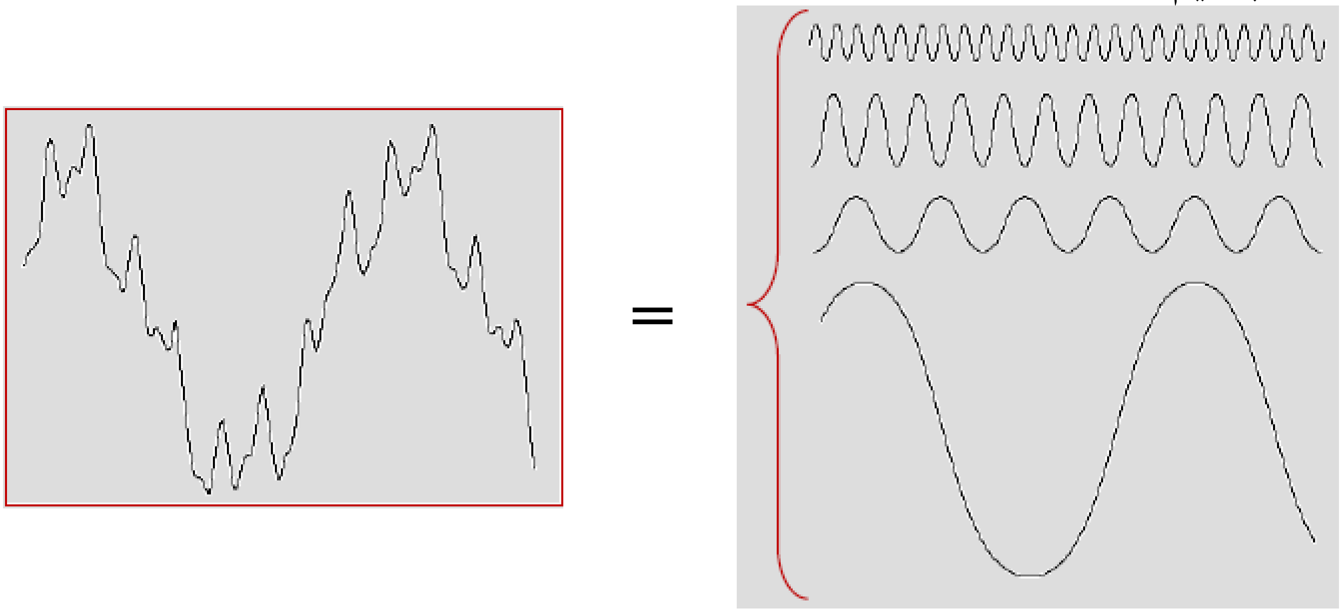
تصویر پردازی رقمی

دکتر ملیحه ثابتی
استادیار گروه کامپیوتر دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران شمال

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- تبدیل فوریه (Fourier Transform)
  - هر تابع متناوب می تواند بصورت مجموع سینوس ها و کسینوس هایی با فرکانس های مختلف بیان شود که هر کدام در ضریب متفاوتی ضرب می شود (این مجموع را سری فوریه می نامیم). مهم نیست تابع چقدر پیچیده باشد اگر متناوب باشد و بعضی از شرایط ساده ریاضی را برآورده کند می تواند توسط چنین مجموعی نشان داده شود
  - یک تابع که بصورت سری های فوریه یا تبدیل فوریه بیان شده است می تواند کاملا با فرایند معکوس، بدون از بین رفتن اطلاعات، بازسازی شود این نکته یکی از مهم ترین ویژگی های این نمایش است زیرا به ما اجازه می دهد در حوزه فوریه کار کنیم و سپس به حوزه اصلی تابع برگردیم بدون اینکه اطلاعاتی را از دست بدهیم



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- عدد مختلط **C** بصورت زیر تعریف می شود

$$C = R + jI$$

  - که در آن **R** و **I** اعداد حقیقی اند و **j** یک عدد موهومی است که برابر با جذر ۱- می باشد. در اینجا **R** نشان دهنده بخش حقیقی و **I** بخش موهومی آن است
  - اعداد حقیقی زیر مجموعه ای از اعداد مختلط هستند که در آنها **I=0** است

- مزدوج (**conjugate**) یک عدد مختلط که با $\mathbf{C}^*$ نشان داده می شود برابر است با

$$C^* = R - jI$$

- گاهی بهتر است اعداد مختلط در مختصات قطبی نمایش داده شوند

$$C = |C|(cos\theta + jsin\theta)$$

  - که در آن $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ برابر با طول بردار است که از مبدا صفحه مختلط به نقطه **(R,I)** امتداد دارد و θ زاویه بین بردار و محور حقیقی است $\theta = \arctan(I/R)$.
  - از آنجایی که $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$ می باشد خواهیم داشت $C = |C|e^{j\theta}$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

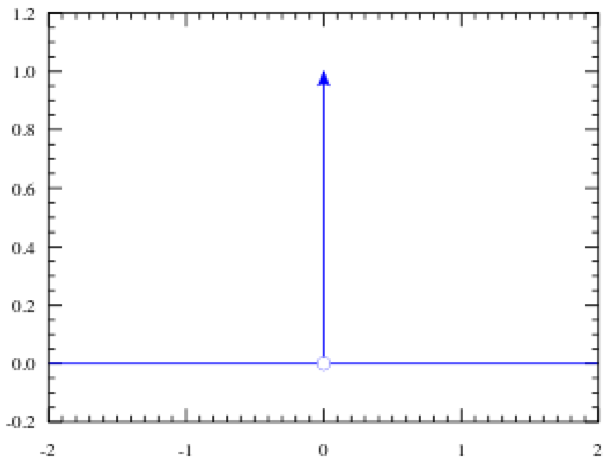
- سری فوریه
  - تابع پیوسته **f(t)** که با تناوب **T** متناوب است می تواند بصورت مجموع سینوس ها و کسینوس ها با ضرایب مناسب بیان شود این مجموع که سری فوریه نامیده می شود بصورت زیر تعریف می شود

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

  - که ضرایب آن عبارتند از

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس



- تابع ضربه واحد (**unit impulse**)
  - این تابع که با $\delta(t)$ نمایش داده می شود بصورت زیر تعریف می شود

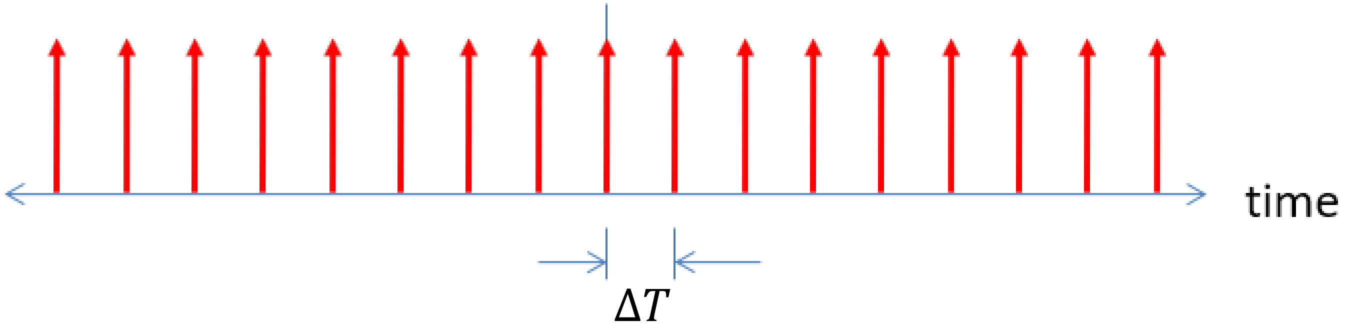
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & if\ t = 0 \\ 0 & if\ t \neq 0 \end{cases}$$

  - این تابع مقید است که خاصیت همانی را برآورده کند

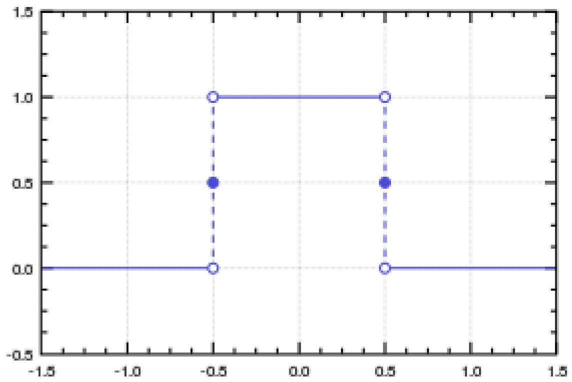
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

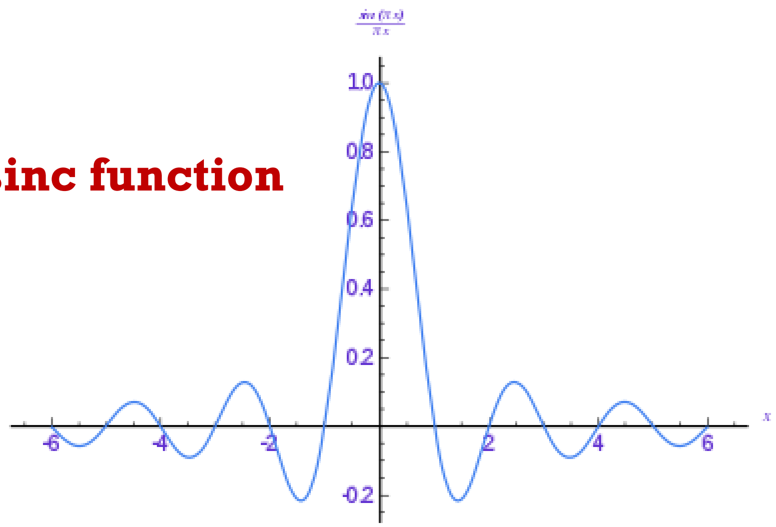
- قطار ضربه (**impulse train**)
  - این تابع بصورت مجموع نامتناهی از ضربه های متناوب با فاصله ΔT واحد از هم، تعریف می شود

$$\delta_{\Delta T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس





sinc function

- تبدیل فوریه تابع یک متغیره
  - تبدیل فوریه تابع پیوسته **f(t)** از متغیر پیوسته **t** که بصورت **F{f(t)}** نمایش داده می شود

$$F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

  - متغیر μ نیز یک متغیر پیوسته است و **F{f(t)}** تابعی از μ می باشد

- معکوس تبدیل فوریه که بصورت **F^{-1}\{f(t)\}** نمایش داده می شود بصورت زیر تعریف می شود

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$$

تبدیل فوریه پالس مستطیلی

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi\mu t}dt = \frac{\sin(\pi\mu)}{(\pi\mu)}$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- کانولوشن (پیچش)
  - کانولوشن دو تابع که با عملگر ⁕ مشخص می شود بصورت زیر تعریف خواهد شد

$$F(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

  - که علامت منها برای دوران ۱۸۰ درجه ای بکار می رود **t** جابجایي لازم برای لغزاندن یک تابع از روی دیگری است و τ متغیری است که از آن انتگرال گرفته می شود

- قضیه کانولوشن
  - تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع در حوزه مکانی برابر با حاصلضرب تبدیلات فوریه دو تابع در حوزه فرکانس است

$$f(t)*h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

  - با دنبال کردن روشی مشابه، پیچش در حوزه فرکانس مشابه با ضرب در حوزه مکانی است

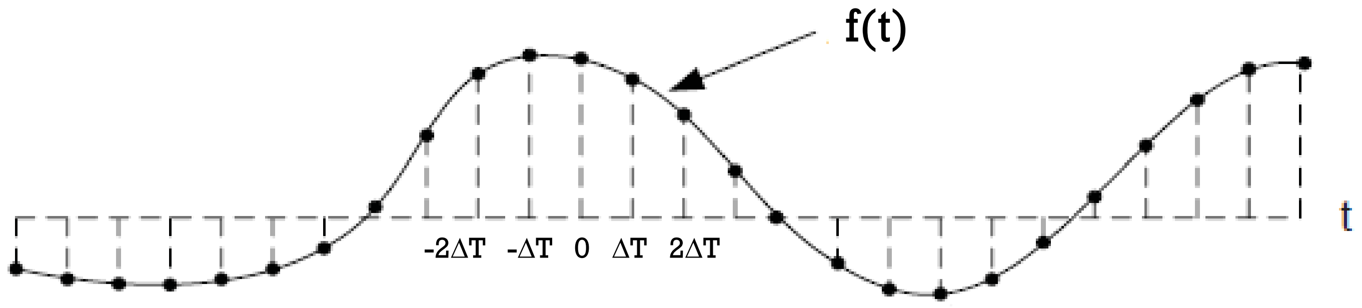
$$f(t)\,h(t) \Leftrightarrow H(\mu) * F(\mu)$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- نمونه برداری (**sampling**)
  - توابع پیوسته قبل از اینکه بتوانند در کامپیوتر پردازش شوند باید به دنباله ای از مقادیر گسسته تبدیل شوند

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$

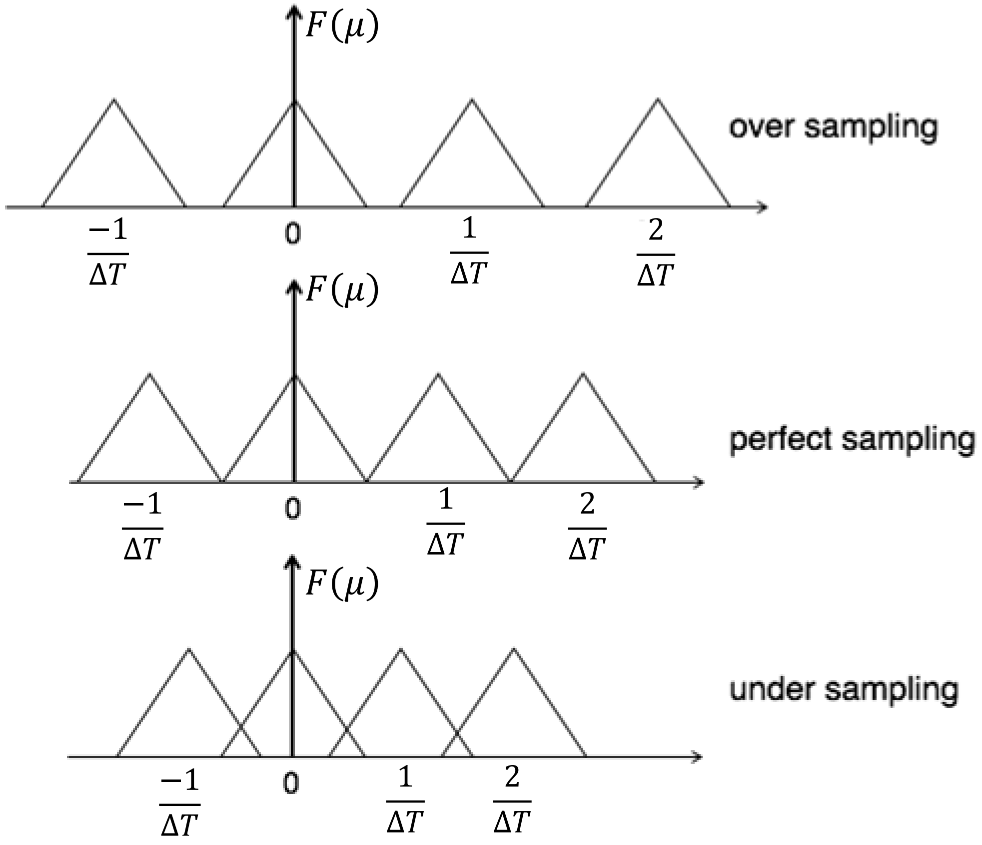
  - که تابع $\tilde{f}(t)$ تابع نمونه برداری شده را نشان می دهد هر مولفه از این مجموع، ضربه ای است که وزن آن برابر با مقدار **f(t)** در مکان ضربه است
  - شکل زیر نشان می دهد که تابع نمونه برداری شده $\tilde{f}(t)$ شامل نمونه هایی با فاصله های یکسان ΔT از تابع اصلی است



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- تبدیل فوریه توابع نمونه برداری شده
  - تبدیل فوریه مربوط به یک تابع نمونه برداری شده $\tilde{f}(t)$، دنباله ای نامتناهی و متناوب از کپی های $F(\mu)$ است که تبدیل تابع پیوسته اصلی است. فاصله بین کپی ها با مقدار $1/\Delta T$ تعیین می شود مشاهده می کنید که اگر چه تابع $\tilde{f}(t)$ یک تابع نمونه برداری شده است تبدیل آن یعنی $F(\mu)$ پیوسته است زیرا شامل کپی هایی از $F(\mu)$ است که یک تابع پیوسته می باشد
- بیش نمونه برداری (**oversampling**)
  - نرخ نمونه برداری به اندازه کافی بالا بود تا فاصله کافی بین تناوب ها را فراهم آورد و در نتیجه درستی $F(\mu)$ را حفظ کند
- نمونه برداری بحرانی (**critically sampling**)
  - نرخ نمونه برداری برای حفظ $F(\mu)$ کافی بود
- زیر نمونه برداری (**undersampling**)
  - نرخ نمونه برداری کمتر از حداقل مورد نیاز برای نگهداری کپی های متمایز $F(\mu)$ بود و بنابراین در حفظ تبدیل اصلی با شکست مواجه شد

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس



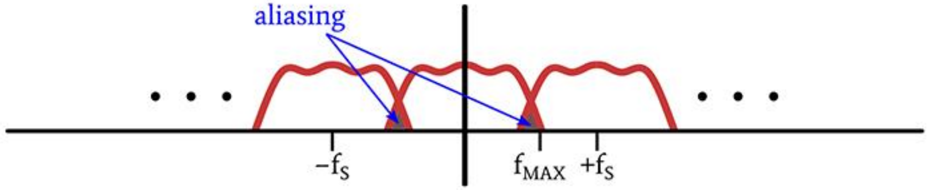
- قضیه نمونه برداری
  - استخراج یک تناوب $F(\mu)$ در صورتی امکان پذیر است که فاصله بین کپی ها کافی باشد

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$

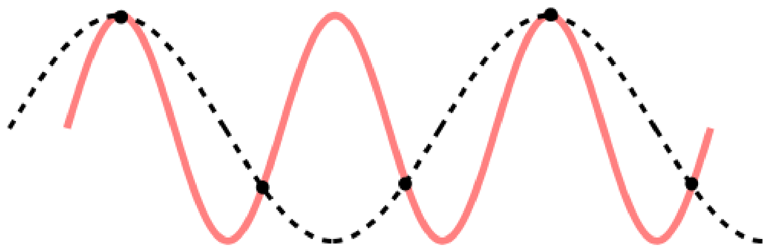
  - اگر تابعی با باند محدود، با نمونه هایش که با نرخی بیش از دو برابر بالاترین فرکانس موجود در تابع گرفته شدند نمایش داده شود هیچ اطلاعاتی از بین نمی رود. برعکس می توان گفت که ماکزیمم فرکانسی که می توان بوسیله نمونه برداری یک سیگنال با نرخ $1/\Delta T$ بدست آورد برابر با $\mu_{max} = 1/\Delta T$ است
  - بنابراین قضیه نمونه برداری مشخص می کند که نمونه برداری باید بیش از نرخ نایکویست (**Nyquist**) باشد

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- روی هم افتادگی فرکانس (Aliasing)
  - یک سوال منطقی در اینجا این است اگر تابع با باند محدود، با نرخ کمتر از دو برابر بالاترین فرکانس خود نمونه سازی شود چه اتفاقی خواهد افتاد؟
    - این اثر که ناشی از زیرنمونه برداری تابع است بعنوان روی هم افتادگی فرکانس خوانده می شود بعبارت دیگر، روی هم افتادگی فرکانس، فرایندی است که در آن مولفه های فرکانس بالای تابع، بصورت فرکانس های پایین تر در تابع نمونه برداری شده ظاهر می شوند این وضعیت روی هم افتادگی فرکانس نام دارد



    - شکل زیر تشریح کلاسیک روی هم افتادگی است. سیگنال نمونه برداری شده شبیه موج سینوسی است اما فرکانس آن کمتر از فرکانس سیگنال اصلی است. این سیگنال نمونه برداری شده که فرکانس آن بسیار کمتر از تابع پیوسته اصلی است مثالی از روی هم افتادگی فرکانسی است



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- تبدیل فوریه گسسته **Discrete Fourier Transform (DFT)**
  - تبدیل فوریه تابع گسسته **f(x)** بصورت زیر محاسبه می شود

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}, \text{ u=0, 1,2,…, M-1}$$

- عکس تبدیل فوریه گسسته **Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)** عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{M}\sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M} \text{ , x=0, 1,2,…, M-1}$$

- مثالی از نحوه محاسبه تبدیل فوریه

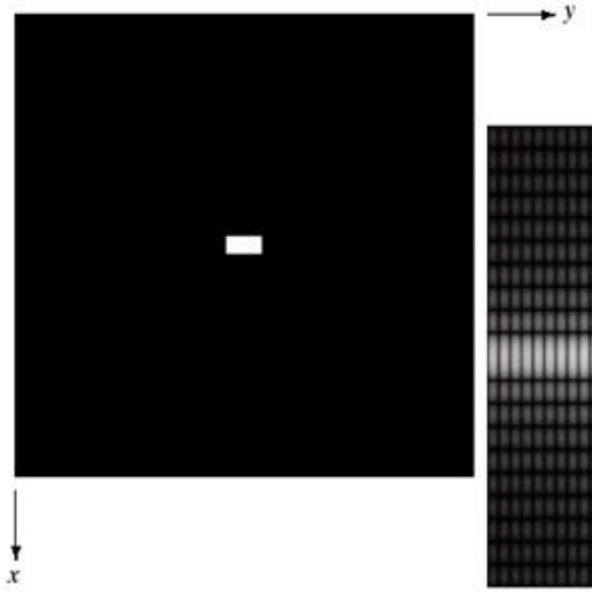
$$f[0] = 8,\ f[1] = 4,\ f[2] = 8,\ f[3] = 0,$$

$$F[n] = \sum_{0}^{3} f[k]e^{-j\frac{\pi}{2}nk} = \sum_{k=0}^{3} f[k](-j)^{nk}$$

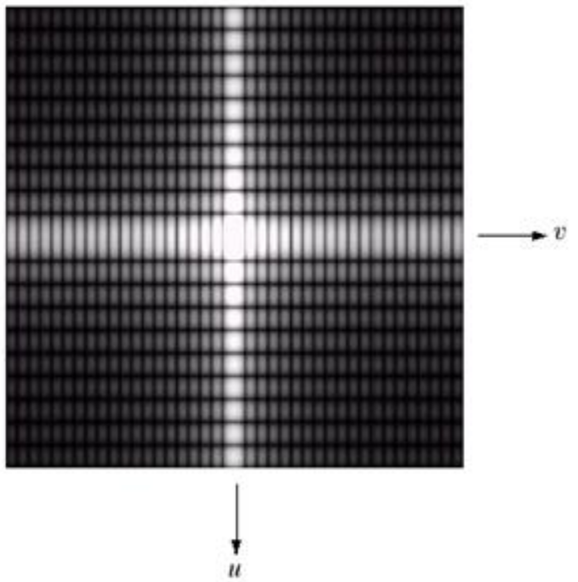
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -j4 \\ 12 \\ j4 \end{pmatrix}$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

تصویر اصلی



طیف فوریه



- تبدیل فوریه دوبعدی
  - فرض کنید **f(x,y)** یک تصویر دیجیتال به اندازه **M×N** باشد تبدیل فوریه آن به شکل بدست می آید

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})},$$

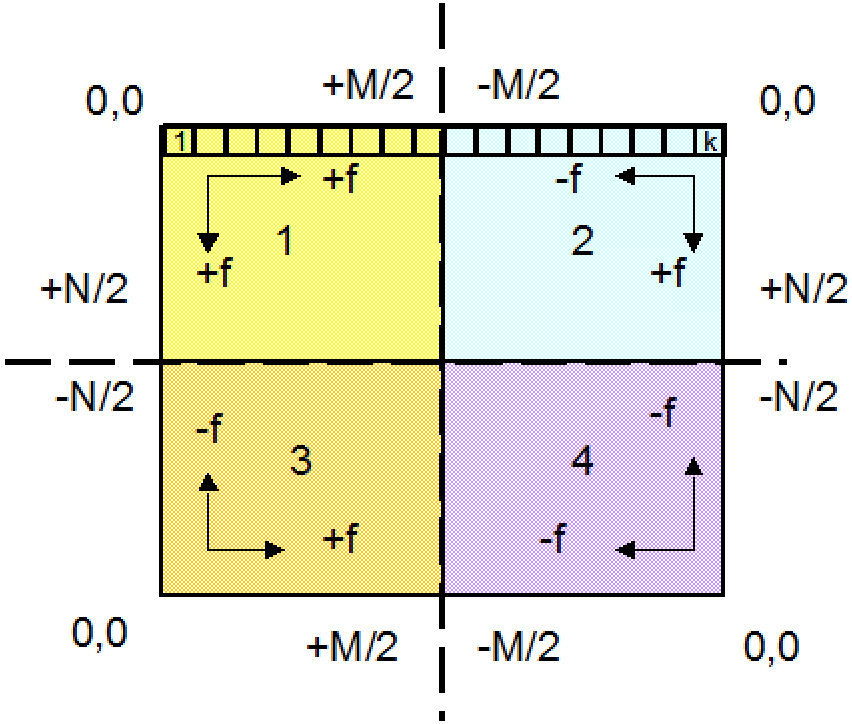
$$(u = 0, 1, \ldots, M-1,\ v = 0, 1, \ldots, N-1)$$

- عکس تبدیل فوریه دوبعدی

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})},$$

$$(x = 0, 1, \ldots, M-1,\ y = 0, 1, \ldots, N-1)$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس



- متناوب بودن تبدیل فوریه
  - در حالت دوبعدی، ترسیم گرافیک دشوار است بجای دو نیم تناوب، اکنون چهار ربع تناوب در نقطه (M/2,N/2) با هم برخورد می کنند اگر داده ها را طوری شیفت دهیم که F(0,0) در (M/2,N/2) باشد تجسم بسیار ساده خواهد بود
  - با استفاده از این معادله، داده ها را طوری شیفت می دهیم که F(0,0) در مرکز چهارگوش قرار گیرد

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- تبدیل DFT بطور کلی مختلط است می تواند بصورت قطبی بیان شود

$$F(u,v) = |F(u,v)|e^{j\phi(u,v)}$$

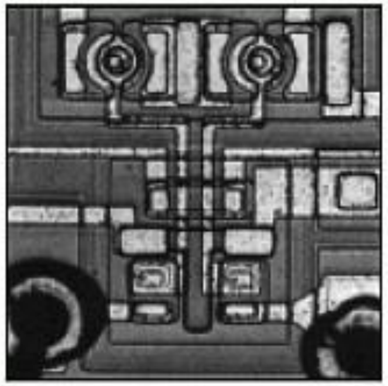
- طیف فوریه

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

- زاویه فاز

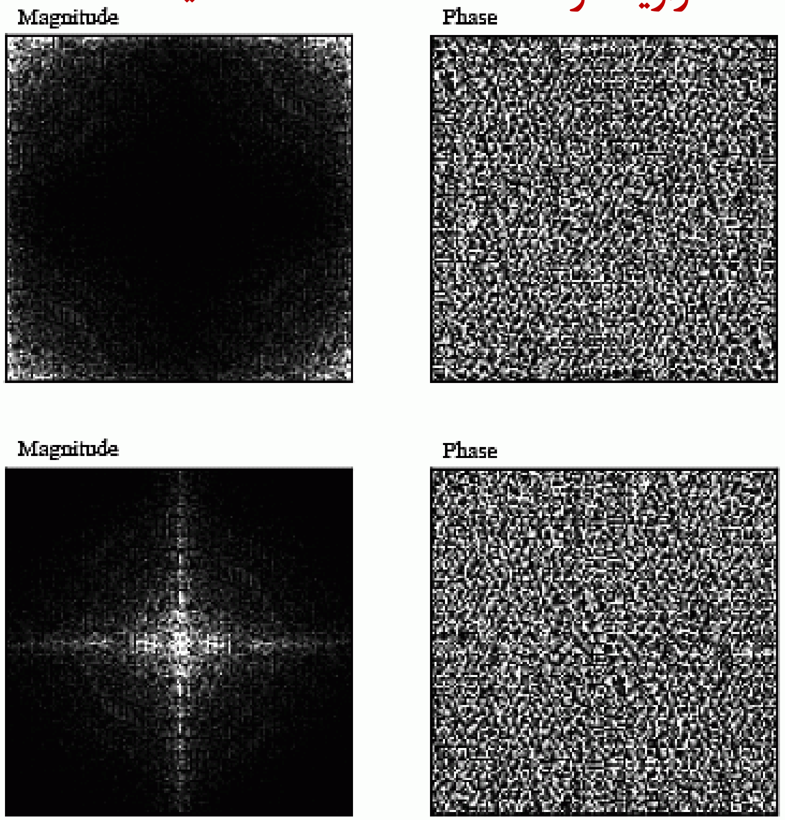
$$\phi(u,v) = \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

تصویر اصلی



طیف

زاویه فاز



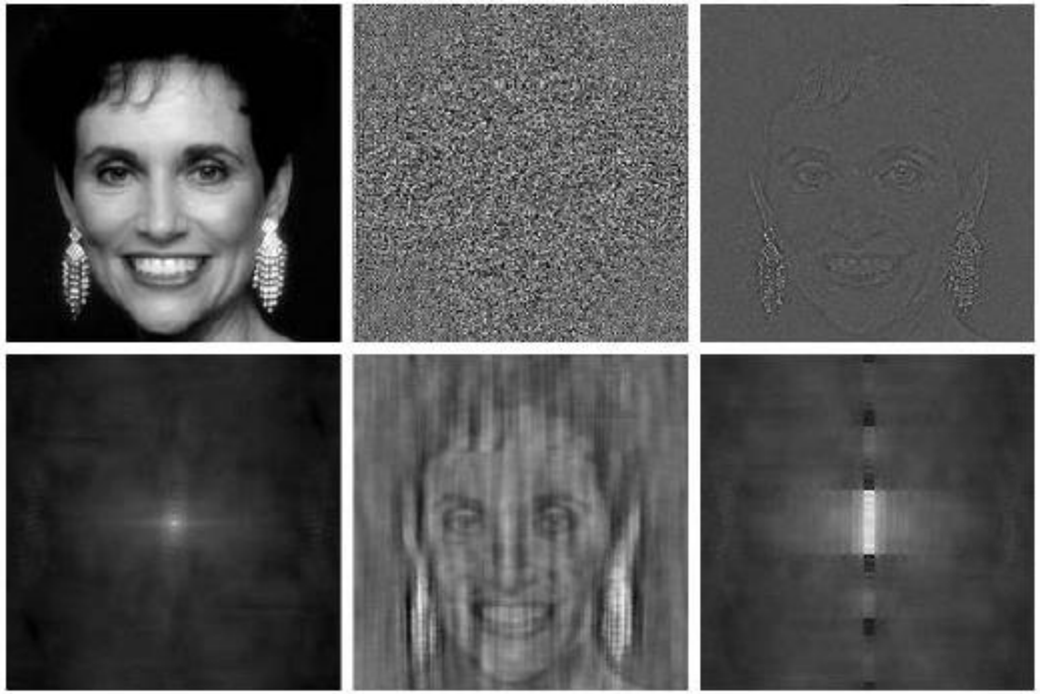
با دستور **fftshift** مرکز تبدیل فوریه در مرکز قرار می گیرد

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- اهمیت فاز
  - مولفه های طیف **DFT**، دامنه های منحنی های سینوسی را تعیین می کند که با هم ترکیب می شوند تا تصویر نتیجه بدست آید. در هر فرکانس معین در **DFT** یک تصویر، دامنه بزرگ منجر به برجستگی (برآمدگی) بیشتر منحنی سینوسی در آن فرکانس در آن تصویر می شود. برعکس، دامنه کوچک باعث می شود که منحنی سینوسی در آن تصویر کمتر ظاهر شود
  - فاز معیاری از جابجایی منحنی های سینوسی مختلف نسبت به مبدا آنها است. شکل روبرو، غالب بودن فاز را در تعیین محتوای ویژگی تصویر یک شی نشان می دهد

تصویر بازسازی شده تنها با زاویه فاز

زاویه فاز



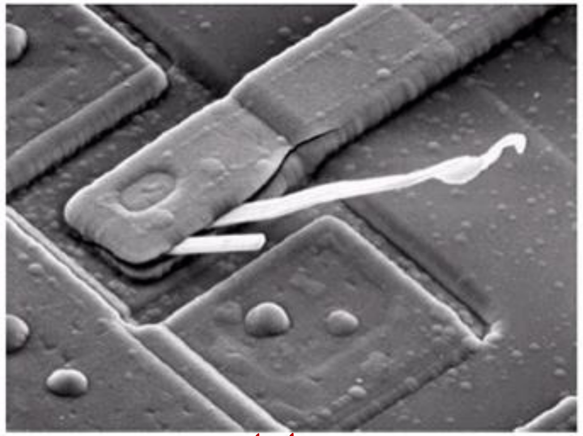
تصویر بازسازی شده با طیف و یک فاز دیگر

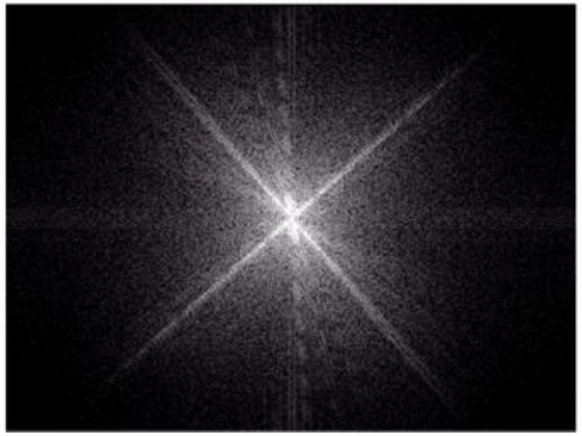
تصویر بازسازی شده با زاویه فاز و یک طیف دیگر

تصویر بازسازی شده تنها با طیف

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- رابطه بین مولفه های فرکانس تبدیل فوریه و ویژگی های مکانی تصویر
  - از آنجایی که فرکانس مستقیما به نرخ تغییرات مکانی مربوط می شود چندان دشوار نیست که برخی فرکانس های تبدیل فوریه را بطور شهودی به الگوهای تغییرات شدت در تصویر، مرتبط کرد. به یاد داشته باشید مولفه فرکانس با کندترین تغییر ($u=v=0$) متناسب با میانگین شدت تصویر است هر چه از مبدا تبدیل دور می شویم فرکانس های پایین تر متناظر با مولفه هایی از تصویر هستند که شدت آنها به کندی تغییر می کند، بعنوان مثال در تصویر یک اتاق، اینها ممکن است متناظر با تغییرات آرام در شدت روشنایی دیوارها و کف باشد. هر چه از مبدا دورتر می شویم فرکانس های بالاتر متناظر با تغییرات سریع تر در شدت در تصویر می شود لبه های اشیا و سایر مولفه های تصویر با تغییرات ناگهانی شدت مشخص می شوند
- در شکل زیرطیف فوریه تصویر نمایش داده شده است تحلیل دیداری مولفه فاز در حالت کلی چندان مفید نیست. نکته جالبی که در طیف فوریه می توان دید اینست که مولفه های برجسته (قابل رویت) را در امتداد جهت های ±۴۵ نشان می دهد که متناظر با لبه های تیزی در تصویر اصلی است که تقریبا در امتداد ±۴۵ قرار دارند


تصویر اصلی

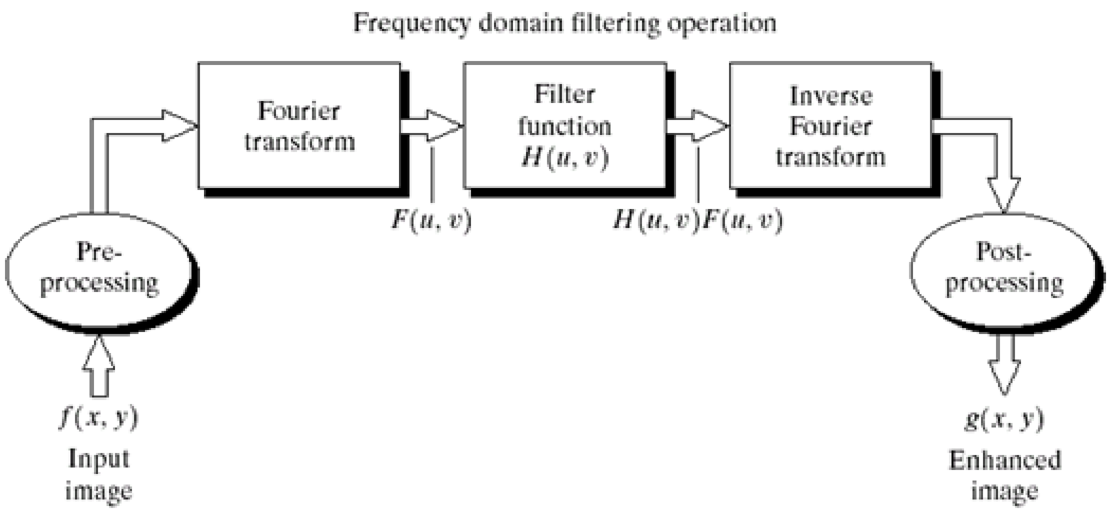

طیف فوریه

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- مبانی فیلتر کردن در حوزه فرکانس
  - فیلتر کردن در حوزه فرکانس شامل اصلاح تبدیل فوریه تصویر و سپس محاسبه تبدیل معکوس برای بدست آوردن نتیجه پردازش شده است بنابراین داریم

$$g(x,y)=F^{-1}[H(u,v)F(u,v)]$$

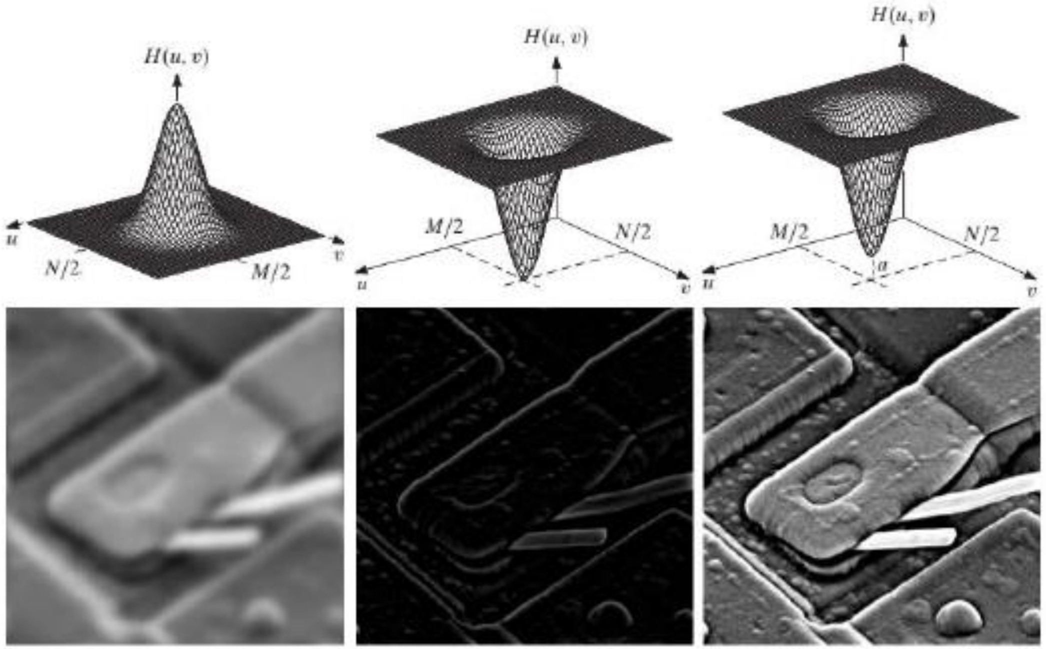
- که در آن **F(u,v)** برابر با تبدیل فوریه تصویر ورودی یعنی **f(x,y)** و **H(u,v)** یک تابع فیلتر (یا تابع انتقال فیلتر) نام دارد و **g(x,y)** تصویر فیلتر شده خروجی است. تابع فیلتر، تبدیل تصویر وردی را اصلاح می کند تا خروجی پردازش شده **g(x,y)** بدست آید



به یا داشته باشید که حاصلضرب دو تابع در حوزه فرکانس براساس قضیه کانولوشن، موجب پیچش در حوزه مکانی می شود

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- مبانی فیلتر کردن در حوزه فرکانس
  - فرکانس های پایین در تبدیل، به مولفه هایی از تصویر با تغییر شدت کند مربوط می شود مثل دیوارهای اتاق یا آسمان بدون ابر. از طرف دیگر، فرکانس های بالا ناشی از گذارهای تیز در شدت هستند مثل لبه ها و نویز. بنابراین انتظار داریم که فیلتر **H(u,v)** که فرکانس های بالا را تضعیف می کند ولی فرکانس های پایین را عبور می دهد (فیلتر پایین گذر) تصویر را مات نماید اما فیلتری با خاصیت معکوس (فیلتر بالاگذر) جزییات تیز را ارتقا دهد ولی موجب کاهش کنترات تصویر گردد



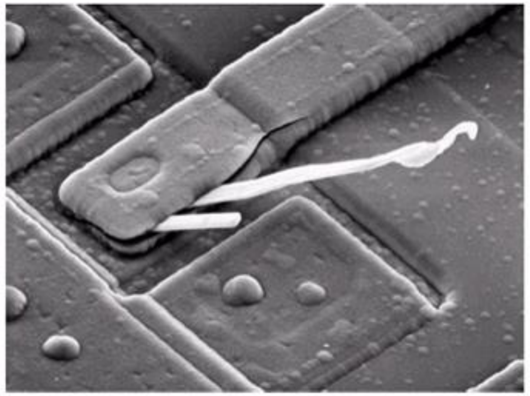
الف ب ج

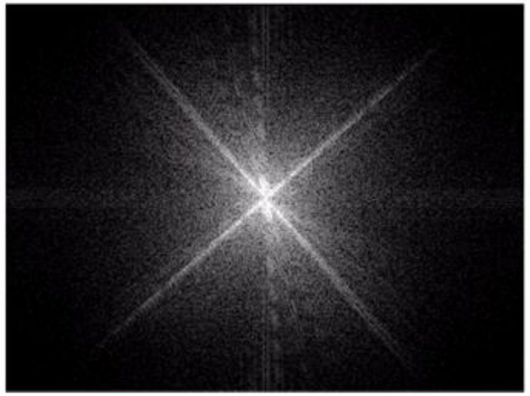
(ب)فیلتر بالا گذر، جمله **dc** را حذف می کند و منجر به آثاری می شودکه در شکل میانی دیده می شود.

(ج) اضافه کردن یک ثابت کوچک به فیلتر، تاثیر مناسبی در تیز کردن نداردولی مانع از حذف جمله **dc** می شود و در نتیجه توتالیتی را حفظ می کند

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

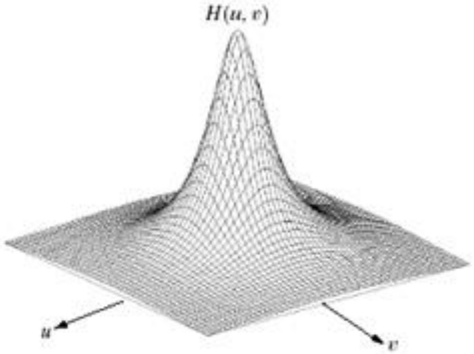
تصویر اصلی

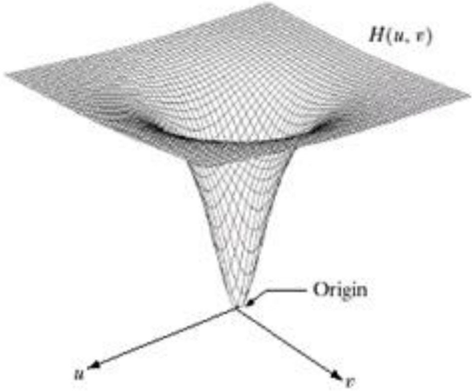




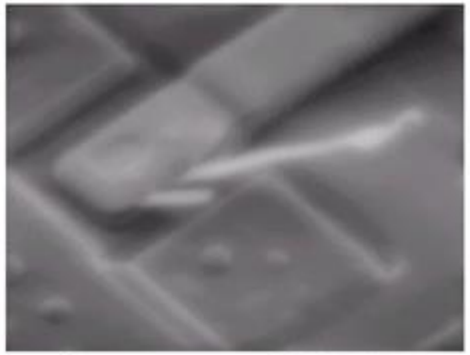
طیف تصویر

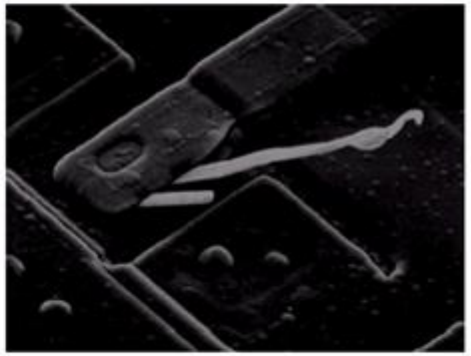
فیلتر پایین گذر





فیلتر بالا گذر





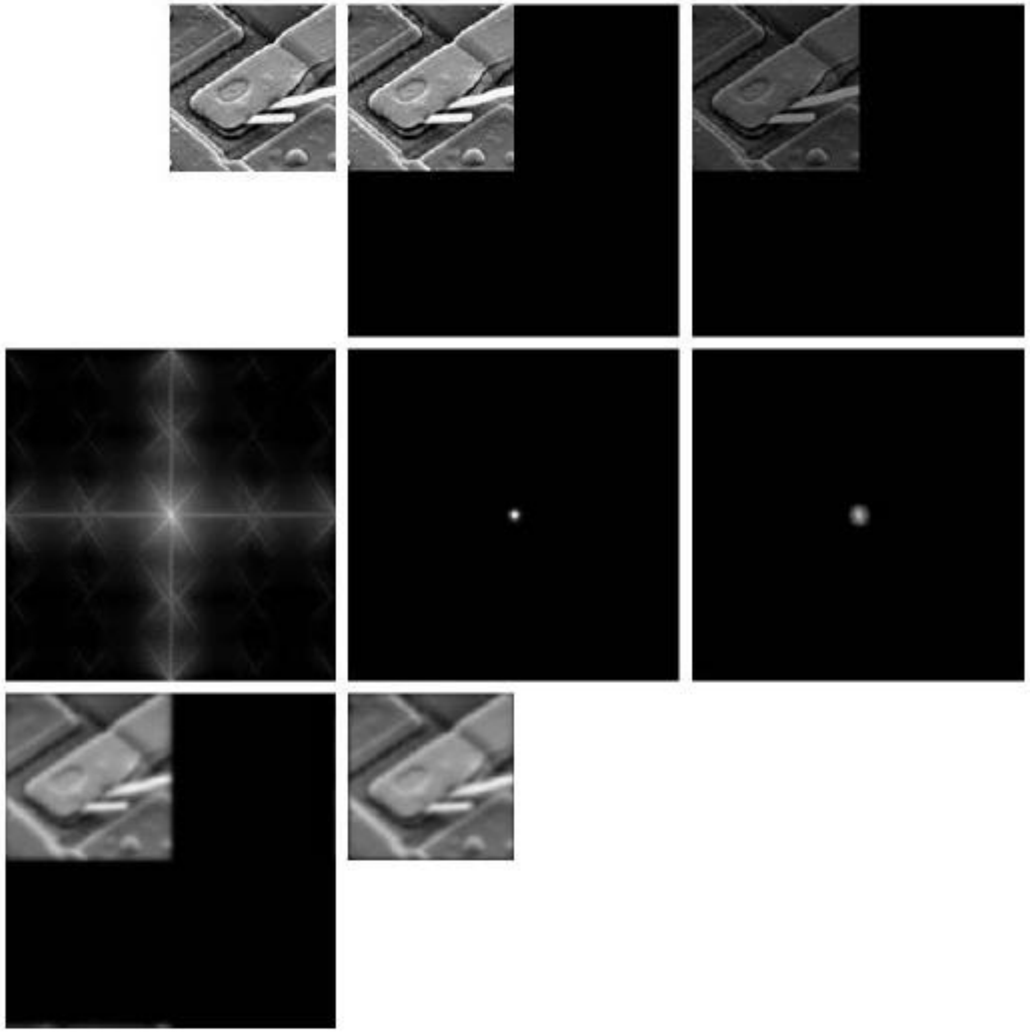
فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- خلاصه ای از مراحل فیلتر کردن در حوزه فرکانس

1. به تصویر ورودی $f(x,y)$ به اندازه $M \times N$، صفرهای ضروری (zero padding) را به تصویر اضافه کنید تا تصویر به اندازه $P \times Q$ درآید ($P = 2M, Q = 2N$)
2. تصویر $f(x,y)$ را در $(-1)^{x+y}$ ضرب کنید تا مرکز تبدیل تعیین شود
3. DFT مربوط به تصویر یعنی $F(u,v)$ را محاسبه کنید
4. یک تابع فیلتر متقارن به نام $H(u,v)$ به اندازه $P \times Q$ ایجاد کنید که مختصات مرکز آن $(P/2,Q/2)$ باشد. با استفاده از ضرب آرایه ها $G(u,v)$ را محاسبه کنید

$$G(u,v)=H(u,v)F(u,v)$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس



5. تصویر پردازش شده را بدست آورید

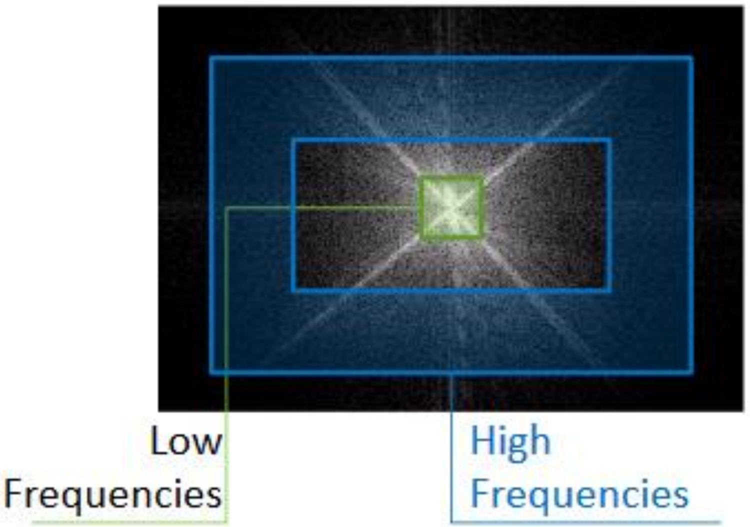
$$g(x,y)=\{real[F^{-1}[G(u,v)]]\}\,(-1)^{x+y}$$

که قسمت حقیقی انتساب شد تا مولفه های مختلط پارازیتی ناشی از محاسبات غیردقیق حذف گردند

6. نتیجه نهایی را از طریق استخراج ناحیه **M×N** از ربع بالایی چپ، بدست آورید

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- هموار کردن تصویر با فیلترهای حوزه فرکانس
  - فیلترهای پایین گذر ایده آل
- تیز کردن تصویر با فیلترهای حوزه فرکانس
  - فیلترهای بالاگذر ایده آل
- فیلتر کردن انتخابی
  - فیلترهای میان گذر و حذف باند
  - فیلترهای فاقی (**notch filter**)



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلترهای پایین گذر
  - لبه ها و سایر گذارهای شدت تیز (مثل نویز) در تصویر، در محتوای فرکانس بالای تبدیل فوریه آن موثرند بنابراین، هموار کردن (مات کردن) در حوزه فرکانس با تضعیف فرکانس های بالا صورت می گیرد یعنی با فیلتر پایین گذر انجام می شود
  - انواع فیلترهای پایین گذر معرفی شده در این فصل
    - فیلتر ایده آل
    - فیلتر باترورث
    - فیلتر گوسی
  - فیلتر پایین گذر در صنعت چاپ و نشر مهم است که در آنجا برای کارهای پردازشی متعددی بکار می رود (فرایند زیباسازی)

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

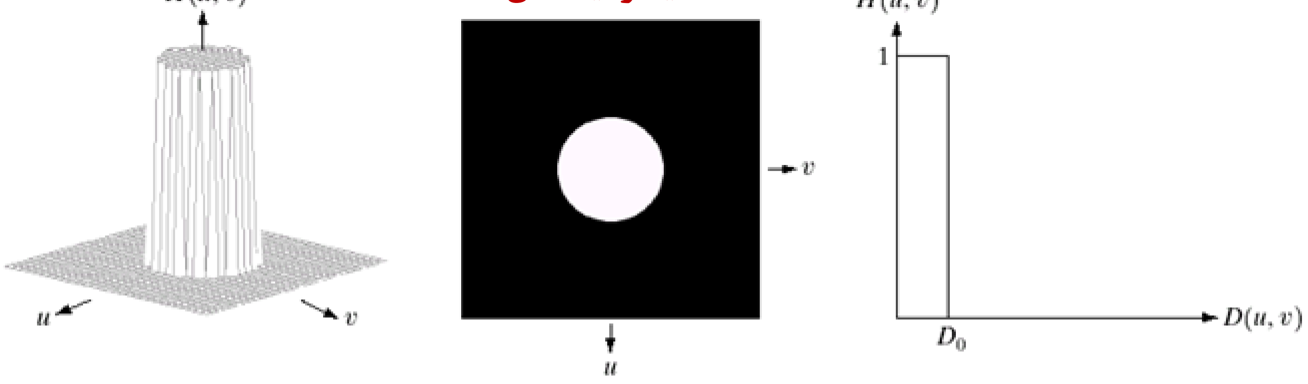
- فیلتر پایین گذر ایده آل (ILPF)

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)\le D_0\\ 0 & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=[(u-M/2)^2+(v-N/2)^2]^{1/2}$$

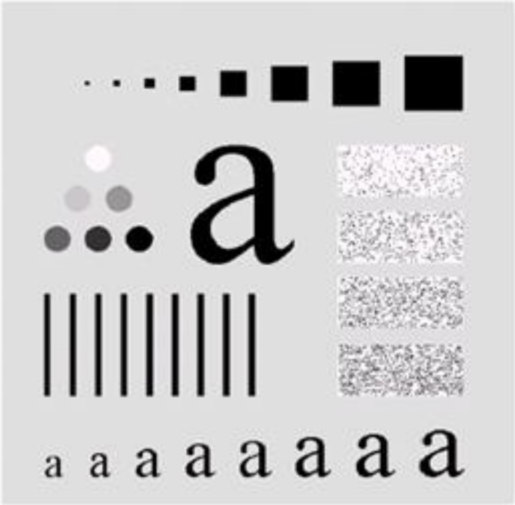
- در این فیلتر تمام فرکانس های داخل یا روی دایره ای به شعاع D_0، بدون تضعیف شدن عبور می کنند در حالی که تمام فرکانس های خارج از دایره کاملا تضعیف می شوند. فیلتر پایین گذر ایده آل، حول مبدا بطور شعاعی متقارن است به این معنی که فیلتر کاملا توسط سطح مقطع شعاعی تعریف شده است

فیلتر ایده آل

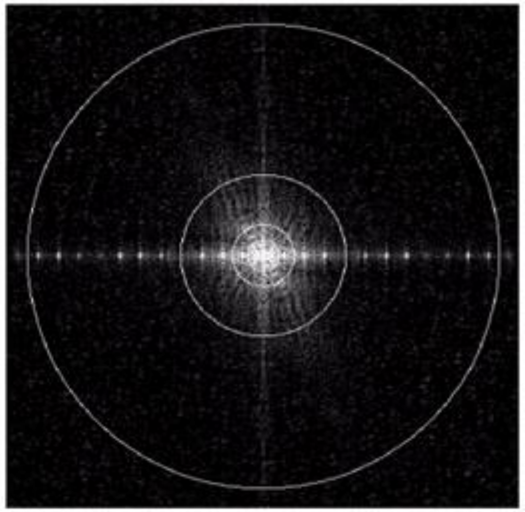


فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

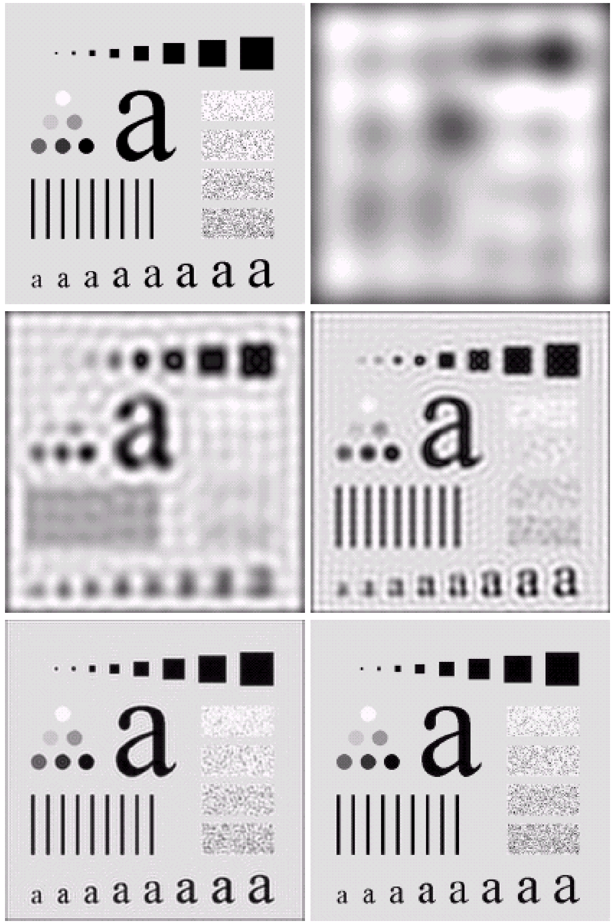
- مثالی از فیلتر پایین گذر ایده آل
  - هدف از مات شدگی، حذف تمام جزییات در تصویر، به جز لکه هایی باشد که نشان دهنده بزرگترین اشیا هستند



تصویر اصلی

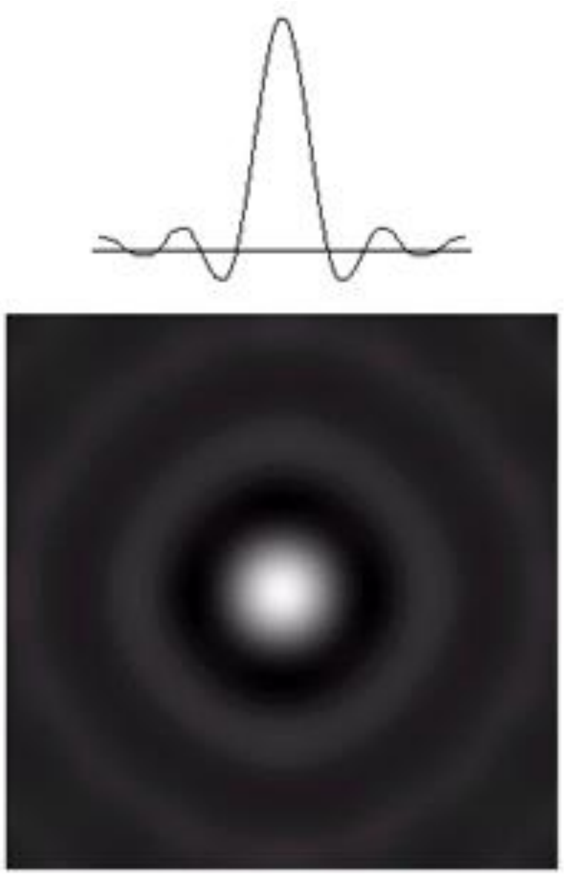


طیف فوریه



نتایج فیلتر کردن با استفاده از **ILPF** در مقادیر شعاعی ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس



- مات و طنین در ILPF
  - چون سطح مقطع ILPF در حوزه فرکانس شبیه فیلتر جعبه ای است، غیر منتظره نیست که سطح مقطع فیلتر مکانی متناظر، به شکل تابع **sinc** باشد فیلتر کردن در حوزه مکانی بوسیله پیچش تابع **h(x,y)** با تصویر انجام می گیرد
  - فرض کنید هر پیکسل در تصویر، ضربه گسسته ای است که قدرت آن متناسب با شدت تصویر در آن مکان است پیچش **sinc** با یک ضربه، **sinc** را در مکان ضربه کپی می کند برآمدگی مرکزی **sinc**، علت اصلی مات شدگی است در حالی که برآمدگی های کوچک و بیرونی منجر به طنین می شوند

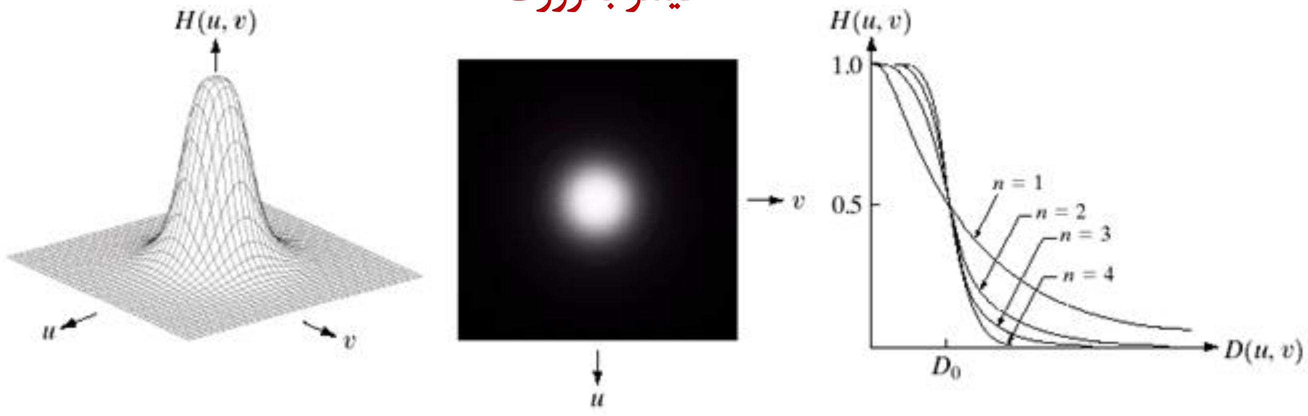
فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر پایین گذر باترورث (**BLPF**)

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$

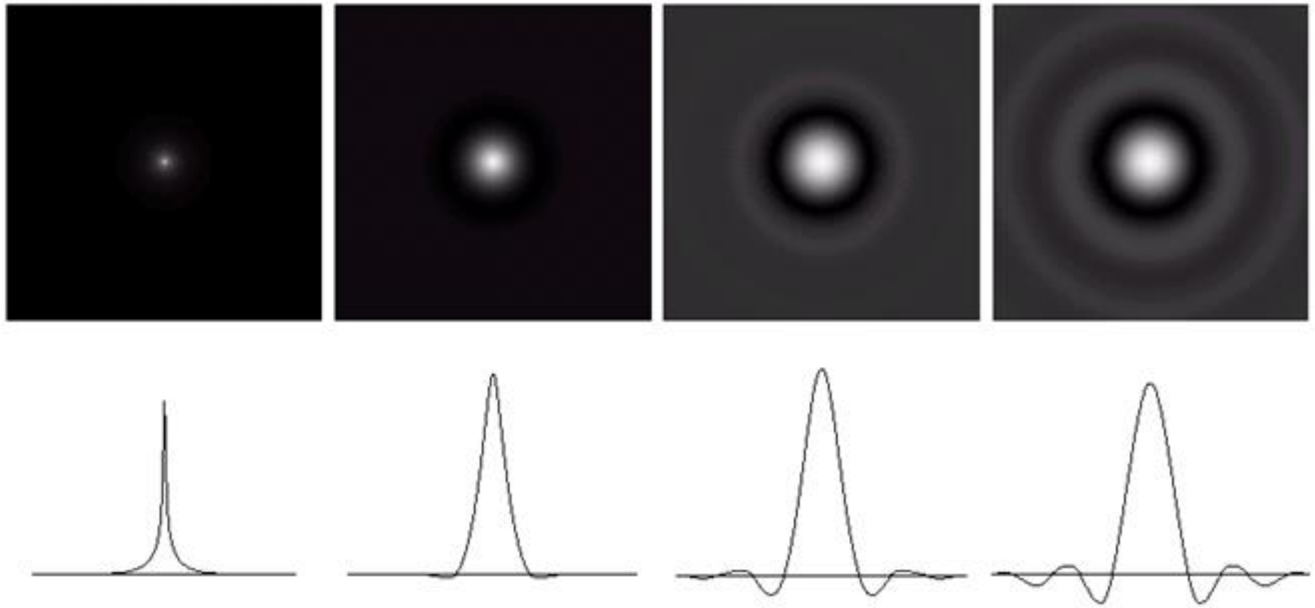
- برخلاف**ILPF**، تابع انتقال **BLPF** فاقد گسستگی تیزی است که فرکانس قطع روشنی بین فرکانس های عبور داده شده و فیلتر شده ارائه نماید. برای فیلترهایی با توابع انتقال هموار، تعریف مکان های فرکانس قطع در نقاطی که **H(u,v)** برای آنها کمتر از کسر معینی از مقدار ماکزیمم باشد، متداول است

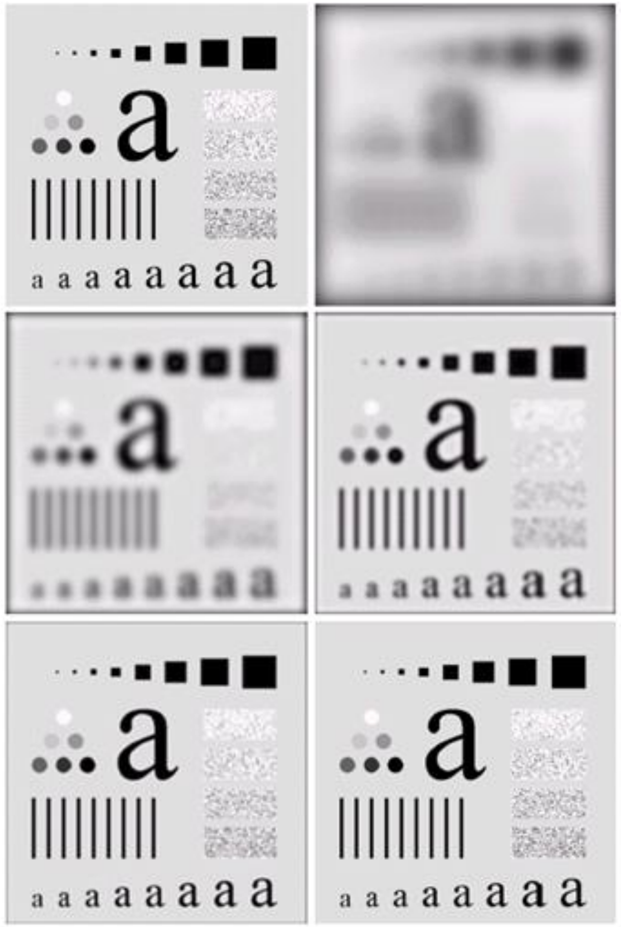
فیلتر باترورث



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر BLPF مرتبه ۱، فاقد طنین در حوزه مکانی است پدیده طنین در فیلترهای مرتبه ۲ غیر قابل دریافت است اما می تواند در فیلترهای مرتبه بالاتر، مشهود باشد. BLPF های مرتبه ۲، مصالحه خوبی بین فیلتر پایین گذر موثر و میزان طنین قابل قبول محسوب می شوند





نتایج فیلتر کردن با استفاده از BLPF مرتبه ۲ در مقادیر شعاعی ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰

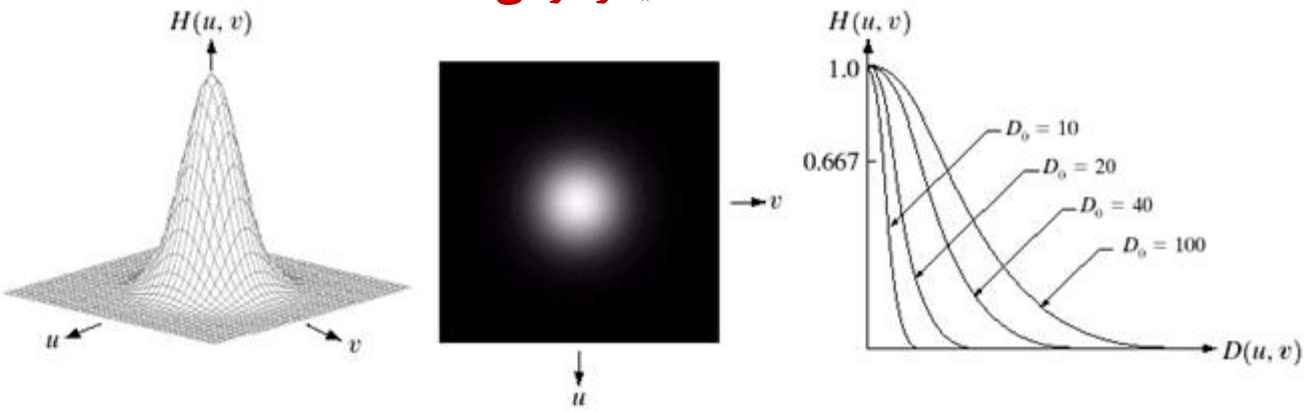
فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر پایین گذر گوسی (GLPF)

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

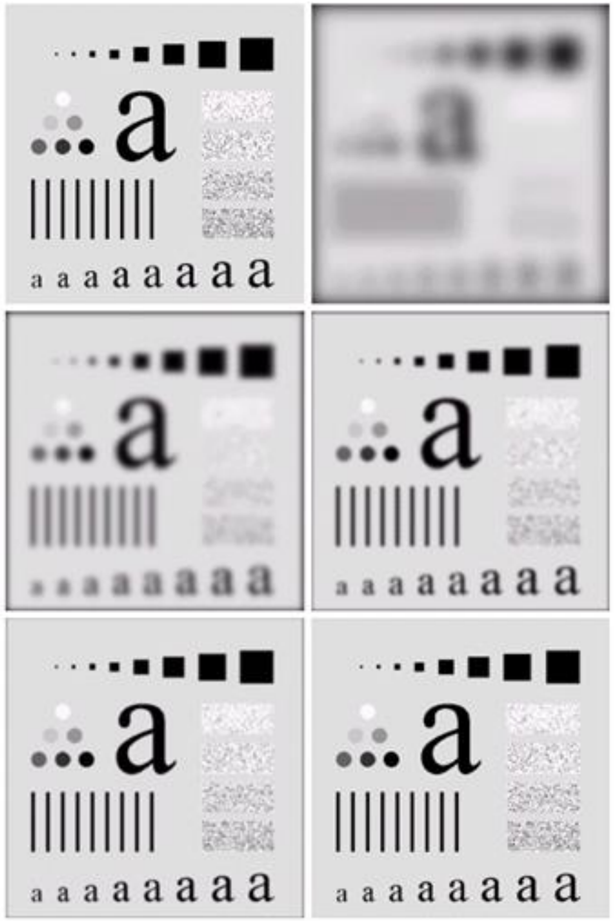
- که D_0 فرکانس قطع است وقتی $D(u,v)=D_0$ باشد GLPF به مقدار ۰.۶۰۷ از مقدار ماکزیمم پایین تر است

فیلتر گوسی



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

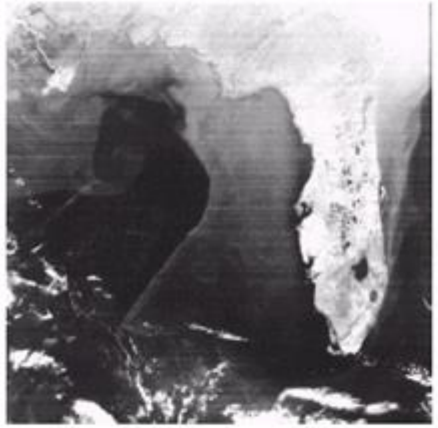
- کاربرد فیلتر پایین گذر برای تولید نتیجه هموارتر و آرام تر از تصویر اصلی می باشد. برای چهره های انسان هدف متداول، کاهش خطوط ریز پوست و لکه های کوچک است



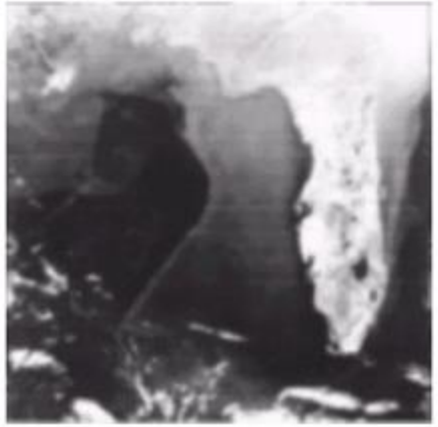
نتایج فیلتر کردن با استفاده از GLPF در مقادیر شعاعی ۱۰، ۳۰، ۶۰، ۱۶۰ و ۴۶۰

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- هدف فیلتر GLPF مات کردن جزییات و قابل تشخیص نگهداشتن مولفه های بزرگ است. این نوع فیلتر کردن می تواند بخشی از مرحله پیش پردازش برای سیستم تحلیل تصویری باشد که مولفه هایی را در بانک تصویر جستجو می کند



Original



GLPF, D_0=50

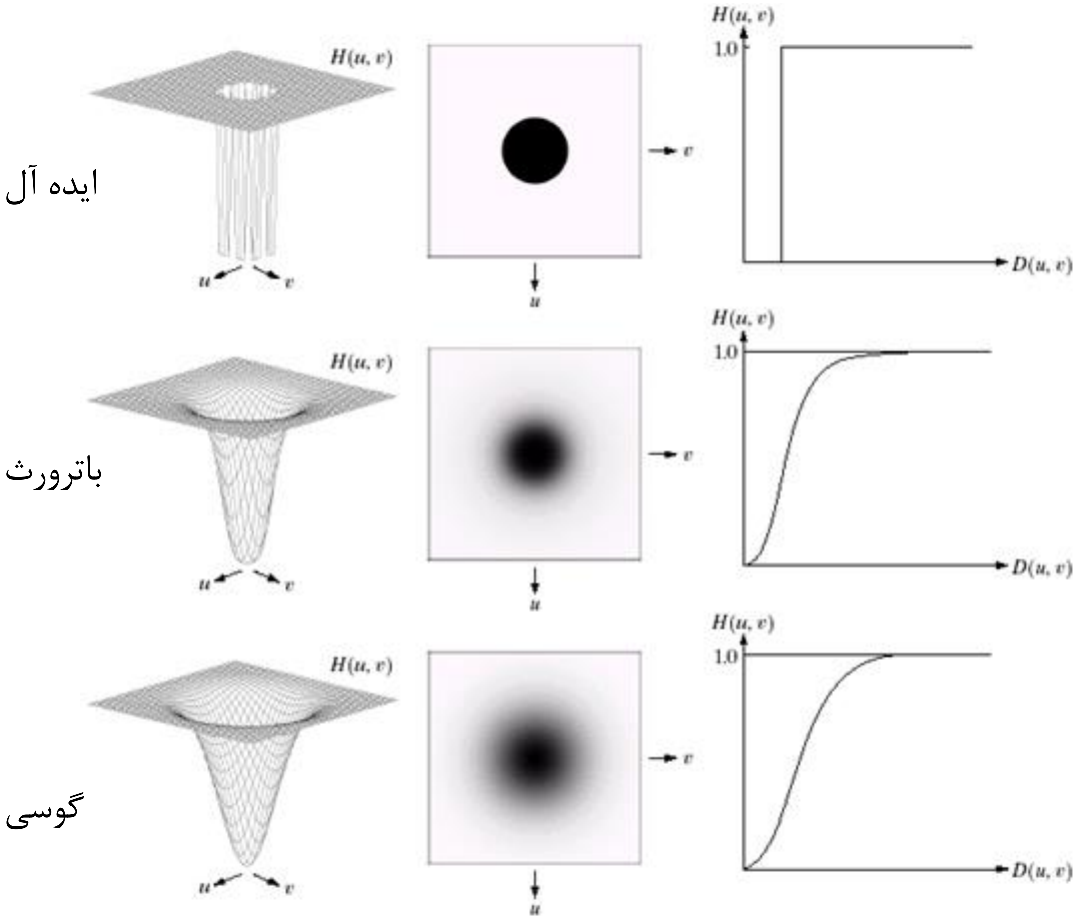
GLPF, D_0=20

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- تیز کردن تصویر با فیلترهای حوزه فرکانس
  - یک تصویر می تواند با تضعیف مولفه های فرکانس بالای تبدیل فوریه خود، هموار شود چون لبه ها و سایر تغییرات ناگهانی در شدت، به مولفه هایی با فرکانس بالا مربوط هستند. تیز کردن تصویر در حوزه فرکانس می تواند با فیلتر بالاگذر انجام شود که مولفه هایی با فرکانس پایین را بدون آسیب رساندن به اطلاعات موجود در تبدیل فوریه، تضعیف می کند

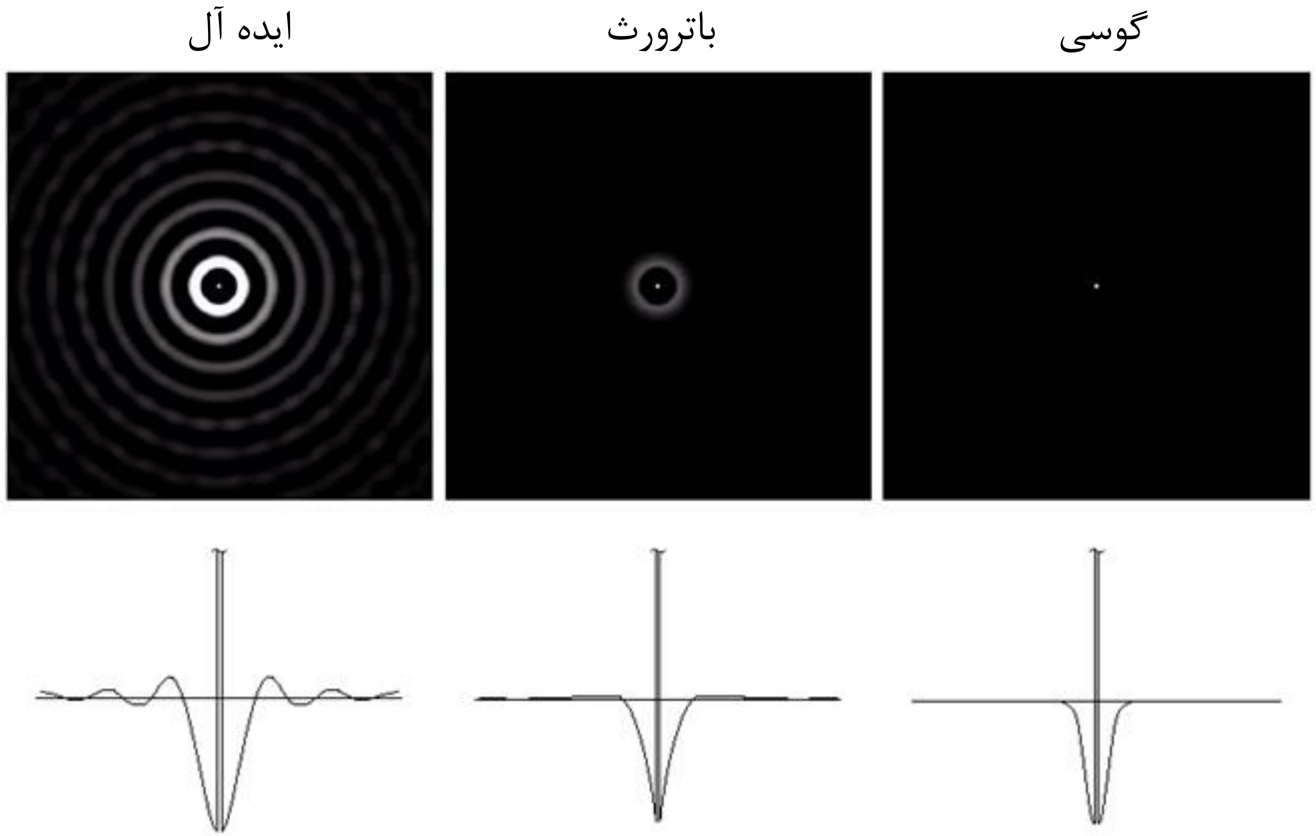
$$H_{HP}(u,v)=1-H_{LP}(u,v)$$

  - که $H_{LP}(u,v)$ تابع انتقال فیلتر پایین گذر است یعنی وقتی فیلتر پایین گذر فرکانس ها را تضعیف می کند فیلتر بالا گذر آنها را عبور می دهد و برعکس



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- نمایش مکانی فیلترهای بالاگذر حوزه فرکانس



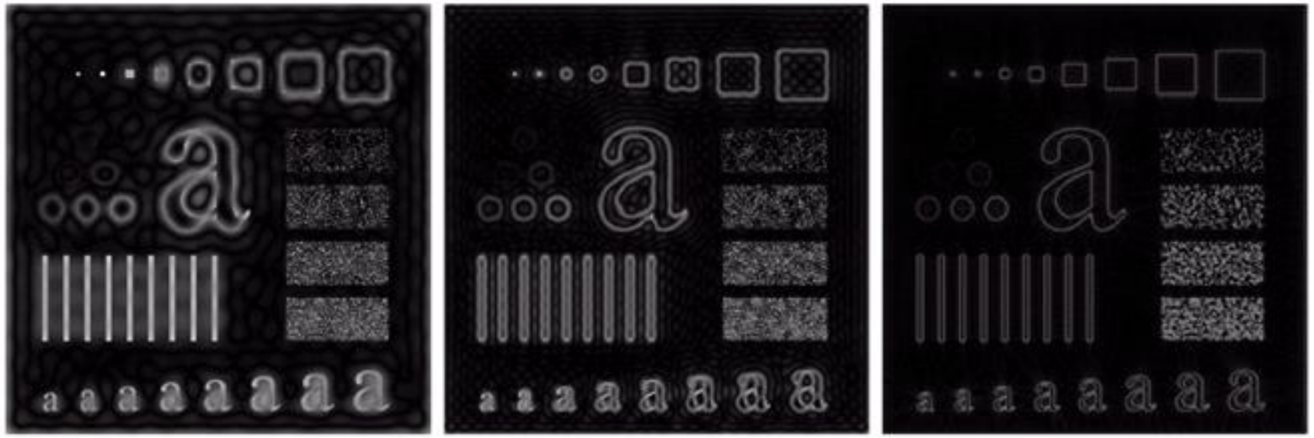
فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر بالاگذر ایده آل (IHPF)

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & if\ D(u,v) \le D_0 \\ 1 & if\ D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- که D_0 فرکانس قطع است این فیلتر معکوس **ILPF** است به این معنا که تمام فرکانس های داخل دایره ای با شعاع D_0 را صفر می کند در حالی که تمام فرکانس های خارج از دایره را بدون تضعیف کردن، عبور می دهد

فیلتر ایده آل



IHPF, D_0=30 IHPF, D_0=60 IHPF, D_0=160

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر بالاگذر باتروورث (**BHPF**)

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

- که D_0 فرکانس قطع است فیلترهای باتروورث نسبت به **IHPF** ها هموارتر می باشند
- کارایی دو فیلتر روی اشیا کوچکتر یکسان است گذار در مقادیر بالاتر فرکانس های قطع، با استفاده از **BHPF** هموارتر است

فیلتر باتروورث مرتبه ۲

BHPF, D_0=30 BHPF, D_0=60 BHPF, D_0=160

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر بالاگذرگوسی (GHPF)

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$

- که D_0 فرکانس قطع است نتایج بدست آمده نسبت به دو فیلتر قبلی، آرام تر است حتی با فیلتر گوسی، فیلتر کردن اشیای کوچکتر و نوارهای نازک، واضح تر خواهد شد

فیلتر گوسی

GHPF, D_0=30 GHPF, D_0=60 GHPF, D_0=160

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- لاپلاسین در حوزه فوریه
  - در فصل ۳ از لاپلاسین برای ارتقای تصویر در حوزه مکانی استفاده کردیم لاپلاسین می تواند در حوزه فرکانس نیز اعمال شود

$$g(x,y) = F^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u,v)]F(u,v)\}$$

همانگونه که شکل زیر انجام می دهد نتایج حوزه مکانی و فرکانس، از نظر دیداری یکسان هستند

تصویر اصلی

لاپلاسین درحوزه فرکانس

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر کردن با تقویت فرکانس بالا

$$g(x,y) = F^{-1}\{[1 + kH_{HP}(u,v)]F(u,v)\}$$

- فیلتر های بالاگذر جمله **dc** را حذف می کنند در نتیجه میانگین شدت در تصویر فیلتر شده به صفر تقلیل می یابد فیلتر تقویت فرکانس بالا، این مشکل را ندارد زیرا یک واحد به فیلتر بالاگذر اضافه می شود. ثابت **k** کنترل روی نسبت فرکانس های بالا را فراهم می کند که در نتیجه نهایی موثر است
- فرمول بندی کلی فیلتری با تقویت فرکانس بالا بصورت زیر است

$$g(x,y) = F^{-1}\{[k_1 + k_2H_{HP}(u,v)]F(u,v)\}$$

- شکل روبرو نشان می دهد که این روش برای ارتقای بیشتر تصویر مناسب است

تصویر اصلی

فیلتر بالاگذر گوسی

فیلتر با تقویت فرکانس بالا

k_1=0.5, k_2=0.75

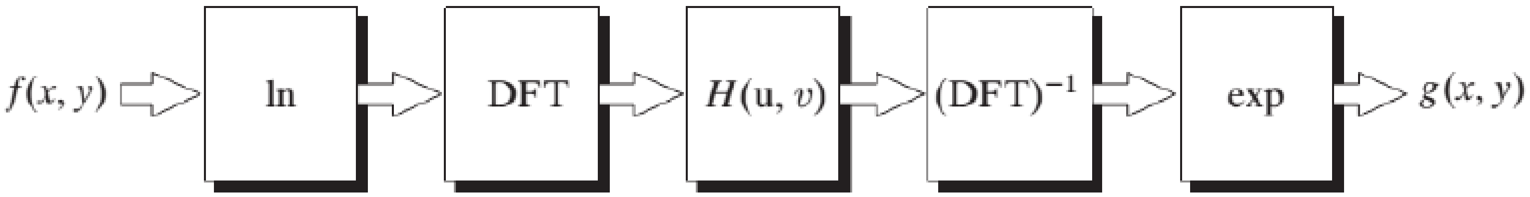
تعدیل هیستوگرام روی نتیجه فیلتر با تقویت فرکانس بالا

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر همگن
  - تصویر **f(x,y)** می تواند بصورت حاصلضرب مولفه های روشنایی **i(x,y)** و انعکاس **r(x,y)** بیان شود.

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

  - مولفه روشنایی تصویر، معمولا با تغییرات مکانی کند، مشخص می شود در حالی که مولفه های انعکاسی بطور ناگهانی تغییر می کند به خصوص در محل برخورد با اشیای ناهمگون. این ویژگی منجر به وابستگی فرکانس های پایین تبدیل فوریه لگاریتم تصویر با روشنایی و فرکانس های بالا با انعکاس می شود. با استفاده از فیلتر همگن می توان کنترل خوبی برروی مولفه های روشنایی و انعکاس ایجاد کرد



فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- مراحل مختلف فیلتر همگن
  - تصویر **f(x,y)** می تواند بصورت حاصلضرب مولفه های روشنایی **i(x,y)** و انعکاس **r(x,y)** بیان شود

$$f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$$

  - برای جدا سازی این دو تابع در حوزه فرکانس از طرفین لگاریتم (**ln**) می گیریم

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \ln f(x,y) \\ &= \ln i(x,y) + \ln r(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Im\{z(x,y)\} &= \Im\{\ln f(x,y)\} \\ &= \Im\{\ln i(x,y)\} + \Im\{\ln r(x,y)\} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر را در حوزه فرکانس اعمال کنید

$$S(u,v) = H(u,v)Z(u,v)$$
$$= H(u,v)F_i(u,v) + H(u,v)F_r(u,v)$$

- تصویر را در حوزه زمان بازسازی کنید

$$s(x,y) = \Im^{-1}\{S(u,v)\}$$
$$= \Im^{-1}\{H(u,v)F_i(u,v)\} + \Im^{-1}\{H(u,v)F_r(u,v)\}$$

$$\Rightarrow \quad s(x,y) = i'(x,y) + r'(x,y)$$

- معکوس عمل لگاریتم را اعمال کنید

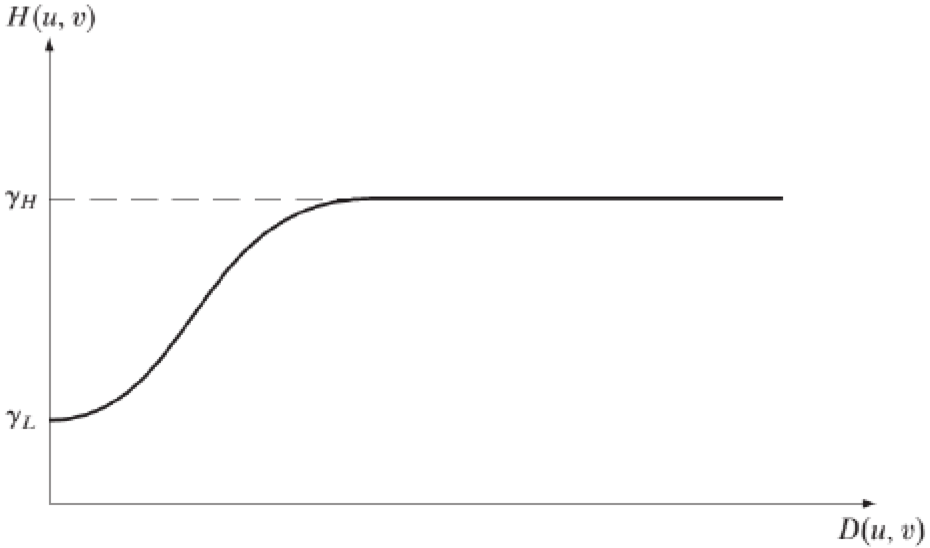
$$g(x,y) = e^{s(x,y)}$$
$$= e^{i'(x,y)}e^{r'(x,y)}$$
$$= i_0(x,y)\,r_0(x,y)$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

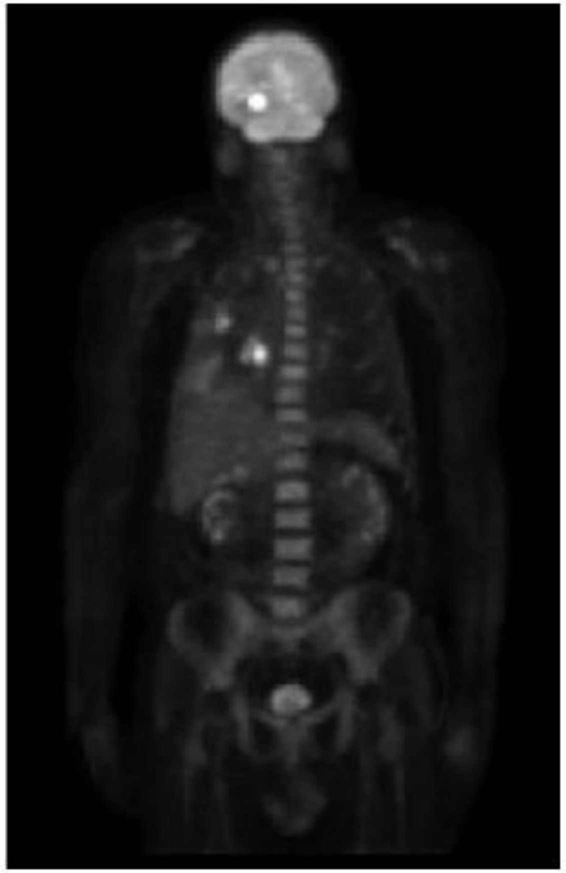
- استفاده از فیلتر بالاگذر اصلاح شده

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L)\left[1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]}\right] + \gamma_L$$

- که در آن ثابت **c** تیزی شیب تابع را در هنگام گذار بین γ_L و γ_H کنترل می کند. اگر پارامترهای γ_L و γ_H طوری انتخاب شوند که $\gamma_L < 1$ و $\gamma_H > 1$ باشد این فیلتر تمایل بیشتری به تضعیف فرکانس های پایین و تقویت فرکانس های بالا خواهد داشت



تصویر اصلی



تصویر ارتقا یافته
γ_H=2, γ_L=0.25

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

- فیلتر کردن انتخابی
  - کاربردهایی وجود دارند که در آنها خوب است باندهای خاصی از فرکانس یا منطقه های کوچکی از چهارگوش فرکانس پردازش شوند فیلترهای دسته اول را میان گذر یا حذف باند می گویند فیلترهای دسته دوم را فیلترهای فاقی می نامند
- فیلترهای حذف باند (**bandreject**)
  - فیلتر حذف باند ایده آل

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & if\ D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

  - فیلتر باترورث

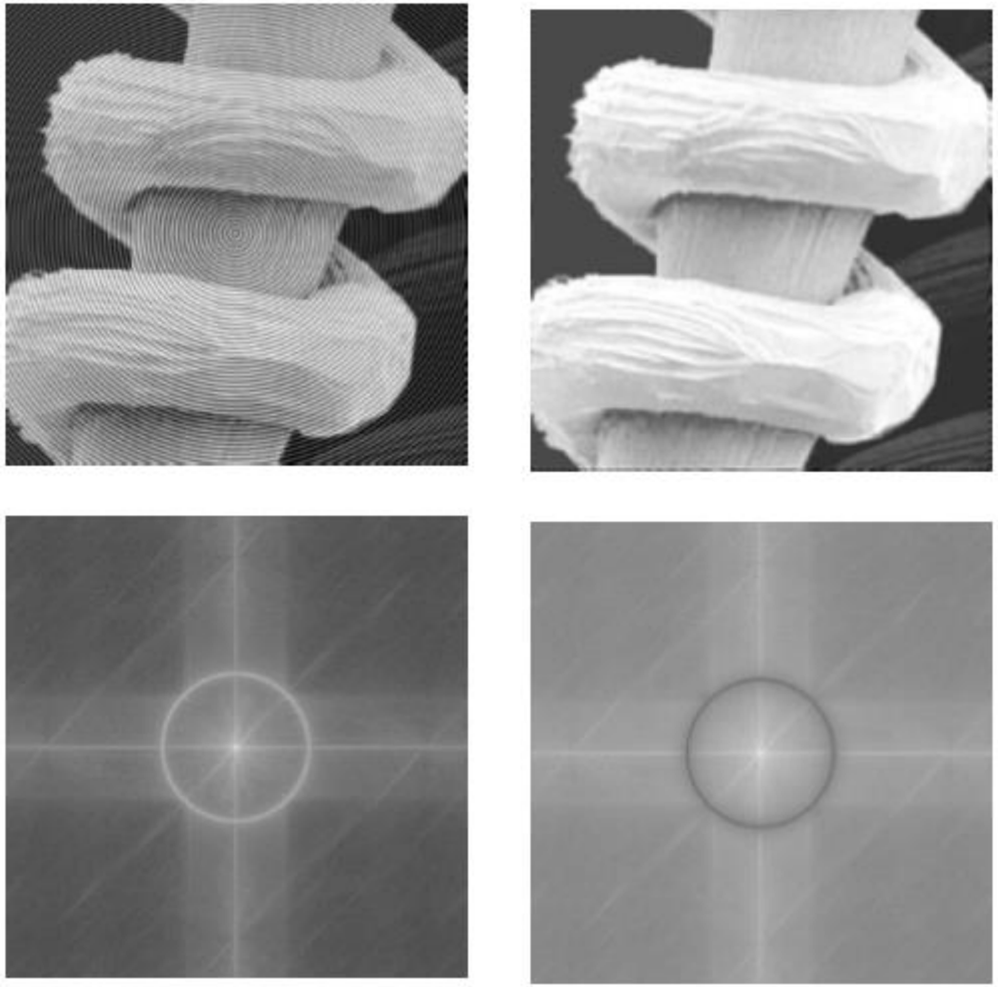
W پهنای باند

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\frac{DW}{D^2 - D_0^2}]^{2n}}$$

  - فیلتر گوسی

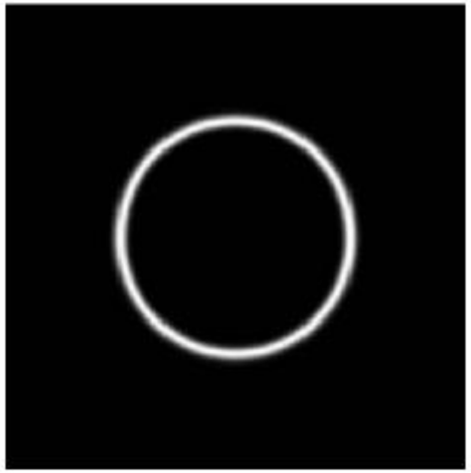
$$H(u,v) = 1 - e^{-[(D^2 - D_0^2)/DW]^2}$$

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

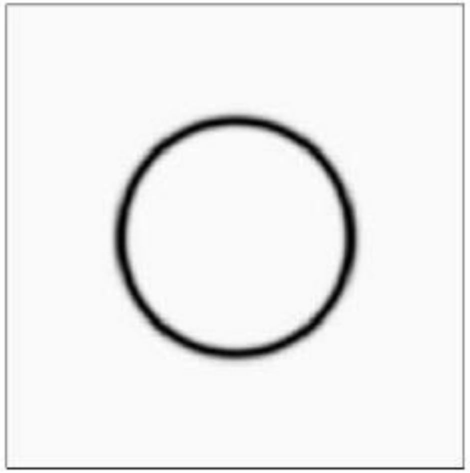


- فیلتر میان گذر (bandpass)
  - به همان روشی که فیلتر بالاگذر را از فیلتر پایین گذر بدست آوردیم فیلتر میان گذر از فیلتر حذف باند بدست می آید

$$H_{BP}(u,v)=1-H_{BR}(u,v)$$



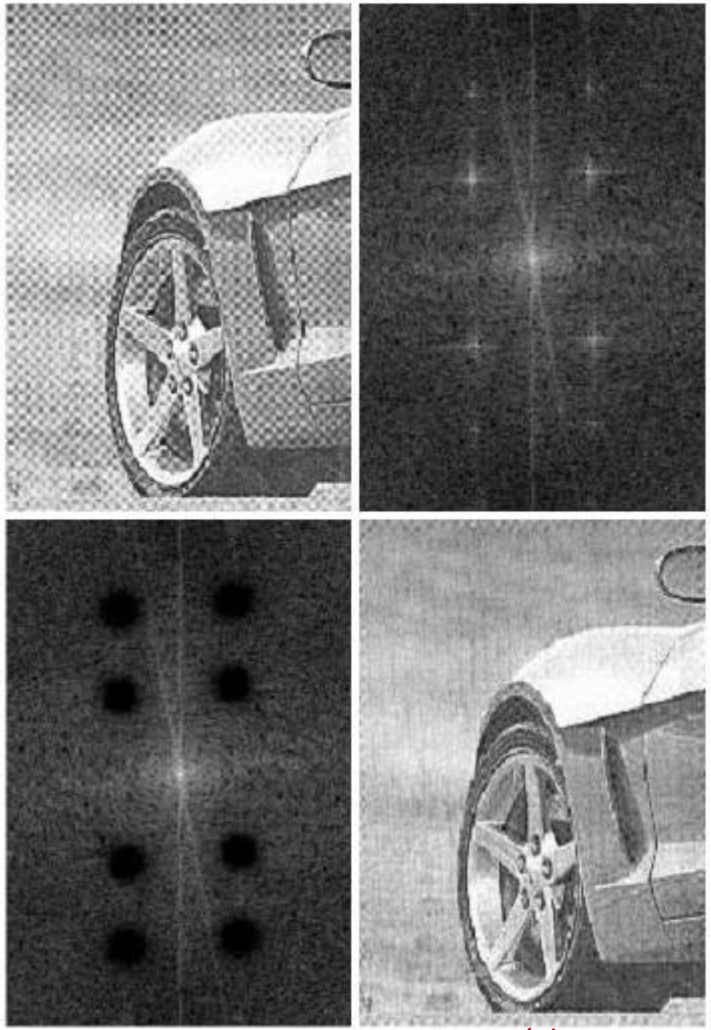
فیلتر گوسی میان گذر



فیلتر گوسی حذف باند

فصل چهارم – فیلتر در حوزه فرکانس

طیف تصویر تصویر اصلی



تصویر فیلتر شده طیف فیلتر شده

- فیلتر فاقی
  - فرکانس هایی را که در همسایگی از پیش تعریف شده حول مرکز چهارگوش قرار دارند حذف می کند از آنجایی که این فیلتر باید متقارن باشد لذا فاقی با مرکز (u_0,v_0) باید فاق متناظری در مکان $(-u_0,-v_0)$ داشته باشد فیلترهای حذف فاقی بصورت حاصلضرب فیلترهای بالاگذری ساخته می شوند که مرکز آنها به مراکز فاق ها انتقال یافتند

$$H_{NR}(u,v) = \prod_{k=1}^{Q} H_k(u,v)H_{-k}(u,v)$$

$$D_k(u,v) = \left[(u - M/2 - u_k)^2 + (v - N/2 - v_k)^2\right]^{1/2}$$

$$H_{NR}(u,v) = \prod_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_k(u,v)]^{2n}}\right]\left[\frac{1}{1 + [D_{0k}/D_{-k}(u,v)]^{2n}}\right]$$

  - فیلتر گذر فاقی با استفاده از عبارت زیر بدست می آید

$$H_{NP}(u,v)=1-H_{NR}(u,v)$$