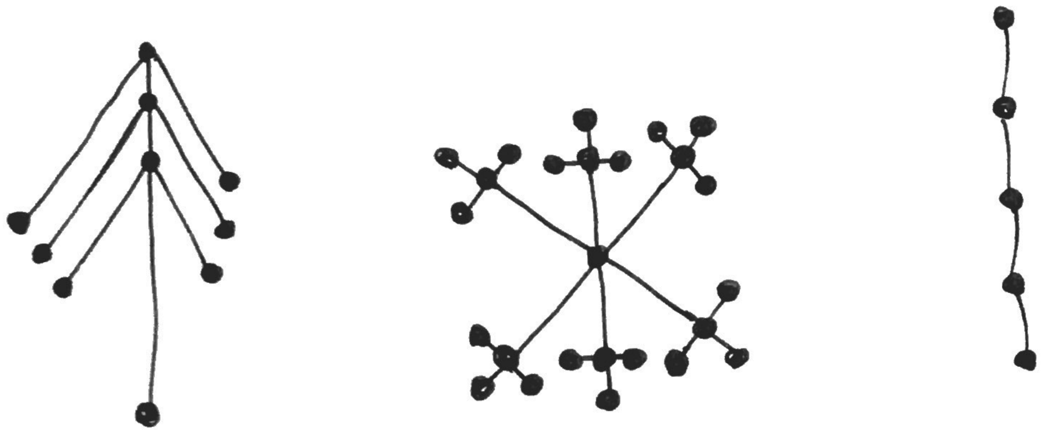
5. STROMY

DEFINÍCIA STROMU

STROM JE SÚVISLÝ GRAF NEOBSAHUJÚCI KRUŽNICU



KONCOVÉ VRCHOLY

KAŽDÝ STROM S ASPOŇ DVOMA VRCHOLMI OBSAHUJE ASPOŇ 2 VRCHOLY STUPŇA 1 (2 LISTY).

NECH CESTA V STROME $T = (V, E)$

$$P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t)$$

JE NAJDLHŠIA CESTA V STROME. TVRDÍME, ŽE v_0 A v_t SÚ KONCOVÉ VRCHOLY (LISTY)

DÔKAZ SPOROM

UVAŽUJME, ŽE v_0 NIE JE KONCOVÝ VRCHOL. POTOM ALE EXISTUJE HRANA $e \neq e_1$ OBSAHUJÚCA VRCHOL v. OZNAČME $e = \{v_0, v\}$. POTOM BUĎ:

a/ v JE JEDEN Z VRCHOLOV CESTY A SÚČASŤOU CESTY JE KRUŽNICA

ALEBO

b) $v \in \{v_0, v_1, \ldots, v_t\}$, A TEDA CESTU P VIEME PREDĹŽIŤ O HRANU e A VRCHOL v

TAK ČI TAK NÁM VZNIKNE SPOR

POSTUPNÁ VÝSTAVBA STROMOV

PRE DANÝ GRAF G A JEHO LIST v SÚ TIETO TVRDENIA EKVIVALENTNÉ:

a) G JE STROM

b) $G - v$ JE STROM

DÔKAZ $a \Rightarrow b$

NECH x, y SÚ 2 VRCHOLY STROMU G ODLIŠNÉ OD v. UVAŽUJME CESTU Z x DO y. TÁTO CESTA NEMÔŽE OBSAHOVAŤ VRCHOL SO STUPŇOM 1 OKREM x A y, ČIŽE NEOBSAHUJE v. PRETO JE CELÁ OBSIAHNUTÁ AJ V $G-v$, ČIŽE $G-v$ JE SÚVISLÝ.

G NEOBSAHUJE KRUŽNICU, A TEDA ANI $G-v$ NEBUDE OBSAHOVAŤ KRUŽNICU

DÔKAZ b ⇒ a

PRIDANÍM LISTU ZREJME NEVYTVORÍME KRUŽNICU, ČIŽE STAČÍ DOKÁZAŤ SÚVISLOSŤ. MEDZ ĽUBOVOĽNÝMI VRCHOLMI x, y V $G-v$ VEDIE CESTA. OZNAČME SI v' AKO JEDINÉHO SUSEDA VRCHOLU v. POTOM CESTU Z x DO v DOSTANEME PREDĹŽENÍM CESTY Z x DO v' O HRANU $\{v', v\}$

TOTO TVRDENIE UMOŽŇUJE DANÝ STROM ZMENŠOVAŤ NA MENŠIE A MENŠIE STROMY, A ŽE GRAF G JE STROM, AK HO POSTUPNÝM ODOBERANÍM VRCHOLOV VIEME ZREDUKOVAŤ NA KONCOVÝ VRCHOL

CHARAKTERIZÁCIA STROMU

PRE GRAF $G = (V, E)$ SÚ NASLEDUJÚCE TVRDENIA EVIVALENTNÉ

(i) G JE STROM

(ii) $\forall x, y \in V$: EXISTUJE PRÁVE 1 CESTA Z x DO y

(iii) GRAF G JE SÚVISLÝ A VYNECHANÍM ĽUBOVOĽNEJ HRANY VZNIKNE NESÚVISLÝ GRAF (MINIMÁLNY SÚVISLÍ GRAF)

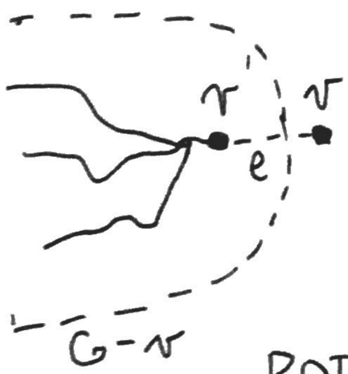
(iv) GRAF G JE MAXIMÁLNY SÚVISLÝ GRAF BEZ KRUŽNÍC

(v) G JE SÚVISLÝ A $|V| = |E| + 1$

NAJPRV DOKÁŽEME (i) => (ii) - (v) INDUKCIOU PODĽA POČTU VRCHOLOV.

UVAŽUJME NEJAKÝ STROM $G = (V, E)$ A PREDPOKLADAJME, ŽE PRE $G - v$ (ii) - (v) PLATIA

(i) => (ii)



PRE VŠETKY $x, y \in V(G - v)$ UŽ CESTA Z x DO y EXISTUJE. STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE EXISTUJE AJ CESTA Z x DO v. NECH v' JE JEDINÝ SUSED v. POTOM CESTA Z x DO v JE CESTA Z x DO v' PREDĹŽENÁ O HRANU $\{v', v\}$

(i) => (iii)

PRE VŠETKY HRANY $e' \in E(G - v)$ TOTO TVRDENIE PLATÍ. STAČÍ UKÁZAŤ, ŽE PLATÍ AJ PRE $e = \{v', v\}$, ČO JE OČIVIDNÉ, LEBO ODPOJENÍM HRANY e SA GRAF ROZDELÝ DO DVOCH KOMPONENTOV G_1, G_2, KDE

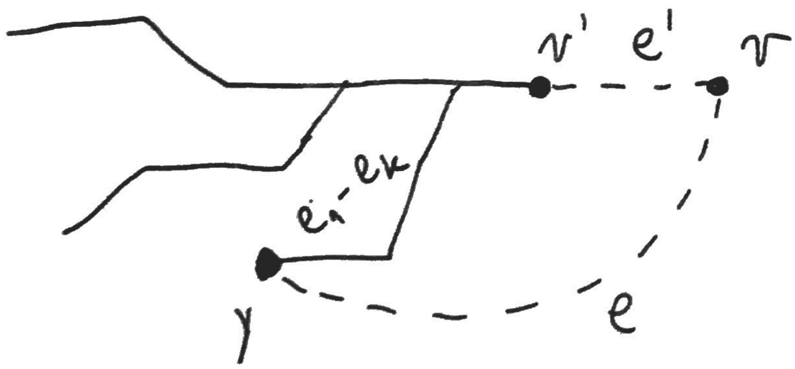
$$G_1 = G - v$$

$$G_2 = (\{v\}, \emptyset)$$

(i) => (iv)

NECH $x, y \in V(G)$ SÚ NEJAKÉ DVA VRCHOLY GRAFU G A PLATÍ $\{x, y\} \notin E(G)$. POTOM BUĎ $x \neq v$, A TEDA Z INDUKČNÉHO PREDPOKLADU PRIDANÍM HRANY $e = \{x, y\}$ VZNIKNE KRUŽNICA; ALEBO $x = v$ A PRIDANÍM HRANY $e = \{v, y\}$ VZNIKNE KRUŽNICA, PRETOŽE EXISTUJE CESTA Z y DO v', ČIŽE KRUŽNICA

$$(v, e, y, v_1, e_1, \dots, e_k, v', e', v)$$



(i) => (v)

$$|V(G-v)| = |V(G)| - 1 \Rightarrow |V(G)| = |V(G-v)| + 1$$

$$|E(G-v)| = |E(G)| - 1 \Rightarrow |E(G)| = |E(G-v)| + 1$$

PRIPOJENÍM NOVÉHO LISTU SA $|V|$ AJ $|E|$ ZVÝŠI O 1, A TEDA ROVNOSŤ OSTÁVA ZACHOVANÁ

TERAZ DOKÁŽEME (ii) - (v) => (i)

(ii), (iii) => (i)

TIETO PODMIENKY UŽ PREDPOKLADAJÚ SÚVISLOSŤ A G NEMÔŽE OBSAHOVAŤ KRUŽNICU, AK TIETO PODMIENKY SPĹŇA

(iv) => (i)

PODMIENKA UŽ PREDPOKLADÁ, ŽE GRAF NEOBSAHUJE KRUŽNICU. STAČÍ DOKÁZAŤ, ŽE JE SÚVISLÝ. ZVOĽME SI DVA ĽUBOVOĽNÉ VRCHOLY $x, y \in V(G)$, POTOM BUĎ $e = \{x, y\} \in E(G)$ - VRCHOLY SÚ PRIAMO SPOJENÉ - ALEBO GRAF $G + \{x, y\}$ OBSAHUJE KRUŽNICU, PO KTOREJ ODSTRÁNENÍ OSTANE CESTA MEDZI x A y

(v) => (i)

BUDEME POSTUPOVAŤ INDUKCIOU PODĽA POČTU VRCHOLOV. MAJME SÚVISLÝ GRAF $G = (V, E)$, KDE PLATÍ $|V| = |E| + 1$. POTREBUJEME UKÁZAŤ, ŽE V G EXISTUJE KONCOVÝ VRCHOL, POTOM MÔŽEME POUŽIŤ INDUKČNÝ PREDPOKLAD. SPRAVÍME TO POČÍTANÍM STUPŇOV.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

$$|V| = |E| + 1 \Rightarrow 2|E| = 2|V| - 2$$

SPOJENÍM VÝRAZOV DOSTANEME

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|V| - 2$$

ČIŽE EXISTUJE NEJAKÝ VRCHOL, KTORÝ MÁ STUPEŇ 1, A TEDA IDE O KONCOVÝ VRCHOL. GRAF $G' = G - v$ JE OPÄŤ SÚVISLÝ A PODĽA INDUKČNÉHO PREDPOKLADU TO JE STROM. VZŤAH $|V(G')| = |E(G')| + 1$ SPĹŇUJE, LEBO SOM ODOBRALI PRÁVE JEDNU HRANU A JEDEN VRCHOL

TÝMTO SME DOKÁZALI

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

OHODNOTENIE HRÁN

NECH $G = (V, E)$ JE NEJAKÝ GRAF, POTOM ZOBRAZENIE

$$w : E \to \mathbb{R}$$

SA NAZÝVA OHODNOTENIE HRÁN

JE TO ZOBRAZENIE, KTORÉ KAŽDEJ HRANE PRI-
RADÍ NEJAKÚ VÁHU, ČIŽE $w(v)$ JE VÁHA HRANY v

KOSTRA GRAFU

NECH $G=(V,E)$ JE GRAF. ĽUBOVOĽNÝ STROM $T=(V,E')$, KDE $V'\subseteq V$ SA NAZÝVA KOSTRA GRAFU

KOSTRA MÔŽE EXISTOVAŤ LEN AK JE GRAF SÚVISLÝ A KAŽDÝ SÚVISLÝ GRAF MÁ KOSTRU

MINIMÁLNA KOSTRA

PRE SÚVISLÝ GRAF $G=(V,E)$ S NEZÁPORNÝM HODNOTENÍM HRÁN w JE MINIMÁLNA KOSTRA TAKÝ SÚVISLÝ PODGRAF $G'=(V,E')$, KTORÉHO HODNOTA

$$w(E') = \sum_{e\in E'} w(e)$$

JE MINIMÁLNA