Důkazy, značení, množiny, relace

Zdeněk Dvořák

3. října 2018

V matematice se nespoléháme na fakt, že něco platí ve všech pozorovaných případech.

Příklad 1.

$$A(n) = \left\lceil \frac{2}{\sqrt[n]{2} - 1} \right\rceil$$

$$B(n) = \left\lfloor \frac{2n}{\log 2} \right\rfloor$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$A(n)$	2	5	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43
$B(n)$	2	5	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43

$$A(777451915729368) = 2243252046704767$$

$$B(777451915729368) = 2243252046704766$$

Důkaz: logické odvození z **axiomů**.

1 Typy důkazů

1.1 Sporem

Místo dokazování tvrzení „Platí A.“ vyvracíme tvrzení „Neplatí A.“

Věta 1. *Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje jen konečně mnoho prvočísel $p_1, \ldots, p_n$. Uvažujme číslo $k = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Toto číslo není dělitelné $p_1, \ldots, p_n$. Ale každé přirozené číslo větší než 1 je dělitelné nějakým prvočíslem, což dává spor. Prvočísel tedy existuje nekonečně mnoho. □

Častou variantou je vyvrácení existence minimálního protipříkladu.

Lemma 2. *Každé přirozené číslo větší než* 1 *je dělitelné nějakým prvočíslem.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje nějaké přirozené číslo větší než 1, které není dělitelné žádným prvočíslem. Nechť n je nejmenší takové číslo. Jelikož n je dělitelné sebou samým, n není prvočíslo. Proto existuje nějaké přirozené číslo a různé od 1 a n, které dělí n. Jelikož $a < n$ (tedy a je menší než hypotetický nejmenší protipříklad na Lemma 2), číslo a je dělitelné nějakým prvočíslem p. Ale jelikož $p|a$ a $a|n$, dostáváme, že prvočíslo p dělí i n, což je spor. □

2 Matematickou indukcí

Mějme tvrzení $A(n)$ o přirozeném čísle n. Abychom dokázali, že $A(n)$ platí pro všechna přirozená čísla n, dokazujeme pro každé n „jestliže $A(m)$ platí pro všechna přirozená čísla $m < n$, pak platí $A(n)$“.

Lemma 3. *Každé přirozené číslo n různé od* 1 *je dělitelné nějakým prvočíslem.*

Důkaz. Nechť n je libovolné přirozené číslo různé od 1. Důkaz provedeme indukcí, předpokládáme tedy, že každé přirozené číslo menší než n a různé od 1 je dělitelné nějakým prvočíslem.

Jestliže n je prvočíslo, pak tvrzení zjevně platí, jelikož $n|n$. Jestliže n není prvočíslo, pak má nějakého dělitele a různého od 1 a n, a tedy $a < n$. Z indukčního předpokladu je a dělitelné nějakým prvočíslem p. Jelikož $p|a$ a $a|n$, máme $p|n$. □

Častá varianta: dokazujeme

- platí $A(1)$ a
- pro každé $n \geq 2$, jestliže platí $A(n-1)$, pak platí $A(n)$.

Lemma 4. *Pro každé přirozené číslo n platí*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí dle n. Pro $n = 1$ máme

$$1 + 2 + \cdots + n = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

tvrzení tedy platí. Uvažujme nyní libovolné $n \geq 2$. Z indukčního předpokladu máme

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Pak

$$1 + 2 + \cdots + n = (1 + 2 + \cdots + (n-1)) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

jak jsme měli dokázat. $\square$

Pozor na „neúplnou indukci“.

Lemma 5 (Chybné!)**.** *Pro každá přirozená čísla $a, b \geq 1$ je $2a + b$ liché.*

Důkaz (Chybný!). Důkaz provedeme indukcí dle $n = a + b - 1$. Budeme tedy dokazovat následující tvrzení.

> Pro každé přirozené číslo n a každá přirozená čísla $a, b \geq 1$ taková, že $n = a + b - 1$, je $2a + b$ liché.

Když $n = 1$, pak $a = b = 1$ a $2a + b = 3$, tvrzení tedy platí. Uvažme nyní libovolné $n \geq 2$, a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$. Tedy pro každá přirozená čísla $a', b' \geq 1$ tž. $a' + b' - 1 = n - 1$ je $2a' + b'$ liché. Nechť $a = a' + 1$ a $b = b'$. Pak platí

$$2a + b = 2(a' + 1) + b' = (2a' + b') + 2.$$

Jelikož $2a' + b'$ je liché, o 2 větší číslo $2a + b$ je také liché. Navíc $a + b - 1 = a' + b' = n$, tvrzení tedy platí i pro n. $\square$

3 Značení

Aritmetika:

- Běžné operace $+$, $-$, $\cdot$, $/$ na různých oborech, rovnost $=$, nerovnost $\neq$.
- Číselné obory:
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - $\mathbb{Q}$ racionální čísla
  - $\mathbb{R}$ reálná čísla, $\mathbb{R}_0^+$ nezáporná reálná čísla
  - $\mathbb{C}$ komplexní čísla
- x^n a $\sqrt[n]{y}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_0^+$, $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y}$.
- e^x, $\exp(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$, $\log(y) = \ln(y)$, $\log_b(y)$ pro $y > 1$.

- $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$

Součty a součiny:

- $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{i=m}^n a_i$.
- $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=m}^n a_i$.
- $\sum_{i \in I} a_i$: součet přes všechny indexy v množině I.
- $\sum_{i=1}^0 a_i = \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$.
- $\prod_{i=1}^0 a_i = \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$.

Příklad 2.

$$\prod_{i=1}^n x = x^n$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n (2i+3) = 2\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 3 = n(n+1) + 3n$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ij = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=i+1}^n j$$

Definujeme-li $\mathbb{D}_n$ jako množinu čísel dělitelných pouze prvočísly menšími nebo rovnými n, pak

$$\prod_{p \le n \text{ prvočíslo}} \frac{1}{1 - 1/p} = \sum_{k \in \mathbb{D}_n} \frac{1}{k}.$$

Logika:

- Operace $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$, $\Leftrightarrow$.
- Kvantifikátory $\forall$, $\exists$.

Příklad 3.

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg B \implies \neg A)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists a, b, c, d \in \mathbb{N}_0)\, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Množiny:

- $\emptyset$
- Běžné operace $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\in$, $\notin$, $\subset$, $\subseteq$, $\subsetneq$, $\not\subseteq$, $|x|$.
- Doplněk: je-li A podmnožina nějaké (z kontextu známé) množiny B, pak $\overline{A} = B \setminus A$.
- $\{x \in X : x$ splňuje vlastnost $\ldots\}$, $\{f(x) : x \in X, x$ splňuje vlastnost $\ldots\}$
- Množina všech podmnožin množiny X: 2^X, $\mathcal{P}(X)$
- Množina všech k-prvkových podmnožin: $\binom{X}{k} = \{y \in 2^X : |y| = k\}$
- Dvojice x, y neuspořádaná $\{x, y\}$, uspořádaná (x, y)
- Uspořádaná k-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$
- Kartézský součin $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$

Relace

Zdeněk Dvořák

17. října 2018

Definice 1. *Binární relace R mezi množinami X a Y je podmnožina $X \times Y$.*
Binární relace R na množině X je podmnožina $X \times X$.
Místo $(x, y) \in R$ píšeme xRy.

Relace s vyšší aritou (množiny k-tic); nebudeme se jimi teď zabývat.

Příklad 1.
$\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b, c\}$.
Rovnost na libovolné množině M:

$$\{(x, x) : x \in M\}.$$

Dělitelnost v přirozených číslech:

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x|y\}.$$

Soudělnost v přirozených číslech:

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, \mathrm{nsd}(x, y) > 1\}.$$

Prázdná relace $\emptyset$, univerzální relace $X \times Y$.
Rovnoběžnost v rovině:

$$\{(x, y) : x,\ y \text{ přímky v rovině, } x \parallel y\}$$

.

Reprezentace výčtem hodnot, grafem, šipkovým diagramem, maticí.
Vlastnosti relace R na množině X:

- reflexivní: xRx pro každé $x \in X$.
- symetrická: pro každé $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow yRx$.

- slabě antisymetrická: pro každé $x, y \in X$, jestliže $xRy \wedge yRx$, pak $x = y$.
- antisymetrická: pro žádné $x, y \in X$ neplatí zároveň xRy a yRx.
- tranzitivní: pro každé $x, y, z \in X$, jestliže xRy a yRz, pak xRz.

Definice 2. *Relace na R množině X je*

- *ekvivalence, jestliže R je reflexivní, symetrická a tranzitivní,*
- *částečné uspořádání, jestliže R je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,*
- *ostré částečné uspořádání, jestliže R je antisymetrická a tranzitivní.*

Operace na relacích:

- Inverze: pro relaci R mezi X a Y je $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$ relace mezi Y a X; $xR^{-1}y$ právě když yRx.
- Skládání: pro relaci R_1 mezi X a Z a relaci R_2 mezi Z a Y je $R_1 \circ R_2 = \{(x, y) : (\exists z)\,(x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2\}$ relace mezi X a Y.

Příklad 2.
Relace R je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.
V obecnosti $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.
$R \circ R^{-1}$ je symetrická.

1 Ekvivalence

Nechť R je ekvivalence na množině X. Třída ekvivalence prvku $a \in X$ je $[a]_R = \{x : x \in X, aRx\}$.

Věta 1. *Nechť R je ekvivalence na množině X.*

(a) Pro každé $a \in X$ platí $a \in [a]_R$.

(b) Jestliže $a, b \in X$ a aRb, pak $[a]_R = [b]_R$.

(c) Jestliže $a, b \in X$ a $\neg aRb$, pak $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Důkaz. (a) platí díky reflexivitě.

Nechť platí aRb. Jestliže $c \in [b]_R$, pak bRc, což z tranzitivity implikuje aRc, a tedy $c \in [a]_R$. Proto máme $[b]_R \subseteq [a]_R$. Ze symetrie platí bRa a stejný argument implikuje $[a]_R \subseteq [b]_R$. Tedy $[a]_R = [b]_R$, a (b) platí.

Pro (c) ukážeme ekvivalentní obměnu: Jestliže $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$, pak aRb. Skutečně, když $c \in [a]_R \cap [b]_R$, pak aRc a bRc a ze symetrie a tranzitivity dostáváme aRb. □

Rozklad na třídy ekvivalence $\mathcal{P}(R) = \{[x]_R : x \in X\}$.

Příklad 3. *Nechť $\sim$ je relace na $\mathbb{N}$ tž. $x \sim y$ právě když $3|x-y$. Pak $[3]_\sim = [6]_\sim = [9]_\sim = \dots$ jsou čísla dělitelná 3, $[1]_\sim = [4]_\sim = \dots$ jsou čísla dávající zbytek 1 po dělení 3, a $[2]_\sim = [5]_\sim = \dots$ jsou čísla dávající zbytek 2 po dělení 3. Každé číslo dává zbytek 0, 1, nebo 2 po dělení 3, a tedy $\mathcal{P}(\sim) = \{[1]_\sim, [2]_\sim, [3]_\sim\}$.*

Nechť P je relace na atomech, xPy právě když x a y mají stejně protonů. Třídy ekvivalence: chemické prvky.

Třídy ekvivalence jednoznačně určují ekvivalenci. Nechť $\mathcal{Q}$ je rozklad množiny X (tj. prvky $\mathcal{Q}$ jsou neprázdné navzájem disjunktní podmnožiny X a $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$. Definujme relaci $\sim_\mathcal{Q}$ na X tž. $x \sim_\mathcal{Q} y$ právě když existuje $Q \in \mathcal{Q}$ tž. $x, y \in Q$.

Lemma 2. *Pro každý rozklad $\mathcal{Q}$ množiny X je $\sim_\mathcal{Q}$ ekvivalence a třídy této ekvivalence jsou právě prvky $\mathcal{Q}$. Naopak, je-li R ekvivalence na X, pak $R = \sim_{\mathcal{P}(R)}$.*

Důkaz. Reflexivita a symetrie $\sim_\mathcal{Q}$ je zřejmá. Jestliže $x \sim_\mathcal{Q} y$ a $y \sim_\mathcal{Q} z$, pak $x, y \in Q_1$ a $y, z \in Q_2$ pro nějaké $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$. Jelikož prvky $\mathcal{Q}$ jsou navzájem disjunktní a $y \in Q_1 \cap Q_2$, máme $Q_1 = Q_2$. Proto $x, z \in Q_1$ a $x \sim_\mathcal{Q} z$. Proto $\sim_\mathcal{Q}$ je i tranzitivní, a tedy $\sim_\mathcal{Q}$ je ekvivalence. Pro každé $x \in X$ je třída ekvivalence $[x]_{\sim_\mathcal{Q}}$ rovná prvku $Q \in \mathcal{Q}$ tž. $x \in Q$.

Nechť R je ekvivalence na X. Jestliže xRy pak $[x]_R = [y]_R$, a tedy $x, y \in [x]_R$ a $x \sim_{\mathcal{P}(R)} y$. Jestliže $x \sim_{\mathcal{P}(R)} y$, pak $x, y \in Q$ pro nějaké $Q \in \mathcal{P}(R)$, řekněme $Q = [z]_R$. Pak xRz a yRz, a ze symetrie a tranzitivity xRy. Proto $R = \sim_{\mathcal{P}(R)}$. □

2 Částečná uspořádání

Pozorování 3. *Nechť X je množina a $E = \{(x, x) : x \in X\}$ je relace rovnosti na X. Je-li $\preceq$ částečné uspořádání na X, pak $\preceq \setminus E$ je ostré částečné uspořádání na X. Je-li $\prec$ ostré částečné uspořádání na X, pak $\prec \cup E$ je částečné uspořádání na X.*

Reprezentace Hasseho diagramem: šipky vedou nahoru, bez tranzitivních a reflexivních šipek.

Pro částečné uspořádání $\preceq$ na X a $x \in X$ definujme $\downarrow_\preceq x = \{y : y \in X, y \prec x\}$.

Věta 4. *Nechť $\preceq$ je částečné uspořádání na množině X a $x, y \in X$. Pak $x \preceq y$ právě když $\downarrow_\preceq x \subseteq \downarrow_\preceq y$. Navíc, jestliže $x \neq y$, pak $\downarrow_\preceq x \neq \downarrow_\preceq y$.*

Důkaz. Jestliže $x \preceq y$ a $z \in \downarrow_{\preceq} x$, pak $z \preceq x$ a z tranzitivity $z \preceq y$, a tedy $z \in \downarrow_{\preceq} y$; proto $x \subseteq \downarrow_{\preceq} y$.

Z reflexivity máme $x \in \downarrow_{\preceq} x$. Jestliže $\downarrow_{\preceq} x \subseteq \downarrow_{\preceq} y$, pak $x \in \downarrow_{\preceq} y$, a tedy $x \preceq y$.

Jestliže $x \neq y$, pak ze slabé antisymetrie plyne $x \npreceq y$ nebo $y \npreceq z$; BÚNO předpokládejme $x \npreceq y$. Pak $x \notin \downarrow_{\preceq} y$, a proto $\downarrow_{\preceq} x \neq \downarrow_{\preceq} y$. □

Prvky x a y jsou neporovnatelné v částečném uspořádání $\preceq$, jestliže $x \npreceq y$ a $y \npreceq x$. Antiřetězec je množina navzájem neporovnatelných prvků.

Příklad 4. *Relace „x dělí y“ je uspořádání na přirozených číslech. Dvě čísla jsou neporovnatelná, jestliže ani jedno z nich nedělí to druhé.*

Částečné uspořádání je lineární, jestliže každé dva prvky jsou porovnatelné. Řetězec je množina navzájem porovnatelných prvků; tedy $\preceq$ na řetězci je lineární uspořádání.

Prvek $x \in X$ je v uspořádání $\preceq$ na X

- nejmenší, jestliže $x \preceq y$ pro každé $y \in X$,
- minimální, jestliže neexistuje prvek $y \in X \setminus \{x\}$ tž. $y \preceq x$.

Obdobně největší a maximální.

Příklad 5. *Má-li částečné uspořádání nejmenší prvek, pak je (ze slabé antisymetrie) jednoznačný a je to také jediný minimální prvek.*

Navzájem různé minimální prvky jsou neporovnatelné.

Uspořádání děliteností na $\mathbb{N}$ má nejmenší prvek 1.

Uspořádání děliteností na $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ nemá nejmenší prvek, minimální prvky jsou prvočísla.

Uspořádání celých čísel dle velikosti nemá žádný minimální prvek.

Lemma 5. *Je-li $\preceq$ částečné uspořádání na neprázdné konečné množině X, pak $\preceq$ má alespoň jeden minimální prvek.*

Důkaz. Indukcí dle $|X|$. Jestliže $X = \{x\}$, pak x je minimální prvek. Můžeme tedy předpokládat $|X| \geq 2$. Nechť x je libovolný prvek X. Uvažujme $\preceq$ na množině $X \setminus \{x\}$. Z indukčního předpokladu má toto částečné uspořádání minimální prvek m. Jestliže $x \npreceq m$, pak m je minimální i na X. Jestliže $x \preceq m$, pak x je minimální prvek na X; jinak by musel existovat prvek $z \in X \setminus \{x\}$ tž. $z \preceq x$, z tranzitivity bychom měli $z \preceq m$ a z minimality m na $X \setminus \{x\}$ by plynulo $z = m$, a tedy $m \preceq x$ ve sporu se slabou antisymetrií. □

Funkce; Kombinatorické počítaní

Zdeněk Dvořák

15. října 2018

1 Funkce

Relace $f \subseteq X \times Y$ je funkce, jestliže pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ tž. $(x, y) \in f$. Existuje-li, píšeme $f(x) = y$. Množina X je definiční obor f, množina Y je obor hodnot. Značení $f : X \to Y$.

Příklad 1. _
$p : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1\}$, $p = \{(1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 0), (5, 1)\}$.
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$; *tj. relace* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.
$h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/x$; *tj. relace* $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{N}\}$.
$r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $r(x) = 1/x$; *tj. relace* $\{(x, 1/x) : x \in \mathbb{R}^+\}$.

- f je na (surjektivní), jestliže pro každé $y \in Y$ existuje (alespoň jedno) $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
- f je prostá (injektivní), jestliže pro každá $x_1, x_2 \in X$ tž. $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. pro každé $y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
- f je vzájemně jednoznačné (bijektivní), jestiže je zároveň surjektivní a injektivní, tj. pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ tž. $f(x) = y$.

Příklad 2. *Pro konečnou množinu* X *je funkce* $f : X \to X$ *prostá právě tehdy, když je na. Pro nekonečné* X *neplatí.*

Pro $f : X \to Y$ *je* f^{-1} *funkce právě když* f *je bijektivní; v tom případě* $f^{-1} : Y \to X$ *je také bijektivní.*

Pro $f : X \to Z$ *a* $g : Z \to Y$ *je* $f \circ g : X \to Z$ *funkce, splňuje* $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

2 Kombinatorické počítání

Příklad 3. *Kolik je řetězců délky n z písmen* **A**, **B** *a* **C**, *které nekončí na* **A** *a písmeno* **A** *se v nich nevyskytuje dvakrát po sobě?*

- *hrubou silou:*
  - $S(1) = 2$: *B, C*
  - $S(2) = 6$: *AB, AC, BB, BC, CB, CC*
  - $S(3) = 16$: *všechny až na* **AAB**, **AAC**, **XYA** *pro* $\mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}\}$
  - ...
- *rekurzivním vzorcem:* $S(1) = 2$, $S(2) = 6$ *a*

$$S(n) = 2S(n-1) + 2S(n-2)$$

  pro $n \geq 3$.

- *přesným vzorcem:*

$$S(n) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot (1-\sqrt{3})^n$$

- *přibližným odhadem:*

$$S(n) \approx \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot (1+\sqrt{3})^n$$

2.1 Základní vztahy

Počet dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$, je $|A||B|$.

Počet k-tic $(a_1, \ldots, a_k)$, kde $a_i \in A_i$, je $\prod_{i=1}^{k} |A_i|$.

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet k-tic prvků z A
- počet prvků kartézského součinu $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k\text{-krát}} = A^k$
- počet řetězců délky k z písmen v A
- počet způsobů, jak z A vybrat k prvků s povoleným opakováním
- počet funkcí z $\{1, \ldots, k\}$ do A

je m^k.

n-prvková množina má 2^n podmnožin

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet uspořádání prvků A
- počet bijekcí z $\{1, \dots, n\}$ do A
- počet bijekcí z A do A

je $n(n-1)\cdots 1 = n!$.

Poznámka:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Permutace na konečné množině A je bijekce z A do A.

Pro n-prvkovou množinu A:

- počet k-tic navzájem různých prvků z A
- počet řetězců délky k z navzájem různých písmen v A
- počet způsobů, jak z A vybrat k prvků bez opakování
- počet prostých funkcí z $\{1, \dots, k\}$ do A

je $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Binomický koeficient $\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Lemma 1.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Důkaz. Z n-prvkové množiny lze vybrat k prvků bez opakování tak, že nejprve vybereme k-prvkovou podmnožinu a tu uspořádáme, tedy $\binom{n}{k}\cdot k!$ způsoby. Jak jsme dříve nahlédli, tento počet je roven $n(n-1)\cdots(n-k+1)$. □

Základní vzahy:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

Poznámka:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

2.2 Rozdělování míčků do krabic

Máme m míčků očíslovaných od 1 do m a k krabic očíslovaných od 1 do k. Počet způsobů, jak rozdělit míčky do krabic

- libovolně: k^m (počet funkcí)
- do každé krabice nejvýše jeden: $k!/(k-m)!$ (počet prostých funkcí)
- do každé krabice alespoň jeden: příště (počet funkcí, které jsou na)

Máme m identických míčků a k krabic očíslovaných od 1 do k. Počet způsobů, jak rozdělit míčky do krabic

- libovolně: $\binom{m+k-1}{k-1}$ (na $m+k-1$ pozicích máme $k-1$ stěn krabic)
- do každé krabice nejvýše jeden: $\binom{k}{m}$ (vybereme obsazené krabice)
- do každé krabice alespoň jeden: $\binom{m-1}{k-1}$ (rozdělíme $m-k$ míčků libovolně a pak do každé krabice jeden přidáme)

Cvičení (některé podpřípady jsou těžké): co když jsou i krabice nerozlišitelné?

Binomická a multinomická věta; Princip inkluze a exkluze

Zdeněk Dvořák

15. října 2018

1 Binomická věta

Věta 1 (Binomická věta). *Pro přirozené číslo $n \geq 1$ a $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

První důkaz. Koeficient u $x^k y^{n-k}$

$$\underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdots (x+y)}_{n\text{-krát}}$$

je roven počtu možností, jak z n členů vybrat k těch, z nichž použijeme v roznásobení x. Počet těchto možností je $\binom{n}{k}$. □

Druhý důkaz. Indukcí dle n. Pro $n = 1$ tvrzení platí, nechť $n \geq 2$. Pak

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)\cdot(x+y)^{n-1} \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{0}y^n + \binom{n-1}{n-1}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right)x^k y^{n-k} \\
&= \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{n}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

Důsledky:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k},$$

a tedy

$$\sum_{k \text{ sudé}}\binom{n}{k} = \sum_{k \text{ liché}}\binom{n}{k}$$

Analogicky, když $k_1 + \ldots + k_p = n$:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_p} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_p!}$$

je

- počet rozkladů n-prvkové množiny na části velikostí k_1, …, k_p
- počet řetězců délky n, v nichž se i-té písmeno vyskytuje k_i-krát (pro $i = 1, \ldots, p$).

Věta 2 (Multinomická věta)**.** *Pro přirozené číslo $n \geq 1$ a $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ platí*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_p=n} \binom{n}{k_1, \dots, k_p} x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$$

2 Princip inkluze a exkluze

Pro dvě množiny A a B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Příklad 1. *Kolik je čísel mezi 1 a 100 dělitených 2 nebo 3?*
$A = \{n : 1 \leq n \leq 100, 2|n\}$, $B = \{n : 1 \leq n \leq 100, 3|n\}$
$A \cap B = \{n : 1 \leq n \leq 100, 6|n\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \lfloor 100/2 \rfloor + \lfloor 100/3 \rfloor - \lfloor 100/6 \rfloor = 50 + 33 - 24 = 59.$

Obecně:

Věta 3. *Nechť $A_1, \dots, A_k$ jsou konečné množiny. Pak*

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big| = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,k\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|.$$

Důkaz. Uvažme libovolný prvek $x \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Nechť J je množina indexů j tž. $x \in A_j$; máme $J \neq \emptyset$. Pak $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ právě když $I \subseteq J$. Proto x je na pravé straně započítáno

$$\begin{aligned} \sum_{I \subseteq J, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} &= \sum_{t=1}^{|J|} (-1)^{t+1} \binom{|J|}{t} \\ &= 1 - \sum_{t=0}^{|J|} (-1)^{t} \binom{|J|}{t} = 1 - (1-1)^{|J|} = 1 \end{aligned}$$

krát. $\square$

Příklad 2. <u>*Eulerova funkce*</u> *$\varphi(n)$ je počet čísel mezi 1 a n, která jsou nesoudělná s n.*

Nechť $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla, která dělí n; položme $A_i = \{t : 1 \leq t \leq n, p_i|t\}$. Pak číslo x je soudělné s n, právě když je dělitelné *alespoň jedním z* $p_1, \ldots, p_k$, *tj. pokud* $x \in \bigcup_{i=1}^k A_i$. *Dále*

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{t : 1 \le t \le n,\ t \text{ je dělitelné } p_i \text{ pro } i \in I\}$$
$$= \{t : 1 \le t \le n,\ t \text{ je dělitelné } \prod_{i\in I} p_i\}$$

A tedy

$$\left|\bigcup_{i=1}^k A_i\right| = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$
$$= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$

Dostáváme

$$\varphi(n) = n - \left|\bigcup_{i=1}^k A_i\right|$$
$$= n - \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$
$$= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} \frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}$$
$$= n \cdot \prod_{i=1}^k \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).$$

Důsledek 4. *Nechť* $A_1, \ldots, A_k$ *jsou konečné množiny. Jestliže*

$$\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = f(|I|)$$

pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, *pak*

$$\left|\bigcup_{i=1}^k A_i\right| = \bigcup_{t=1}^k (-1)^{t+1} \binom{k}{t} f(t).$$

Příklad 3. *Kolik je funkcí z m-prvkové množiny* X *do* $\{1, \ldots, k\}$*-prvkové množiny, které jsou na (neboli počet rozdělení m rozlišitelných míčků do k rozlišitelných krabic tak, aby žádná nebyla prázdná)?*

A_i *označme počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\}$ *tž. žádný prvek se nezobrazí na i. Pak* $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ *je počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\}$ *tž. žádný prvek se nezobrazí do* I, *tedy počet funkcí z* X *do* $\{1, \ldots, k\} \setminus I$, *tedy* $(k - |I|)^m$.

Počet funkcí, které nejsou na, je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t+1} \binom{k}{t} (k-t)^m.$$

Počet funkcí, které jsou na, je

$$k^m - \sum_{t=1}^{k} (-1)^{t+1} \binom{k}{t} (k-t)^m = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^m.$$

Příklad 4. *Počet permutací na k-prvkové množině X = počet funkcí z X do X, které jsou na, je*

$$\sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^k = k! \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \frac{(k-t)^k}{t!(k-t)!}.$$

Vzhledem k tomu, že tento počet je také $k!$, dostáváme

$$\sum_{t=0}^{k} (-1)^t \frac{(k-t)^k}{t!(k-t)!} = 1.$$

Příklad 5. *Šatnářka vybere klobouky od m lidí. Kolika způsoby jim je může vrátit tak, aby nikdo neměl vlastní klobouk? Ekvivalentně, kolik existuje permutací π čísel $\{1, \dots, m\}$ tž. $\pi(i) \neq i$ pro $i = 1, \dots, m$ (nemají pevný bod)?*

A_i označme množinu permutací π takových, že $\pi(i) = i$. Pak Pak $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ je počet permutací takových, že $\pi(i) = i$ pro každé $i \in I$. Ostatní pozice lze proházet libovolně, je jich tedy $(m-i)!$.

Počet permutací, které mají pevný bod, je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{t=1}^{m} (-1)^{t+1} \binom{m}{t} (m-t)!.$$

Počet permutací, které nemají pevný bod, je

$$\begin{aligned} m! - \sum_{t=1}^{m} (-1)^{t+1} \binom{m}{t} (m-t)! &= \sum_{t=0}^{m} (-1)^t \binom{m}{t} (m-t)! \\ &= \sum_{t=0}^{m} (-1)^t \frac{m!}{t!} \\ &= m! \sum_{t=0}^{m} (-1)^t \frac{1}{t!}. \end{aligned}$$

Poznámka: $\left|e^{-1} - \sum_{t=0}^{m} (-1)^t \frac{1}{t!}\right| \leq \frac{e}{(m+1)!} \leq 0.005$ *pro* $m \geq 5$*; proto skoro přesně* $100e^{-1} \approx 37\%$ *permutací nemá pevný bod.*

Grafy – definice a pojmy

Zdeněk Dvořák

15. listopadu 2018

Příklad 1.

- *Existuje v počítačové síti kabel, po jehož přerušení spolu nějaké dva počítače nebudou moct komunikovat?*
- *Potřebujeme města propojit elektrickým vedením. Natažení vedení mezi dvěma městy má nějakou cenu (obecně různou pro různé dvojice měst). Jak nejlevněji lze města propojit do souvislé elektrické sítě?*
- *Máme dáno schéma elektrického obvodu. Lze ho realizovat na čipu bez křížení spojů? Případně, jaké je minimální množství křížení?*
- *Máme skupinu lidí a pro každé dva víme, zda se snáší nebo ne. Do kolika nejméně týmů je můžeme rozdělit tak, aby se v rámci jednoho týmu všichni snášeli? Jak velký může být největší takový tým?*
- *Jak najít nejrychlejší cestu z Aše do Mikulova?*
- *Jak má čisticí stroj projet všechny ulice ve městě, aby celková vzdálenost byla co nejmenší?*

Definice 1. *Graf je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Pro graf G píšeme tyto množiny jako $E(G)$ a $V(G)$. Hranu $\{v_1, v_2\}$ typicky zapisujeme v_1v_2.*

Příklad 2.

Úplný graf K_n je graf s $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(K_n) = \{v_iv_j : 1 \leq i < j \leq n\}$.

Cesta P_n je graf s $V(P_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(P_n) = \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$.

Kružnice (cyklus) C_n je graf s $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $E(C_n) = \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1v_n\}$.

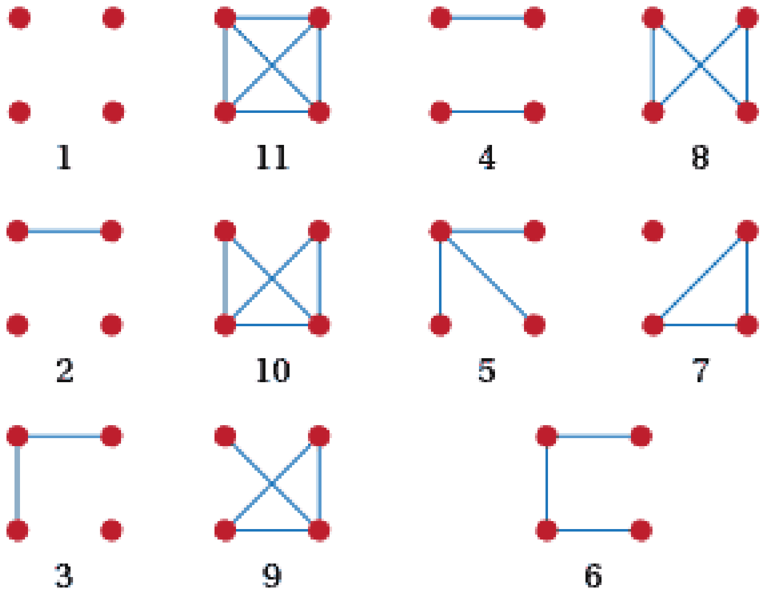
Varianty: Smyčky, násobné hrany, orientované grafy, váhy vrcholů, délky hran, ...

1 Izomorfismus a podgrafy

Dva grafy G_1 a G_2 jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tž. $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2)$; taková bijekce se nazývá izomorfismus. Tj. G_1 a G_2 se liší pouze přejmenováním vrcholů. Píšeme $G_1 \simeq G_2$.

Pozorování 1. *Relace izomorfismu je ekvivalence.*

Příklad 3. *Existuje právě 11 (tříd) navzájem neizomorfních grafů na* 4 *vrcholech.*



Lemma 2. *Počet různých grafů s vrcholy* $\{1, \dots, n\}$ *je*

$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n}.$$

Počet navzájem neizomorfních grafů s vrcholy $\{1, \dots, n\}$ *je alespoň*

$$2^{\binom{n}{2}}/n! \geq 2^{\binom{n}{2}}/n^n = 2^{\frac{1}{2}n^2 - n\log_2 n - \frac{1}{2}n}.$$

Důkaz. Pro každou dvojici se můžeme nezávisle rozhodnout, zda bude hrana nebo ne, graf s vrcholy $\{1, \dots, n\}$ lze tedy zvolit $2^{\binom{n}{2}}$ způsoby. Existuje pouze $n!$ bijekcí množiny $\{1, \dots, n\}$, každý graf je tedy izomorfní nejvýše $n!$ z těchto grafů, a počet navzájem neizomorfních grafů je alespoň $2^{\binom{n}{2}}/n!$. $\square$

Graf H je podgraf grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Graf H je indukovaný podgraf grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Doplněk $\overline{G}$ grafu G je graf s $V(\overline{G}) = V(G)$ a $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$.

Příklad 4. *Kružnice* C_n *obsahuje podgraf (ale ne indukovaný podgraf) izomorfní cestě* P_n. *Kružnice* C_n *obsahuje* n *podgrafů izomorfních cestě* P_{n-1}. *Úplný graf* K_n *obsahuje* $3\binom{n}{4}$ *podgrafů izomorfních* 4*-cyklu* C_4. *Doplněk* C_5 *je izomorfní* C_5.

Sledy, tahy, cesty. Stupně a skóre

Zdeněk Dvořák

28. listopadu 2018

Vrcholy v_1 a v_2 sousedí, jestliže v_1v_2 je hrana. Vrchol v a hrana e jsou incidentní, jestliže $v \in e$.

Posloupnost v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_n, v_n je sled (z v_0 do v_1, délky n) jestliže $v_0, \ldots, v_n$ jsou vrcholy, $e_1, \ldots, e_n$ jsou hrany, a e_i je incidentní s v_{i-1} a v_i pro $i = 1, \ldots, n$. Sled je uzavřený, jestliže $v_0 = v_n$. Sled je

- tah, jestliže hrany e_1, …, e_n jsou navzájem různé,
- cesta, jestliže vrcholy v_0, …, v_n (a tedy i hrany e_1, …, e_n) jsou navzájem různé,
- kružnice, jestliže vrcholy v_1, …, v_n jsou navzájem různé a $v_0 = v_n$.

Pozorování 1. *Vede-li mezi dvěma vrcholy sled délky n, vede mezi nimi i cesta délky nejvýše n; nejkratší sled mezi dvěma vrcholy je cesta.*

Vzdálenost $d(u, v)$ dvou vrcholů u a v je délka nejkratší cesty mezi nimi (∞ nebo nedefinováno pokud žádná taková cesta neexistuje).

Pozorování 2. *Vzdálenost v grafu je metrika, tj. $d(u, v) = 0$ právě když $u = v$, $d(u, v) = d(v, u)$, a $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ pro všechny vrcholy u, v, w.*

Relace $\sim$ tž. $u \sim v$ právě když v G existuje sled (či cesta) mezi u a v je ekvivalence. Její třídy jsou komponenty souvislosti. Má-li graf jen jednu komponentu, je souvislý.

1 Stupně

Stupeň $\deg(v)$ vrcholu v je počet s ním incidentních hran. Graf je d-regulární, jestliže všechny vrcholy mají stupeň právě d. Izolovaný vrchol je vrchol stupně 0. Minimální stupeň vrcholu v grafu G se značí $\delta(G)$, maximální stupeň $\Delta(G)$.

Příklad 1. *Úplný graf K_n je $(n-1)$-regulární, libovolná kružnice je 2-regulární. Cesta P_n pro $n \geq 2$ má dva vrcholy stupně 1 a $n-2$ vrcholů stupně 2.*

Lemma 3. *Pro každý (konečný) graf G platí*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|.$$

Tedy

- *součet stupňů vrcholů je vždy sudý,*
- *každý graf má sudý počet vrcholů lichého stupně,*
- *průměrný stupeň G je roven $2|E(G)|/|V(G)|$.*

Důkaz. Sečteme-li stupně, každou hranu započítáme dvakrát (jednou za každý její konec). □

Příklad 2. *Je-li graf G d-regulární pro liché d, pak G má sudý počet vrcholů.*

Libovolný d-regulární graf s n vrcholy má právě $dn/2$ hran.

Je-li G souvislý a všechny jeho stupně jsou sudé, pak pro každou hranu e je graf $G-e$ souvislý (jinak by měl komponentu obsahující právě jeden vrchol lichého stupně).

Skóre grafu je posloupnost stupňů jeho vrcholů uspořádaná dle velikosti.

Příklad 3. *Skóre P_n (pro $n \geq 2$) je*

$$1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{(n-2)\text{-krát}}.$$

Pozorování 4. *Izomorfní grafy mají stejné skóre, opačné tvrzení neplatí.*

Eulerovské grafy. Stromy a kostry.

Zdeněk Dvořák

28. listopadu 2018

1 Eulerovské tahy

Tah v grafu G je eulerovský, jestliže obsahuje všechny hrany G. Graf je eulerovský, jestliže je souvislý a všechny jeho stupně jsou sudé. *Poznámka:* v definici eulerovského grafu se občas vynechává podmínka na souvislost.

Věta 1. *Graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když je eulerovský.*

Důkaz. Nechť G je graf bez izolovaných vrcholů.

Nejprve předpokládejme, že G má uzavřený eulerovský tah T. Jelikož G nemá izolované vrcholy, T navštíví každý vrchol alespoň jednou. Každé dva vrcholy jsou tedy spojené podtahem T, a proto je G souvislý. Navštíví-li T vrchol v k-krát, pak stupeň v je roven $2k$, všechny vrcholy G tedy mají sudý stupeň. Graf G je tedy eulerovský.

Že platí opačné tvrzení dokážeme indukcí dle počtu hran. Předpokládejme tedy, že G je eulerovský, a že každý eulerovský graf s méně než $|E(G)|$ hranami obsahuje uzavřený eulerovský tah. Jak jsme nahlédli v minulé lekci, zvolíme-li si libovolnou hranu $uv \in E(G)$, pak $G - uv$ je souvislý a existuje v něm tedy cesta P z u do v. Spojení P s hranou uv je kružnice T_0. Nechť G_1, G_2, ..., G_m jsou komponenty $G - E(T_0)$ s alespoň dvěma vrcholy. Odebráním T_0 jsme snížili stupeň každého vrcholu v T_0 o dva, všechny vrcholy tedy stále mají sudý stupeň a G_1, ..., G_m jsou eulerovské grafy. Z indukčního předpokladu obsahují uzavřené eulerovské tahy T_1, ..., T_m. Jelikož G je souvislý, pro $i = 1, \ldots, m$ existuje vrchol $v_i \in V(G_i) \cap V(T_0)$. Připojením tahu T_i k T_0 ve vrcholu v_i pro $i = 1, \ldots, m$ dostáváme uzavřený eulerovský tah v G. $\square$

2 Orientované grafy

Orientovaný graf je dvojice (V, E), kde E je množina uspořádaných dvojic vrcholů z V. Jeho podkladový neorientovaný graf je graf vzniklý nahrazením uspořádaných dvojic v E neuspořádanými. (Orientovaný) sled v orientovaném grafu musí respektovat orientaci hran; je to tedy posloupnost v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, $\ldots$, e_n, v_n tž. $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$. (Orientovaný) tah, cesta, …se odvozuje od orientovaného sledu stejně jako v neorientovaném případě. Vstupní stupeň $\deg^-(v)$ vrcholu v je počet incidentních hran orientovaných do v, výstupní stupeň $\deg^+(v)$ je počet incidentních hran orientovaných ven z v.

Orientovaný graf je slabě souvislý, pokud je souvislý jeho podkladový neorientovaný graf. Je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy vede orientovaná cesta. Orientovaný graf je eulerovský, je-li slabě souvislý a každý vrchol má vstupní stupeň rovný výstupnímu.

Věta 2. *Orientovaný graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, je-li eulerovský.*

Důkaz. Analogicky k neorientovanému případu. Existenci orientované kružnice lze dokázat přímo (jdeme po hranách, dokud nenarazíme na vrchol, kterým jsme již prošli; nemůžeme se zaseknout jinde, jelikož žádný vrchol nemá výstupní stupeň 0). □

Důsledek 3. *Nechť G je orientovaný graf, v němž každý vrchol má vstupní stupeň rovný výstupnímu. Pak G je silně souvislý, právě když G je slabě souvislý.*

Důkaz. Je-li G slabě souvislý, má dle Věty 2 uzavřený eulerovský tah, a tedy mezi každými dvěma vrcholy vede orientovaný tah a G je silně souvislý. Opačná implikace je triviální. □

Příklad 1. *Dálkové ovládání ke dveřím na garáži má 16-místný kód ve dvojkové soustavě; ve chvíli, kdy přijme posloupnost rádiových signálů kódujících odpovídající bity (bez ohledu na to co přijalo předtím), otevře dveře. Signál odpovídající každému bitu musí být vysílán 0,1 s. Za jak dlouho jde vyzkoušet všechny kódy?*

Kdybychom postupně vysílali $2^{16} \times 16$ bitů, zabralo by to přes 29 hodin. Nicméně stačí vyslat posloupnost bitů, v níž se každá 16-bitová vyskytuje jako souvislá podposloupnost.

Uvažme graf, jehož vrcholy jsou 15-bitová čísla, z vrcholu $b_1 \ldots b_{15}$ vede hrana označená 1 do vrcholu $b_2 \ldots b_{15}1$ a hrana označená 0 do vrcholu $b_2 \ldots b_{15}0$; vstupují tedy do něj hrany (označené b_{15}) právě z vrcholů $0b_1 \ldots b_{14}$ a $1b_1 \ldots b_{14}$.

Vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu je tedy 2*. Navíc graf je silně (a tedy i slabě) souvislý (přidáváním bitů na konec se dokážeme dostat z libovolné posloupnosti na libovolnou jinou). Existuje v něm tedy uzavřený eulerovský tah* T*. Vypíšeme-li kód libovolného vrcholu* v *a poté postupně kódy na hranách podél průchodu tahem* T *z* v*, každý* 16*-bitový kód bude vypsán právě jednou (když z vrcholu označeného jeho prvními* 15 *bity přejdeme přes hranu označenou jeho posledním bitem).*

Výsledná posloupnost má délku $15 + 2^{16}$*, její vyslání nám zabere necelé 2 hodiny.*

3 Stromy

Strom je minimálně souvislý graf, tj. souvislý graf, který se po odebrání libovolné hrany rozpadne na komponenty. Graf G je tedy souvislý, právě když obsahuje jako podgraf strom s množinou vrcholu $V(G)$; takovému stromu se říká kostra.

Pozorování 4. *Graf* T *je strom, právě když je souvislý a neobsahuje kružnici.*

Důkaz. Pokud souvislý graf T obsahuje kružnici K, pak odebrání libovolné hrany K zachovává souvislost. Jestliže T je strom, pak tedy K neobsahuje kružnici.

Naopak, předpokládejme, že T je souvislý a bez kružnic. Pak pro každou hranu e je $T - e$ nesouvislý, jinak by obsahoval cestu mezi konci e a tedy T by obsahoval kružnici. Proto T je strom. □

Graf bez kružnic je les. Každá jeho komponenta je tedy strom.

Pozorování 5. *Souvislý graf s* n *vrcholy má alespoň* $n - 1$ *hran. Graf bez kružnic s* n *vrcholy má nejvýše* $n - 1$ *hran.*

Důkaz. Graf na n vrcholech bez hran má n komponent a přidání hrany zmenší počet komponent nejvýše o 1, souvislý graf tedy musí mít alespoň $n-1$ hran.

Je-li G graf bez kružnic s n vrcholy, obdobně si představme, jak postupně přidáváme hrany $E(G)$. Přidávaná hrana vždy musí být mezi různými komponentami, jinak by vytvořila kružnici (tvořenou přidávanou hranou a cestou mezi jejími konci), přidání každé hrany tedy sníží počet komponent o jedna; výsledný graf má alespoň jednu komponentu, tedy počet přidaných hran je nejvýše $n - 1$. □

Důsledek 6. *Strom* T *má* $|V(T)| - 1$ *hran, jeho průměrný stupeň tedy je* $2 - 2/|V(T)| < 2$.

List je vrchol stupně jedna.

Důsledek 7. *Každý strom T s alespoň dvěma vrcholy má list.*

Lemma 8. *Nechť G je graf a v je list v G. Pak G je strom právě když $G - v$ je strom.*

Důkaz. Využijeme ekvivalentní charaktrerizaci z Pozorování 4. Odebrání vrcholu stupně 1 nenaruší souvislost (a nevytvoří kružnici). Přidání vrcholu stupně 1 zachovává souvislost a nevytváří kružnice. □

Věta 9. *Nechť T je graf. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) T je strom.

(b) Mezi každými dvěma vrcholy T vede právě jedna cesta.

(c) T je maximální graf bez kružnic (tj. neobsahuje kružnici, ale pro každou dvojici nesousedních vrcholů u a v graf $G + uv$ obsahuje kružnici).

(d) T neobsahuje kružnici a má $|V(T)| - 1$ hran.

(e) T je souvislý a má $|V(T)| - 1$ hran.

Důkaz. **(a)⇒(b):** Jelikož T je souvislý, mezi každými dvěma vrcholy u a v vede alespoň jedna cesta. Kdyby mezi nimi vedly dvě různé cesty P_1 a P_2, pak existuje hrana xy ležící v právě jedné z nich, třeba v P_1. Pak $(P_1 - xy) \cup P_2$ obsahuje sled v $T - xy$ z x do y, vrcholy x a y tedy leží ve stejné komponentě $T - xy$. Pak ale $T - xy$ je souvislý, ve sporu s předpokladem, že T je minimálně souvislý.

(b)⇒(c): Jelikož mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta, graf nemůže obsahovat kružnici. Přidáním každé hrany vznikne kružnice (tvořená touto hranou a cestou mezi jejími konci).

(c)⇒(d): Jelikož přidání libovolné hrany vytvoří kružnici, T je souvislý. Dle Pozorování 5 má tedy $|V(T)| - 1$ hran.

(d)⇒(e): Kdyby T nebyl souvislý, pak by byl disjunktním sjednocením dvou grafů T_1 a T_2. Jelikož ani jeden z nich neobsahuje kružnici, dle Pozorování 5 máme $|E(T_1)| \le |V(T_1)| - 1$ a $|E(T_2)| \le |V(T_2)| - 1$, a proto $|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| \le |V(T_1)| + |V(T_2)| - 2 \le |V(T)| - 2$, což je spor.

(e)⇒(a): Kdyby $T - e$ byl souvislý pro nějakou hranu e, pak dle Pozorování 5 by $T - e$ měl alespoň $|V(T)| - 1$ hran, a T by měl alespoň $|V(T)|$ hran, což je spor. □

Rovinné grafy

Zdeněk Dvořák

5. prosince 2018

Bude se nám hodit pracovat s multigrafy, tj. grafy, kde mezi dvěma vrcholy může vést i více hran. Povolujeme také smyčky, hrany spojující vrchol sám se sebou. Formálně multigraf je trojice (V, E, k), kde V a E jsou konečné disjunktní množiny a $r : E \to 2^V$ přiřazuje každé hraně množinu jejích konců velikosti 1 nebo 2.

Rovinné nakreslení multigrafu (neformálně): vrcholy $\mapsto$ navzájem různé body v rovině, hrany $\mapsto$ spojité křivky, které je propojují bez křížení.

Nechť $\theta : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$ je prostá spojitá funkce. Pak $\theta(\langle 0, 1\rangle)$ je jednoduchá křivka (v rovině) a $\theta(0)$ a $\theta(1)$ jsou její konce. Obdobně, je-li θ spojitá, prostá na intervalu $\langle 0, 1)$ a $\theta(0) = \theta(1)$, pak $\theta(\langle 0, 1\rangle)$ je jednoduchá uzavřená křivka.

Nechť S je podmnožina roviny. Pro body $x, y \in S$ nadefinujme $x \sim y$, jestliže $x = y$ nebo existuje jednoduchá křivka s konci x a y obsažená v S. Pak $\sim$ je ekvivalence, a její bloky jsou komponenty obloukové souvislosti.

Věta 1 (Jordan)**.** *Je-li c jednoduchá uzavřená křivka v rovině, pak $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě dvě komponenty obloukové souvislosti, omezenou a neomezenou, a c tvoří jejich (společnou) hranici.*

Věta 2. *Nechť Z je konečné sjednocení jednoduchých křivek protínajících se jen v koncových bodech a K je komponenta obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus Z$. Je-li K omezená, pak Z obsahuje jednoduchou uzavřenou křivku c tž. K je podmnožinou omezené komponenty obloukové souvislosti $\mathbb{R}^2 \setminus c$.*

Definice 1. *Rovinné nakreslení multigrafu $G = (V, E, k)$ je prosté zobrazení $\nu : V \to \mathbb{R}^2$ a systém $\{c_e : e \in E\}$ tž.*

- *pro hranu $e \in E$ s $k(e) = \{u, v\}$ je c_e jednoduchá křivka s konci $\nu(u)$ a $\nu(v)$,*
- *pro smyčku $e \in E$ s $k(e) = \{v\}$ je c_e jednoduchá uzavřená křivka obsahující $\nu(v)$,*

- *$\nu(V(G)) \cap c_e = \nu(k(e))$ pro každou hranu $e \in E$ a*
- *pro různé hrany $e, e' \in E$ platí $c_e \cap c_{e'} = \nu(k(e) \cap k(e'))$.*

Stěny nakreslení jsou komponenty obloukové souvislosti

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Big(\nu(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} c_e\Big).$$

Právě jedna ze stěn je neomezená, říkáme jí vnější stěna.

Multigraf je rovinný, jestliže má rovinné nakreslení. Pozor: rovinný multigraf může mít více různých nakreslení (i když považujeme za stejná nakreslení, která se liší pouze "deformací"). Stěny jsou vlastností nakreslení, ne multigrafu!

Příklad 1. *Kružnice a stromy jsou rovinné.*

Lemma 3. *Nechť G je souvislý multigraf nakreslený do roviny a nechť c je jednoduchá křivka reprezentující hranu $e \in E(G)$. Jestliže $G - e$ je souvislý, pak c leží v hranicích dvou různých stěn. Odpovídající nakreslení $G - e$ má tedy právě o jednu stěnu méně, než nakreslení G.*

Důkaz. Jelikož $G - e$ je souvislý, e leží na kružnici $K \subseteq G$. Nakreslení K v G odpovídá jednoduché uzavřené křivce c_K, dle Jordanovy věty má $\mathbb{R}^2 \setminus c_K$ dvě komponenty obloukové souvislosti a c_K tvoří jejich společnou hranici. Křivka $c \subset c_K$ je tedy obsažena v hranicích obou komponent. Jelikož stěny nakreslení G jsou podmnožiny těchto komponent, dostáváme, že c je obsažena v hranicích dvou různých stěn. Sjednocení těchto stěn a vnitřku c tvoří stěnu multigrafu $G - e$, ostatní stěny G odpovídají právě ostatním stěnám G. □

Lemma 4. *Nechť G je multigraf nakreslený do roviny a f je jeho stěna. Jestliže G má více než jednu stěnu, pak hranice f obsahuje nakreslení kružnice z G.*

Důkaz. Nechť W je podgraf G nakreslený v hranici f. Pak f je i stěnou W, a jelikož G má více než jednu stěnu, i W má nějakou jinou stěnu f'. Alespoň jedna ze stěn f a f' je omezená, dle Věty 2 tedy nakreslení W obsahuje jednoduchou uzavřenou křivku, a W tedy obsahuje kružnici. □

Důsledek 5. *Libovolné rovinné nakreslení stromu má právě jednu stěnu.*

Důsledek 6 (Eulerova formule)**.** *Každé rovinné nakreslení souvislého multigrafu G má právě*

$$|E(G)| - |V(G)| + 2$$

stěn.

Důkaz. Indukcí dle počtu hran G. Uvažme libovolné nakreslení G. Je-li G minimálně souvislý (strom), pak má $|V(G)|-1$ hran a 1 stěnu, tedy tvrzení platí. Jinak existuje hrana $e \in E(G)$ tž. $G-e$ je souvislý. Z indukčního předpokladu má odpovídající nakreslení $G-e$ právě $|E(G-e)|-|V(G-e)|+2 = |E(G)|-|V(G)|+1$ stěn, a dle Lemma 3 má G o jednu stěnu víc. □

Obecněji, má-li multigraf G c komponent, pak jeho nakreslení má $|E(G)|-|V(G)|+c+1$ stěn.

Hranice každé stěny nakreslení multigrafu G odpovídá sjednocení uzavřených tahů v G (právě jednoho tahu, je-li G souvislý). Občas se takovému tahu ohraničujícímu stěnu také říká stěna. Součet délek těchto tahů je délka stěny.

Multigrafy také můžeme kreslit na sféru (povrch koule). To je ekvivalentní: položme si kouli na rovinu a na severní pól (který BÚNO neleží v nakreslení) dejme žárovku. "Stín" multigrafu nakresleného na sféře dává rovinné nakreslení, a naopak.

Důsledek 7. *Nechť f je stěna nakreslení multigrafu G ohraničená tahem W. Pak existuje nakreslení G' multigrafu G ve kterém jsou stěny ohraničené stejnými tahy jako v nakreslení G a vnější stěna nakreslení G' je ohraničená tahem W.*

Důkaz. Promítneme nakreslení G na sféru, tu pootočíme tak, aby severní pól ležel uvnitř stěny odpovídající f, a promítneme zpět do roviny. □

Příklad 2 (Platónská tělesa)**.** *Platónské těleso je pravidelný konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$, tj. takový, že každá jeho stěna, hrana či vrchol se dají převést na libovolnou jinou nějakou symetrií tělesa. Uvažujme libovolné platónské těleso P, opišme si kolem něj sféru, a promítněme jeho síť (sjednocení úseček tvořících jeho hrany) na tuto sféru. Tím dostáváme nakreslení souvislého rovinného grafu G_P na sféru, kde každý vrchol má stejný stupeň $d \geq 3$ a každá stěna má stejnou délku $\ell \geq 3$. Nechť n, m, a s je počet vrcholů, hran a stěn G_P. Víme, že součet stupňů vrcholů je dvojnásobek počtu hran, tj. $dn = 2m$. Stejný argument provedený pro stěny dává $\ell s = 2m$. Z Eulerovy formule máme $m+2 = n+s$. Dosazením $n = 2m/d$ a $s = 2m/\ell$ dostáváme*

$$\frac{2m}{d} + \frac{2m}{\ell} = m+2$$
$$\frac{2}{d} + \frac{2}{\ell} = 1 + \frac{2}{m} > 1$$

To je možné pouze když $d = 3$ a $\ell \leq 5$, nebo $d \in \{4,5\}$ a $\ell = 3$. Máme tedy následující možnosti (m, n a s je dopočítáno dle výše uvedených vzorců):

d	ℓ	s	n	m	těleso
3	*3*	*4*	*4*	*4*	*čtyřstěn*
3	*4*	*6*	*8*	*12*	*krychle*
3	*5*	*12*	*20*	*30*	*dvanáctistěn*
4	*3*	*8*	*6*	*12*	*osmistěn*
5	*3*	*20*	*12*	*30*	*dvacetistěn*

Žádná jiná platónská tělesa neexistují.

Uvažme nakreslení multigrafu G do roviny. Nakresleme do každé stěny vrchol a pro každou hranu $e \in E(G)$ spojme vrcholy v incidentních stěnách hranou protínající e. Tím dostáváme duální nakreslení multigrafu $G^\star$. Poznámka: I když je G jednoduchý graf, $G^\star$ může mít smyčky či násobné hrany (např. duál ke stromu T je multigraf s $|E(T)|$ smyčkami).

Pozorování 8. *Nechť nakreslení G má s stěn. Pak nakreslení $G^\star$ má s vrcholů a $|E(G)|$ hran, a jestliže G je souvislý, pak $G^\star$ má $|V(G)|$ stěn. Multigraf $G^\star$ je vždy souvislý. Jestliže G je souvislý, pak $(G^\star)^\star = G$.*

Příklad 3. *Osmistěn je duál krychle. Dvacetistěn je duál dvanáctistěnu. Čtyřstěn je svůj vlastní duál.*

Lemma 9. *Nechť G je jednoduchý souvislý graf a G není strom. Je-li G rovinný, pak*

$$|E(G)| \le 3|V(G)| - 6.$$

Jestliže G navíc neobsahuje trojúhelník (cyklus délky 3), pak

$$|E(G)| \le 2|V(G)| - 4.$$

Důkaz. Nechť s je počet stěn libovolného nakreslení G a nechť ℓ je délka nejkratší stěny v tomto nakreslení; součet délek stěn je $2|E(G)|$, a proto $\ell s \le 2|E(G)|$. Z Eulerovy formule

$$|E(G)| + 2 = |V(G)| + s \le |V(G)| + \frac{2|E(G)|}{\ell},$$

a tedy

$$|E(G)| \le \frac{|V(G)| - 2}{1 - 2/\ell}.$$

Jelikož G není strom, dle Lemma 3 má alespoň dvě stěny, a dle Lemma 4 hranice každé z jeho stěn obsahuje kružnici. Proto $\ell \ge 3$, a když G neobsahuje trojúhelník, tak $\ell \ge 4$; to nám dává požadované nerovnosti. □

Důsledek 10. *Jednoduchý rovinný graf má průměrný stupeň menší než* 6. *Jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků má průměrný stupeň menší než* 4.

Příklad 4. *Grafy* K_5 *a* $K_{3,3}$ *nejsou rovinné.*

Podrozdělení grafu vznikne nahrazením některých jeho hran cestami se stejnými konci. Zjevně graf je rovinný, právě když libovolné jeho podrozdělení je rovinné. Říkáme, že G obsahuje podrozdělení H, jestliže nějaký podgraf G je roven podrozdělení H.

Pozorování 11. *Jestliže G obsahuje podrozdělení nerovinného grafu, pak G není rovinný.*

Věta 12 (Kuratovský)**.** *Graf G je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Barevnost grafů

Zdeněk Dvořák

12. prosince 2018

Definice 1. *Funkce $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ je dobré k-obarvení, jestliže $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ pro každou hranu $uv \in E(G)$. Barevnost $\chi(G)$ grafu G je minimální k tž. G má dobré k-obarvení.*

Příklad 1. *Pokud dva blízké vysílače vysílají na stejné frekvenci, docházi k interferenci. Kolik nejméně potřebujeme různých frekvencí, aby se žádné dva blízké vysílače nerušily?*

Nechť G je graf, jehož vrcholy jsou vysílače a každé dva blízké jsou spojené hranou. Pak potřebujeme alespoň $\chi(G)$ frekvencí.

Pozorování 1. *Jestlíže $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$. Barevnost K_n je n, barevnost C_n je 2 je-li n sudé a 3 je-li n liché. Graf má barevnost 1 právě když nemá žádné hrany.*

Klikovost $\omega(G)$ je rovná velikosti největší kliky (úplného podgrafu) v G.

Pozorování 2. *$\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Poznámka: Ale barevnost může být i větší (existují grafy bez trojúhelníků s libovolně velkou barevností).

Graf G je d-degenerovaný, jestliže každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně nejvýše d.

Příklad 2. *Stromy jsou 1-degenerované, rovinné grafy jsou 5-degenerované.*

Lemma 3. *Je-li graf G d-degenerovaný, pak má barevnost nejvýše $d + 1$.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů, pro grafy s nejvýše $d+1$ vrcholy je tvrzení triviální. Jestliže $|V(G)| > d + 1$, nechť v je vrchol G stupně nejvýše d. Z indukčního předpokladu lze $G-v$ obarvit $d+1$ barvami. Na okolí v je použito nejvýše $\deg(v) \leq d$ barev, alespoň jedna z $d+1$ je tedy nepoužitá a můžeme jí obarvit v, čímž dostáváme dobré obarvení G pomocí $d + 1$ barev. $\square$

Důsledek 4. *Stromy mají barevnost nejvýše* 2*, rovinné grafy nejvýše* 6*. Graf maximálního stupně* Δ *má barevnost nejvýše* $\Delta + 1$*.*

Věta 5. *Graf* G *má barevnost nejvýše* 2 *právě když* G *neobsahuje lichý cyklus.*

Důkaz. Ukážeme obměnu: G má barevnost alespoň 3 právě když G obsahuje lichý cyklus.

BÚNO G je souvislý. Nechť T je kostra G a φ je dobré 2-obarvení T. Jestliže φ není dobré 2-obarvení G, pak $E(G) \setminus E(T)$ obsahuje hranu $e = uv$, kde $\varphi(u) = \varphi(v)$. Na cestě P v T mezi u a v se střídají barvy 1 a 2, tato cesta má tedy sudou délku. Pak $P + e$ je lichý cyklus v G.

Naopak, je-li C lichý cyklus v G, pak $\chi(G) \geq \chi(C) = 3$. □

Grafům barevnosti 2 se říká bipartitní – jejich vrcholy jdou rozdělit na dvě části tak, že hrany vedou pouze mezi částmi.

Jednoduchá charakterizace grafů barevnosti k pro $k \geq 3$ neexistuje, rozhodnout, zda je graf 3-obarvitelný je těžké; dokonce i pro rovinné grafy. Ale platí:

Věta 6 (Věta o čtyřech barvách)**.** *Každý rovinný graf je* 4*-obarvitelný.*

Obtížný důkaz s použitím výpočetní techniky, dlouho otevřený problém (barvení mapy čtyřmi barvami tak, aby žádné dva státy se společnou hranicí neměly stejnou barvu). Dokážeme si snažší tvrzení o 5-barevnosti rovinných grafů.

Kontrakce hrany $e = uv$ v grafu znamená smazání hrany e a nahrazení u a v novým vrholem a přesměrování všech hran incidentních s u nebo v do tohoto nového vrcholu. Graf vzniklý kontrakcí hrany e v G značíme G/e.

Pozorování 7. *Je-li* G *rovinný, pak* G/e *je také rovinný.*

Věta 8. *Každý rovinný graf* G *lze obarvit* 5 *barvami.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů, pro grafy s nejvýše 5 vrcholy tvrzení platí. Rovinné grafy mají průměrný stupeň menší než 6, v G tedy existuje vrchol v stupně nejvýše 5. Jestliže $\deg(v) \leq 4$, obarvíme $G - v$ z indukčního předpokladu a v dobarvíme barvou, která není použita na jeho sousedech. Můžeme tedy předpokládat $\deg(v) = 5$. Pak v má dva sousedy x a y, kteří nejsou spojeni hranou (jinak by G obsahoval K_6 jako podgraf a tedy by nebyl rovinný). Nechť G' vznikne z G kontrakcí gran vx a vy a zahozením vzniklých násobných hran (smyčky nevzniknou, jelikož $xy \notin E(G)$). Pak G' je rovinný a z indukčního předpokadu je tedy 5-obarvitelný. Proto $G - v$ má 5-obarvení takové, že x a y mají stejnou barvu. Na okolí v jsou pak použity nejvýše 4 barvy, vrchol v tedy lze dobarvit nepoužitou barvou. □

Řetězce a antiřetězce v uspořádáních

Zdeněk Dvořák

19. prosince 2018

Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Řetězec je podmnožina $R \subseteq X$ navzájem porovnatelných prvků (zúžení $\prec$ na R je tedy lineární uspořádání), antiřetězec je podmnožina $A \subseteq X$ navzájem neporovnatelných prvků. Velikost největšího řetězce v $(X, \prec)$ značíme $\omega(X, \prec)$, velikost největšího antiřetězce $\alpha(X, \prec)$. Řetězec či antiřetězec je maximální, jestliže žádná jeho vlastní nadmnožina není řetězec/antiřetězec.

Věta 1. *Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Pak X lze pokrýt $\omega(X, \prec)$ antiřetězci.*

Důkaz. Pro každý prvek $x \in X$ označme jako $\ell(x)$ velikost největšího řetězce v $(X, \prec)$, jehož je x maximální prvek. Povšimněme si, že je-li $x \prec y$, pak $\ell(x) < \ell(y)$ (jelikož y můžeme připojit za nejdelší řetězec končící v x); množina $X_n = \{x \in X : \ell(x) = n\}$ je tedy antiřetězec pro každé přirozené číslo n. Také zjevně $1 \leq \ell(x) \leq \omega(X, \prec)$, a proto $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{\omega(X,\prec)}$. □

Poznámka: méně než $\omega(X, \prec)$ antiřetězců použít nelze, jelikož každý antiřetězec obsahuje nejvýše jeden vrchol nejdelšího řetězce.

Důsledek 2 (Věta o dlouhém a širokém)**.** *Pro každé ostré částečné uspořádání $(X, \prec)$ konečné množiny X platí*

$$\alpha(X, \prec) \cdot \omega(X, \prec) \geq |X|.$$

Speciálně, $\max(\alpha(X, \prec), \omega(X, \prec)) \geq \sqrt{|X|}$.

Důkaz. Jelikož X je sjednocení $\omega(X, \prec)$ antiřetězců, alespoň jeden z těchto antiřetězců musí mít velikost alespoň $\frac{|X|}{\omega(X,\prec)}$. □

Důsledek 3 (Erdős-Szekeres)**.** *Každá posloupnost n navzájem různých čísel obsahuje rostoucí nebo klesající vybranou podposloupnost délky alespoň $\sqrt{n}$.*

Důkaz. Uvažme takovou posloupnost $a_1, \ldots, a_n$. Nechť $X = \{1, \ldots, n\}$ a $i \prec j$ pro $i, j \in X$ jestliže $i < j$ a $a_i < a_j$. Pak vybraná podposloupnost je rostoucí právě když její indexy tvoří řetězec v $(X, \prec)$ a klesající právě když její indexy tvoří antiřetězec v $(X, \prec)$. □

Tvrzení pro pokrytí řetězci analogické k větě 1 platí, je ale o něco náročnější na důkaz.

Věta 4 (Dilworthova věta)**.** *Nechť $(X, \prec)$ je ostré částečné uspořádání konečné množiny X. Pak X lze pokrýt $\alpha(X, \prec)$ řetězci.*

Důkaz. Indukcí dle $|X|$. Nechť $\alpha = \alpha(X, \prec)$. Jestliže X obsahuje řetězec R takový, že $\alpha(X \setminus R, \prec) < \alpha$, pak $X \setminus R$ lze z indukčního předpokladu pokrýt $\alpha - 1$ řetězci, a spolu s řetězcem R dostáváme pokrytí $(X, \prec)$ pomocí α řetězců. Stačí tedy ukázat, že $(X, \prec)$ takový řetězec obsahuje.

Nechť m je libovolný maximální prvek $(X, \prec)$. Jelikož $\{m\}$ je řetězec, stačí uvažovat případ, že $\alpha(X \setminus \{m\}, \prec) = \alpha$. Z indukčního předpokladu lze $X \setminus \{m\}$ pokrýt řetězci $R_1, \ldots, R_\alpha$. Jelikož $X \setminus \{m\}$ obsahuje antiřetězec velikosti α a každý řetězec protíná antiřetězec v nejvýše jednom prvku, každý z řetězců $R_1, \ldots, R_\alpha$ musí takový antiřetězec protínat v právě jednom prvku. Pro $i = 1, \ldots, \alpha$ jakožto a_i označme největší prvek v R_i, který je obsažený v antiřetězci velikosti α, a položme $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$.

Tvrdíme, že A je antiřetězec: Kdyby $a_i \prec a_j$, uvažme antiřetězec A_j velikosti α obsahující a_j. Tento antiřetězec protíná řetězec R_i v právě jednom prvku r_i (kde $r_i \neq a_i$, jelikož a_i a a_j jsou porovnatelné). Jelikož a_i je největší prvek v R_i obsažený v antiřetězci velikosti α, máme $r_i \prec a_i$. Pak z tranzitivity $r_i \prec a_j$, což je spor, jelikož A_j je antiřetězec.

Jelikož $(X, \prec)$ neobsahuje řetězec větší než α, prvek m je porovnatelný s nějakým prvkem antiřetězce A, BÚNO s a_1. Jelikož m je maximální prvek, máme $a_1 \prec m$. Uvažme řetězec R tvořený m, a_1 a všemi prvky řetězce R_1 menšími než a_1. Množina $X \setminus R$ je pokryta řetězci $R_1 \setminus R, R_2, \ldots, R_\alpha$, kdyby platilo $\alpha(X \setminus R, \prec) = \alpha$, pak by tedy nějaký prvek $R_1 \setminus R$ musel být obsažen v antiřetězci velikosti α; to je ovšem ve sporu s definicí a_1. Proto $\alpha(X \setminus R, \prec) < \alpha$, jak jsme chtěli dokázat. □

Graf porovnatelnosti $P(X, \prec)$ je graf s množinou vrcholů X, v němž jsou hranou spojeny právě porovnatelné prvky. Řetězce v $(X, \prec)$ odpovídají klikám v $P(X, \prec)$, antiřetězce odpovídají nezávislým množinám (množinám vrcholů, z nichž žádné dva nejsou spojené hranou). Velikost největší nezávislé množiny v grafu G značíme $\alpha(G)$. Věta o dlouhém a širokém tedy implikuje, že je-li G graf porovnatelnosti nějakého částečného uspořádání, pak $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq \sqrt{|V(G)|}$. Pro obecné grafy toto tvrzení neplatí.

Věta 5. *Pro každé $k \geq 2$ existuje graf G_k s $n = \lfloor 2^{(k-3)/2} \rfloor$ vrcholy takový, že $\alpha(G_k) < k$ a $\omega(G_k) < k$.*

Důkaz. Uvažme náhodný graf G_k na n vrcholech, v němž každé dva vrcholy jsou spojené hranou nezávisle s pravděpodobností $1/2$ (tj. pro každou dvojici zvlášť si hodím spravedlivou mincí a spojím je hranou, padne-li panna).

Pravděpodobnost, že k-prvková podmnožina vrcholů tvoří kliku, je $2^{-\binom{k}{2}}$, střední hodnota počtu klik velikosti k v získaném grafu tedy je

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^{k(k-1)/2}} < \frac{n^k}{2^{k(k-1)/2}}^k = \left(\frac{n}{2^{(k-1)/2}}\right)^k < 1/2,$$

a tedy dle Markovovy nerovnosti s pravděpodobností větší než $1/2$ platí $\omega(G_k) < k$. Obdobně střední hodnota počtu nezávislých množin velikosti k je menší než $1/2$, a tedy s pravděpodobností větší než $1/2$ platí $\alpha(G_k) < k$. S nenulovou pravděpodobností tedy platí obě nerovnosti.

Proto musí existovat nějaký graf G_k na n vrcholech tž. $\alpha(G_k) < k$ a $\omega(G_k) < k$. □

Naopak, platí následující tvrzení (Ramseyova věta).

Věta 6. *Každý graf G má méně než $\binom{\alpha(G)+\omega(G)}{\alpha(G)} \leq 2^{\alpha(G)+\omega(G)}$ vrcholů. Speciálně, $\max(\alpha(G), \omega(G)) > \log_2 |V(G)|$.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(G)|$. Jestliže $V(G) = \emptyset$, pak $\alpha(G) = \omega(G) = 0$ a $|V(G)| = 0 < 1 = \binom{0}{0}$, tvrzení tedy platí. Můžeme proto předpokládat, že existuje vrchol $v \in V(G)$. Nechť S je je množina všech sousedů v a $N = V(G) \setminus (\{v\} \cup S)$. Pak $\omega(G[S]) \leq \omega(G) - 1$ a $\alpha(G[N]) \leq \alpha(G) - 1$, z indukčního předpokladu tedy máme

$$\begin{aligned}
|S| &\leq \binom{\alpha(G[S]) + \omega(G[S])}{\alpha(G[S])} - 1 \leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G)} - 1 \\
|N| &\leq \binom{\alpha(G[N]) + \omega(G[N])}{\alpha(G[N])} - 1 \leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G) - 1} - 1.
\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}
|V(G)| = |S| + |N| + 1 &\leq \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G)} + \binom{\alpha(G) + \omega(G) - 1}{\alpha(G) - 1} - 1 \\
&= \binom{\alpha(G) + \omega(G)}{\alpha(G)} - 1.
\end{aligned}$$

□