Universität Wien
Fakultät für Physik

Laborpraktikum Theoretische Physik 2021S

Milutin Popovic & Tim Vogel

Betreuer: Dr. Stefan Palenta

May the 25th, 2021

Abstract

Contents

1 Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ Raum werden die Basisvektoren mit partiellen Ableitungen identifiziert. In kartesischen Koordinaten wird $e_x,\ e_y, e_z$ mit $\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z$ identifiziert. Der Basisvektor e_x z.B. gibt an in welche Richtung sich ein Punkt P verschiebt, wenn man man die Koordinate x um ein dx vergrößert. Die Koordinatendifferentiale sind dann $dx,\ dy,\ dz$ und die in der euklidischen Metrik gilt dann $dx^i(\partial_j) = \partial_j x^i = \delta^i_j$.

Das selbe Spiel kann man mit Kugelkoordinaten machen

$$x^i = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Kugelkoordinaten Basisvektoren $\partial_r,\ \partial_\phi,\ \partial_\theta$ werden durch die Kettenregel berechnet

$$\begin{aligned}\partial_r &= \partial_r \partial^i \partial_i && (2)\\ &= \sin\theta\cos\phi\,\partial_x + \sin\theta\sin\phi\,\partial_y + \cos\theta\,\partial_z && (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta &= \partial_\theta \partial^i \partial_i && (4)\\ &= -r\cos\theta\sin\phi\,\partial_x + r\cos\theta\sin\phi\,\partial_y - r\sin\theta\,\partial_z && (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\phi &= \partial_\phi \partial^i \partial_i && (6)\\ &= -r\sin\theta\sin\phi\,\partial_x + r\sin\theta\cos\phi\,\partial_y && (7)\end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren sind die normierten Basisvektoren

$$e_r = \partial_r;\quad e_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta;\quad e_\phi = \frac{1}{r\sin\phi}\partial_\phi. \tag{8}$$

Wichtiger einschub ist, dass die Lie-Klammer $[e_r, e_\phi]$ nicht verschwindet.

$$\begin{aligned}[e_r, e_\theta] = e_r e_\theta - e_\theta e_r &= \partial_r \frac{1}{r}\partial_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta \partial_r = && (9)\\ &= -\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta - \frac{1}{r}\partial_\theta\partial_r = && (10)\\ &= \frac{1}{r}([\partial_r, \partial_\theta] - \partial_\theta) && (11)\end{aligned}$$

was bedeutet, dass e_r nicht mit e_θ kommutiert. Damit die Einheitsvektoren eine Koordinatenbasis bilden können müssen sie linear unabhängig voneinander sein, da sie aber eine ncht-triviale Lie-Klammer besitzen, sind sie nicht linear unabhängig und können somit keine Koordinatenbasis sein kann.

Die Metrik g_{ij} in Kugelkoordinaten ist verschwindend für alle $i \neq j$, sie kann sie ausgerechnet werden durch z.B. $g_{rr} = \bar{g}(\partial_r, \partial_r)$.

$$\begin{aligned}g_{rr} &= (\sin\theta\cos\phi\, e_x + \sin\theta\sin\phi\, e_y + \cos\theta\, e_z)^2 && (12)\\ &= 1 && (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{\phi\phi} &= (-r\sin\theta\sin\phi\, e_x + r\cos\phi\sin\phi\, e_y)^2 = && (14)\\ &= r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\phi && (15)\\ &= r^2\sin^2\theta && (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{\theta\theta} &= (r\cos\theta\sin\phi\, e_x + r\cos\phi\sin\phi\, e_\phi - r\sin e_z)^2 && (17)\\ &= r^2 && (18)\end{aligned}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{19}$$

Weiteres können wir die kovariante Ableitung Δ_{∂_a} (kurz Δ_a eines Vektorfeldes $X = X^b\partial_b$ entlang ∂_a betrachten, dabei tauchen die Cristoffel symbole Γ^c_{ab} auf.

$$\Delta_{\partial_a}(X^b\partial_b) = (\Delta_{\partial_b}X^b)\partial_b + X^b(\Delta_{\partial_a}\partial_b) = \tag{20}$$

$$= (\Delta_{\partial_b}X^b)\partial_b + X^b\Gamma^c_{ab}\partial_c \tag{21}$$

Die Christoffelsymbole sind gegeben durch die Metrikkomponenten.

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_a g_{cb} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}). \tag{22}$$

Offensichtlich verschwinden die Christoffelsymbole bzüglich der karthesischen Koordinatenbasis, da $g_{ij} = \delta_{ij}$ constant ist. Nun berechnen wir die Crhistoffelsymbole $\Gamma^d_{\theta\phi}$ und $\Gamma^d_{\phi\phi}$ bezüglich den Kugelkoordinaten ($d \in \{r, \theta, \phi\}$).

$$\Gamma^r_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{\phi r} + \partial_\phi g_{\theta r} - \partial_r g_{\phi\theta}) = 0 \tag{23}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -r\sin^\theta \tag{24}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\phi g_{\theta\theta} = 0 \tag{25}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\phi\phi} = -2\sin 2\theta \tag{26}$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot\theta \tag{27}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\phi g_{\phi\phi} = 0. \tag{28}$$

Die Christoffelsymbole sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung der kovarianten Indizes, d.h.

$$\Gamma^r_{\phi\theta} = 0 \tag{29}$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\theta} = 0 \tag{30}$$

$$\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \cot\phi \tag{31}$$

References

[1] Reinhard Meinel. *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten*. Springer-Verlag, 2019. ISBN: 978-3-662-58966-3.

[2] Piotr Chruściel. *Elements of General Relativity*. Birkhäuser, 2019. ISBN: 978-3-030-28415-2.

[3] Reiner Oloff. *Geometrie der Raumzeit, Eine mathematische Einführung*. Springer-Verlag, 2018. ISBN: ISBN 978-3-662-56736-4.