jt}D_k\tau - u_{Jx}D_k\xi \tag{10}$$

mit den vollständigen Ableitungen:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u}, \; D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u}$$

So findet man einen Satz unabhängiger Vektorfelder v_i, die als die Generatoren einer Lie-Algebra funkgieren. Schließlich kann für jedes Vektorfeld die Gruppenwirkung mithilfe von Charakteristiken ermittelt werden, damit gilt:

$$g_\varepsilon(t,x,u) = (\tilde{t},\tilde{x},\tilde{u}) \tag{11}$$

Und somit können Lösungen für Differentialgleichungen mithilfe von Symmetrien gefunden und berechnet werden.

5 Fokker-Planck Gleichung

Im folgenden werden wir versuchen die Symmetrieüberlegungen aus dem vorherigen Kapiteln auf die Fokker-Planck anzuwenden:

$$-u_t + u_{xx} + xu_x + u_t = 0 \tag{12}$$

Für diese Gleichung können wir im Jetspace schreiben $F(t,x,u,u_t,u_x,u_{xxx}) = 0$. Um die Vektorfeldbasis, die diese Differentialgleichung genereiert, zu finden wählen wir den Ansatz aus Gleichung 8, für Funktionen $\xi(t,x,u), \tau(t,x,u)$ und $\phi(t,x,u)$. Danach wenden wir die 2-te Prolongation des Vektorfeldes auf die Fokker-Planck Gleichung an

$$\mathrm{pr}^{(2)}vF = vF + \phi^x \partial_{u_x} F + \phi^t \partial_{u_t} F + \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} F \tag{13}$$

es ist zu beachten, dass die Prolongation für die Koeffizienten $j = xt$ und $j = tt$ wegfällt, da die Ableitungen nach u_{xt} und u_{tt} angewandt auf F null sind. Nachdem wir eingesetzt und abgeliten haben klammern wir nach den Koeffizienten u_x, u_t, u_{xt}, usw. und ersetzen die gewählten Redundanzen indem wir die Fokker-Planck Gleichung ausnutzen. Es eignet sich ganz gut u_{xx} zu nehmen, dabei stellen wir nach u_{xx} um und ersetzen jedes u_{xx}, u_{xxx} und u_{xxt} das in der Prolongation vorkommt. Nach etlichen Tagen der Rechnerei und vielen vollgeschreibenen Blätter kamen wir nicht auf die Richtigen Gleichungen. Angesichts dessen benutzen wir die Differentialgleichungen die unser Betreuer uns per Email zukommen lies, diese lauten wie gefolgt

$$\tau_x = 0 \tag{14}$$
$$\tau_u = 0 \tag{15}$$
$$\xi_u = 0 \tag{16}$$
$$\tau_t - 2\xi_x = 0 \tag{17}$$
$$\phi_{uu} = 0 \tag{18}$$
$$\phi_t - \phi_{xx} - x\phi_x - \phi + u(\phi_u - \tau_t) = 0 \tag{19}$$
$$\xi_t + \xi - \xi_{xx} - x\xi_x + x\tau_t + 2\phi_{xu} = 0 \tag{20}$$
$$\tag{21}$$

Aus den einfachen Gleichungen schliessen wir direkt die Abhängigkeiten der Funktionen.

$$\xi = \xi(t,x) \tag{22}$$
$$\tau = \tau(t) \tag{23}$$
$$\phi = u \cdot a(t,x) + b(t,x) \tag{24}$$

Aus Gleichung 17 lässt sich ein Term von ξ in Abhängigkeit von τ_t ableiten

$$\xi = \frac{x}{2}\tau_t + c(t) \tag{25}$$

Weiterhin benutzen wir unsere bisherigen Lösungen um Gleichung 20 umzuformen

$$\tau_t + \frac{\tau_{tt}}{2} + \frac{1}{x}(c + c_t + 2a_x) = 0 \tag{26}$$

Da τ nicht von x abhängt muss $c + c_t + 2a_x \propto x$ bzw. $a_x \propto x$. Wir können für a also wählen

$$a = \frac{x^2}{2}\alpha + x\beta(t) + \gamma(t) \tag{27}$$

Um die Differentialgleichung $c + c_t + 2a_x \propto x$ nach c lösen müssen wir $\beta(t)$ und $\alpha(t)$ ermitteln, dazu gehen wir zurück zur Gleichung 19 und setzen für ϕ

$$u(x \cdot a_x - a_t - a_{xx} - \tau_t) = -b - b_{xx} - x \cdot b_x + b_t. \tag{28}$$

Da $b = b(t,x)$, folgt dass zum einen b die Fokker-Planck Gleichung erfühlt und zum anderen, dass

$$x \cdot a_x - a_t - a_{xx} - \tau_t = 0 \tag{29}$$

setzt man für $a(t,x)$ ein sieht man direkt

$$\alpha = c_1 e^{2t} \tag{30}$$

$$\beta = c_2 e^t \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{31}$$

Nun können wir wieder zur Gleichung 26 zurückkommen. Für c ergibbt sich somit

$$c = c_3 e^{-t} - c_2 e^t \quad \text{mit } c_3 \in \mathbb{R} \tag{32}$$

Wir setzen in 26 die Ergebnisse für α und c ein

$$\tau_t + \frac{\tau_t t}{2} = -4c_1 e^{2t}. \tag{33}$$

Nun bekommen wir τ indem wir die obige differentialgleichung lösen, für ξ setzen wir ein in 25 und für ϕ setzen wir in 20 ein. Die Lösungen lauten

$$\tau = -c_4 \frac{1}{2} e^{-2t} - c_1 \frac{1}{2} e^{2t} + c_5 \tag{34}$$

$$\xi = c_4 \frac{x}{2} e^{-2t} - c_1 \frac{x}{2} e^{2t} + c_3 e^{-t} + c_2 e^t \tag{35}$$

$$\phi = c_1 \frac{ux^2}{2} e^{2t} + c_2 uxe^t - c_4 \frac{u}{2} e^{-2t} + uc_5 + uc_6 + bc_7 \tag{36}$$

Die Vektorfelder lassen sich nun anhand von den Konstanten $c_1, \ldots, c_7$ ablesen

$$v_1 = \frac{e^{2t}}{2}\partial_t - \frac{xe^{2t}}{2}\partial_x + \frac{ux^2}{2}e^{2t}\partial_u \tag{37}$$

$$v_2 = e^t \partial_x + uxe^t \partial_u \tag{38}$$

$$v_3 = e^{-t}\partial_x \tag{39}$$

$$v_4 = -\frac{e^{-2t}}{2}\partial_t + \frac{xe^{-2t}}{2}\partial_x - \frac{e^{-2t}}{2}\partial_u \tag{40}$$

$$v_5 = \partial_t + u\partial_u \tag{41}$$

$$v_6 = u\partial_u \tag{42}$$

$$v_7 = b\partial_u \tag{43}$$

6 Diskussion

Obwohl wir nicht viele Ergebnisse liefern konnten, haben wir aus dieser Praktikumseinheit sehr nützliche Methoden mitgenommen um Differentialgleichungen zu analysieren und in denen nach Symmetrien zu suchen. Diese werden uns ohne Frage im weiteren verlauf unseres Studiums sehr nützlich sein. Die Hürde war direkt am Anfang, die Prolongation des Vektorfeldes richtig abzuleiten, auszuklammern und die Redundanzen zu ersetzen. Der Gedanke schon bei der ersten Aufgabe zu scheitern hat uns nicht losgelassen und wir haben die Rechnung immer wieder und wieder versucht, bis schließlich die Zeit knapp wurde und die Abgabefrist näher rückte. Angesichts dessen Entschuldigen wir uns bei unseren Betreuer für unsere mangelhafte Leistung.

References

[1] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 1986.