

Wybrane Zagadnienia z Geodezji Wyższej

Ćwiczenie 1: Układy współrzędnych na elipsoidzie

Mateusz Kirpsza (311577)

15 stycznia 2022

Spis treści:

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Układy odniesienia na Ziemi

- a) Układ $\phi\lambda h$
- b) Układ xyz
- c) Układ neu

1.2. Cel ćwiczenia

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Wyszukanie danych

2.2. Program

- a) Inicjacja danych
- b) Transformacja na xyz
- c) Transformacja na neu
- d) Kolejne działania
- e) Wizualizacja danych i ich analiza

3. Wnioski

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Układy odniesienia na Ziemi

a) Układ $\phi\lambda h$

Tak zwany układ współrzędnych geodezyjnych jest podstawą pomiarów geodezyjnych. Elipsoida obrotowa jest powierzchnią odniesienia, gdyż jest najbliższym przybliżeniem kształtu Ziemi. Elipsoidę charakteryzują długości półosi: dłuższej (oznaczana symbolem „a”), inaczej zwanej półosią równikową oraz krótszej (oznaczana symbolem „b”), inaczej półosi biegunowej. Na podstawie długości półosi można wyznaczyć wielkości typu: ekscentryczność/pierwszy mimośród (oznacza się symbolem e^2), eliptyczność/drugi mimośród (oznacza się symbolem e'^2) oraz spłaszczenie (oznacza się symbolem α). Ogólnym układem odniesienia jest elipsoida GRS80.

Wartościami definiującymi położenie w układzie $\phi\lambda h$ są:

- I. Φ – czyli szerokość geodezyjna. Wartość oblicza się poprzez wyznaczenie kąta nachylenia normalnej do powierzchni elipsoidy, przechodzącej przez punkt pomiarowy, a płaszczyznę równika. Dla bieguna południowego wynosi -90° , dla równika 0° , a dla bieguna północnego 90° .
- II. Λ – czyli długość geodezyjna. Wartość oblicza się poprzez wyznaczenie kąta dwuściennego pomiędzy płaszczyznami południków. Wartość 0° przypada dla południka przechodzącego przez Greenwich w Wielkiej Brytanii. Wartości rosną, aż do 360° w kierunku wschodnim.
- III. H – wysokość nad powierzchnią elipsoidy. Wartość mierzy się wzdłuż normalnej do powierzchni elipsoidy.

b) Układ xyz

Inaczej nazywany układem współrzędnych prostokątnych przestrzennych. Nawiązuje do układu kartezjańskiego, gdzie środkiem jest środek geometryczny elipsoidy. Płaszczyzna „xy” pokrywa się z płaszczyzną równika, a oś „z” z osią obrotu Ziemi. Można dokonać transformacji pomiędzy układem $\phi\lambda h$, a xyz za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned}x &= (N + h)\cos\phi\cos\lambda \\y &= (N + h)\cos\phi\sin\lambda \\z &= [N(1 - e^2) + h]\sin\phi\end{aligned}$$

c) Układ neu

Nazywany układem pomiarowym horyzontalnym geodezyjnym. Środkiem jest wybrany punkt na powierzchni Ziemi. Płaszczyzna „ne” jest prostopadła do normalnej w wybranym punkcie. Wartość „n” rośnie ku kierunkowi północnemu, „e” ku wschodowi, a „u”: wraz z wzrostem wysokości. Aby otrzymać współrzędne w tym układzie należy zastosować odpowiednie wzory:

$$\begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta X_{ij} \\ \Delta Y_{ij} \\ \Delta Z_{ij} \end{bmatrix}$$

Wartości w ostatniej macierzy to przyrosty pomiędzy mierzonym punktem, a początkiem układu.

1.2. Cel ćwiczenia

Zadaniem było oswojenie się z nowo poznanymi układami współrzędnych oraz odnalezienie ich wad i zalet w tym ćwiczeniu.

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Wyszukanie danych

Na stronie *flightaware.com* wybrałem lot z Amsterdamu do Warszawy. Z zakładki *Flight Track Log* do oddzielnego pliku tekstowego wyselekcjonowałem dane z kolumn *Latitude*, *Longitude* oraz *metres*. Dane zostały pobrane podczas lotu, więc trasa ucina się w Polsce zachodniej.

2.2. Program

a) Inicjacja danych

Zadanie zostało zrealizowane w środowisku MATLAB. W ćwiczeniu również użyto danych dla elipsoidy GRS80, a dokładnie wartości a i e^2 . Do programu zostały wczytane dane z pliku tekstowego, które zostały zamienione na wektory wartości. Wczytane dane zostały podane w układzie geodezyjnym. Współrzędne lotniska w Amsterdamie zostały ręcznie wprowadzone w skrypcie.

b) Transformacja na xyz

Kolejnym krokiem zadania była transformacja danych na układ xyz. Do obliczeń potrzebna była wartość pierwszego wertykalu (oznaczona jako „N”). Następnie za pomocą wzorów została przeprowadzona transformacja współrzędnych lotu oraz lotniska.

```
% współrzędne samolotu
N = (a./sqrt(1-e2 .* sind(phi) .* sind(phi)));
x = (N+h).*cosd(phi).*cosd(lambda);
y = (N+h).*cosd(phi).*sind(lambda);
z = (N.*(1-e2)+h).*sind(phi);

% lotniska współrzędne
NB = (a./sqrt(1-e2.*sind(phiB)));
XB = (NB+hB).*cosd(phiB).*cosd(lambdaB);
YB = (NB+hB).*cosd(phiB).*sind(lambdaB);
ZB = (NB.*(1-e2)+hB).*sind(phiB);
```

Zdjęcie 1: Skrypt na obliczenie wertykalu oraz transformacji współrzędnych

c) Transformacja na neu

Następnym krokiem była transformacja danych z układu xyz na neu. Aby osiągnąć cel zostały stworzone dwie macierze: delt oraz obrotu. Dzięki temu zabiegowi uzyskaliśmy dane w neu z punktem przyłożenia na lotnisku w Amsterdamie.

```
% zamiana xyz na neu
delta = [(x-XB)'
         (y-YB)'
         (z-ZB)'];

macierz_obrt = [-sind(phiB).*cosd(lambdaB) -sind(lambdaB) cosd(phiB).*cosd(lambdaB)
                -sind(phiB).*sind(lambdaB) cosd(lambdaB) cosd(phiB).*sind(lambdaB)
                cosd(phiB) 0 sind(phiB)];

macierz_obrt = transpose(macierz_obrt)

neu = macierz_obrt * delta

n = neu(1,:);
e = neu(2,:);
u = neu(3,:);
```

Zdjęcie 2: Transformacja danych na układ neu

d) Kolejne działania

Aby uzyskać poprawne wyniki zostały obliczone również: odległość skośna (s), kąt zenitalny (zenit) oraz azymut (azymut). Dodatkowo została stworzona formuła do wyrównania wartości azymutu.

```
%odległość skośna
s = sqrt(n.^n + e.^e + u.^u);

%kąt zenitalny
cosZenit = u ./ s
zenit = acosd(cosZenit);

%azymut
tanAzymut = e ./ n;
azymut = atand(tanAzymut);

%wyrównanie azymutów
for i = 1:size(neu, 1)
    if ((n(i, 1) < 0) && (e(i, 1) > 0)) || ((n(i, 1) < 0) && (e(i, 1) < 0))
        azymut(i, 1) = azymut(i, 1) + 180
    elseif ((n(i, 1) > 0) && (e(i, 1) < 0))
        azymut(i, 1) = azymut(i, 1) + 360
    end
end
```

Zdjęcie 3: Skrypt liczący odległość skośną, kąt zenitalny oraz azymut

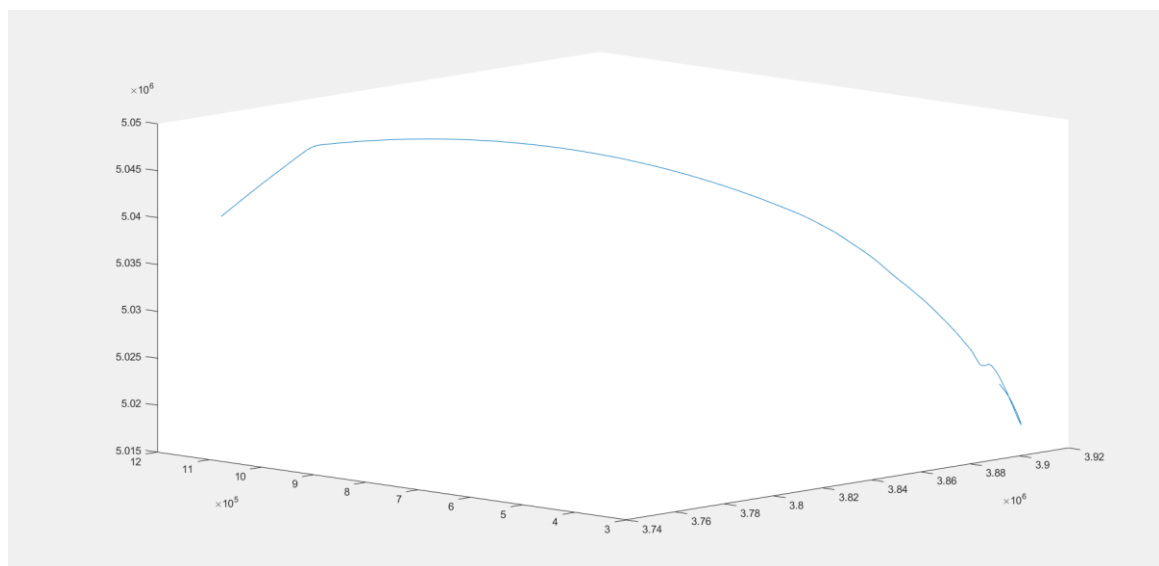
e) Wizualizacja danych i ich analiza

Za pomocą polecenia `geoscatter` można zwizualizować trasę lotu w układzie $\phi\lambda h$ na tle mapy z siatką. W tym wypadku formuła wygląda następująco: `geoscatter(phi,lambda,5,'ro')`. Podobnie trasa lotu wyglądała na stronie *FlightAware*.



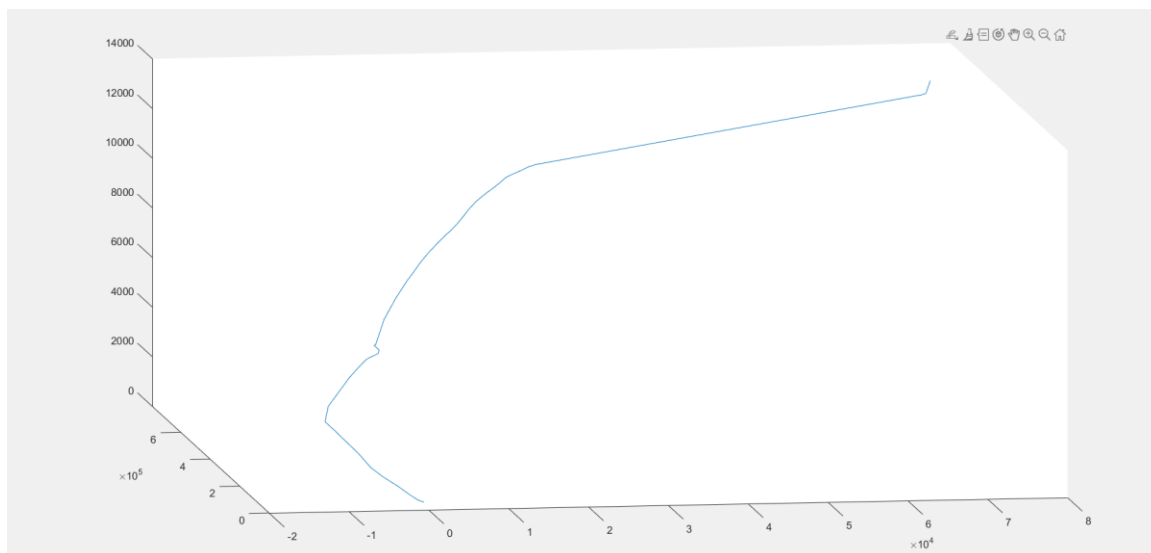
Zdjęcie 4: Wizualizacja z polecenia `geoscatter`.

Kolejnym poleceniem wywołanym przez skrypt jest wykres lotu w układzie x,y,z . Została w tym celu użyta następująca komenda: `plot3(x,y,z)`.



Zdjęcie 5: Wizualizacja w układzie x,y,z

Ostatnia wizualizacja obrazuje pułap lotu samolotu. Można zauważyć, że od pewnego momentu samolot utrzymuje jedną wysokość. Użyta do tego została następująca formuła: $plot3(n,e,h)$.



Zdjęcie 6: Wizualizacja wysokości samolotu

3. Wnioski

- I. Mając dane jednego typu współrzędnych jesteśmy w stanie za pomocą różnych wzorów otrzymać je w innym układzie.
- II. Układ neu jest niezbyt praktyczny, gdyż utrudnione jest śledzenie trasy lotu ze względu na jedno określone miejsce na Ziemi. Zaletą jest jednak dokładność pomiarów podczas lądowania i startu samolotu z lotniska, jeśli punktem odniesienia jest lotnisko.
- III. Najbardziej przydatny wydaje się układ xyz , gdyż dane są uniwersalne w każdym miejscu na Ziemi. Przyczyną jest fakt, że środkiem układu jest geometryczny środek elipsoidy.
- IV. Układ geodezyjny pozwala na odwzorowanie trasy bez wyznaczenia konkretnego punktu odniesienia jak w przypadku innych układów.
- V. W tym przypadku wartość u nie równa się zeru oraz poniżej jego. Oznacza to, że samolot nie znika za horyzontem