2. O USPORIADANÝCH MNOŽINÁCH

(X, R) - USPORIADANÁ MNOŽINA

↳ USPORIADANIE NA X

↳ MNOŽINA X

$$\boxed{\forall x,y \in X : x \preceq y \iff xRy}$$

LEXIKOGRAFICKÉ USPORIADANIE

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \qquad \leq_{LEX}:$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \leq_{LEX} (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) \iff$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \vee$$

$$\exists i, 1 \leq i \leq n : (\forall j, j < i : a_j = b_j) \wedge (a_i <_i b_i)$$

ZNÁZORŇOVANIE ČIASTOČNE USPORIADANÝCH MNOŽÍN

$$x \preceq y \wedge y \preceq z \implies x \preceq z$$

↳ ŠÍPKU z x DO z MÔŽEME VYNECHAŤ

$$\forall x \in (X, R): xRx$$

↳ ŠÍPKU z x DO x MÔŽEME VYNECHAŤ

RELÁCIA BEZPROSTREDNÝCH PREDCHODCOV

$(X, \preceq)$ - USPORIADANÁ MNOŽINA

x JE BEZPROSTREDNÝM PREDCHODCOM y, AK

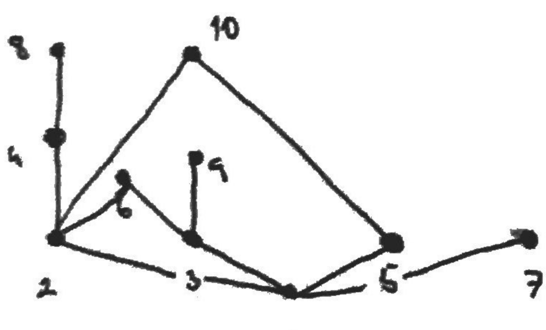
$$x \prec y \ \wedge \ \nexists t \in X : x \prec t \prec y$$

$\lhd$ - RELÁCIA BEZPROSTREDNÉHO PREDCHODCU

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x,y \in X : x \prec y \iff \exists x_1, x_2, \dots, x_k \in X : x_1 \lhd x_2 \lhd \dots \lhd x_k \lhd y \\ (\text{ALEBO } k=0 \Rightarrow x \lhd y) \end{array}}$$

HASSEOV DIAGRAM - ZNÁZORNENIE USPORIADANEJ MNOŽINY POMOCOU RELÁCIE BEZPROSTREDNÝCH PREDCHODCOV

$$(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$$



~~MINIMÁLNY PRVOK~~

$(X, \leq)$ - USPORIADANÁ MNOŽINA $\quad x \in X$

$a \in X$ JE <u>MINIMÁLNY</u> $\Leftrightarrow \nexists x : x \prec a$

$a \in X$ JE <u>MAXIMÁLNY</u> $\Leftrightarrow \nexists x : x \succ a$

$a \in X$ JE <u>NAJMENŠÍ</u> $\Leftrightarrow \forall x : a \preceq x$

$a \in X$ JE <u>NAJVÄČŠÍ</u> $\Leftrightarrow \forall x : a \succeq x$

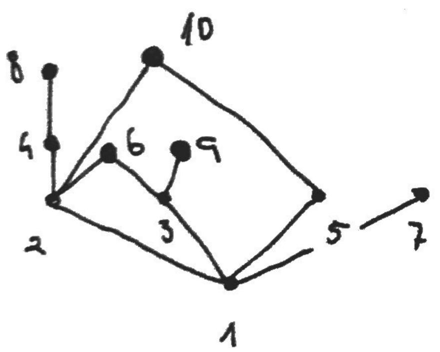
$(\{1, 2, \ldots 10\}, |)$

MINIMÁLNY: 1

MAXIMÁLNY: 10, 9, 8, 7, 6

NAJMENŠÍ: 1

NAJVÄČŠÍ: $\emptyset$



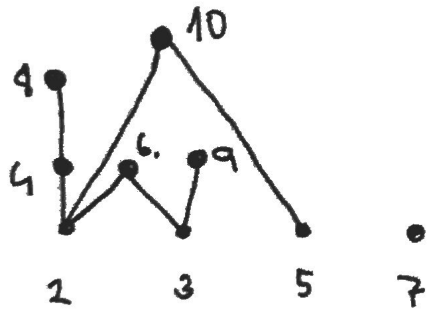
$(\{2, 3, \ldots 10\}, |)$

MINIMÁLNY: 2, 3, 5, 7

MAXIMÁLNY: 10, 9, 8, 7, 6

NAJMENŠÍ: $\emptyset$

NAJVÄČŠÍ: $\emptyset$



KAŽDÁ NEPRÁZDNA USPORIADANÁ MNOŽINA MÁ ASPOŇ 1 MINIMÁLNY PRVOK

$(X, \leq)$ - KONEČNÁ USPORIADANÁ MNOŽINA

$x_0 \in X$ — x_0 JE MINIMÁLNY $\rightarrow$ HOTOVO

— x_0 NIE JE MINIMÁLNY $\overset{*}{\rightarrow}$ . .

$\overset{*}{\rightarrow} \Rightarrow \exists\, x_1 < x_0$ — x_1 JE MINIMÁLNY $\rightarrow$ HOTOVO

— x_1 NIE JE MINIMÁLNY $^{+}$

$\overset{+}{\rightarrow} \Rightarrow \exists\, x_2 < x_1$ ATĎ.

↳ PO KONEČNOM MNOŽSTVE KROKOV NÁJDEME MINIMÁLNY ~~PVKO~~ PRVOK, INAK BY BOLA MNOŽINA X NEKONEČNÁ

LINEÁRNE ROZŠÍRENIE

(X, R) - KONEČNÁ USPORIADANÁ MNOŽINA

$\exists$ LINEÁRNE USPORIADANIE S MNOŽINY X TAKÉ, ŽE $R \subseteq S$

DÔKAZ INDUKCIOU:

PRE $|X| = 1$: $R = \Delta X$, A TEDA $S = R$

PRE (X, R), $|X| > 1$:

$x_0 \in X$ JE MINIMÁLNY PRVOK (X, R)

$X' = X / \{x_0\}$

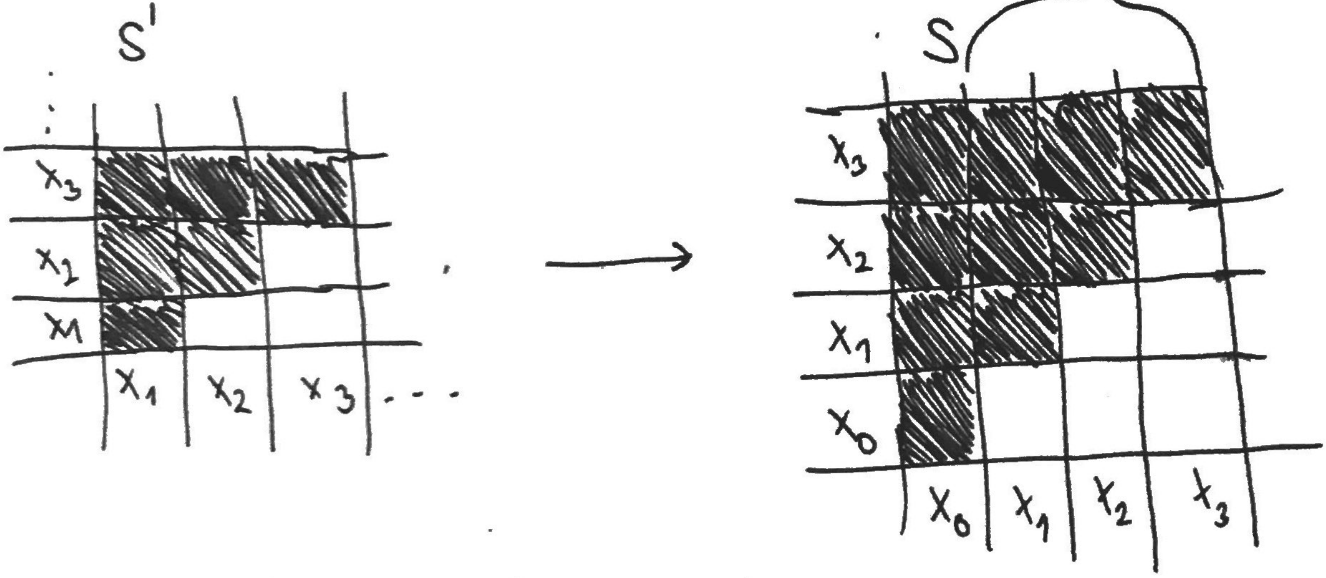
$R' = R$ ZÚŽENÁ NA MNOŽINU X'

(X', R') JE USPORIADANÁ MNOŽINA, A TEDA PODĽA INDUK. PREDPOKLADU EXISTUJE LINEÁRNE USPORIADANIE S' NA X' TAKÉ, ŽE $R' \subseteq S'$

DEFINUJME RELÁCIU S NA MNOŽINE X TAKTO:

$x_0 S y$ PRE VŠETKY $y \in X$

$x S y \Leftrightarrow x S' y$



REŤAZCE A ANTIREŤAZCE

$P := (X, \leq)$ – ĽUBOVOĽNÁ KONEČNÁ USP. MNOŽINA

$A \subseteq X$ JE NEZÁVISLÁ V P $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x \neq y : x \not\leq y$

↳ ANTIREŤAZEC

2 PRVKY SÚ POROVNATEĽNÉ, AK:

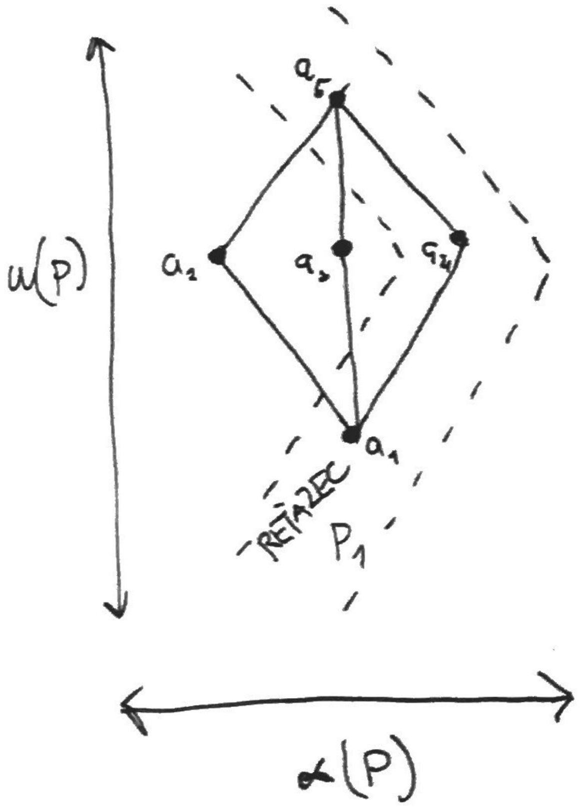
$x < y \vee y < x$

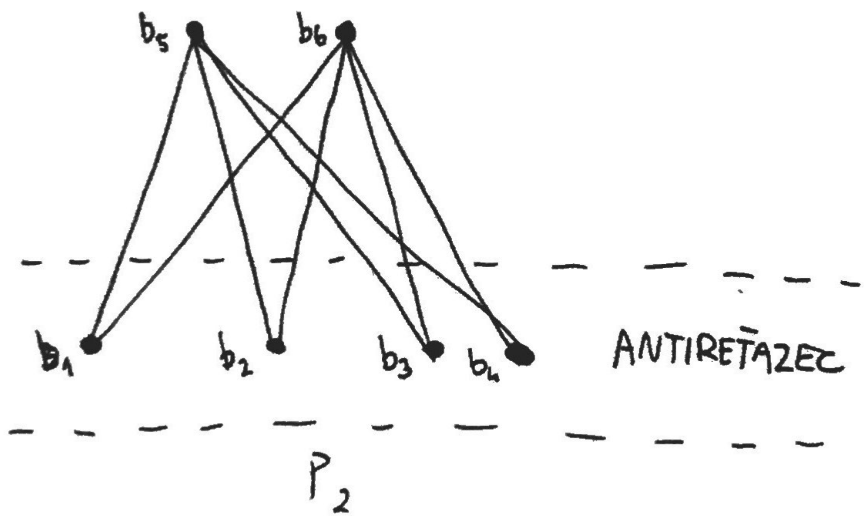
MNOŽINA JE TEDA NEZÁVISLÁ, AK ŽIADNE DVA PRVKY V NEJ NIE SÚ POROVNATEĽNÉ

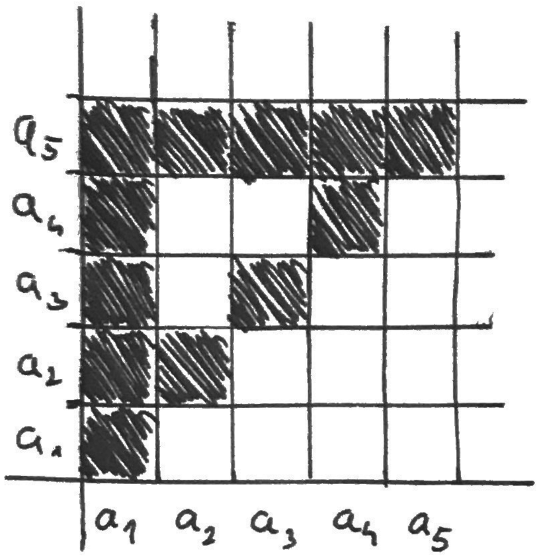
$$\alpha(P) = \max(\{|A| \mid A \text{ nezávislá v } P\})$$

$A \subseteq X$ JE <u>REŤAZEC</u> $\Leftrightarrow$ KAŽDÉ 2 PRVKY SÚ POROVNATEĽNÉ

$$\omega(P) = \max(\{|A| \mid A \text{ reťazec v } P\})$$





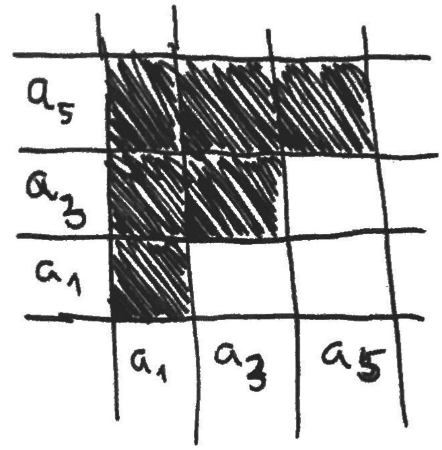


P_1

$P_1 := (\{a_1, a_2, \dots, a_5\}, \leq)$

$X_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$

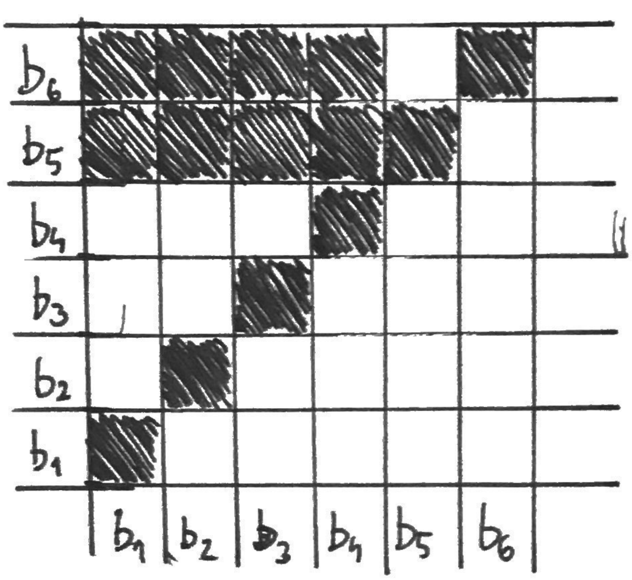
REŤAZEC – LIN. USPORIADANIE



P_1'

$P_1' := (\{a_1, a_3, a_5\}, \leq)$ $P_1' \subseteq P_1$

$X_1' = \{a_1, a_3, a_5\}$ $X_1' \subseteq X_1$

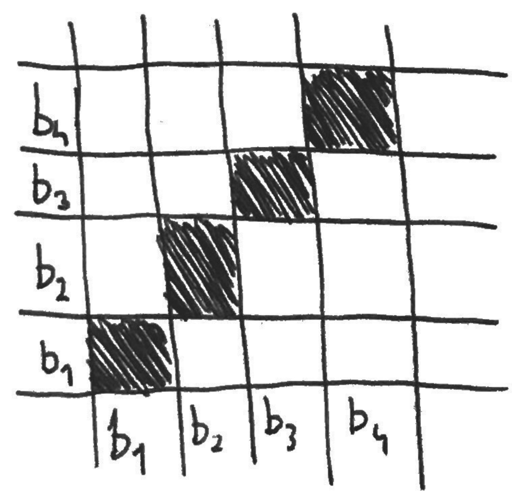


P_2

$P_2 := (\{b_1, b_2, \dots, b_6\}, \leq)$

$X_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$

ANTIREŤAZEC – DIAGONÁLA



P_2'

$P_2' := (\{b_1, b_2, \dots, b_6\}, \leq)$

$X_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$