

تمرین اول کامپیوتری

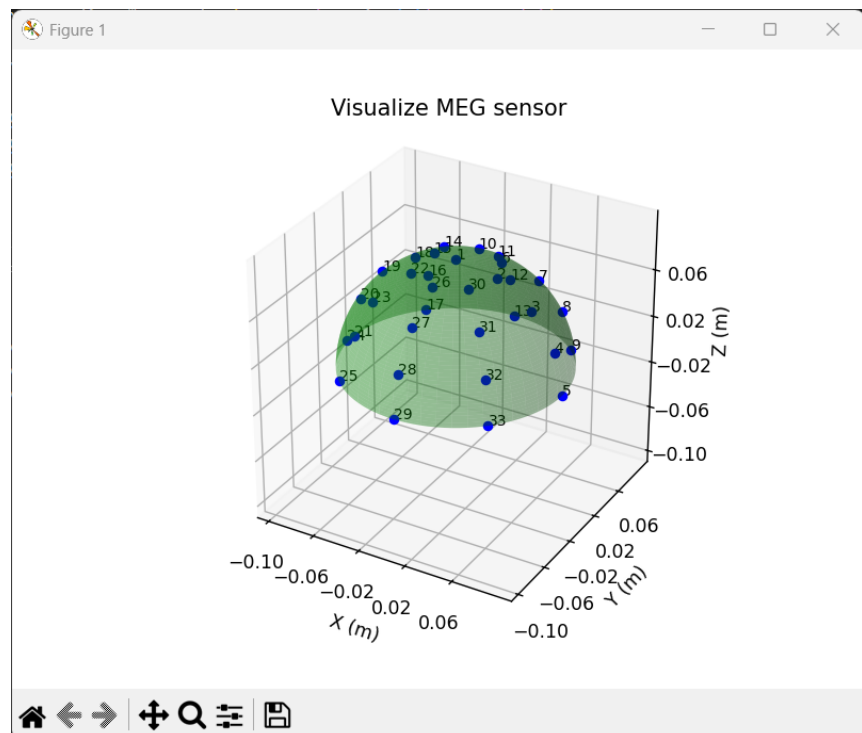
درس: سیستم‌های تصویربرداری عملکردی مغز

استاد: دکتر علی خادم

میلاد شاکر 40020774

۱. مسئله مستقیم MEG

الف) تعریف مکان حسگرهای MEG



توضیح کد

هدف این اسکریپت، محاسبه و ذخیره‌سازی مختصات دکارتی (x, y, z) برای ۳۳ حسگر MEG است که بر روی یک سطح کروی (مدل سر) قرار گرفته‌اند. در ادامه، هر بخش از کد توضیح داده می‌شود:

۱. تعریف تعداد حسگرها و زوایا

- `num_points = 33`: ابتدا، تعداد کل حسگرها مطابق با صورت مسئله برابر با ۳۳ تعریف می‌شود.
- ایجاد آرایه‌های `theta_degrees` و `phi_degrees`: دو آرایه خالی با اندازه ۳۳ برای نگهداری زوایای کروی (تتا و فی) برای هر حسگر ایجاد می‌شود.
- محاسبه زوایا در حلقه:

- صورت مسئله یک طرح شماره‌گذاری مشخص برای حسگرها ارائه کرده است. حسگر شماره ۱ در راس کره ($\theta=0$) قرار دارد. ۳۲ حسگر دیگر روی ۸ نوار طولی قرار گرفته‌اند که در هر نوار ۴ حسگر وجود دارد.
- کد از دو حلقه for تو در تو برای پیمایش این نوارها و حسگرها استفاده می‌کند. حلقه بیرونی (i) شماره نوار (از ۰ تا ۷) و حلقه داخلی (j) شماره حسگر در آن نوار (از ۱ تا ۴) را مشخص می‌کند.
- زاویه فی (ϕ _degrees): برای هر نوار i، زاویه سمتی (azimuthal) ثابت و برابر با $45 * i$ درجه است.
- زاویه تتا (θ _degrees): برای هر حسگر j در یک نوار، زاویه زینتی (zenith) برابر با $22.5 * j$ درجه است.
- این مقادیر در اندیس مناسب آرایه‌ها، که بر اساس شماره حسگر محاسبه می‌شود، قرار می‌گیرند.

۲. تبدیل به رادیان و محاسبه مختصات دکارتی

- `np.deg2rad()`: مقادیر تتا و فی که به درجه محاسبه شده بودند، با استفاده از این تابع به رادیان تبدیل می‌شوند.
- `radius = 0.09`: شعاع کره که حسگرها روی آن قرار دارند، برابر با ۰.۰۹ متر (۹ سانتی‌متر) تنظیم می‌شود.
- `Conv_coordinates(phi, theta, radius)`: این تابع که از فایل `utility_functions.py` فراخوانی می‌شود، وظیفه اصلی تبدیل مختصات کروی به دکارتی را بر عهده دارد.

(ب) تعریف منابع دوقطبی

۱۰۵ منبع دوقطبی احتمالی به طور تصادفی روی یک کره با شعاع $r=0.07$ سانتی‌متر (۰.۰۷ متر) قرار می‌گیرند. این دوقطبی‌ها با استفاده از یک توزیع تصادفی یکنواخت در سراسر سطح کروی توزیع می‌شوند. دوقطبی‌ها بر اساس فاصله آن‌ها از محور z شماره‌گذاری می‌شوند (دوقطبی ۱: نزدیک‌ترین، دوقطبی ۱۰۵: دورترین).

تکلیف ۲: تعریف مکان‌های دوقطبی

- تولید دوقطبی:

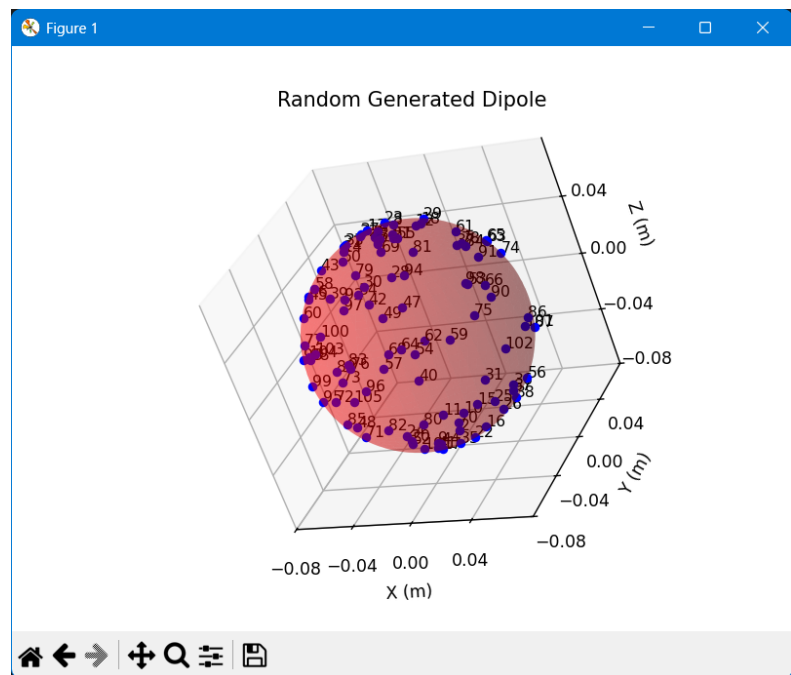
- `num_points` برابر با ۱۰۵ تنظیم می‌شود.
- یک مولد اعداد تصادفی `rng = np.random.default_rng` مقداردهی اولیه می‌شود.
- `theta`: زوایای قطبی (ارتفاعی) تصادفی بین ۰ و π با استفاده از `rng.uniform(0, np.pi, num_points)` تولید می‌شوند. این توزیع در کل کره را تضمین می‌کند.
- `phi`: زوایای سمتی تصادفی بین ۰ و 2π با استفاده از `rng.uniform(0, 2*np.pi, num_points)` تولید می‌شوند.

- تبدیل مختصات:

- radius برابر با 0.07 متر تنظیم می‌شود.
- مختصات کروی با استفاده از تابع `Conv_coordinates` به مختصات دکارتی (x, y, z) تبدیل می‌شوند.

- مرتب‌سازی:

- مختصات دوقطبی بر اساس فاصله آن‌ها از محور z ($2y+2x=d$) با استفاده از تابع `sorted` از `utility_functions.py` مرتب می‌شوند. مختصات مرتب‌شده به عنوان `x_sorted`, `y_sorted`, `z_sorted` ذخیره می‌شوند.



- در شکل بالا:

- یک نمودار پراکندگی سه‌بعدی مکان‌های دوقطبی تولیدشده را نمایش می‌دهد.

توضیح توابع `utility_functions.py`:

- `sorted(x, y, z)`:

- این تابع مختصات دکارتی (x, y, z) چندین نقطه را به عنوان ورودی می‌گیرد.

- فاصله اقلیدسی هر نقطه از محور z در صفحه xy را محاسبه می‌کند: $y+2x=d$ 2.

- سپس از `np.argsort(distances)` برای به دست آوردن اندیس‌هایی که این فواصل را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنند، استفاده می‌کند.

- در نهایت، آرایه‌های مختصات x , y و z را بر اساس این اندیس‌های مرتب‌شده بازآرایی می‌کند و `x_sorted`, `y_sorted`, `z_sorted` را برمی‌گرداند.

- `Conv_coordinates(phi, theta, radius)`

- این تابع مختصات کروی را به مختصات دکارتی تبدیل می‌کند.
- ورودی‌ها: `phi` ، `theta` و `radius`.
- خروجی‌ها: مختصات دکارتی `x`, `y`, `z` که با استفاده از فرمول‌های تبدیل استاندارد ذکر شده در تکلیف ۱ محاسبه می‌شوند.

- اگر ما چندین دوقطبی را به جای توزیع تصادفی در کل کره، در نواحی خاصی خوشه‌بندی کنیم، مدل ما سناریویی را نشان می‌دهد که در آن فعالیت عصبی در آن نواحی خاص مغز بسیار موضعی و همزمان است. این منجر به موارد زیر می‌شود:

- **سیگنال‌های قوی‌تر و متمرکزتر:** حسگرهای MEG/EEG نزدیک این خوشه‌ها احتمالاً میدان‌های مغناطیسی/پتانسیل‌های الکتریکی قوی‌تر و مشخص‌تری را تشخیص می‌دهند.
- **الگوهای فضایی متفاوت:** توپوگرافی کلی میدان‌ها/پتانسیل‌های اندازمگیری شده به طور قابل توجهی متفاوت خواهد بود و با "نقاط داغ" مشخصی که با خوشه‌های فعال مطابقت دارند، مشخص می‌شود.
- **مکان‌یابی منابع:** اگر خوشه‌ها به خوبی از هم جدا شده باشند، شناسایی نواحی فعال آسان‌تر می‌شود، اما تشخیص بین چندین منبع نزدیک به هم در یک خوشه دشوارتر می‌شود.

ج) مختصات بردار واحد

هر حسگر MEG به یک بردار واحد نیاز دارد که از مرکز مدل سر به سمت بیرون جهت‌گیری شده و عمود بر سطح حسگر باشد. این بردارها جهت‌گیری حسگرها را برای اندازمگیری اجزای میدان مغناطیسی تعریف می‌کنند.

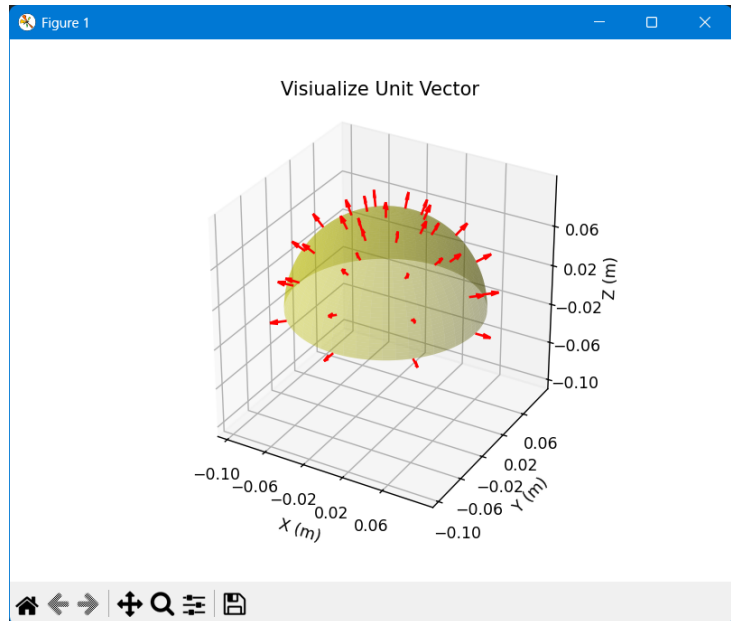
تکلیف ۳: محاسبه و نمایش بردارهای واحد

توضیح کد (`Unit_Vect.py`):

- **بارگذاری مختصات حسگر:**
 - اسکریپت مختصات حسگر `(x, y, z)` را از `sensor_coordinates.npz` (ذخیره‌شده در تکلیف ۱) بارگذاری می‌کند.
 - شعاع نیمکره (`0.09` متر) نیز تعریف می‌شود.
- **مقداردهی اولیه آرایه‌های بردار واحد:**
 - آرایه‌های `ex`, `ey`, `ez` برای ذخیره اجزای بردارهای واحد برای هر یک از ۳۳ حسگر مقداردهی اولیه می‌شوند.

- محاسبه بردارهای واحد:

- اسکرپت برای هر یک از ۳۳ حسگر تکرار می‌شود.
- برای یک مدل کروی، بردار موقعیت یک حسگر (از مبدا تا حسگر) از قبل در آن نقطه بر سطح کره عمود است.
- برای به دست آوردن بردار واحد، هر جزء از بردار موقعیت حسگر (z_i, y_i, x_i) بر اندازه بردار موقعیت تقسیم می‌شود. از آنجایی که تمام حسگرها روی یک کره با شعاع ثابت قرار دارند، اندازه به سادگی این شعاع $(0.09=3r)$ متر است.



یک نمایش سه‌بعدی (مشابه شکل ۴ در PDF) تولید می‌کند که نیمکره پوست سر را با یک بردار واحد جهت‌دار به بیرون (پیکان) در هر یک از ۳۳ مکان حسگر نشان می‌دهد. این بردارها در هر نقطه عمود بر سطح کروی هستند.

د) مدل سر و ماتریس Lead-Field

- ابعاد G :** G دارای ابعاد $n \times m$ است، که 105×33 می‌شود. هر عنصر G_{ij} نشان‌دهنده قدرت میدان مغناطیسی شعاعی اندازه‌گیری‌شده توسط حسگر i به دلیل منبع دوقطبی واحد j است. ماتریس Lead-Field G ابعاد $(n3) \times m$ خواهد داشت، که m تعداد حسگرها و n تعداد مکان‌های دوقطبی است. در این مسئله، $33=m$ حسگر و $105=n$ مکان دوقطبی وجود دارد. هر دوقطبی دارای ۳ جزء متعامد است (مثلاً Q_x, Q_y, Q_z که گشتاور آن را نشان می‌دهند). بنابراین، G $315 \times 33 = (105 \times 3) \times 33$ است.
- $G: [j,i]$ یا G_{ij}** نشان‌دهنده میدان مغناطیسی اندازه‌گیری‌شده توسط حسگر i است که توسط j -امین منبع دوقطبی تولید می‌شود، با فرض اینکه این دوقطبی دارای قدرت واحد و جهت‌گیری خاصی است. این حساسیت حسگر i به منبع j را کمی می‌کند.

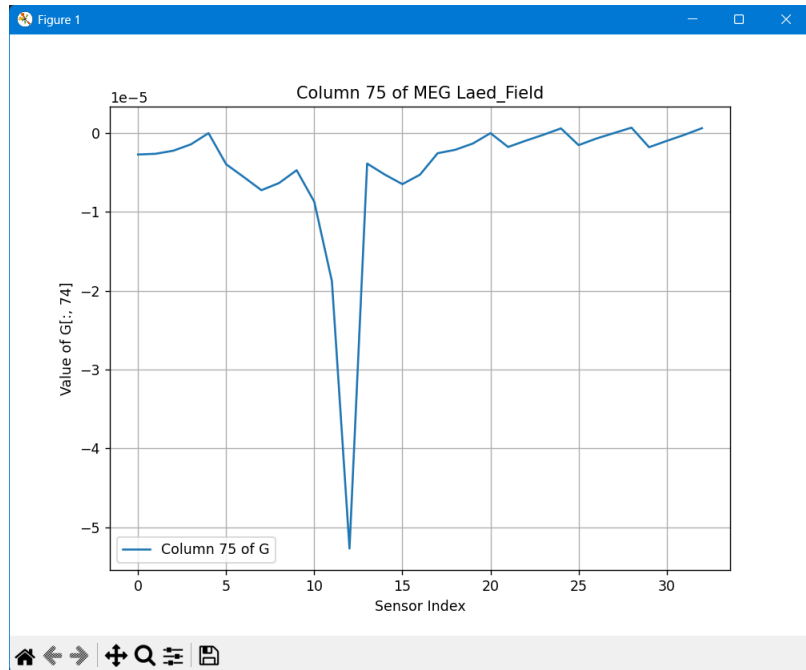
- چگونه G منابع دوقطبی را به اندازه‌گیری‌های حسگر مرتبط می‌کند: ماتریس G Lead-Field به طور خطی اندازه‌ها (یا گشتاورهای) منبع دوقطبی را به اندازه‌گیری‌های حسگر مرتبط می‌کند. اگر S بردار قدرت‌ها/گشتاورهای منبع دوقطبی $(1 \times n)$ و B بردار اندازه‌گیری‌های حسگر $(1 \times m)$ باشد، آنگاه $GS=B$.
- ستون ۷۵ از G: ستون ۷۵ از G قدرت میدان مغناطیسی اندازه‌گیری‌شده توسط هر یک از ۳۳ حسگر را در پاسخ به ۷۵ امین منبع دوقطبی (با فرض قدرت واحد و جهت‌گیری از پیش تعریف‌شده) نشان می‌دهد. این یک بردار از ۳۳ مقدار است که الگوی فضایی میدان مغناطیسی را در تمام حسگرها به دلیل آن دوقطبی خاص نشان می‌دهد.

تکلیف ۴: محاسبه ماتریس Lead-Field

- بارگذاری داده‌ها:
 - مختصات برای دوقطبی‌ها (Dipole_coordinates.npz)، حسگرها (sensor_coordinates.npz)، و بردارهای واحد (Unit_Vect_coordinates.npz) بارگذاری می‌شوند.
 - این‌ها در آرایه‌هایی سازماندهی می‌شوند: r_q (موقعیت‌های دوقطبی)، r (موقعیت‌های حسگر)، er (بردارهای واحد حسگر).
- ثابت‌ها: پارامترهای مدل سر $(\mu, \sigma, 3R, 2R, 1R, 0R, n, m)$ مطابق PDF تعریف می‌شوند.
- مقداردهی اولیه G: ماتریس G lead-field به عنوان یک آرایه NumPy از صفرها با ابعاد $n \times m$ (105×33) مقداردهی اولیه می‌شود.
- محاسبه اجزای G:
 - کد برای هر حسگر i (از ۰ تا $m-1$) و هر دوقطبی j (از ۰ تا $n-1$) تکرار می‌شود.
 - درون حلقه، $G[j,i]$ محاسبه می‌شود. فرمول میدان مغناطیسی تولیدشده توسط یک دوقطبی جریانی در یک هادی کروی استفاده می‌شود. برای MEG، ما معمولاً به جزء شعاعی میدان مغناطیسی خارج از کره علاقه‌مند هستیم.

توضیح خروجی (task4.py):

اسکرپت یک نمودار خروجی می‌دهد که مقادیر ستون ۷۵ ماتریس G lead-field را نشان می‌دهد. این نمودار ۳۳ نقطه خواهد داشت که مربوط به قدرت میدان مغناطیسی است که هر حسگر به دلیل ۷۵ امین منبع دوقطبی اندازه‌گیری می‌کند (با فرض یک جهت‌گیری و قدرت کانونی برای این دوقطبی). شکل این نمودار نشان می‌دهد که چگونه تأثیر آن دوقطبی خاص در آرایه حسگر پخش می‌شود.



تأثیر تغییر نسبت هدایت:

MEG lead-field برای یک هادی با تقارن کروی از نظر تئوری مستقل از توزیع هدایت شعاعی است. این بدان معناست که تغییر نسبت هدایت بین بافت جمجمه و مغز (مثلاً $\sigma_2 = \sigma/80$ در مقابل $\sigma_2 = \sigma/100$) نباید ماتریس MEG lead-field، G ، را تغییر دهد، تا زمانی که مدل متقارن کروی باقی بماند و هدایت‌ها در هر پوسته کروی همگن باشند. این یک مزیت کلیدی MEG نسبت به EEG است. میدان‌های مغناطیسی نسبتاً بدون مزاحمت از این بافت‌ها عبور می‌کنند.

مدل واقعی سر در مقابل مدل کروی:

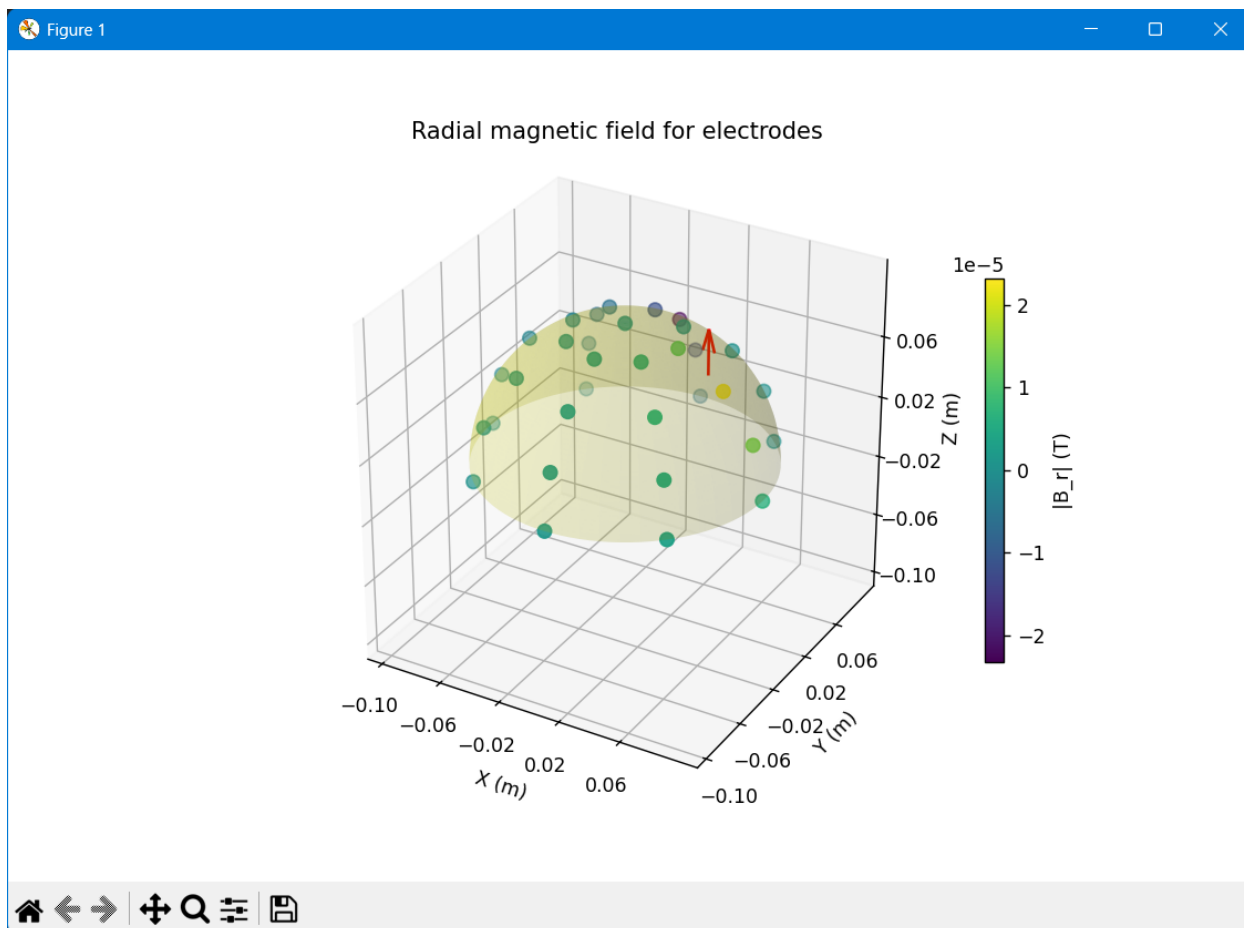
اگر ما به جای یک مدل کروی از یک مدل واقعی سر (مثلاً مشتق‌شده از MRI، با شکل دقیق مغز، جمجمه و پوست سر) استفاده می‌کردیم:

- ماتریس G lead-field به طور قابل توجهی تغییر می‌کرد. فرض تقارن کروی دیگر برقرار نبود.
- محاسبات بسیار پیچیده‌تر می‌شدند و معمولاً به روش‌های عددی مانند روش اجزای مرزی (BEM) یا روش اجزای محدود (FEM) نیاز داشتند.
- دقت مکان‌یابی منبع می‌تواند بهبود یابد اگر مدل واقعی، هندسه واقعی سر و جریان جریان را بهتر نشان دهد.

تکلیف ۵: میدان‌های مغناطیسی شعاعی از یک منبع دوقطبی واحد

توضیح کد

1. بارگذاری داده‌ها: ابتدا، مختصات ۳۳ حسگر (r) و بردارهای واحد نرمال به سطح در مکان هر حسگر (er) از فایل‌هایی که در تسک‌های قبلی ایجاد شده‌اند، بارگذاری می‌شوند.



2. تعریف منبع دوقطبی:

- موقعیت دوقطبی به صورت کروی ($r=7\text{cm}$, $\theta=45^\circ$, $\phi=45^\circ$) تعریف و سپس با استفاده از تابع کمی Conv_coordinates به مختصات دکارتی (r_q) تبدیل می‌شود.
- بردار گشتاور دوقطبی (q) برابر با $[1, 0, 0]$ تعریف می‌شود، به این معنی که جهت فعالیت الکتریکی این منبع، در راستای محور Z است.

3. محاسبه میدان مغناطیسی شعاعی (B_r):

- یک حلقه for برای هر یک از ۳۳ حسگر اجرا می‌شود.
- درون حلقه، ابتدا بردار فاصله (R_vec) از منبع دوقطبی (r_q) تا مکان حسگر ($r[i]$) محاسبه می‌شود.
- سپس، با استفاده از قانون بیوساوار برای دوقطبی، بردار کامل میدان مغناطیسی (B_vec) در مکان حسگر محاسبه می‌شود.
- در نهایت، برای به دست آوردن جزء شعاعی میدان (B_r) - یعنی مؤلفه‌ای که توسط حسگر MEG اندازه‌گیری می‌شود - ضرب داخلی بردار میدان (B_vec) در بردار واحد شعاعی حسگر ($er[i]$) محاسبه و در آرایه B_r ذخیره می‌شود.

۱. جزء شعاعی چگالی شار مغناطیسی (Br) چیست و چرا در اندازه‌گیری‌های MEG مهم است؟

- Br مؤلفه‌ای از بردار میدان مغناطیسی است که بر سطح سر (در مدل کروی، در راستای شعاع) عمود است. این جزء در MEG بسیار مهم است زیرا سیستم‌های MEG به طور عمده به میدان‌های مغناطیسی که از سر به صورت عمودی خارج می‌شوند، حساس هستند. یک اصل کلیدی در MEG این است که منابع فعالیت شعاعی (جریان‌های الکتریکی که مستقیماً به سمت سطح سر یا دور از آن حرکت می‌کنند) در یک مدل کروی کامل، هیچ میدان مغناطیسی در خارج از کره ایجاد نمی‌کنند. در نتیجه، MEG فقط منابع مماسی (tangential) را "می‌بیند". این منابع مماسی، میدان‌های مغناطیسی با مؤلفه شعاعی (Br) تولید می‌کنند.

۲. فاصله بین حسگر و منبع دوقطبی چگونه بر قدرت میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده تأثیر می‌گذارد؟

- قدرت میدان مغناطیسی به شدت با فاصله کاهش می‌یابد. برای یک منبع دوقطبی، این کاهش متناسب با توان دوم یا سوم فاصله ($2r/1$ یا $3r/1$) است. این بدان معناست که حسگرهایی که به منبع دوقطبی نزدیک‌تر هستند، سیگنال بسیار قوی‌تری را ثبت می‌کنند. به همین دلیل، MEG به فعالیت‌های عصبی در نواحی سطحی مغز (قشر مغز) بسیار حساس‌تر است تا نواحی عمیق.

۳. بر اساس تصویرسازی، قوی‌ترین میدان‌های مغناطیسی را در کجا مشاهده می‌کنید و چرا؟

- قوی‌ترین میدان‌های مغناطیسی (که در نقشه رنگی با روشن‌ترین و تیره‌ترین رنگ‌ها مشخص می‌شوند) در حسگرهایی مشاهده می‌شوند که به مکان دوقطبی نزدیک‌تر هستند. الگوی توزیع میدان یک دوقطبی، معمولاً شامل دو لوب (یک لوب مثبت و یک لوب منفی) است.
- این الگو به دلیل ماهیت میدان مغناطیسی است که خطوط آن از یک قطب خارج و به قطب دیگر وارد می‌شوند. حسگرهای نزدیک به منبع، بیشترین شار مغناطیسی را دریافت می‌کنند. برای دوقطبی تعریف شده در این تسک (مکان در ۴۵ درجه و گشتاور در راستای محور z)، این گشتاور دارای یک مؤلفه مماسی نسبت به سطح کره است. الگوی دو-لوبی در اطراف این مؤلفه مماسی شکل می‌گیرد و حسگرهایی که در دو طرف آن قرار دارند، به ترتیب قله مثبت و منفی میدان را ثبت می‌کنند.

تکلیف ۶: شبیه‌سازی یک سیگنال MEG متغیر با زمان از یک منبع دوقطبی

توضیح کد

هدف این اسکرپت، شبیه‌سازی یک سیگنال واقعی‌تر MEG است که در آن قدرت منبع عصبی در طول زمان تغییر می‌کند.

۱. تعریف تابع $w(t)$ و بردار زمان:

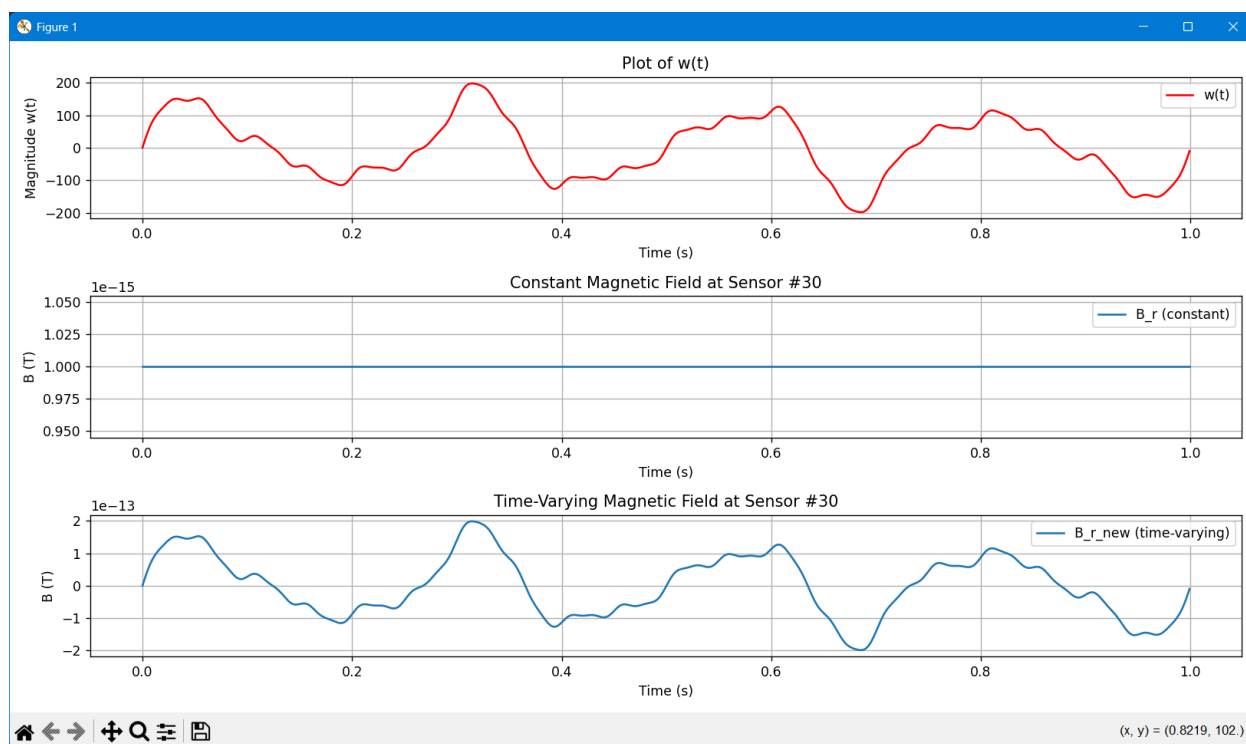
- یک تابع پایتون به نام `w_func(t)` تعریف شده که فرمول ریاضی پیچیده و متناوب $w(t)$ را پیاده‌سازی می‌کند. این تابع مجموع پنج موج سینوسی با فرکانس‌ها و دامنه‌های مختلف است.
- یک بردار زمان t با استفاده از `np.linspace` ایجاد می‌شود که نمایانگر یک بازه زمانی ۱ ثانیه‌ای با ۱۰۰۰ نقطه داده (فرکانس نمونه‌برداری ۱۰۰۰ هرتز) است.
- مقادیر $w(t)$ برای تمام نقاط زمانی محاسبه و در آرایه `w_values` ذخیره می‌شود.

2. بارگذاری مقدار lead-field (Lead-Field):

- به جای محاسبه مجدد میدان مغناطیسی از ابتدا، کد مقدار از پیش محاسبه شده را از فایل MEG_Single_Dipole_Field.npz (خروجی تسک ۵) بارگذاری می‌کند.
- این فایل حاوی میدان شعاعی (Br) در تمام ۳۳ حسگر است. ما فقط به مقدار مربوط به حسگر شماره ۳۰ (که در اندیس ۲۹ آرایه قرار دارد) نیاز داریم. این مقدار G_sensor30 نامیده می‌شود و در واقع "بهره" یا "حساسیت" سنسور ۳۰ نسبت به دوقطبی مورد نظر ما است.

3. محاسبه میدان ثابت و متغیر:

- B_r: این متغیر، میدان مغناطیسی ثابتی را نشان می‌دهد که اگر قدرت دوقطبی همواره برابر با ۱ بود، در حسگر ۳۰ اندازه‌گیری می‌شد. این مقدار همان G_sensor30 است و برای رسم یک خط صاف در نمودار دوم استفاده می‌شود.
- B_r_new: این متغیر، سیگنال نهایی و متغیر با زمان MEG است. این سیگنال به سادگی از حاصل ضرب مقدار ثابت lead-field (G_sensor30) در آرایه مقادیر متغیر با زمان (w_values) به دست می‌آید.



پاسخ به سوالات

۱. چه رابطه‌ای بین اندازه دوقطبی $w(t)$ و میدان مغناطیسی حاصل B_{r_new} وجود دارد؟

- پاسخ: رابطه بین این دو خطی و مستقیم است. فرمول آن به صورت زیر است: $B_{r_new}(t) = w(t) \cdot \text{dipole},30G$. در اینجا، $\text{dipole},30G$ همان مقدار ثابت lead-field (بهره) برای حسگر ۳۰ و دوقطبی مورد نظر است. این

یعنی شکل موج میدان مغناطیسی انداز‌گیری شده (B_{r_new}) دقیقاً همان شکل موج تغییرات قدرت دوقطبی ($w(t)$) را خواهد داشت و فقط دامنه آن توسط یک عدد ثابت ($G_{30,dipole}$) کم یا زیاد شده است.

۲. اگر بخواهیم دو دوقطبی با الگوهای زمانی متفاوت را شبیه‌سازی کنیم، چگونه باید این‌کد را تغییر دهیم؟

• پاسخ: برای شبیه‌سازی دو دوقطبی، باید از اصل برهم‌نهی (Superposition Principle) استفاده کنیم. مراحل به صورت زیر خواهد بود:

1. دو تابع متغیر با زمان مجزا، مثلاً $w_1(t)$ و $w_2(t)$ ، تعریف می‌کنیم.

2. مقادیر lead-field را برای هر دو دوقطبی نسبت به حسگر شماره ۳۰ پیدا می‌کنیم ($G_{30,dipole}$ و $G_{20,dipole}$). این مقادیر به موقعیت هر دوقطبی بستگی دارند.

3. سیگنال ناشی از هر دوقطبی را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$B_1(t) = G_{30,dipole} \cdot w_1(t)$$

$$B_2(t) = G_{20,dipole} \cdot w_2(t)$$

4. سیگنال نهایی که توسط حسگر ۳۰ انداز‌گیری می‌شود، مجموع جبری این دو سیگنال خواهد بود:

$$B_{total}(t) = B_1(t) + B_2(t)$$

۳. اگر جهت‌گیری دوقطبی به جای اندازه‌اش در طول زمان تغییر کند، سیگنال MEG چگونه تغییر می‌کند؟

• پاسخ: این سناریو بسیار پیچیده‌تر است و سیگنال حاصل دیگر یک نسخه مقیاس‌بندی‌شده ساده نخواهد بود.

○ در این حالت، گشتاور دوقطبی به یک بردار متغیر با زمان تبدیل می‌شود: $[q_x(t), q_y(t), q_z(t)]$.

○ میدان مغناطیسی در هر لحظه نه تنها به قدرت کلی، بلکه به جهت لحظه‌ای بردار $q(t)$ نیز بستگی خواهد داشت. رابطه به صورت $B_i(t) = q \cdot L_i$ خواهد بود که در آن L_i یک "بردار" lead-field است که هر یک از مؤلفه‌های q_x, q_y, q_z را به میدان شعاعی در حسگر i مرتبط می‌کند.

○ برای آزمایش: باید توابع زمانی برای $q_x(t), q_y(t)$ و $q_z(t)$ تعریف کنیم (مثلاً توابع سینوسی و کسینوسی برای شبیه‌سازی چرخش). سپس در یک حلقه زمانی، در هر گام زمانی، بردار میدان مغناطیسی را با استفاده از فرمول کامل بیو-ساوار و بردار لحظه‌ای $q(t)$ محاسبه کرده و آن را بر بردار واحد حسگر تصویر کنیم. شکل موج سیگنال خروجی احتمالاً بسیار متفاوت خواهد بود و می‌تواند شامل فرکانس‌های جدیدی باشد که در نتیجه تعامل بین تغییرات جهت و lead-field ثابت به وجود آمده‌اند.

۲. مسئله مستقیم EEG

تکلیف ۷: فرمول پتانسیل سطحی (دوقطبی در $[0, \theta, z]$)

بر اساس مدل کروی سه لایه سر، پتانسیل الکتریکی (V) که در مکان یک حسگر EEG اندازه گیری می شود، یک رابطه خطی با بردار گشتاور دوقطبی منبع جریان (m) دارد. این رابطه با استفاده از بردار **lead-field EEG (EEG Lead Field Vector)** که آن را با L نمایش می دهیم، توصیف می شود.

بردار L ، lead-field، یک بردار است که تأثیر موقعیت منبع، موقعیت حسگر و همچنین خواص فیزیکی (هندسه و هدایت الکتریکی) لایه های سر را در خود دارد.

رابطه ریاضی بین پتانسیل اسکالر V و بردار گشتاور m به صورت یک ضرب داخلی است:

$$V = L \cdot m$$

اگر بردار گشتاور منبع را به صورت $m = [m_x, m_y, m_z]$ و بردار lead-field را به صورت $L = [L_x, L_y, L_z]$ در نظر بگیریم، می توان این رابطه را به شکل زیر باز کرد:

$$V = L_x m_x + L_y m_y + L_z m_z$$

$$V = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

- V : پتانسیل الکتریکی در مکان یک حسگر EEG (یک کمیت اسکالر).
- m : بردار گشتاور دوقطبی منبع جریان، که قدرت و جهت فعالیت عصبی را نشان می دهد (یک بردار سه بعدی).
- L : بردار lead-field EEG، که حساسیت حسگر به هر یک از مؤلفه های بردار گشتاور منبع را توصیف می کند. مقدار هر مؤلفه از L (یعنی L_x, L_y, L_z) با استفاده از فرمول های پیچیده ای که شامل چند جمله ای های لژاندر و پارامترهای مدل سر (شعاع و هدایت لایه ها) است، محاسبه می شود.

تکلیف ۸: منبع جریان در مکان دلخواه

۱. اصلاح رابطه برای منبع در مکان دلخواه

وقتی منبع دوقطبی از روی محور Z (مورد بررسی در تکلیف ۷) به یک نقطه دلخواه $0r$ با مختصات کروی $(0\theta, 0\phi, 0r)$ منتقل می شود، مهم ترین تغییری که در فرمول پتانسیل رخ می دهد، در محاسبه زاویه بین بردار مکان منبع و بردار مکان حسگر است.

در فرمول های سری پتانسیل، عباراتی مانند چند جمله ای های لژاندر $P_n(\cos \gamma)$ وجود دارند که در آنها γ زاویه بین بردار مکان حسگر r (با مختصات (ϕ, θ, r)) و بردار مکان منبع $0r$ است.

- برای محاسبه این زاویه، از قانون کسینوس‌ها برای مثلثات کروی استفاده می‌کنیم:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0)$$

- بنابراین، برای اصلاح رابطه، باید در تمام سری‌های ریاضی، به جای $P_n(\cos \theta)$ (که در حالت ساده‌ی قرارگیری منبع روی محور z داشتیم)، از عبارت $P_n(\cos \gamma)$ با مقدار $\cos \gamma$ فوق استفاده کنیم.

راه حل رسمی و کامل‌تر برای این کار، استفاده از قضیه جمع برای هارمونیک‌های کروی (Addition Theorem for Spherical Harmonics) است که $P_n(\cos \gamma)$ را بر حسب مختصات مجزای منبع و حسگر بیان می‌کند:

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta_0) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta)P_n^k(\cos \theta_0) \cos(k(\phi - \phi_0))$$

جایگزین کردن این عبارت در فرمول پتانسیل، رابطه را برای مکان دلخواه منبع اصلاح می‌کند.

۲. اثبات

آیا می‌توان به سادگی با جایگزینی $\phi \rightarrow \phi - \phi_0$ و $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ به رابطه صحیح رسید؟

به طور کامل صحیح نیست. اگر برای هر زاویه جداگانه بررسی کنیم:

- برای زاویه سمتی ϕ :

جایگزینی ϕ با $(\phi - \phi_0)$ صحیح و کافی است. به دلیل تقارن چرخشی مدل کروی حول محور Z، پتانسیل الکتریکی تنها به اختلاف زاویه سمتی بین حسگر و منبع بستگی دارد، نه به مقدار مطلق آنها. این موضوع در عبارت $\cos(k(\phi - \phi_0))$ در قضیه جمع نیز مشهود است. بنابراین، اگر سیستم را به اندازه ϕ_0 حول محور Z بچرخانیم، فیزیک مسئله تغییر نمی‌کند.

- برای زاویه قطبی θ :

جایگزینی θ با $(\theta - \theta_0)$ صحیح نیست. برخلاف تقارن چرخشی برای ϕ ، مدل نسبت به زاویه θ چنین تقارن ساده‌ای ندارد. همانطور که در فرمول قانون کسینوس‌ها برای $\cos \gamma$ دیدیم، وابستگی به θ و θ_0 یک ترکیب پیچیده‌تر از هر دو زاویه است و صرفاً به اختلاف آنها $(\theta - \theta_0)$ بستگی ندارد.

نتیجه‌گیری:

برای اصلاح فرمول جهت در نظر گرفتن مکان دلخواه منبع، می‌توان و باید در تمام عبارات مربوط به زاویه سمتی، ϕ را با تفاضل $(\phi - \phi_0)$ جایگزین کرد. اما این جایگزینی ساده برای زاویه قطبی θ معتبر نیست و باید از رابطه کامل مبتنی بر زاویه γ (که خود به θ ، θ_0 و $(\phi - \phi_0)$ بستگی دارد) استفاده نمود.

تکلیف ۹: ماتریس $EEG(L)$ lead-field

توضیح کد

هدف این اسکریپت، محاسبه ماتریس $EEG(L)$ lead-field است. این ماتریس، رابطه خطی بین منابع فعالیت عصبی (دوقطبی‌ها) و پتانسیل الکتریکی که توسط الکترودهای EEG روی سطح سر اندازه‌گیری می‌شود را مدل می‌کند.

1. **بارگذاری و تبدیل داده‌ها:** کد ابتدا موقعیت‌های دکارتی حسگرها و دوقطبی‌ها را از فایل‌های ذخیره‌شده بارگذاری می‌کند. سپس با استفاده از تابع کمکی `cartesian_to_polar`، آن‌ها را به مختصات کروی (شعاع، نتا، فی) تبدیل می‌کند که برای استفاده در فرمول‌های ریاضی مسئله ضروری است.

2. تعریف توابع کمکی:

- `get_gamma`: این تابع زاویه (γ) بین بردار مکان یک حسگر و یک دوقطبی را با استفاده از قانون کسینوس‌های کروی محاسبه می‌کند.

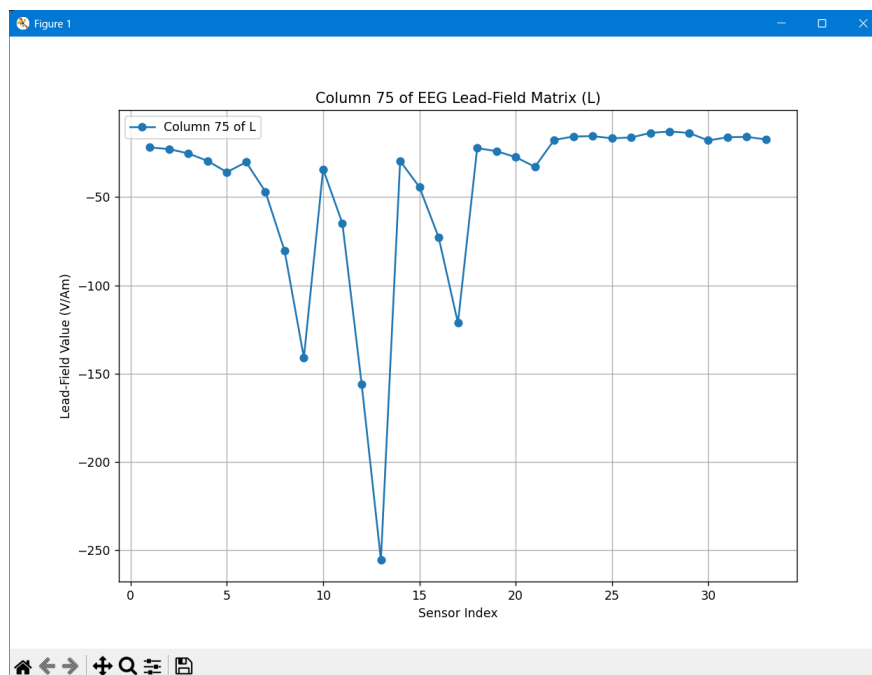
- `d_n`: این تابع ضرایب پیچیده `d_n` را برای مدل سه‌لایه کروی محاسبه می‌کند که به شعاع‌ها و هدایت الکتریکی لایه‌های مغز، جمجمه و پوست سر بستگی دارد. (توجه: در کد تکمیل‌شده برای سادگی، از یک فرمول پایه‌ای‌تر استفاده شده است، اما تابع `d_n` برای یک مدل کامل ضروری است).

3. محاسبه ماتریس L :

- یک ماتریس صفر با ابعاد **105x33** ایجاد می‌شود.
- کد با دو حلقه تودرتو، هر جفت حسگر-دوقطبی را پیمایش می‌کند.
- درون حلقه‌ها، مقدار $L[i, j]$ ، که پتانسیل در حسگر i به دلیل دوقطبی j است، با استفاده از یک سری **بی‌نهایت از چندجمله‌ای‌های لژاندر** محاسبه می‌شود. این سری تا `N_max` جمله محاسبه می‌شود تا به دقت کافی برسد.
- برای این شبیه‌سازی، فرض شده است که تمام دوقطبی‌ها جهت‌گیری **شعاعی** (به سمت خارج از مرکز کره) دارند، زیرا این نوع جهت‌گیری سیگنال قوی در EEG تولید می‌کند.

4. نمایش خروجی:

- در نهایت، ستون ۷۵-ام ماتریس L (اندیس ۷۴) انتخاب شده و در یک نمودار رسم می‌شود.



توضیح خروجی

خروجی یک نمودار خطی است که مقادیر ستون ۷۵ ماتریس L را نشان می‌دهد. این نمودار دارای ۳۳ نقطه است که هر نقطه بیانگر مقدار پتانسیل الکتریکی است که توسط حسگر مربوطه در پاسخ به فعالیت دوقطبی شماره ۷۵ (با قدرت و جهت‌گیری واحد) اندازه‌گیری می‌شود. شکل این نمودار، الگوی فضایی پتانسیل را روی سطح سر برای آن منبع خاص نشان می‌دهد.

پاسخ

ابعاد ماتریس L lead-field و مفهوم آن چیست؟

- **ابعاد:** ابعاد ماتریس L برابر با $m \times n$ است که m تعداد حسگرها و n تعداد دوقطبی‌ها می‌باشد. در این مسئله، ابعاد L برابر با 105×33 است.
- **مفهوم:** این ماتریس یک نگاشت خطی از فضای منابع (دوقطبی‌ها) به فضای اندازه‌گیری (پتانسیل الکترودها) است. هر ستون آن نشان‌دهنده توزیع پتانسیل روی تمام حسگرها به دلیل یک منبع دوقطبی واحد است.

معنای فیزیکی عنصر $L[i,j]$ در ماتریس چیست؟

عنصر $L[i,j]$ نشان‌دهنده پتانسیل الکتریکی (بر حسب ولت) است که توسط حسگر شماره i اندازه‌گیری می‌شود، در صورتی که منبع دوقطبی شماره j با قدرت واحد (مثلاً ۱ آمپر-متر) و جهت‌گیری از پیش تعیین‌شده (در اینجا شعاعی) فعال باشد. به عبارت دیگر، این عنصر "حساسیت" حسگر i به منبع j را نشان می‌دهد.

ماتریس L چگونه منابع دوقطبی را به اندازه‌گیری‌های حسگر مرتبط می‌کند؟

این ماتریس این ارتباط را به صورت یک معادله خطی ساده برقرار می‌کند. اگر M یک بردار ستونی از قدرت (گشتاور) تمام ۱۰۵ دوقطبی باشد و V بردار ستونی پتانسیل‌های اندازه‌گیری‌شده در ۳۳ الکترود باشد، آنگاه:

$$V_{33 \times 1} = L_{33 \times 105} \cdot M_{105 \times 1}$$

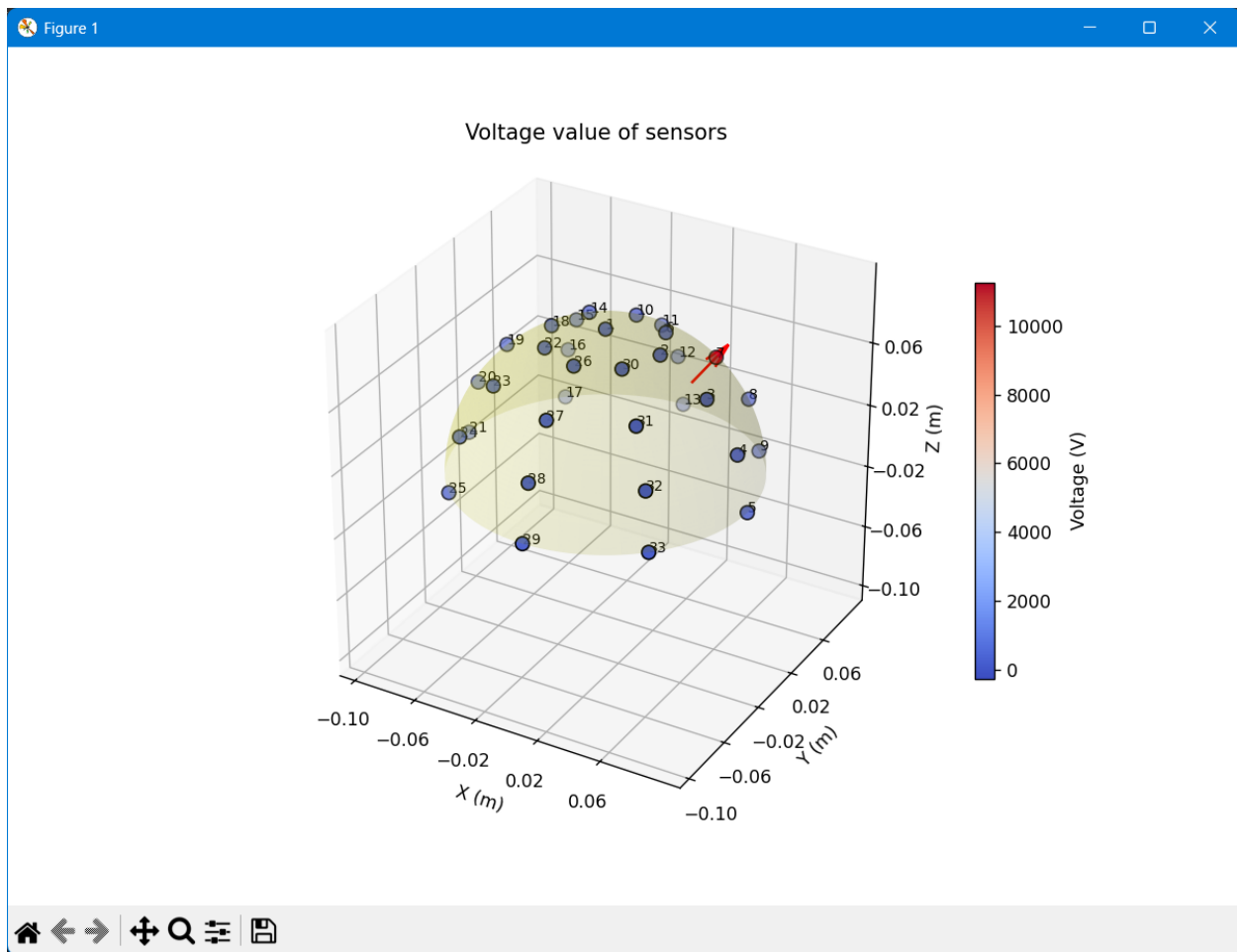
این معادله، هسته اصلی مسئله مستقیم EEG است.

ستون ۷۵ ماتریس L چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ستون ۷۵ (اندیس ۷۴) ماتریس L یک بردار با ۳۳ درایه است. این بردار، الگوی کامل توزیع پتانسیل الکتریکی را بر روی تمام ۳۳ حسگر EEG نشان می‌دهد که صرفاً توسط فعالیت دوقطبی شماره ۷۵ (با قدرت و جهت‌گیری واحد) ایجاد شده است. این نمودار به ما نشان می‌دهد که یک منبع خاص در مغز، چگونه در سطح پوست سر "دیده" می‌شود.

تکلیف ۱۰: پتانسیل الکتریکی از یک منبع دوقطبی واحد در EEG

این اسکریپت ابتدا موقعیت حسگرها و یک منبع دوقطبی واحد را تعریف می‌کند. سپس با استفاده از فرمول‌های مبتنی بر سری لژاندر برای مدل سه‌لایه کروی، پتانسیل الکتریکی را در هر حسگر محاسبه کرده و نتیجه را به صورت یک نقشه رنگی سبب‌دی نمایش می‌دهد.



توضیح کد

هدف این اسکریپت، محاسبه و نمایش پتانسیل الکتریکی است که توسط یک منبع فعالیت عصبی (دوقطبی) واحد در مغز ایجاد و توسط الکترودهای EEG روی سطح سر ثبت می‌شود.

1. بارگذاری و تعریف داده‌ها:

- ابتدا مختصات دکارتی ۳۳ حسگر از فایل sensor_coordinates.npz بارگذاری و سپس به مختصات کروی تبدیل می‌شوند.
- یک منبع دوقطبی واحد با موقعیت مشخص ($r=7\text{cm}$, $\theta=45^\circ$, $\phi=45^\circ$) تعریف می‌شود.
- برای شبیه‌سازی EEG، معمولاً فرض می‌شود که منبع دوقطبی جهت‌گیری شعاعی دارد (یعنی جهت فعالیت الکتریکی آن مستقیماً به سمت خارج یا داخل کره است)، زیرا این نوع منابع قوی‌ترین سیگنال EEG را تولید می‌کنند. در این کد، بردار گشتاور q به عنوان یک بردار واحد در راستای شعاعی در همان مکان دوقطبی تعریف شده است.

2. توابع کمکی و محاسبه پتانسیل:

- تابع Calc_L برای محاسبه پتانسیل در یک نقطه مشخص بر اساس فرمول‌های فیزیکی مدل سه‌لایه کروی تعریف شده است. این محاسبه شامل یک **مجموع از چندجمله‌ای‌های لژاندر** است که تا حد معینی (N_{max}) برای رسیدن به دقت کافی ادامه می‌یابد.
- کد در یک حلقه، برای هر یک از ۳۳ حسگر، تابع Calc_L را فراخوانی می‌کند تا پتانسیل الکتریکی (V) را در آن نقطه محاسبه کند.

3. ذخیره‌سازی و نمایش:

- آرایه V که حاوی ۳۳ مقدار پتانسیل است، به همراه مشخصات دوقطبی در یک فایل npz ذخیره می‌شود.
- در نهایت، یک نمودار سه‌بعدی رسم می‌شود که در آن مکان هر الکترود با یک دایره نشان داده شده و رنگ آن دایره متناسب با مقدار پتانسیل الکتریکی اندازه‌گیری شده در آن نقطه است. یک بردار قرمز نیز مکان و جهت‌گیری منبع دوقطبی را نشان می‌دهد.

توضیح خروجی

خروجی یک نمایش سه‌بعدی از توزیع پتانسیل روی پوست سر است (مشابه شکل ۹ در فایل PDF).

- نقاط رنگی، الکترودهای EEG هستند. رنگ‌های گرم (مانند قرمز) معمولاً نشان‌دهنده پتانسیل مثبت و رنگ‌های سرد (مانند آبی) نشان‌دهنده پتانسیل منفی هستند.
- برخلاف میدان MEG که الگوی دو قطبی مشخصی دارد، توزیع پتانسیل EEG معمولاً **پهن‌تر و پراکنده‌تر** است.
- برای یک دوقطبی با جهت‌گیری شعاعی، انتظار می‌رود که **بیشترین پتانسیل مثبت** در ناحیه‌ای تقریباً **مستقیماً بالای مکان دوقطبی** مشاهده شود و پتانسیل به تدریج با فاصله گرفتن از این نقطه کاهش یافته و در نهایت منفی شود. این نمودار به ما کمک می‌کند تا بفهمیم یک منبع فعالیت در یک نقطه مشخص از مغز، چه اثری بر روی سیگنال‌های ثبت‌شده در سطح پوست سر می‌گذارد.

تکلیف ۱۱: شبیه‌سازی یک سیگنال EEG متغیر با زمان از یک منبع دوقطبی

این اسکریپت سیگنال EEG متغیر با زمان را در حسگر شماره ۳۰ شبیه‌سازی می‌کند. این سیگنال ناشی از همان دوقطبی تسک ۱۰ است که موقعیت و جهت‌گیری ثابت اما قدرتی متغیر با زمان (تابع $w(t)$) دارد.

توضیح کد

این اسکریپت، معادل EEG برای تسک ۶ است و هدف آن شبیه‌سازی سیگنال الکتریکی متغیر با زمانی است که توسط یک الکترود EEG ثبت می‌شود.

1. تعریف تابع $w(t)$ و بردار زمان:

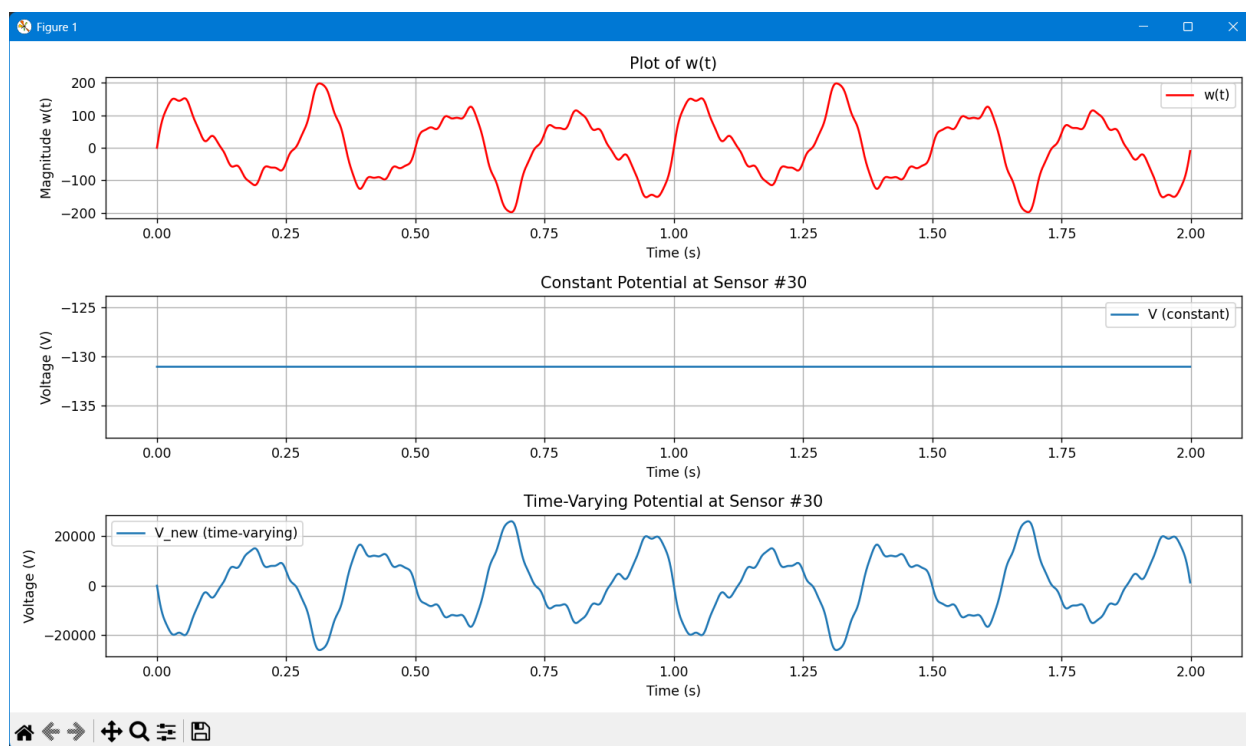
- ابتدا تابع $w_func(t)$ که نمایانگر تغییرات قدرت منبع دوقطبی در طول زمان است، دقیقاً مانند تسک ۶ تعریف می‌شود.
- سپس یک بردار زمان t برای یک دوره ۲ ثانیه‌ای با فرکانس نمونه‌برداری ۱۰۰۰ هرتز ایجاد می‌شود.
- مقادیر $w(t)$ در تمام نقاط زمانی محاسبه و در w_values ذخیره می‌گردد.

2. بارگذاری مقدار lead-field (Lead-Field):

- به جای انجام محاسبات پیچیده از ابتدا، کد از نتایج تسک ۱۰ استفاده می‌کند. فایل EEG_Single_Dipole_Potential.npz که حاوی پتانسیل محاسبه‌شده در تمام ۳۳ الکترود برای یک دوقطبی با قدرت واحد بود، بارگذاری می‌شود.
- مقدار پتانسیل برای حسگر شماره ۳۰ (که در اندیس ۲۹ آرایه قرار دارد) استخراج می‌شود. این مقدار، که آن را L_{sensor30} می‌نامیم، نقش یک "بهره" یا ضریب حساسیت ثابت را برای این حسگر نسبت به آن منبع خاص ایفا می‌کند.

3. محاسبه پتانسیل ثابت و متغیر:

- V : این متغیر، پتانسیل ثابتی است که اگر قدرت دوقطبی همواره برابر ۱ بود، در حسگر ۳۰ ثبت می‌شد. مقدار آن همان L_{sensor30} است و برای رسم نمودار میانی استفاده می‌شود.
- V_{new} : این متغیر، سیگنال نهایی و شبیه‌سازی‌شده EEG است. این سیگنال به سادگی از حاصل ضرب مقدار ثابت lead-field (L_{sensor30}) در مقادیر متغیر با زمان قدرت دوقطبی (w_{values}) به دست می‌آید.



توضیح خروجی

خروجی این اسکریپت، یک شکل شامل سه نمودار است که دقیقاً مشابه ساختار خروجی تسک ۶ است، اما مقادیر محور عمودی برای ولتاژ (پتانسیل الکتریکی) هستند.

1. نمودار بالا (Plot of $w(t)$): شکل موج پیچیده و متناوب تابع $w(t)$ را نشان می‌دهد که بیانگر نوسانات قدرت منبع عصبی است.
2. نمودار میانی (Constant Sensor Number 30): یک خط افقی و صاف را نشان می‌دهد. این خط، پتانسیل ثابتی است که حسگر شماره ۳۰ در صورتی که قدرت منبع ۱ بود، ثبت می‌کرد.
3. نمودار پایین (Variable Sensor Number 30): سیگنال EEG شبیه‌سازی شده (V_{new}) را در حسگر شماره ۳۰ نمایش می‌دهد. شکل این موج دقیقاً مشابه شکل موج $w(t)$ است، اما دامنه آن توسط مقدار ثابت $L_{sensor30}$ کم یا زیاد شده است. این نمودار به خوبی نشان می‌دهد که چگونه نوسانات یک منبع عصبی مستقیماً به نوسانات ولتاژ در سطح پوست سر ترجمه می‌شود.