4. GRAFY

DEFINÍCIA GRAFU

GRAF JE USPORIADANÁ DVOJICA (V, E), KDE 'V' JE NEJAKÁ NEPRÁZDNA MNOŽINA A 'E' JE MNOŽINA DVOJPRVKOVÝCH MNOŽÍN S PRVKAMI OBSIAHNUTÝCH V 'V'

V - VRCHOLY (VERTEXES)

E - HRANY (EDGES)

$G = (V, E)$ - GRAF S VRCHOLAMI V A HRANAMI E

$V(G)$ - VRCHOLY GRAFU G

$E(G)$ - HRANY GRAFU G

UŽITOČNÉ JE AJ OZNAČENIE $\binom{V}{2}$, ČO JE MNOŽINA VŠETKÝCH DVOJPRVKOVÝCH PODMNOŽÍN MNOŽINY V, ČIŽE MNOŽINA VŠETKÝCH MOŽNÝCH HRÁN DANÉHO GRAFU S VRCHOLMI V. POTOM MÔŽEME PÍSAŤ

$$G = (V, E) \quad \text{KDE} \quad E \subseteq \binom{V}{2}$$

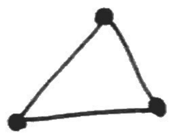
ZNÁZORNENIE GRAFU

GRAFY SA ZNÁZORŇUJÚ DO ROVINY, KDE BODY PREDSTAVUJÚ VRCHOLY A ČIARY MEDZI NIM PREDSTAVUJÚ HRANY:

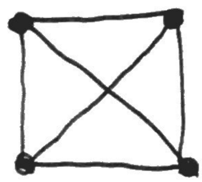
DÔLEŽITÉ TYPY GRAFOV

ÚPLNÝ GRAF K_n $n \geq 1$:

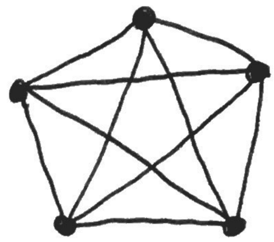
$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad E = \binom{V}{2}$$



K_3



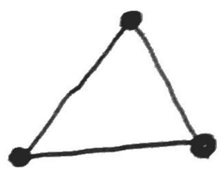
K_4



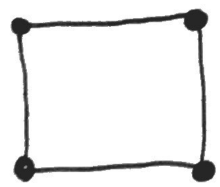
K_5

KRUŽNICA C_n $n \geq 3$

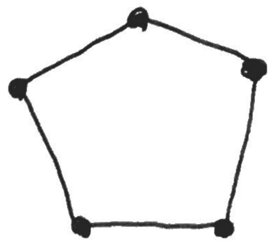
$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad E = \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\}$$



C_3



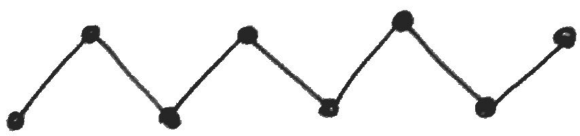
C_4



C_5

CESTA P_n $n \geq 0$

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad E = \{\{i-1, i\} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$



P_7

ÚPLNÝ BIPARTITNÝ GRAF $K_{n,m}$ $m, n \geq 1$

$$V = \{v_1, v_2, \dots v_n\} \cup \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

$$E = \{\{v_i, u_j\} \mid i \in \{1,2,\dots,n\} \wedge j \in \{1,2,\dots,m\}\}$$

$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,3}$ $K_{3,3}$

SLOVO „BIPARTITNÝ" BY SME MOHLI PRELOŽIŤ, AKO DVOJČASŤOVÝ. TENTO NÁZOV BOL ZVOLENÝ PRETO, ŽE MNOŽINU VRCHOLOV V(G) TAKÉHOTO GRAFU MÔŽEME ROZDELIŤ NA 2 DISJUNKTNÉ MNOŽINY V_1 A V_2, PRIČOM BUDE PLATIŤ:

$$E(G) = \{\{v, v'\} \mid v \in V_1, \ v' \in V_2\}$$

SLOVOM, KAŽDÝ VRCHOL V JEDNEJ ČASTI BUDE HRANOU SPOJENÝ SO VŠETKÝMI VRCHOLMI V DRUHEJ SKUPINE

IZOMORFIZMUS

DVA GRAFY $G=(V,E)$ A $G'=(V',E')$ NAZÝVAME IZOMORFNÉ, AK EXISTUJE BIJEKCIA

$$f: V \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow V'$$

TAKÁ, ŽE

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in E'$$

ZOBRAZENIE f NAZÝVAME IZOMORFIZMUS GRAFOV G A G'. FAKT, ŽE GRAFY SÚ IZOMORFNÉ ZAPISUJEME $G \cong G'$. IZOMORFIZMUS JE TEDA VLASTNE PREMENOVANIE VRCHOLOV GRAFU. RELÁCIA $\cong$ (BYŤ IZOMORFNÝ) JE EKVIVALENCIA

PODGRAFY

GRAF H JE PODGRAFOM GRAFU G, AK PLATÍ:

$$V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$$

GRAF H JE INDUKOVANÝM PODGRAFOM G, AK PLATÍ:

$$V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$$

SLOVOM, INDUKOVANÝ PODGRAF GRAFU G VZNIKNE VYMAZANÍM NIEKTORÝCH VRCHOLOV GRAFU G A VŠETKÝCH HRÁN SPOJENÝCH S TÝMITO VRCHOLAMI. PRE PODGRAF MÔŽEME NAVYŠE VYMAZAŤ NIEKTORÉ ĎALŠIE HRANY.

CESTY V GRAFE

PODGRAF GRAFU G ISOMORFNÝ NEJAKEJ CESTE SA NAZÝVA CESTA V GRAFE G. MÔŽEME JU CHÁPAŤ AKO POSTUPNOSŤ

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_{t-1}, v_{t-1}, e_t, v_t)$$

KDE $v_0, v_1, \ldots, v_t$ SÚ NAVZÁJOM RÔZNE VRCHOLY GRAFU A PRE $i = 1, 2, \ldots, t$ PLATÍ:

$$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$$

KRUŽNICA V GRAFE

PODGRAF GRAFU G ISOMORFNÝ NEJAKEJ KRUŽNICI SA NAZÝVA KRUŽNICA V GRAFE G. MÔŽEME JU CHÁPAŤ AKO POSTUPNOSŤ

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_{t-1}, v_{t-1}, e_t, v_0)$$

KDE v_i AJ e_i SÚ DEFINOVANÉ PODOBNE AKO PRI CESTE V GRAFE G

KOMPONENTY GRAFU A SÚVISLOSŤ

GRAF G JE SÚVISLÝ, AK PRE KAŽDÉ DVA VRCHOLY x A y V ŇOM EXISTUJE CESTA Z x DO y

DEFINUJME SI RELÁCIU $\sim$ NA MNOŽINE $V(G)$, KDE

$$x \sim y \iff \text{EXISTUJE CESTA MEDZI } x \text{ A } y$$

TERAZ SI DOKÁŽME, ŽE RELÁCIA $\sim$ JE EKVIVALENCIA, ČIŽE MUSÍ PLATIŤ:

a) $x \sim x$

b) $x \sim y \iff y \sim x$

c) $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

PRIČOM a) A b) VYPLÝVAJÚ BEZPROSTREDNE Z DEFINÍCIE RELÁCIE, TAKŽE STAČÍ DOKÁZAŤ c). PRED TÝM VŠAK DEFINUJEME SLED A DOKÁŽEME, ŽE V GRAFE G JE CESTA MEDZI x A y PRÁVE VTEDY, KEĎ V GRAFE G JE SLED MEDZI x A y.

NECH $G = (V, E)$ JE GRAF, POSTUPNOSŤ

$$(v_0, e_1, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

SA NAZÝVA SLED DĹŽKY n Z v_0 DO v_n V GRAFE G, AK PLATÍ:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$$

NAROZDIEL OD CESTY SA V SLEDE MÔŽU HRANY AJ VRCHOLY OPAKOVAŤ

LEMMA: V GRAFE G EXISTUJE CESTA Z x DO y PRÁVE, KEĎ V GRAFE G EXISTUJE SLED Z x DO y

DÔKAZ: ZREJME KAŽDÁ CESTA JE SLED. NA DRUHÚ STRANU SLED Z x DO y, KTORÝ MÁ NAJMENŠIU MOŽNÚ DĹŽKU JE UŽ NUTNE CESTA

VRÁŤME SA TERAZ K RELÁCII $\sim$ A DOKÁŽME

$$c)\ x \sim y \ \wedge \ y \sim z \implies x \sim z$$

ZREJME EXISTUJE SLED Z x CEZ y DO z. PODĽA PREDOŠLEJ LEMMY TEDA NUTNE MEDZI x A z MUSÍ EXISTOVAŤ AJ CESTA.

TÝMTO SME DOKÁZALI, ŽE RELÁCIA $\sim$ JE EKVIVALENCIA.

ROZLOŽME MNOŽINU V NA TRIEDY EKVIVALENCIE $\sim$:

$$V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_k$$

GRAF G JE SÚVISLÝ, PRÁVE KEĎ $k=1$.

MNOŽINY V_i SA NAZÝVAJÚ KOMPONENTY GRAFU.

GRAF JE TEDA ZJEDNOTENÍM VŠETKÝCH KOMPONENTOV

VZDIALENOSŤ V GRAFE

NECH $G = (V, E)$ JE SÚVISLÝ GRAF. PRE VRCHOLY v, v'

DEFINUJEME:

$$d(v, v') = \text{DĹŽKA NAJKRATŠEJ CESTY Z } v \text{ DO } v'$$

ČÍSLO $d(v, v')$ SA NAZÝVA VZDIALENOSŤ VRCHOLOV v A v'

DEFINUJME SI FUNKCIU

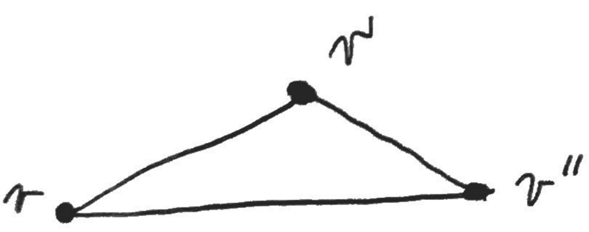
$$d_G : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

KTORÁ SA NAZÝVA METRIKA GRAFU A MÁ TIETO VLASTNOSTI:

1. $d_G(v, v') \geq 0$; $d_G(v, v') = 0 \iff v = v'$

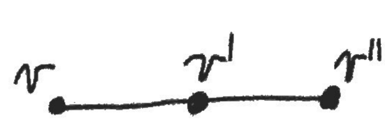
2. $\forall v, v' \in V : d_G(v, v') = d_G(v', v)$

3. $\forall v, v', v'' \in V : d_G(v, v'') \leq d_G(v, v') + d_G(v', v'')$



4. $\forall v, v' \in V : d_G(v, v') \in \mathbb{N}$

5. $d_G(v, v'') > 1 \Rightarrow \exists v', v \neq v' \neq v'' : d_G(v, v') + d_G(v', v'') = d_G(v, v'')$



MATICA SUSEDNOSTI

NECH $G=(V, E)$ JE GRAF S n VRCHOLMI, KTORÉ OZNAČÍME

$$v_1, v_2, \dots, v_n \quad \text{(V ĽUBOVOĽNOM PORADÍ)}$$

MATICA SUSEDNOSTI GRAFU G JE ŠTVORCOVÁ MATICA

$$A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \iff \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \iff \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

KTORÁ JE SYMETRICKÁ A NA JEJ DIAGONÁLE SÚ NULY.

STUPEŇ VRCHOLA

NECH G JE GRAF A v JE JEHO VRCHOL. SYMBOLOM $\deg(v)$ OZNAČÍME POČET HRÁN GRAFU G OBSAHUJÚCICH VRCHOL v. TOTO ČÍSLO NAZVEME STUPEŇ VRCHOLA v

SKÓRE GRAFU

OZNAČME VRCHOLY GRAFU G:

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

POTOM POSTUPNOSŤ

$$(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$$

NAZVEME SKÓRE GRAFU.

PRE VŠETKY GRAFY PLATÍ

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

PRETOŽE $\deg(v)$ UDÁVA POČET HRÁN OBSAHUJÚCICH v, PRIČOM KAŽDÁ HRANA OBSAHUJE 2 VRCHOLY. AK SČÍTAME VŠETKY STUPNE DOSTANEME DVOJNÁSOBOK POČTU HRÁN. DÔSLEDKOM TOHOTO ZISTENIA JE, ŽE:

$$\left|\{v \in V \mid \deg(v) \bmod 2 = 1\}\right| \bmod 2 = 0$$

SLOVOM, POČET VRCHOLOV S NEPÁRNYM STUPŇOM JE PÁRNY

EULEROVSKÉ GRAFY

GRAF JE EULEROVSKÝ PRÁVE, KEĎ MÁ ASPOŇ 1 EULEROVSKÝ ŤAH, TEDA SLED

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_m)$$

V KTOROM SA KAŽDÁ HRANA VYSKYTUJE PRÁVE RAZ A KAŽDÝ VRCHOL ASPOŇ RAZ

GRAF G JE EULEROVSKÝ PRÁVE, AK JE SÚVISLÝ A KAŽDÝ VRCHOL V G MÁ PÁRNY STUPEŇ.

<u>PRVÁ IMPLIKÁCIA</u> JE JEDNODUCHÁ – ZJAVNE EULEROVSKÝ GRAF MUSÍ BYŤ SÚVISLÝ. STUPNE VRCHOLOV MUSIA BYŤ PÁRNE, PRETOŽE KEDYKOĽVEK EULEROVSKÝ ŤAH DO VRCHOLU VSTÚPI, MUSÍ HO AJ OPUSTIŤ

PRE <u>DRUHÚ IMPLIKÁCIU</u> UVAŽUJME, ŽE GRAF G JE SÚVISLÝ A STUPNE VŠETKÝCH VRCHOLOV SÚ PÁRNE.

UVAŽUJME ŤAH

$$T = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_1, v_m)$$

KTORÝ MÁ MAXIMÁLNU MOŽNÚ DĹŽKU m (JE TO NAJDLHŠÍ ŤAH V GRAFE)

NAJPRV DOKÁŽEME, ŽE $v_0 = v_m$:

PRE SPOR UVAŽUJME $v_0 \neq v_m$

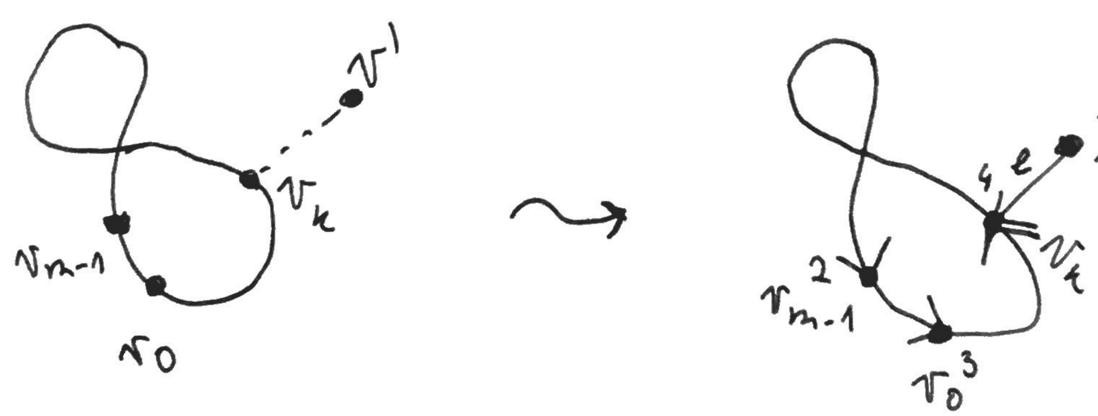
POTOM ALE DO v_0 ZASAHUJE NEPÁRNY POČET HRÁN ŤAHU T A KEĎŽE $\deg(v_0) \bmod 2 = 0$, MUSÍ EXISTOVAŤ NEJAKÁ HRANA $e \in E$, O KTORÚ VIEME ŤAH PREDĹŽIŤ. = <u>SPOR</u>

PREDPOKLADAJME $v_0 = v_m$ A DOKAZUJME $\{e_1, e_2, \dots, e_m\} = E$

NAJPRV SI DEFINUJEME POMOCNÝ GRAF $G' = (V', E')$, KDE V' JE MNOŽINA VŠETKÝCH VRCHOLOV ŤAHU T (TJ. VŠETKY VRCHOLY, CEZ KTORÉ PRECHÁDZA NAJDLHŠÍ ŤAH GRAFU) A E' JE MNOŽINA VŠETKÝCH JEHO HRÁN (TJ. VŠETKY HRANY, CEZ KTORÉ PRECHÁDZA NAJDLHŠÍ ŤAH GRAFU).

PRE SPOR UVAŽUJME $V \neq V'$. VĎAKA SÚVISLOST GRAFU EXISTUJE HRANA $e = \{v_k, v'\} \in E$, KDE $v_k \in V'$ A $v' \notin V'$ (VRCHOL, KTORÝ JE NEJAKOU HRANOU SPOJENÝ S ŤAHOM, ALE TÁTO HRANA NIE JE SÚČASŤOU ŤAHU). Z TOHO SPRAVÍME ŤAH

$$(v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$$



TENTO ŤAH MÁ ALE DĹŽKU $m+1$, ČO JE SPOR

EŠTE JEDNODUCHŠIE BY SA DALO TVRDIŤ, ŽE TÝM, ŽE ŤAH T JE UZAVRETÝ, MÔŽEM SI VRCHOLY POMENOVAŤ ĽUBOVOĽNE A HOCIKTORÝM Z VRCHOLOV MÔŽEM ŤAH ZAČAŤ. POTOM, KEĎ SOM V SITUÁCII $V \neq V'$, $\exists e = \{v_k, v'\} \in E$, $v_k \in V'$, $v' \notin V'$, POLOŽÍM $v_0 = v_k$ A DOSTANEM ŤAH

$$(v', e, v_0 = v_k, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_m)$$

KTORÉHO DĹŽKA JE $m-1$, ČO JE <u>SPOR</u>

VIEME UŽ, ŽE $v_0 = v_m$ A $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\} = V$, POĎME DOKÁZAŤ $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = E$

PRE SPOR UVAŽUJME $E' \neq E$, POTOM EXISTUJE HRANA $e = \{v_k, v_l\}$ TAKÁ, ŽE $e \in E \wedge e \notin E'$. UVAŽUJME ZNOVU, ŽE $v_k = v_0$, POTOM MÁME ŤAH

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0 = v_k, e, v_l\}$$

DOKÁZALI SME, ŽE $v_0 = v_m$, $E = E'$, $V = V'$

PRIPOMEŇME SI, ŽE E' JE MNOŽINA VŠETKÝCH HRÁN, CEZ KTORÉ PRECHÁDZA NAJDLHŠÍ ŤAH V GRAFE A V' JE MNOŽINA VŠETKÝCH TAKÝCHTO VRCHOLOV. TÝM, ŽE $V' = V \wedge E' = E$ NAJDLHŠÍ ŤAH V GRAFE PRECHÁDZA VŠETKÝMI VŠETKÝMI JEHO VRCHOLMI ASPOŇ RAZ A VŠETKÝMI HRANAMI PRÁVE RAZ, ČO JE DEFINÍCIA EULEROVSKÉHO ŤAHU. TÝMTO SME TVRDENIE DOKÁZALI.

ORIENTOVANÉ GRAFY

ORIENTOVANÝ GRAF G JE DVOJICA

$$G = (V, E) \quad \text{KDE} \quad E \subseteq V \times V$$

PRVKY E NAZÝVAME ŠÍPKY (ALEBO ORIENTOVANÉ HRANY). ŠÍPKA e MÁ TVAR (x, y), TZN., ŽE VYCHÁDZA Z x A VCHÁDZA DO y

STUPEŇ VRCHOLA

PRE ORIENTOVANÝ GRAF $G = (V, E)$ DEFINUJEME PRE VŠETKY $v \in V$:

$\deg^+(v)$ = POČET ŠÍPOK, KTORÉ DO v VCHÁDZAJÚ

$\deg^-(v)$ = POČET ŠÍPOK, KTORÉ Z v VYCHÁDZAJÚ

TIETO FUNKCIE NAZVEME

$\deg^+(v)$ - VSTUPNÝ STUPEŇ VRCHOLA v

$\deg^-(v)$ - VÝSTUPNÝ STUPEŇ VRCHOLA v

ORIENTOVANÝ GRAF JE VYVÁŽENÝ, AK PLATÍ

$$\forall v \in V : \deg^+(v) = \deg^-(v)$$

SYMETRIZÁCIA GRAFU

KAŽDÉMU ORIENTOVANÉMU GRAFU $G = (V, E)$ VIEME PRIRADIŤ NEORIENTOVANÝ GRAF $sym(G) = (V, \bar{E})$, KDE

$$\bar{E} = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in E \wedge (y, x) \in E\}$$

GRAF $sym(G)$ SA NAZÝVA SYMETRIZÁCIA GRAFU G

SÚVISLOSŤ ORIENTOVANÝCH GRAFOV

ORIENTOVANÝ GRAF $G = (V, E)$ JE

- SLABO SÚVISLÝ, AK sym(G) JE SÚVISLÝ
- SILNO SÚVISLÝ, AK MEDZI KAŽDÝMI DVOMA VRCHOLMI VEDIE ORIENTOVANÁ CESTA

EULEROVSKÝ ŤAH

ORIENTOVANÝ GRAF JE EULEROVSKÝ PRÁVE, KEĎ JE VYVÁŽENÝ A JEHO SYMETRIZÁCIA JE SÚVISLÝ GRAF.

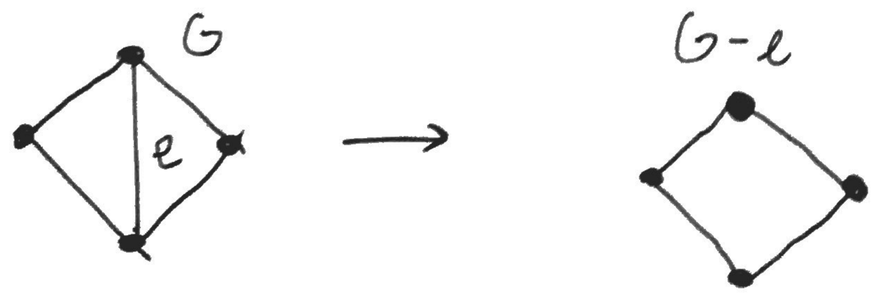
DÔKAZ TEJTO VETY JE TAKMER ROVNAKÝ, AKO PRI NEORIENTOVANOM GRAFE

GRAFOVÉ OPERÁCIE

NECH $G = (V, E)$, POTOM DEFINUJEME

ODOBRANIE HRANY

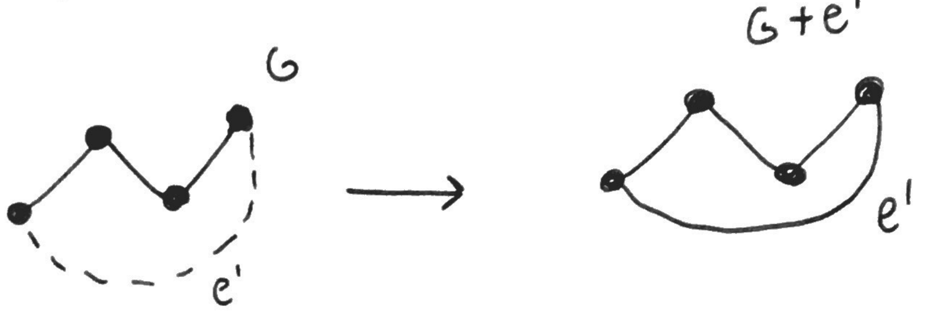
$$G - e = (V, E \setminus \{e\})$$



PRIDANIE HRANY

$$G + e' = (V, E \cup \{e'\})$$

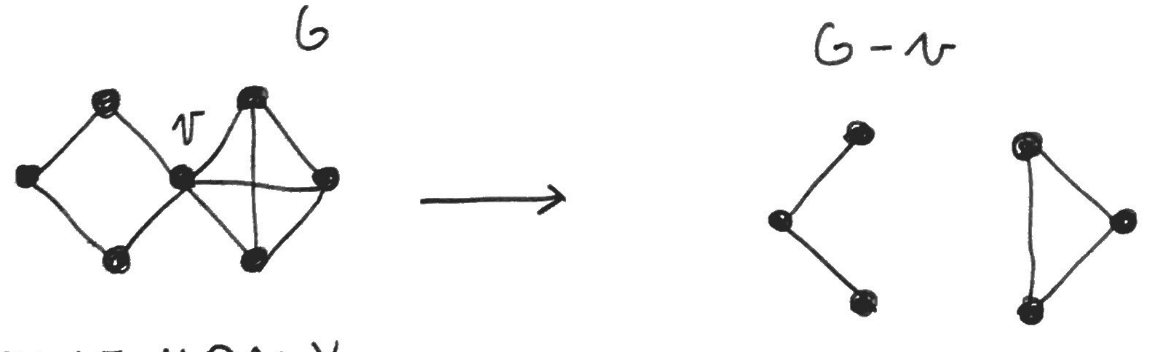
$$e' \in \binom{V}{2} \wedge e' \notin E$$



ODOBRANIE VRCHOLU

$$G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E \mid v \notin e\})$$

$$v \in V$$



DELENIE HRANY

$$G \% e = (V \cup \{z\}, E \setminus \{x, y\} \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\})$$