Jakub Radoszewski, Wojciech Rytter — Treść zadania, Opracowanie
Paweł Parys — Program

Dostępna pamięć: 64 MB. *OI, Etap I, 20.10–17.11.2008*

Słonie

W Bajtockim Zoo ma się za chwilę odbyć parada, w której uczestniczyć będą wszystkie znajdujące się w nim słonie. Pracownicy zoo zachęcili już zwierzęta do ustawienia się w jednym rzędzie, gdyż zgodnie z zarządzeniem dyrektora zoo taka powinna być początkowa figura parady.

Niestety, na miejsce przybył sam dyrektor i zupełnie nie spodobała mu się wybrana przez pracowników kolejność słoni. Dyrektor zaproponował kolejność, w której według niego zwierzęta będą się najlepiej prezentować, i wydał pracownikom polecenie poprzestawiania słoni zgodnie z tą propozycją.

Aby uniknąć nadmiernego chaosu tuż przed paradą, pracownicy postanowili przestawiać słonie, zamieniając miejscami kolejno pewne pary słoni. Przestawiane zwierzęta nie muszą sąsiadować ze sobą w rzędzie. Wysiłek potrzebny do nakłonienia słonia do ruszenia się z miejsca jest wprost proporcjonalny do jego masy, a zatem wysiłek związany z zamianą miejscami dwóch słoni o masach m_1 oraz m_2 można oszacować przez $m_1 + m_2$. Jakim minimalnym wysiłkiem pracownicy mogą poprzestawiać słonie tak, aby usatysfakcjonować dyrektora?

Napisz program, który:

- *wczyta ze standardowego wejścia masy wszystkich słoni z zoo oraz aktualną i docelową kolejność słoni w rzędzie,*
- *wyznaczy taki sposób poprzestawiania słoni, który prowadzi od kolejności początkowej do docelowej i minimalizuje sumę wysiłków związanych ze wszystkimi wykonanymi zamianami pozycji słoni,*
- *wypisze sumę wartości tych wysiłków na standardowe wyjście.*

Wejście

Pierwszy wiersz wejścia zawiera jedną liczbę całkowitą n ($2 \leqslant n \leqslant 1\,000\,000$), oznaczającą liczbę słoni w Bajtockim Zoo. Dla uproszczenia zakładamy, że słonie są ponumerowane od 1 do n. Drugi wiersz zawiera n liczb całkowitych m_i ($100 \leqslant m_i \leqslant 6\,500$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających masy poszczególnych słoni (wyrażone w kilogramach).

Trzeci wiersz wejścia zawiera n różnych liczb całkowitych a_i ($1 \leqslant a_i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w aktualnym ustawieniu. Czwarty wiersz zawiera n różnych liczb całkowitych b_i ($1 \leqslant b_i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w ustawieniu proponowanym przez dyrektora zoo. Możesz założyć, że ustawienia reprezentowane przez ciągi (a_i) oraz (b_i) są różne.

Wyjście

Pierwszy i jedyny wiersz wyjścia powinien zawierać jedną liczbę całkowitą, oznaczającą minimalny łączny wysiłek związany z poprzestawianiem słoni, w wyniku którego z ustawienia reprezentowanego przez (a_i) uzyskuje się ustawienie (b_i).

Przykład

Dla danych wejściowych:

```
6
2400 2000 1200 2400 1600 4000
1 4 5 3 6 2
5 3 2 4 6 1
```

poprawnym wynikiem jest:

```
11200
```

Jeden z najlepszych sposobów poprzestawiania słoni uzyskujemy, zamieniając miejscami kolejno pary słoni:

- *2 i 5 — wysiłek związany z zamianą to $2\,000 + 1\,600 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to* `1 4 2 3 6 5`,
- *3 i 4 — wysiłek to $1\,200 + 2\,400 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to* `1 3 2 4 6 5`,
- *1 i 5 — wysiłek to $2\,400 + 1\,600 = 4\,000$, a uzyskane ustawienie to* `5 3 2 4 6 1`, *czyli ustawienie docelowe.*

Rozwiązanie

Wstęp

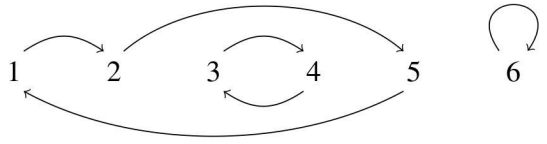
Aby łatwiej wyobrazić sobie zadanie, jakie przed pracownikami zoo postawił dyrektor, spróbujemy przedstawić je graficznie. W tym celu zdefiniujemy funkcję $p\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ w następujący sposób:

$$p(b_1) = a_1, \quad p(b_2) = a_2, \quad \ldots, \quad p(b_n) = a_n.$$

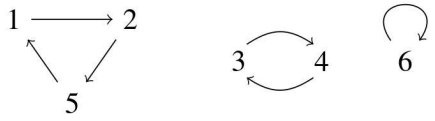
Zauważmy, że wówczas $p(x) = y$ będzie oznaczało, że słoń o numerze x powinien znaleźć się w końcowym ustawieniu w miejscu, które jest aktualnie zajmowane przez słonia o numerze y. Wszystkie liczby b_i są różne, zatem p jest poprawnie zdefiniowaną funkcją, a ponieważ wszystkie liczby a_i są różne, p jest *permutacją* zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Sytuację z zadania możemy zatem przedstawić w postaci grafu skierowanego, w którym wierzchołkami są numery $1,2,\ldots,n$ słoni, krawędziami natomiast wartości funkcji p (patrz rys. 1).

Dalej, jak każdą permutację, funkcję p można rozłożyć na tak zwane *cykle proste* $C_1, C_2, \ldots, C_c$. W tym celu należy wystartować z dowolnego wierzchołka grafu i podążać po krawędziach, aż dojdzie się z powrotem do tego wierzchołka (dlaczego zawsze trafia

się w końcu w wierzchołek początkowy trasy?), po czym usunąć znaleziony cykl z grafu i kontynuować proces aż do wyczerpania wszystkich wierzchołków — patrz rys. 2.

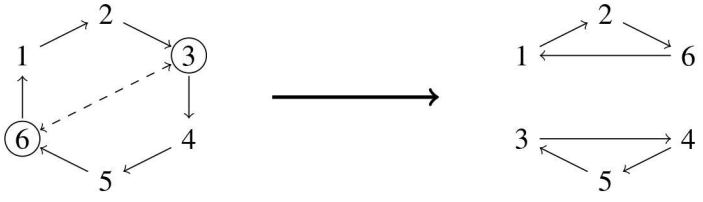


Rys. 1: Graf wyznaczony przez funkcję p dla przykładu z treści zadania. Wierzchołki grafu reprezentują numery słoni, natomiast strzałka z x do y obrazuje relację „słoń x powinien zająć miejsce słonia y”.



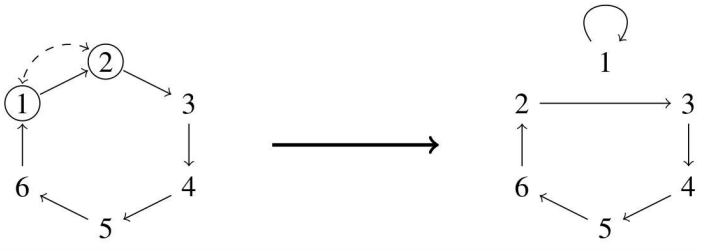
Rys. 2: Rozkład grafu z rys. 1 na cykle proste: trójelementowy, dwuelementowy i jednoelementowy.

Zastanówmy się teraz, jak na tle opisanego rozkładu na cykle proste wygląda operacja zamiany miejscami słoni o numerach e oraz f. Koszt takiej zamiany to $m_e + m_f$. Jeżeli słonie e oraz f znajdują się w tym samym cyklu, to następuje wówczas podział tego cyklu na dwa rozłączne, z których jeden zawiera jednego z tych słoni, a drugi drugiego — patrz rys. 3.



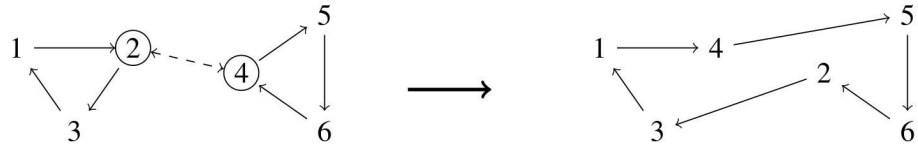
Rys. 3: Zamiana miejscami trzeciego i szóstego słonia w cyklu prowadzi do powstania dwóch cykli trójelementowych.

W szczególności, w wyniku zamiany miejscami dwóch słoni, które sąsiadują na cyklu, jeden z powstałych cykli jest jednoelementowy, co oznacza dokładnie tyle, że po tej zamianie jeden ze słoni znajduje się na swojej pozycji docelowej (rys. 4).



Rys. 4: Zamiana miejscami pierwszego i drugiego słonia w cyklu powoduje, że pierwszy słoń trafia na właściwą pozycję.

Z kolei jeżeli słonie e oraz f należą do różnych cykli, to zamiana ich miejscami powoduje sklejenie tych cykli w jeden (rys. 5).



Rys. 5: Zamiana miejscami słoni należących do różnych cykli.

Rozwiązanie wzorcowe[1]

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $|C|$ — długość cyklu C, czyli liczba wierzchołków grafu w nim zawartych
- $suma(C)$ — suma mas słoni należących do cyklu C
- $min(C)$ — masa najlżejszego słonia na cyklu C
- min — masa najlżejszego słonia w ogóle.

Naszym celem jest sprowadzenie układu cykli reprezentowanego przez permutację p do takiego, który będzie złożony wyłącznie z cykli jednoelementowych. W rozwiązaniu wzorcowym każdy cykl C rozpatrujemy osobno, a wspomniane przekształcenie realizujemy, stosując do C jedną z następujących metod przestawiania słoni.

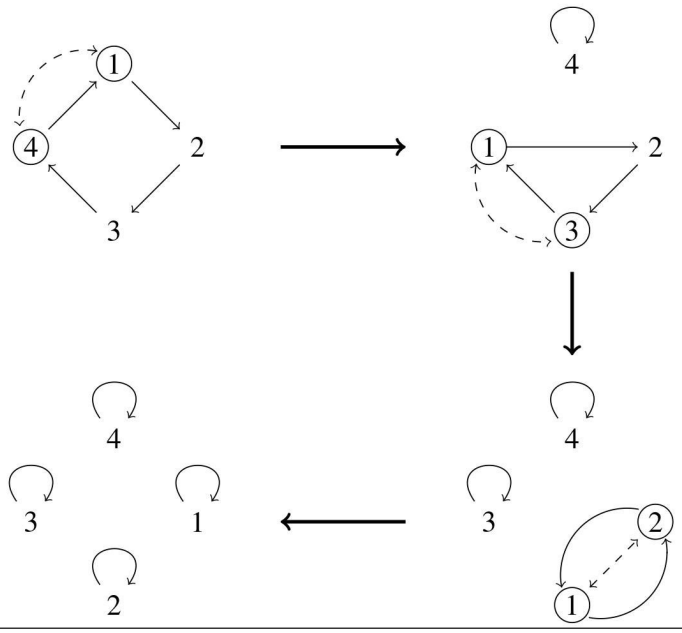
Metoda 1. Porządkujemy cały cykl pojedynczymi zamianami sąsiednich słoni (jak na rys. 4). Za każdym razem zamieniamy najlżejszego słonia z całego cyklu ($min(C)$) z jego poprzednikiem na cyklu, w wyniku czego poprzednik ten trafia na właściwe miejsce (patrz rys. 6). W ten sposób najlżejszego słonia przemieszczamy łącznie $|C|-1$ razy, natomiast każdego z pozostałych słoni z cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt porządkowania cyklu tą metodą wynosi zatem:

$$\text{metoda}_1(C) = suma(C) + \big(|C|-2\big)\cdot min(C). \tag{1}$$

Metoda 2. Tym razem postępujemy bardzo podobnie, jednakże do obsłużenia całego cyklu wykorzystujemy globalnie najlżejszego słonia (min). W tym celu zamieniamy go z najlżejszym słoniem cyklu ($min(C)$), a następnie za jego pomocą przestawiamy kolejno wszystkie słonie z cyklu C (poza $min(C)$) jak poprzednio, po czym z powrotem zamieniamy min z $min(C)$. Na ten ciąg zamian można też spojrzeć jak na sklejenie C z cyklem zawierającym min, po którym następuje ustawienie wszystkich słoni z C na właściwych miejscach za pomocą pojedynczych zamian ze słoniem min. W ten sposób najlżejszy słoń w całym zoo zostaje przemieszczony $|C|+1$ razy, najlżejszy w cyklu — 2 razy, a każdy z pozostałych słoni tego cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt wszystkich przestawień to wówczas:

$$\text{metoda}_2(C) = suma(C) + min(C) + \big(|C|+1\big)\cdot min. \tag{2}$$

[1] Duża część opisu rozwiązania wzorcowego została zaczerpnięta z pracy [37].



Rys. 6: Porządkowanie czteroelementowego cyklu za pomocą pierwszej metody. Zakładamy, że najlżejszy słoń ma numer 1.

Okazuje się, że w całym rozwiązaniu wystarczy wziąć pod uwagę jedynie dwie opisane metody i dla każdego cyklu w rozkładzie do uporządkowania użyć korzystniejszej z nich[2]. Ostatecznie otrzymujemy następujący minimalny koszt poprzestawiania słoni:

$$\sum_{i=1}^{c} \min(\text{metoda}_1(C_i),\ \text{metoda}_2(C_i)). \tag{3}$$

Implementacja

Jako podsumowanie słownego opisu rozwiązania wzorcowego umieszczamy poniższy jego pseudokod. Łatwo sprawdzić, że cały algorytm ma złożoność czasową $O(n)$. Konkretne implementacje tego algorytmu można znaleźć w plikach `slo.cpp`, `slo1.java` oraz `slo2.pas`.

1: { Konstrukcja permutacji p. }
2: **for** $i := 1$ **to** n **do** $p[b_i] := a_i$;
3:
4: { Rozkład p na cykle proste. }
5: odw : array$[1..n] :=$ (**false**, **false**, ..., **false**);
6: $c := 0$;
7: **for** $i := 1$ **to** n **do**
8: **if not** $odw[i]$ **then begin**
9: $c := c + 1$; $x := i$;

[2]Dodajmy tylko, że dla niektórych cykli zachodzi $min(C) = min$, i wówczas druga metoda traci sens, jednakże nie trzeba się tym faktem przejmować, gdyż wówczas i tak $\text{metoda}_2(C) > \text{metoda}_1(C)$.

```
10:       while not odw[x] do begin
11:         odw[x] := true;
12:         C_c := C_c ∪ {x};
13:         x := p[x];
14:       end
15:     end
16:
17: { Wyznaczenie parametrów cykli. }
18: min := ∞;
19: for i := 1 to c do begin
20:     suma(C_i) := 0; min(C_i) := ∞;
21:     forall e ∈ C_i do begin
22:         suma(C_i) := suma(C_i) + m_e;
23:         min(C_i) := min(min(C_i), m_e);
24:     end
25:     min := min(min, min(C_i));
26: end
27:
28: { Obliczenie wyniku. }
29: w := 0;
30: for i := 1 to c do begin
31:     metoda_1(C_i) := suma(C_i) + (|C_i| − 2) · min(C_i);
32:     metoda_2(C_i) := suma(C_i) + min(C_i) + (|C_i| + 1) · min;
33:     w := w + min(metoda_1(C_i), metoda_2(C_i));
34: end
35: return w;
```

Uzasadnienie poprawności

Na sam koniec opisu rozwiązania wzorcowego pozostawiliśmy jego dowód poprawności. Jest on, niestety, trochę skomplikowany, jednakże jest to jedyna niezawodna metoda sprawdzenia tego, czy w rozwiązaniu nie zapomnieliśmy o żadnym z przypadków.

Jeżeli C jest cyklem, to przez

$$\mathrm{koszt}(C) = \min(\mathrm{metoda}_1(C),\ \mathrm{metoda}_2(C))$$

oznaczmy koszt uporządkowania tego cyklu w rozwiązaniu wzorcowym. Niech dalej $OPT(p)$ oznacza najmniejszy możliwy koszt poprzestawiania wszystkich słoni zgodnie z zarządzeniem dyrektora. Aby wykazać poprawność rozwiązania wzorcowego, wystarczy udowodnić, że

$$OPT(p) \geqslant \sum_{i=1}^{c} \mathrm{koszt}(C_i). \tag{4}$$

Nierówność (4) udowodnimy przez indukcję względem liczby zamian wykonywanych w rozwiązaniu optymalnym. Przypadek zerowej liczby zamian jest trywialny. Załóżmy

więc, że (4) zachodzi dla wszystkich permutacji, dla których algorytm optymalny wykonuje $k-1$ zamian, i niech p będzie dowolną permutacją, do której uporządkowania algorytm ten potrzebuje k zamian. Musimy udowodnić, że (4) zachodzi także dla p.

Przyjrzyjmy się pierwszemu krokowi rozwiązania optymalnego „OPT" uruchomionego dla p. Załóżmy, że są w nim zamieniane słonie e oraz f. Permutację po ich zamianie oznaczmy przez p' — uporządkowanie jej przez algorytm optymalny wymaga $k-1$ zamian, więc wiadomo, że nierówność (4) zachodzi dla p'. W zależności od wzajemnego położenia e oraz f wyróżniamy teraz kilka przypadków.

Przypadek 1: e i f należą do tego samego cyklu w p. Dla ustalenia uwagi niech $e, f \in C_1$. Po zamianie słoni cykl C_1 rozpada się na dwa mniejsze cykle (patrz rys. 3). Oznaczmy te cykle przez A i B oraz niech $e \in A$ i $f \in B$. Wówczas rozkład p' na cykle proste wygląda tak: $\{A, B, C_2, C_3, \ldots, C_c\}$, a stąd i z (4) dla p' mamy:

$$OPT(p) = OPT(p') + m_e + m_f \geqslant \text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + \sum_{i=2}^{c} \text{koszt}(C_i) + m_e + m_f.$$

Aby pokazać (4) dla p, wystarczy zatem udowodnić, że:

$$\text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + m_e + m_f \geqslant \text{koszt}(C_1). \tag{5}$$

Dalsze uzasadnienie możemy podzielić na trzy podprzypadki:

Przypadek 1.1: $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ i $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_1(B)$. Korzystając z faktu, że zbiór słoni zawartych w cyklu C_1 jest sumą zbiorów słoni odpowiadających A oraz B, oraz z tego, że każda z wartości $min(A)$, $min(B)$, m_e, m_f jest nie mniejsza niż $min(C_1)$, mamy:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_1(B) + m_e + m_f = \\
&\quad = suma(A) + \big(|A| - 2\big) \cdot min(A) + suma(B) + \big(|B| - 2\big) \cdot min(B) + m_e + m_f \geqslant \\
&\quad \geqslant suma(C_1) + \big(|C_1| - 2\big) \cdot min(C_1) = \text{metoda}_1(C_1) \geqslant \text{koszt}(C_1).
\end{aligned}$$

Intuicyjnie, pokazaliśmy, że zamiast rozbijać cykl C_1 na cykle A i B (za pomocą zamiany e z f) i każdy z nich porządkować za pomocą pierwszej metody, można równie dobrze od razu uporządkować cały cykl C_1 za pomocą tej metody.

Przypadek 1.2: $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ i $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_2(B)$ (lub odwrotnie). Podobnie jak poprzednio, w poniższej nierówności liczba składników nie zmienia się, a jedynie zastępujemy cięższe słonie przez $min(C_1)$ lub min:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_2(B) + m_e + m_f = \\
&\quad = suma(A) + \big(|A| - 2\big) \cdot min(A) + suma(B) + min(B) + \big(|B| + 1\big) \cdot min + m_e + m_f \geqslant \\
&\quad \geqslant suma(C_1) + min(C_1) + \big(|C_1| + 1\big) \cdot min = \text{metoda}_2(C_1) \geqslant \text{koszt}(C_1).
\end{aligned}$$

Tym razem intuicja stojąca za powyższym ciągiem przekształceń jest taka, że zamiast wprowadzać najlżejszego słonia tylko do cyklu B, można go wprowadzić od razu do całego C_1, co nie przynosi żadnej straty, a może się dodatkowo opłacić przy porządkowaniu fragmentu C_1 odpowiadającego cyklowi A.

Przypadek 1.3: koszt(A) = metoda$_2(A)$ **i** koszt(B) = metoda$_2(B)$**.** I tym razem do wyprowadzenia (5) wykorzystujemy te same spostrzeżenia. W tym przypadku strata wynikła z rozbicia cyklu C_1 jest ewidentna: intuicyjnie, zamiast wprowadzać słonia *min* osobno do każdego z cykli A, B, można na samym początku wprowadzić go do całego C_1:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_2(A)+\text{metoda}_2(B)+m_e+m_f=\\
&\quad= suma(A)+min(A)+\big(|A|+1\big)\cdot min+suma(B)+min(B)+\big(|B|+1\big)\cdot min+m_e+m_f\geqslant\\
&\quad\geqslant suma(C_1)+min(C_1)+\big(|C_1|+1\big)\cdot min=\text{metoda}_2(C_1)\geqslant\text{koszt}(C_1).
\end{aligned}$$

Przypadek 2: e **i** f **należą do różnych cykli.** Dla ustalenia uwagi niech tym razem $e\in C_1, f\in C_2$. Po zamianie słoni cykle C_1 i C_2 łączą się w jeden cykl A (patrz rys. 5), stąd rozkład p' na cykle to: $\{A,C_3,C_4,\ldots,C_c\}$. Stąd i z (4) dla p' otrzymujemy:

$$OPT(p)=OPT(p')+m_e+m_f\geqslant\text{koszt}(A)+\sum_{i=3}^{c}\text{koszt}(C_i)+m_e+m_f.$$

Aby pokazać (4) dla p, wystarczy udowodnić, że:

$$\text{koszt}(A)+m_e+m_f\geqslant\text{koszt}(C_1)+\text{koszt}(C_2). \tag{6}$$

Bez straty ogólności załóżmy, że $min(C_1)\leqslant min(C_2)$, czyli $min(A)=min(C_1)$. Tym razem mamy dwa podprzypadki:

Przypadek 2.1: koszt(A) = metoda$_1(A)$**.** Korzystając z tego, że cykl A jest sumą (pod względem zbioru zawartych w nim słoni) cykli C_1 oraz C_2, a także z założenia $min(A)=min(C_1)$ oraz nierówności: $m_f\geqslant min(C_2)$ i $m_e, min(A)\geqslant min$, otrzymujemy następujący ciąg przekształceń:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_1(A)+m_e+m_f=\\
&\quad= suma(A)+\big(|A|-2\big)\cdot min(A)+m_e+m_f\geqslant\\
&\quad\geqslant suma(C_1)+\big(|C_1|-2\big)\cdot min(C_1)+suma(C_2)+min(C_2)+\big(|C_2|+1\big)\cdot min=\\
&\quad=\text{metoda}_1(C_1)+\text{metoda}_2(C_2)\geqslant\text{koszt}(C_1)+\text{koszt}(C_2).
\end{aligned}$$

Intuicja tym razem jest taka, że zamiast łączyć cykle C_1 i C_2 i porządkować otrzymany cykl A metodą 1, można sam cykl C_1 uporządkować tą metodą (tu nic nie tracimy, gdyż $min(A)=min(C_1)$), natomiast cykl C_2 połączyć nie z C_1, ale z cyklem zawierającym najlżejszego słonia *min*, co odpowiada zastosowaniu do C_2 drugiej metody porządkowania.

Przypadek 2.2: koszt(A) = metoda$_2(A)$**.** Podobnie jak poprzednio, na mocy warunków $min(A)=min(C_1)$, $m_f\geqslant min(C_2)$ oraz $m_e\geqslant min$, mamy:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_2(A)+m_e+m_f=\\
&\quad= suma(A)+min(A)+\big(|A|+1\big)\cdot min+m_e+m_f\geqslant\\
&\quad\geqslant suma(C_1)+min(C_1)+\big(|C_1|+1\big)\cdot min+suma(C_2)+min(C_2)+\big(|C_2|+1\big)\cdot min=\\
&\quad=\text{metoda}_2(C_1)+\text{metoda}_2(C_2)\geqslant\text{koszt}(C_1)+\text{koszt}(C_2).
\end{aligned}$$

Intuicyjnie, nie opłaca się ponosić kosztu połączenia cykli C_1 i C_2, żeby potem uporządkować wynikowy cykl A za pomocą najlżejszego słonia *min*, gdyż na pewno nie gorszym rozwiązaniem jest wprowadzenie słonia *min* do każdego z cykli C_1, C_2 z osobna. Innymi słowy, $min + min(A) + m_e + m_f \geqslant 2 \cdot min + min(C_1) + min(C_2)$.

Inne rozwiązania

Wśród potencjalnych rozwiązań błędnych można wyróżnić przede wszystkim takie, które przy porządkowaniu cykli zapominają o jednej z metod: drugiej (plik `slob1.cpp`, 20% punktów) lub pierwszej (plik `slob2.cpp`, 10% punktów). Przypomnijmy, że takich błędów można uniknąć, jeżeli przeprowadzi się dowód poprawności rozwiązania lub chociażby sprawdzi poprawność swojego rozwiązania na większej grupie losowych testów, porównując jego wyniki z jakimkolwiek rozwiązaniem na pewno poprawnym, chociażby wykładniczym. Innym błędem było wykonywanie wszystkich obliczeń na liczbach całkowitych 32-bitowych — takie rozwiązanie, wskutek błędu przepełnienia typu, zdobywało 60% punktów za to zadanie (implementacja w pliku `slob3.cpp`).

Wśród rozwiązań wolniejszych można wymienić rozwiązanie kwadratowe względem n (plik `slos1.cpp`), będące nieefektywną implementacją rozwiązania wzorcowego i zdobywające 40% punktów, oraz zaimplementowane w pliku `slos2.cpp` i uzyskujące 10% punktów rozwiązanie siłowe, rozważające wszystkie możliwości zamian słoni, poczynając od najtańszych.