KKNN

MILAN WIKARSKI

NAJPRV UKÁŽEME, ŽI V BIPARTITNOM GRAFE $K_{n,n}$ SA NACHÁDZAJÚ KRUŽNICE DĹŽKY $2k$, KDE $k \in \{2,3,\dots,n\}$ AKO PODGRAFY.

NECH $K_{n,n}$ JE BIPARTITNÝ GRAF, POTOM MNOŽINU JEHO VRCHOLOV V VIEME ROZDELIŤ NA 2 DISJUNKTNÉ PODMNOŽINY $V', V'' \subseteq V$, TAKÉ ŽE:

$$V' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$$

$$V'' = \{v_1'', v_2'', \dots, v_n''\}$$

$$E(K_{n,n}) = \{\{v', v''\} \mid v' \in V' \wedge v'' \in V''\}$$

KRUŽNICU ZAČNEME V ĽUBOVOĽNOM VRCHOLE $v \in V$. POSTUPNE KU NEJ BUDEME PRIDÁVAŤ ĎALŠIE VRCHOLY A HRANY. NECH $\bar{v}$ JE MOMENTÁLNY KONIEC EŠTE NEDOKONČENEJ KRUŽNICE. ZREJME PLATÍ $\bar{v} \in V'$ ALEBO $\bar{v} \in V''$. BUDEME HOVORIŤ, ŽE SME V STAVE

$$1 \iff \bar{v} \in V'$$

$$0 \iff \bar{v} \in V''$$

ZO STAVU 1 SA VIEME DOSTAŤ IBA DO STAVU 0 A VICE VERSA. OZNAČME SI PÍSMENKOM s MOMENTÁLNY STAV. POTOM PLATÍ:

$$s = 1 \Rightarrow \forall v'' \in V'' : \{\bar{v}, v''\} \in E(K_{n,n})$$
$$s = 0 \Rightarrow \forall v' \in V' : \{\bar{v}, v'\} \in E(K_{n,n})$$

ČO ZNAMENÁ, ŽE V KAŽDOM STAVE SI MÔŽEME MÔŽEME VYBRAŤ ĽUBOVOĽNÚ HRANU A PREJSŤ DO VRCHOLU V OPAČNOM STAVE, KTORÝ EŠTE NIE JE SÚČASŤOU KRUŽNICE. NAKONIEC, PO PREJDENÍ VŠETKÝCH VRCHOLOV SI MÔŽEME BYŤ ISTÍ, ŽE EXISTUJE HRANA $\{\bar{v}, v\}$, KTORÁ EŠTE NIE JE SÚČASŤOU KRUŽNICE, A TEDA JU DO KRUŽNICE PRIDÁME A TÝM JU DOKONČÍME. TAKTO SME VYTVORILI KRUŽNICU DĹŽKY $2n$. JE ZREJMÉ (PODĽA PRECHODU MEDZI STAVMI), ŽE NEMÔŽEME VYTVORIŤ KRUŽNICU NEPÁRNEJ DĹŽKY. ROVNAKÝM POSTUPOM MÔŽEME VYTVORIŤ AJ KRUŽNICU DĹŽKY $2(n-k)$, KDE $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. $n-2$ PRETO, LEBO $2(n-(n-2)) = 2 \cdot 2 = 4$, ČO JE DĹŽKA NAJMENŠEJ KRUŽNICE S PÁRNOU DĹŽKOU. KRUŽNICU DĹŽKY $2(n-k)$ VYTVORÍME TAK, ŽE ĽUBOVOĽNÝCH $2k$ VRCHOLOV

PROSTE Z KONŠTRUKCIE VYNECHÁME A BUDEME POSTUPOVAŤ ROVNAKO, AKO PRI KONŠTRUKCII KRUŽNICE DĹŽKY $2n$.

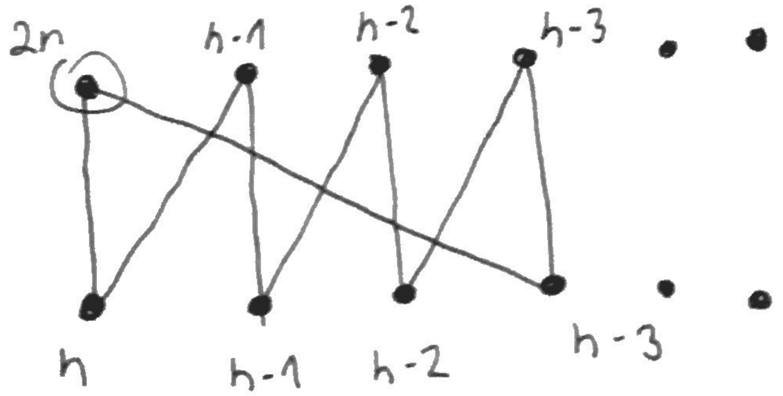
BIPARTITNÝ GRAF $K_{n,n}$ TEDA OBSAHUJE KRUŽNICE DĹŽKY $2k$, KDE $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. POĎME SPOČÍTAŤ, KOĽKO ICH JE. BUDEME POSTUPOVAŤ PODOBNE, AKO PRI ICH KONŠTRUKCII. BIPARTITNÝ GRAF $K_{n,n}$ MÁ $2n$ VRCHOLOV. PRVÝ VRCHOL MÔŽEME VYBRAŤ ĽUBOVOĽNE Z $2n$ MOŽNOSTÍ. TERAZ MUSÍME PREJSŤ DO STAVU OPAČNÉHO, ČIŽE MÁME n MOŽNOSTÍ. TERAZ $(k-1)$-KRÁT PREJDEME ZO STAVU 0 DO STAVU 1 A $(k-1)$-KRÁT PREJDEME ZO STAVU 1 DO STAVU 0, KDE k JE POLOVICA DĹŽKY KRUŽNICE. PRE OBA PRECHODY MÁME

$$(n-1)(n-2) \cdot \ldots (n-k+1)$$

MOŽNOSTÍ, ČO JE

$$\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

TENTO PROCES NA OBRÁZKU:



KRUŽNICU DĹŽKY 2k MÔŽEME ZAČAŤ V ĽUBOVOĽNOM Z 2k VRCHOLOV A POKRAČOVAŤ MÔŽEME V JEDNOM Z DVOCH SMEROV, ČO ZNAMENÁ, ŽE TAKTO KAŽDÚ KRUŽNICU VYTVORÍME 4k-KRÁT. DOKOPY TEDA POČET KRUŽNÍC DĹŽKY 2k V GRAFE $K_{n,n}$ BUDE:

$$\frac{2n \cdot n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!}{4k \cdot (n-k)! \cdot (n-k)!}$$

ČO SA DÁ UPRAVIŤ NA

$$\frac{(n!)^2}{2k \cdot ((n-k)!)^2}$$

TENTO VÝRAZ UŽ IBA STAČÍ SČÍTAŤ PRE VŠETKY MOŽNÉ DĹŽKY KRUŽNÍC A DOSTANEME VZOREC PRE VÝPOČET POČTU KRUŽNÍC V BIPARTITNOM GRAFE $K_{n,n}$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(n!)^2}{2k\,((n-k)!)^2}$$