• Дискретная математика. Вариант 7. Сергеев М.
ИУ-7-46Б (В)
[второе высшее]

• Задача 2.

На множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ заданы отношения $\rho = \{(x,y) : |(3-x)(3-y)| \le 1\}$ и $\tau = \{(x,y) : x+y < 5\}$.

Тогда

$\rho(1) = \{3\}$ $\qquad$ $\tau(1) = \{1, 2, 3\}$

$\rho(2) = \{2, 3, 4\}$ $\qquad$ $\tau(2) = \{1, 2\}$

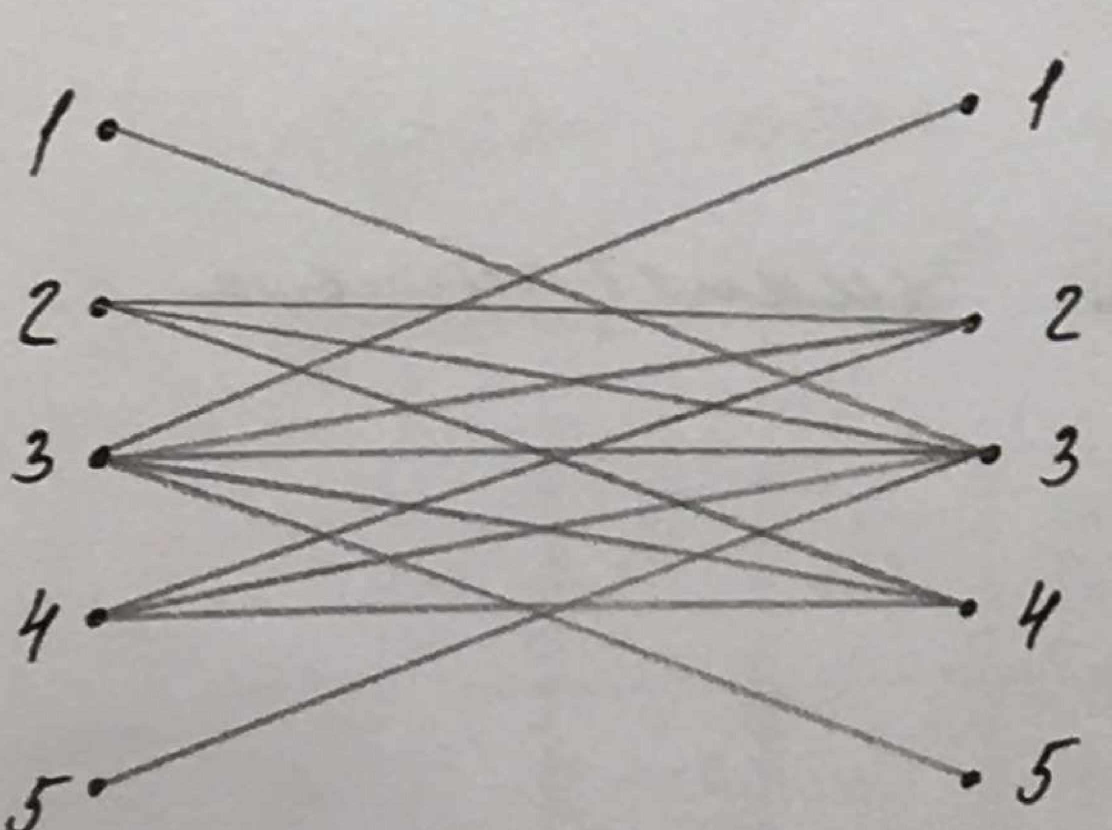
$\rho(3) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\qquad$ $\tau(3) = \{1\}$

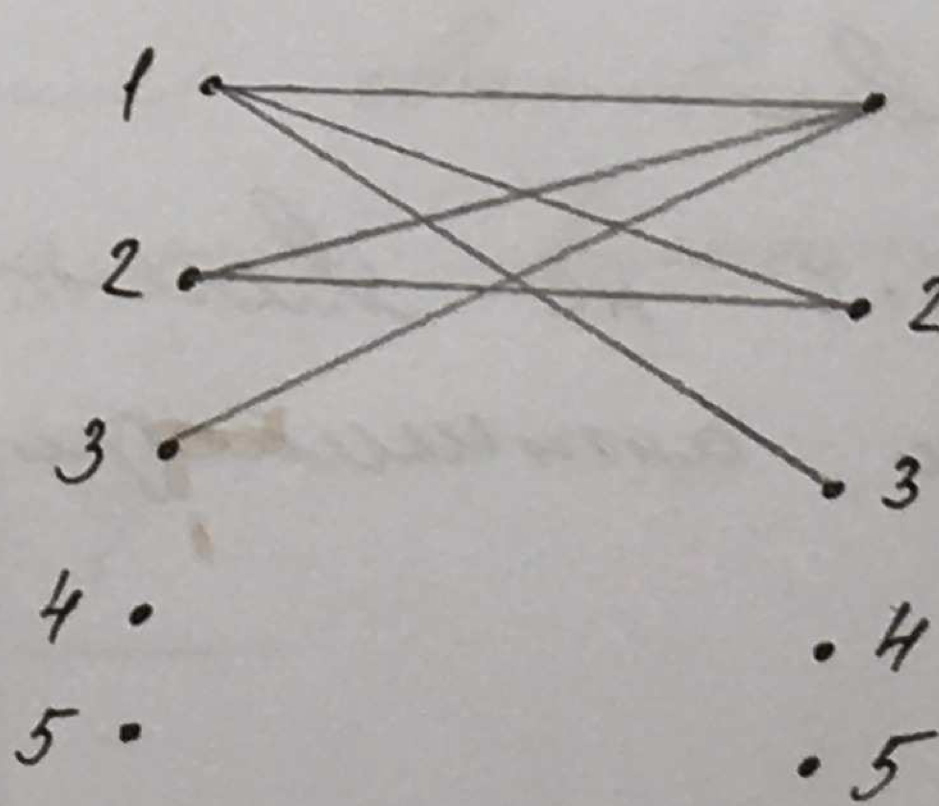
$\rho(4) = \{2, 3, 4\}$ $\qquad$ $\tau(4) = \varnothing$

$\rho(5) = \{3\}$ $\qquad$ $\tau(5) = \varnothing$

Запишем матрицы данных отношений и построим их графики:

$$\|\rho\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|\tau\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





Исследуем их свойства.

• Все эти отношения ни рефлексивны (главные диагонали их матриц не состоят исключительно из единиц), ни иррефлексивны
(—"— —"— из нулей)

• Все эти отношения симметричны (их матрицы являются симметрическими); соответственно, они не являются антисимметричными.

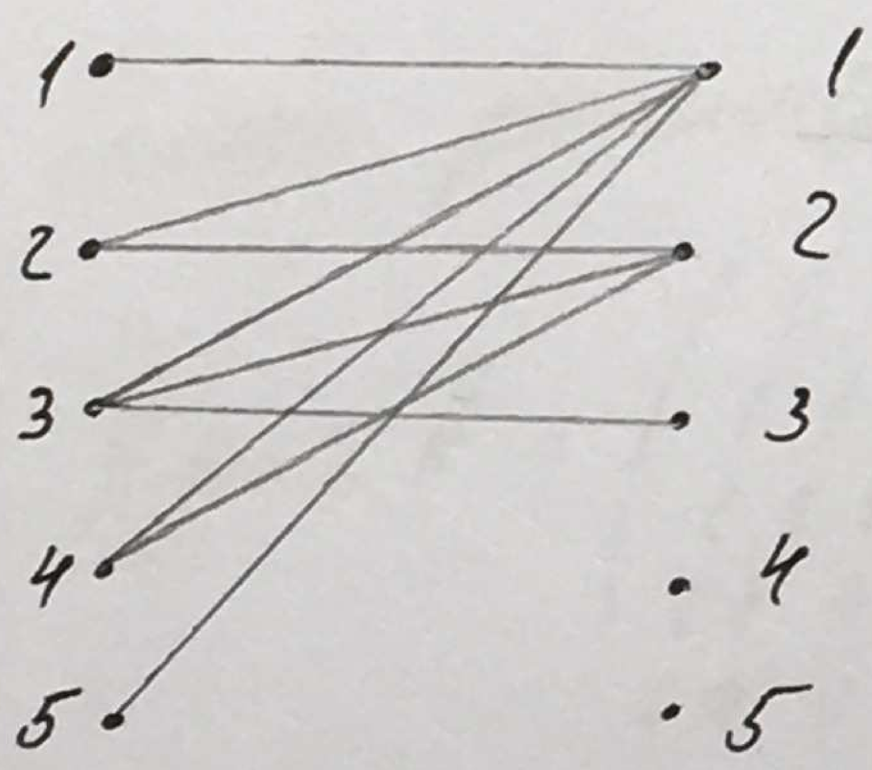
Найдём композицию этих отношений и исследуем её.

$$\|\rho\circ\tau\| = \|\rho\|\cdot\|\tau\|$$

$$\|\rho\circ\tau\| = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Построим график композиции данных отношений.



- Исследуем свойства:
  - Композиция отношений $\rho\circ\tau$ ни рефлексивна, ни иррефлексивна
  - Композиция $\rho\circ\tau$ не является ни симметричным отношением, ни антисимметричным.

Теперь исследуем свойство транзитивности всех трёх отношений:

$$\|\rho\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \|\rho^2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\tau\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \|\tau^2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что соответствующие матрицы не равны; отношения ρ и τ не являются транзитивными

Теперь рассмотрим транзитивность их композиции $\rho \circ \tau$

$$\|\rho \circ \tau\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \|(\rho \circ \tau)^2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что отношение $\rho \circ \tau$ транзитивна.

- Подведём итог и выпишем свойства исследованных отношений в виде анкеты бинарного отношения

	Р	И	С	А	Т
ρ	–	–	+	–	–
τ	–	–	+	–	–
$\rho \circ \tau$	–	–	–	–	+