

Odevzdávejte prosím výhradně **elektronicky**, budu mimo ČR.

Doporučený termín odevzdání: 10. prosince 2019

Tvrdý termín odevzdání: 17. prosince 2019

✓ **Souvislost a trhání vrcholů** trh (4 body)

Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Definice 1 (Automorfismus, strnulý graf). *Automorfismus* grafu je isomorfismus s ním samým. Každý graf má aspoň jeden automorfismus (totiž identitu) a může mít i další. Grafu, který má jen jeden, říkáme *strnulý* nebo *asymetrický*.

Strnulec strn (8 bodů)

Sestrojte strnulý graf, který má alespoň 2 vrcholy, a dokažte to o něm.

✿ **Bipartitní podgraf** bipg (8 bodů)

Dokažte, že každý graf s m hranami obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{m}{2}$ hranami.

✓ ✿ **Doplňěk bipartitního grafu** bico (5 bodů) ●

Existuje bipartitní graf na alespoň 5 vrcholech, jehož doplněk je také bipartitní?

✓ **Kostry a hrana** ekost (6 bodů)

Necht' T a \tilde{T} jsou dvě různé kostry grafu G . Dokažte, že potom pro každou $e \in T \setminus \tilde{T}$ existuje $\tilde{e} \in \tilde{T} \setminus T$ taková, že $T - e + \tilde{e}$ je také kostra.

✓ **Graf s daným počtem koster** nkost (8 bodů)

Sestrojte pro každé $n \geq 3$ graf, který má právě n koster. Dokažte, proč graf mající právě 2 kostry neexistuje.

✓ **Nezávislá množina a vrcholové pokrytí** isvc (4 body)

Dokažte, že pro každý graf G platí, že $U \subseteq V(G)$ je nezávislá množina právě tehdy, když $V(G) \setminus U$ (doplňěk U) je vrcholové pokrytí. Množina $C \subseteq V(G)$ je vrcholové pokrytí grafu G pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E(G)$ platí, že $u \in C$ nebo $v \in C$.

✓ **Kružnice v $K_{n,n}$** kknn (4 body) ●

Určete počet různých kružnic v $K_{n,n}$.

Minimální stupeň a cesta kdelta (6 bodů)

Označme si nejmenší stupeň v grafu jako δ . Předpokládejme $\delta \geq 2$. Dokažte, že potom v grafu existuje kružnice délky alespoň $\delta + 1$.