Universidad de San Andrés

Práctica D: Polinomio de Taylor

1. Hallar el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

   (a) $f(x) = (1+x)^3$, orden 4, $x = 0$

   (b) $f(x) = \ln(x)$, orden 5, $x = 1$

   (c) $f(x) = \ln(1+x)$, orden 5, $x = 0$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, orden 4, $x = 0$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, orden 3, $x = 0$

   (f) $f(x) = \sin(2x)$, orden 4 y 5, $x = 0$

   (g) $f(x) = \cos(3x)$, orden 4, $x = 0$

   (h) $f(x) = \sqrt{2x}$, orden 3, $x = 2$

   (i) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, orden 3, $x = 0$

   (j) $f(x) = e^{3x-3}$, orden 3, $x = 1$

   (k) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \dfrac{2}{x-4}$, orden 2, $x = 5$

2. Escribir los siguientes polinomios en potencias de $(x - x_0)$ para los x_0 indicados.

   (a) $p(x) = -3x^4 + x^2 + x$; para $x_0 = 1$ y $x_0 = -2$.

   (b) $p(x) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$; para $x_0 = -1$ y $x_0 = 0$.

3. (a) Reconstruir el polinomio $p(x)$ de grado 3 del que se sabe que $p(0) = 2$, $p'(0) = 3$, $p''(0) = 6$ y $p'''(0) = -4$.

   (b) Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $q(2) = -1$, $q'(2) = 3$ y $q''(2) = 4$. Expresar dicho polinomio en potencias de $(x-2)$.

   (c) Expresar el polinomio $q(x)$ del ítem anterior como suma de potencias de x.

4. En cada caso, aproximar mediante el polinomio de Taylor el valor pedido usando la f más conveniente del Ejercicio 1. Elegir un $\tilde{x}$ apropiado para la evaluación. (Por ejemplo, para el ítem (i) considerar $f(x) = (1+x)^3$ y su polinomio de Taylor desarrollado en $x = 0$, y luego evaluarlo en $\tilde{x} = 0.02$.)

   (i) $(1.02)^3$

   (ii) $\ln(1.1)$

   (iii) $\sin(0.5)$

   (iv) $\sqrt{4.2}$

   (v) $\sqrt[3]{0.5}$

   (vi) e^{-1}

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 2$ es $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x + 3$.

   (a) Calcular $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.

   (b) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 f(x^4 + 1)$. Calcular $h(-1)$, $h'(-1)$ y $h''(-1)$.

   (c) Dar el polinomio de Taylor de orden 2 de h en $x = -1$.

6. Sea f una función tres veces derivable tal que su polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x = 1$ es

$$p(x) = -1 + (x-1) - 2(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

   Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 1$ de $g(x) = (3f(x) + 1)x^2$.

7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuatro veces derivable tal que su polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $x = 0$ es $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7$.
   (a) Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.
   (b) ¿Se puede conocer el valor de $f^{iv}(0)$? Si se sabe que $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de f desarrollado en $x = 0$, ¿cuánto vale $f^{iv}(0)$?
   (c) Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x^2 - 3x + 2)$. Asumiendo que $p(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $x = 0$, dar el polinomio de Taylor de orden 4 de $h(x)$ desarrollado en $x = 2$.

8. Sea $p(x) = x^3 - 3x^2 + x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f alrededor de $x_0 = 2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $g(x) = e^{f(x)+2}$ alrededor de $x_0 = 2$.

9. Sean $p(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 4$ y $q(x) = 2(x+1)^2 - 1$ los polinomios de Taylor de orden 2 de f y g respectivamente, desarrollados en $x = -1$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2, desarrollado en $x = -1$ de
   (a) $f(x) + 3g(x)$
   (b) $f(x)g(x)$
   (c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
   (d) $f(2x+1) - g(4x+3)$

10. Sean f y g dos funciones 3 veces derivables tales que el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $x = 2$ es
$$p(x) = -x^2 + 6x - 7$$
y el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$ es
$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}.$$
Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x) = (g \circ f)(x)$ alrededor de $x_0 = 2$.

11. Sea $p(x) = x^2 - 3x + 3$, el polinomio de Taylor de orden 2 de una función f alrededor de $x_0 = 2$. Sea g una función dos veces derivable tal que $(g \circ f)(x) = -x^2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x = 1$.

12. Hallar todos los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = (1 + bx)e^{ax}$ en $x = 0$ sea $p(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2$.

13. Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de $f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$ desarrollado en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

14. Determinar todos los valores de $a \neq 0$ para que el polinomio de Taylor centrado en $x = 1$ de la función $f(x) = ae^{a(x-1)^2} + a(x-1)^2 - a$ comience con la potencia más alta posible.

15. Hallar a y b para que los polinomios de Taylor de orden 2 centrados en $x = 0$ de las funciones $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + \dfrac{x}{2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + b} + \dfrac{2}{b}$ sean iguales.