Universität Wien
Fakultät für Physik

Laborpraktikum Theoretische Physik 2021S
Kugelsymmetrische Sternenmodelle in der ART

Milutin Popovic & Tim Vogel

Betreuer: Dr. Stefan Palenta

May the 25th, 2021

Contents

1 Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ Raum werden die Basisvektoren mit partiellen Ableitungen identifiziert. In kartesischen Koordinaten wird $e_x,\ e_y, e_z$ mit $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ identifiziert. Der Basisvektor e_x z.B. gibt an in welche Richtung sich ein Punkt P verschiebt, wenn man man die Koordinate x um ein dx vergrößert. Die Koordinatendifferentiale sind dann $dx,\ dy,\ dz$ und die in der euklidischen Metrik gilt dann $dx^i(\partial_j) = \partial_j x^i = \delta^i_j$.

Das selbe Spiel kann man mit Kugelkoordinaten machen

$$x^i = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Kugelkoordinaten Basisvektoren $\partial_r,\ \partial_\phi,\ \partial_\theta$ werden durch die Kettenregel berechnet

$$\partial_r = \partial_r \partial^i \partial_i \tag{2}$$
$$= \sin\theta\cos\phi\,\partial_x + \sin\theta\sin\phi\,\partial_y + \cos\theta\,\partial_z \tag{3}$$

$$\partial_\theta = \partial_\theta \partial^i \partial_i \tag{4}$$
$$= -r\cos\theta\sin\phi\,\partial_x + r\cos\theta\sin\phi\,\partial_y - r\sin\theta\,\partial_z \tag{5}$$

$$\partial_\phi = \partial_\phi \partial^i \partial_i \tag{6}$$
$$= -r\sin\theta\sin\phi\,\partial_x + r\sin\theta\cos\phi\,\partial_y \tag{7}$$

Die Einheitsvektoren sind die normierten Basisvektoren

$$e_r = \partial_r; \quad e_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta; \quad e_\phi = \frac{1}{r\sin\phi}\partial_\phi. \tag{8}$$

Wichtiger einschub ist, dass die Lie-Klammer $[e_r, e_\phi]$ nicht verschwindet.

$$[e_r, e_\theta] = e_r e_\theta - e_\theta e_r = \partial_r \frac{1}{r}\partial_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r = \tag{9}$$
$$= -\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r = \tag{10}$$
$$= \frac{1}{r}([\partial_r, \partial_\theta] - \partial_\theta) \tag{11}$$

was bedeutet, dass e_r nicht mit e_θ kommutiert. Damit die Einheitsvektoren eine Koordinatenbasis bilden können müssen sie linear unabhängig voneinander sein, da sie aber eine nicht-triviale Lie-Klammer besitzen, sind sie nicht linear unabhängig und können somit keine Koordinatenbasis sein kann.

Die Metrik g_{ij} in Kugelkoordinaten ist verschwindend für alle $i \neq j$, sie kann sie ausgerechnet werden durch z.B. $g_{rr} = \bar{g}(\partial_r, \partial_r)$.

$$g_{rr} = (\sin\theta\cos\phi e_x + \sin\theta\sin\phi e_y + \cos\theta e_z)^2 \tag{12}$$
$$= 1 \tag{13}$$

$$g_{\phi\phi} = (-r\sin\theta\sin\phi e_x + r\cos\phi\sin\phi e_y)^2 = \tag{14}$$
$$= r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\phi \tag{15}$$
$$= r^2\sin^2\theta \tag{16}$$

$$g_{\theta\theta} = (r\cos\theta\sin\phi e_x + r\cos\phi\sin\phi e_\phi - r\sin e_z)^2 \tag{17}$$
$$= r^2 \tag{18}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{19}$$

Weiteres können wir die kovariante Ableitung ∇_{∂_a} (kurz ∇_a eines Vektorfeldes $X = X^b\partial_b$ entlang ∂_a betrachten, dabei tauchen die Cristoffelsymbole Γ^c_{ab} auf.

$$\nabla_{\partial_a}(X^b\partial_b) = (\nabla_{\partial_b}X^b)\partial_b + X^b(\nabla_{\partial_a}\partial_b) = \tag{20}$$
$$= (\nabla_{\partial_b}X^b)\partial_b + X^b\Gamma^c_{ab}\partial_c \tag{21}$$

Die Christoffelsymbole sind gegeben durch die Metrik-Komponenten.

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}). \tag{22}$$

Offensichtlich verschwinden die Christoffelsymbole bzüglich der karthesischen Koordinatenbasis, da $g_{ij} = \delta_{ij}$ konstant ist. Nun berechnen wir die Crhistoffelsymbole $\Gamma^d_{\theta\phi}$ und $\Gamma^d_{\phi\phi}$ bezüglich den Kugelkoordinaten ($d \in \{r, \theta, \phi\}$).

$$\Gamma^r_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{\phi r} + \partial_\phi g_{\theta r} - \partial_r g_{\phi\theta}) = 0 \tag{23}$$
$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -r\sin^\theta \tag{24}$$
$$\Gamma^\theta_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\phi g_{\theta\theta} = 0 \tag{25}$$
$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\phi\phi} = -2\sin 2\theta \tag{26}$$
$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot\theta \tag{27}$$
$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\phi g_{\phi\phi} = 0. \tag{28}$$

Die Christoffelsymbole sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung der kovarianten Indizes, d.h.

$$\Gamma^r_{\phi\theta} = 0 \tag{29}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\theta} = 0 \tag{30}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot\phi \tag{31}$$

2 Differentialoperatoren

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist eine allgemeine Metrik gegeben, eine symmetrische *n x n* Matrix g_{ab}. Mit der inversen Metrik g^{ab} ergibt sich die triviale Identität $g_{ab}g^{bc} = \delta^c_a$. Mithilfe der Determinante $g := \det(g_{ab})$ und der Cramer'schen Regel kann auf die inverse Matrix umgeformt werden.

$$g = g_{ab}\ \mathrm{adj}(g_{ab}) \tag{32}$$

Differentiert man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $\frac{\partial}{\partial g_{ij}}$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \delta^{ij}_{ab}\ \mathrm{adj}(g_{ab}) = \mathrm{adj}(g_{ij}) = g^{ab} \cdot g \tag{33}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g^{ij}. \tag{34}$$

Als nächstes zeigen wir eine Relation für Christoffelsymbole $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ bezüglich einer allgemeinen Metrik.

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}(\partial_\nu g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \tag{35}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho}. \tag{36}$$

Betrachtet man die Ableitung von g nach ∂_ν bekommt man

$$\partial_\nu g = g g^{\mu\rho} \partial_n u g_{\mu\rho} \tag{37}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial_\nu g}{g} = g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho}. \tag{38}$$

Man kann die wurzel von g, $\sqrt{g}$ betrachten dann kommt ein Faktor von $\frac{1}{2}$ durch die Kettenregel und es ergibt sich die allgemeine Relation

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \sqrt{g} = g^{\mu\rho} \partial_\nu g_{\mu\rho} = \Gamma^\mu_{\mu\nu}. \tag{39}$$

Weiteres zeigen wir eine weitere Relation zur kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes $\nabla_a A^a$

$$\nabla_a A^a = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a(\sqrt{g} A^a). \tag{40}$$

Nun mithilfe von dem Levi-Civita-Zusammenhang

$$\nabla_a A^a = \partial_a A^a + \Gamma^a_{ac} A^a \tag{41}$$

um das Christoffelsymbol auszurechnen benutzen wir die allgemein gültige Relation

$$\begin{aligned}
\nabla_a A^a &= \partial_a A^a + (\frac{1}{\sqrt{g}})\partial_a \sqrt{g})A^a = &(42)\\
&= \partial_a A^a + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}A^a) - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\partial_a A^a = &(43)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}A^a) &(44)
\end{aligned}$$

Das selbe kann man mit eine antisymmetrischen $(2,0)$ Tensor $F^{ab} = -F^{ba}$

$$\nabla_a F^{ab} = \partial_a F^{ab} + \Gamma^a_{ac} F^{cb} \Gamma^b_{ac} F^{ac} \tag{45}$$

wobei hier das letztere Christoffelsymbol Γ^b_{ac} verschwindet wegen der antisymmetrie des Tensors F^{ac}. Weiterhin schreiben wir wieder die allgemeine Relation für Γ^a_{ac} und wenden die umgekehrte Produktregel an, somit kommen wir auf

$$\nabla_a F^{ab} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_c(\sqrt{g}F^{ca}) \tag{46}$$

In der Elektrodyamik ist F^{ab} der Maxwelltensor und die oberen Gleichungen representieren die Maxwellgleichungen.

$$\nabla_a F^{ab} = J^b \tag{47}$$

Die kontinuitätsgleichung $\nabla_b J^b = 0$ kann leicht gezeigt werden

$$\begin{aligned}
\nabla_b \nabla_a F^{ab} &= \nabla_b(\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}F^{ab})) = &(48)\\
&= \partial_b \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}F^{ab}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_b(\sqrt{g}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}F^{ab})) = &(49)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a F^{ab}\partial_b\sqrt{g} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a F^{ab}\partial_b\sqrt{g} &(50)\\
&= 0 &(51)
\end{aligned}$$

Weiterhin zeigen wir eine weitere Relation, dabei wenden wir zwei mal die kovariante Ableitung auf ein Skalarfeld U.

$$\begin{aligned}
g^{ab}\nabla_a \nabla_b U &= \Delta U = \nabla_a \partial^a U = &(52)\\
&= \partial_a \partial^a U + \Gamma^b_{ac}\partial^a U = &(53)\\
&= \partial_a \partial^a U \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}\partial^a U) = &(54)\\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}\partial^a U) &(55)
\end{aligned}$$

3 Herleitung der TOV-Gleichung

Wir können das Innere eines Stern näherungsweise als ideale Flüssigkeit betrachten. In diesem Fall lautet der Energie-Impuls-Tensor ebendieser Flüssigkeit:

$$T_{ab} = (\mu + \frac{p}{c^2})u_a u_b + p g_{ab} \tag{56}$$

In Schwarzschildkoordinaten, und mittels $u^a u_a = -c^2$, lassen sich die Komponenten dieses Tensors wie folgt berechnen:

$$T_{00} = (\mu + \frac{p}{c^2})u_0 u_0 - p g_{00} = (\mu + \frac{p}{c^2})c^2 e^{\mu(r)} - p e^{\mu(r)} = \mu c^2 e^{\mu(r)} \tag{57}$$

ähnlich erhalten wir für die restlichen Diagonalelemente:

$$T_{11} = p e^{\lambda(r)} \tag{58}$$

$$T_{22} = p r^2 \tag{59}$$

$$T_{33} = p r^2 \sin^2\theta \tag{60}$$

Dies bedeutet, der Energie-Impuls-Tensor, nimmt folgende Form an:

$$T_{ab} = diag(\mu c^2 e^{\nu(r)}, p e^{\lambda(r)}, p r^2, p r^2 \sin\theta)^t \tag{61}$$

Wir betrachten nun die Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{62}$$

Diese, können mitthilfe von $T = -\frac{R}{\kappa}$ umgeformt werden, zu:

$$R_{ab} = \kappa(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}) \tag{63}$$

Wir wollen nun die Komponenten von Gleichung 127 berechnen, die ungleich Null sind. Die Komponenten von T^μ_ν erhalten wir durch Verjüngung des Energie-Impuls-Tensors mir der Metrik $g^{\mu\nu}$. Diese ergeben sich zu:

$$T^0_0 = (\mu + \frac{p}{c^2})u^0 u_0 + p g^0_0 = -\mu c^2 \tag{64}$$

$$T^1_1 = p \tag{65}$$

$$T^2_2 = p \tag{66}$$

$$T^3_3 = p \tag{67}$$

Daraus folgt, für R_{ab}:

$$R_{00} = \kappa(\mu c^2 e^{\nu(r)} - \frac{1}{2}\mu c^2 e^{\nu(r)}) = \kappa \frac{1}{2} \mu c^2 e^{\nu(r)} \tag{68}$$

$$R_{11} = \kappa \frac{1}{2} p e^{\lambda(r)} \tag{69}$$

$$R_{22} = \kappa \frac{1}{2} p r^2 \tag{70}$$

$$R_{33} = \kappa \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \tag{71}$$

4 Inkompressibler Relativistischer Stern

Wir berechnen nun der Druckverlauf eines relativistischen Sterns mit konstanter Massendichte μ mithilfe der TOV-Gleichung. Der Druck an der Sternoberfläche ist $p(r_0) = 0$. In der Rechnung substituieren wir $P = \kappa p$, $A = \frac{8\pi\mu}{3c^2}$ und $x = r^2 \Rightarrow dr = \frac{dx}{2r}$. Weiters ist zu beachten, das $\mu =$ konst. und somit die Masse des Sterns gegeben ist durch

$$m(r) = m = 4pi \int_0^r \mu \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \frac{4\pi}{3}\mu r^3 \tag{72}$$

Wir kommen auf die folgende Differentialgleichung.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{(3A+P)(A+P)}{(1-Ax)}. \tag{73}$$

Diese lässt sich durch Separation der Variablen lösen und mithilfe von $p(r_0) = 0$ bekommen wir die Lösung

$$P(r) = 3A \left(\frac{\sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}} - 1}{3 - \sqrt{\frac{1-Ar^2}{1-Ar_0^2}}} \right) \tag{74}$$

Der Zentraldruch p_c ist gegeben durch

$$p_c = p(0) = \frac{3A}{\kappa} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{1-Ar_0^2}} - 1}{3 - \sqrt{\frac{1}{1-Ar_0^2}}} \right) \tag{75}$$

Weiteres aus $e^{\lambda(r)} > 0$ folgt $e^{\lambda(r_0)} > 0$, was ergibit

$$\sqrt{1 - Ar_0^2} > \frac{1}{3} \tag{76}$$

$$\Rightarrow r_0 > \sqrt{\frac{8}{9A}} \tag{77}$$

hierraus leiten wir die obere Schranke der Masse ab, da $\mu =$ konst. rechnet sich M wie oben, $M = \frac{4\pi}{3}\mu r_0^3$. Wir qubieren die ungleichung von oben und setzen für A ein, es ergibt sich

$$M < M_{max} = \frac{4c^3}{9\sqrt{3\pi G^3 \mu}} \tag{78}$$

Die beiden Metrischen Funktionen lassen sich leicht durch einsetzen herausfinden

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - Ar^2} \tag{79}$$

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)} = 1 - Ar^2 \tag{80}$$

Aus $Ar_0^2 = \frac{r_s}{r_0}$ ergibt sich die Buchdahl Grenze

$$Ar_0^2 = \frac{r_s}{r_0} < \frac{8}{9} \tag{81}$$

Für den gravitative Massendeffekt berechnen wir $\Delta M = M_1 - M$, wobei M_1 durhc das folgende Integral gegeben ist.

$$M_1 = 4\pi \int_0^{r_0} \mu(r) e^{\lambda(r)/2} r^2 dr = \tag{82}$$

$$= \frac{4\pi\mu}{\int} {}^{r_0}_{0} \sqrt{\frac{1}{1-Ar^2}} r^2 dr = \tag{83}$$

$$= \frac{2\pi\mu}{A^{3/2}} (\arcsin(\sqrt{A} r_0) - Ar_0\sqrt{1-Ar_0^2}) \tag{84}$$

Dann ist ΔM

$$\Delta M \frac{2\pi\mu}{A^{3/2}} (\arcsin(\sqrt{A} r_0) - Ar_0\sqrt{1-Ar_0^2}) + \frac{4\pi}{3}\mu r_0^3 \tag{85}$$

Der Newtonische Grenzfall der gravitativen Bindungsenergie ist

$$W = -\Delta M c^2 = -c^2(4\pi \int_0^{r_0} \frac{1}{\sqrt{1-Ar^2}} r^2 dr + \frac{4\pi}{3}\mu r_0^3) \tag{86}$$

$$\lim_{c\to\infty} W = -4\pi G \int_0^{r_0} mrdr = 2\pi G m r_0^2 \tag{87}$$

5 Effektive Berechnungsmethode für Christoffelsymbole

In einer gekrümmten Raumzeit, lassen sich Geodäten, also die kürzeste Verbindung zweier Punkte innerhalb dieser Raumzeit, mithilfe der Geodäten-Gleichung berechenen:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\sigma}\frac{dx^c}{d\sigma} \tag{88}$$

Hierbei ist σ ein affiner Paramter, der mit der Weglänge zusammenhängt. Die CHristoffel-Symbole in der obigen Gleichung, lassen sich mittels einer Lagrange-Funktion, relativ zügig ermitteln. Wir stellen hierfür die Lagrange-Funktion auf, als:

$$L = g_{\rho\sigma}(x^n)\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \tag{89}$$

Mithilfe dieser Gleichungen, folgt die Äquivalenz:

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x^\beta} + \Gamma_{\alpha ab}\dot{x^a}\dot{x^b} = \frac{d}{d\tau}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x^\alpha}}) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{90}$$

Mithilfe der Metrik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} = (g_{ab}) \tag{91}$$

folgt für die Lagrange-Funktion nun:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r^2} + r^2\dot{\theta^2} + r^2\sin^2\theta\dot{\phi^2} \tag{92}$$

Wir berechnen nun die Ableitungen von L:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \ddot{r} \tag{93}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \tag{94}$$

und

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2\dot{r}r\sin^2\theta\dot{\phi} + 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi} \tag{95}$$

Des Weiteren:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = r\dot{\theta^2} + r\sin^{2\,\theta}\dot{\phi^2} \tag{96}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{97}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi^2} \tag{98}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nun die Christoffel-Symbole bestimmen, und diese ergeben sich zu:

$$\Gamma_{r\theta\theta} = -r \tag{99}$$

$$\Gamma_{r\phi\phi} = -r\sin^2\theta \tag{100}$$

$$\Gamma_{\theta r\theta} = 2 \tag{101}$$

$$\Gamma_{\theta\phi\phi} = -r^2\sin\theta\cos\theta \tag{102}$$

$$\Gamma_{\phi r\phi} = 2r\sin^2\theta \tag{103}$$

und

$$\Gamma_{\phi\theta\phi} = 2r^2\sin\theta\cos\theta \tag{104}$$

6 Schwarzschild Metic

Eine Kugelsymmetrische Raumzeit kann durch die Schwarzschild-Koordinaten beschrieben werden $\{ct, r, \vartheta\varphi\}$, für das Linienelemnt haben wir den folgenden Ansatz gegeben

$$ds^2 = -e^{\nu}c^2d^2t + e^{\lambda}d^2r + r^2(d^2\vartheta\sin^2\vartheta d^2\varphi). \tag{105}$$

wobei hier $\nu = \nu(t,r)$ und $\lambda = \lambda(t,r)$, Funktionen sind die noch bestimmt werden. Mithilfe dieses Linienelements können wir direkt die Metrik ablesen. Weiterhin setzen wir $c = 1$ und schreiben

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d^2\vartheta + g_{33}d^2\varphi \\ \Rightarrow (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} -e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{106}$$

Alle von null verschiedenen Christoffelsymbole lassen sich leicht berechnen, da die meisten Koeffizienten wegfallen aufgrund der diagonalen Metrik

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu} \tag{107}$$
$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00} = \frac{1}{2}\nu' \tag{108}$$
$$\Gamma^0_{11} = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} = \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda} \tag{109}$$
$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu' \tag{110}$$
$$\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \tag{111}$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} = -e^{-\lambda}r \tag{112}$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} = r \tag{113}$$
$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta) \tag{114}$$
$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} = \frac{1}{r} \tag{115}$$
$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} = \cot\vartheta \tag{116}$$

Nun können wir den Ricci Tensor R_{ab} ausrechnen

$$R_{ab} := R^c_{abc} = \Gamma^c_{ab,c} - \Gamma^c_{ac,b} + \Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{ad} - \Gamma^c_{db}\Gamma^d_{ac}. \tag{117}$$

Für die Indizes 00 zeigen wir

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \Gamma^c_{00,c} - \Gamma^c_{0c,0} + \Gamma^c_{dc}\Gamma^d_{00} - \Gamma^c_{d0}\Gamma^d_{0c} = && (118)\\
&= \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^1_{00,1} - \Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01,0}\Gamma^c_{0c}\Gamma^0_{00} - \Gamma^c_{00}\Gamma^0_{0c} - \Gamma^c_{10}\Gamma^1_{0c} = && (119)\\
&= \Gamma^1_{00,1} - \Gamma^1_{01,0} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} = && (120)\\
&= \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}(\frac{\nu'}{r} + \nu'') - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\nu}\frac{1}{4}e^{\lambda-\nu}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}e^{\lambda-\nu}\nu'\nu' - \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\lambda} = && (121)\\
&= \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}(\nu'' - \frac{1}{2}(\lambda'-\nu')\frac{\nu'}{r}) - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}\dot{\lambda}(\dot{\nu} - \dot{\lambda}). && (122)
\end{aligned}$$

Die anderen nich-trivialen Koeffizienten lauten

$$R_{11} = e^{\lambda-\nu}(\frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}\dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})) - \frac{1}{4}\nu'(\lambda'-\nu') + \frac{\lambda'}{r} \tag{123}$$
$$R_{22} = 1 - e^{-\lambda}(1 + \frac{1}{2r}(\nu'-\lambda')) \tag{124}$$
$$R_{23} = \sin^2\vartheta R_{22} \tag{125}$$
$$R_{01} = R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r}. \tag{126}$$

Im Vakuum besagen die Einsteinschen Feldgleichungen, dass $R_{ab} = 0$ für alle a, b, somit folgt sofort aus $R_{01} = 0$ dass $\lambda = \lambda(r)$. Die Funktion λ hängt nur vom Abstand ab. Differenziert man R_{22} nach der 0 Koordinate so erhält man ein Ergebnis für ν

$$\partial_0 R_{22} = -e^{-\lambda}\dot{\lambda}(1+\frac{r}{2}(\nu' - \lambda')) + e^{-\lambda}\frac{r}{2}\partial_0\nu' = 0 \tag{127}$$

$$\Rightarrow \partial_0\partial_1\nu = \partial_1\partial_0 = 0 \tag{128}$$

$$\Rightarrow \partial_0\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = \nu(r) \tag{129}$$

weiterhin zeigen wir, dass $\lambda = -\nu$ indem wir folgendes rechnen

$$R_{00} + e^{\lambda-\nu}R_1 1 = 0 \tag{130}$$

$$\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu. \tag{131}$$

Aus $R_{22} = 0$ und der obigen Relation lässt sich eine Differentialgleichung für ν aufstellen

$$R_{22} = 1 - e^{\nu}(1+\frac{1}{2}r(\nu' + \nu')) = \tag{132}$$

$$= 1 - e^{\nu}(1+\nu' r) = 0. \tag{133}$$

Diese kann man leicht durch Separation der Variablen lösen

$$\int \frac{d\nu}{e^{-\nu} - 1} = \int \frac{1}{r} dr \tag{134}$$

$$\Rightarrow e^{\nu} = 1 - \frac{r_S}{r} \quad (r_S \in \mathbb{R}) \tag{135}$$

7 Inkompressibler Newton'scher Stern

Das Gravitationspotential U eines Sterns, mit Radius r_0 und konstanter Massendichte μ, im Rahmen der Newton'schon Physik, kann leicht mittels der Poissongleichung ermittelt werden. Diese lautet:

$$\Delta U = 4\pi G\mu \tag{136}$$

Um das Potential zu ermitteln, betrachten wir zunächst die Lösung der Poissongleichung außerhalb des Sterns. Diese redzuiert sich somit zu:

$$\Delta U = 0 \tag{137}$$

oder in Kugelkoordinaten:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2} = 0 \tag{138}$$

Es wird sofort klar, dass U nicht von θ und ϕ abhängen kann, und somit wird das Potential zu:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \tag{139}$$

Durch zweilaige Integration nach r erhalten wir schließlich:

$$U = \frac{\alpha}{r} + \beta \tag{140}$$

In diesem Fall sind α und β Konstanten, die es noch zu ermitteln gilt. Setzt man nun vorraus, dass U in unednlich großem Abstand Null sein soll, folgt sofort: $\beta = 0$ und es bleibt:

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{141}$$

für die äußere Lösung.
Nun zur inneren Lösung. Gleichung 120 lässt sich umschreiben, zu:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r} = 4\pi G\mu r^2 \tag{142}$$

Und erneut, durch zweimalige Integration, erhalten wir:

$$U = \frac{2}{3}\pi G\mu r^2 - \frac{A}{r} + B \tag{143}$$

A und B sind wieder zu ermittlende Konstanten. Wir setzten nun wiederum vorraus, dass U bei $r = 0$ regulär sein soll, woraus direkt folgt $A = 0$ und $U(0) = U_0 = B$. Und somit:

$$U = \frac{2}{3}\pi G\mu r^2 + U_0 \tag{144}$$

Wir wollen nun die Konstanten bestimmen. Dafür betrachten wir die beiden Lösungen U_A als die äußere und U_I als die innere Lösung. Da der Übergang des Potentials, von der inneren zur äußeren Lösung glatt sein soll, ergibt sich an der Stelle $r = r_0$:

$$\frac{dU_A}{dr} = \frac{dU_I}{dr} \tag{145}$$

Also:

$$-\frac{\alpha}{r_0^2} = \frac{4}{3}\pi G\mu r_0 \tag{146}$$

setzen wir nun $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3\mu$, erhalten wir:

$$\alpha = -GM \rightarrow U_A = -\frac{GM}{r} \tag{147}$$

Für U_I verwenden wir den Fakt, dass bei $r = r_0$ $U_A = U_I$ gelten muss:

$$-\frac{GM}{r_0} = \frac{2}{3}\pi G\mu r_0^2 + U_0 \rightarrow U_0 = -\frac{3GM}{2r_0} \tag{148}$$

Damit ergbit sich das Potential im Inneren des Sterns zu:

$$U_I = \frac{GM}{2r_0}(\frac{r^2}{r_0^2} - 3) \tag{149}$$

Die gravitative Bindungsenergie eines Sterns, berechnet sich mit der Formel:

$$W_{pot} = \frac{4\pi}{2}\int_0^{r_0} U\mu r^2\,dr \tag{150}$$

Dies bedeutet:

$$W_{pot} = \frac{4\pi}{2}\frac{GM}{2r_0}\int_0^{r_0}\frac{r^2}{r_0^2} - 3\,dr \tag{151}$$

Und somit:

$$W_{pot} = -\frac{8\pi}{3}GM \tag{152}$$

References

[1] Reinhard Meinel. *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten*. Springer-Verlag, 2019. ISBN: 978-3-662-58966-3.

[2] Piotr Chruściel. *Elements of General Relativity*. Birkhäuser, 2019. ISBN: 978-3-030-28415-2.

[3] Reiner Oloff. *Geometrie der Raumzeit, Eine mathematische Einführung*. Springer-Verlag, 2018. ISBN: ISBN 978-3-662-56736-4.