# Grebnerove baze

Vesna Marinković

# Sadržaj

# Glava 1

# Uvod

Grebnerova baza predstavlja skup polinoma nad više promenljivih koji imaju određena pogodna svojstva. Grenbnerove baze omogućavaju jednostavna algoritamska rešenja za mnoge fundamentalne probleme u matematici i prirodnim i tehničkim naukama. Često se kaže da Grebnerove baze predstavljaju važan gradivni blok moderne algebre i posebno algebarske geometrije. Teoriju Grebnerovih baza razvio je Bruno Buhberger u svom doktoratu 1965. godine i dao im ime po svom mentoru Volfgangu Grebneru. Međutim, kao što je to često slučaj sa važnim otkrićima u to doba, smatra se da je do istog koncepta nezavisno došlo još nekoliko matematičara, i to Nikolaj Ginter još davne 1913. godine i Heisuke Hironaka 1964. godine.

Koncept Grebnerovih baza bi se ukratko mogao opisati na sledeći način: razmatramo skup $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ polinoma nad većim brojem promenljivih i odgovarajući skup polinomijalnih jednačina $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$. Skup polinoma $F$ transformišemo u drugi skup polinoma $G$ koji predstavlja Grebnerovu bazu skupa $F$, tako da skupovi polinoma $F$ i $G$ imaju isti skup rešenja ali da, dodatno, skup $G$ ima i neka lepa svojstva koja skup $F$ ne poseduje. Teorija Grebnerovih baza nam govori da je probleme koje je teško rešiti u terminima skupa polinoma $F$ jednostavno rešiti u terminima skupa polinoma Grebnerove baze $G$ i da, dodatno, postoji algoritam za transformisanje proizvoljnog skupa $F$ u njemu ekvivalentan skup $G$: jedan takav algoritam je Buhbergerov algoritam.

Dva glavna pitanja koja se javljaju pri radu sa polinomima i idealima generisanim ovim polinomima su:

- Da li za proizvoljni polinom $f$ nad promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ možemo utvrditi da li pripada idealu $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$? Ovo odgovara tome da ako važe neki uslovi koji se mogu zapisati kao $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ za neke polinome $f_1, f_2, \ldots, f_m$, onda važi i zaključak koji se iskazuje u vidu $f = 0$ za neki polinom $f$.

- Da li je moguće pronaći rešenja sistema polinomijalnih jednačina

  $$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0?$$

  Nekada je pak situacija takva da je veći broj nepoznatih nego jednačina, pa ne možemo eksplicitno rešiti neki sistem, ali možemo da zaključimo da važi neki odnos među nepoznatima.

Grebnerove baze omogućavaju uniformni pristup rešavanju problema koji se mogu izraziti u terminima sistema polinomijalnih jednačina nad većim brojem promenljivih. One imaju veliki broj različitih primena, kao što su rešavanje sistema nelinearnih jednačina, rešavanje problema celobrojnog linearnog programiranja, rešavanje trigonometrijskih jednačina, analiza i konstrukcija nelinearnih kriptosistema. Interesantno, i problemi koji koji na prvi pogled nemaju dodirnih tačaka sa algebrom, kao što su automatsko dokazivanje i otkrivanje teorema u geometriji, rešavanje nekih grafovskih problema poput bojenja grafa i rešavanje igara poput sudokua, mogu se svesti na izračunavanje Grebnerove baze.

## 1.1 Modelovanje problema

U nastavku ćemo videti nekoliko problema koje je moguće rešiti tehnikom Grebnerovih baza.

**Primer 1.** *Ana, Bojan i Ceca zajedno imaju 14 jabuka. Ako Bojan ima 4 jabuke više od Ane i Cece zajedno, proveriti da li onda Ana i Ceca imaju zajedno 5 jabuka.*

*Ako broj jabuka koje ima Ana označimo sa $A$, broj jabuka koje ima Bojan sa $B$, a broj jabuka koje ima Ceca sa $C$, onda ovaj problem možemo opisati sistemom jednačina:*

$$A + B + C = 14$$
$$B = A + C + 4$$

*Prethodni sistem možemo nešto drugačije zapisati, tako što ćemo vrednosti odgovarajućih polinoma izjednačiti sa nulom:*

$$f(A, B, C) = A + B + C - 14 = 0$$
$$g(A, B, C) = A - B + C + 4 = 0$$

*U ovom sistemu figuriše veći broj nepoznatih nego što imamo jednačina, te ovaj sistem ne možemo da rešimo. Ipak, možemo da zaključimo nešto o nepoznatima. Nas konkretno interesuje da li iz ove dve jednačine sledi uslov $A + C = 5$, odnosno uslov:*

$$h(A, B, C) = A + C - 5 = 0$$

*Može se pokazati da se polinom $h$ može predstaviti kao linearna kombinacija polinoma $f$ i $g$:*

$$h = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$$

*te kada važi $f(A, B, C) = 0$ i $g(A, B, C) = 0$ važiće i $h(A, B, C) = 0$. Ovo odgovara tome da polinom $h$ pripada idealu definisanom polinomima $f$ i $g$, te se zaključak $h$ može izvesti na osnovu pretpostavki $f$ i $g$.*

**Primer 2.** *Jedan od važnih problema u kriptografiji jeste kako osmisliti shemu prenosa informacija kroz komunikacione kanale tako da je moguće detektovati ako tokom prenosa dođe do greške i, dodatno, omogućiti da primalac te greške ispravi.*

*Standardni način kodiranja se sastoji u tome da se umesto direktnog slanja podataka* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *izračuna vrednost polinoma*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

*i šalju, na primer, vrednosti* $p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n), p(n+1), \ldots, p(n+5)$*. Primetimo da namerno šaljemo veći broj vrednosti polinoma nego što je minimalno potrebno da se rekonstruišu koeficijenti polinoma* $p$*. Ako je prenos bio uspešan, tada je na osnovu vrednosti* $p(k),\ 1 \leq k \leq n+5$ *moguće izračunati koeficijente polinoma* $p$ *procesom interpolacije. Ukoliko to nije slučaj, odnosno ako su neke od vrednosti* $p(k)$ *pogrešno prenesene, tada najčešće neće biti moguće izračunati koeficijente polinoma* $p$ *stepena* $n$ *koji zadovoljava sve date uslove.*

*Grebnerove baze predstavljaju jedan od mehanizama za utvrđivanje mogućih kandidata za ispravan vektor podataka na osnovu vektora primljenih podataka koji sadrži greške. Pretpostavimo da je primalac primio vrednosti* $p_0, p_1, \ldots, p_{n+5}$*. Cilj je konstruisati polinom* $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ *stepena najviše* $n$ *tako da važi* $p(k) = p_k$ *za veliki broj tačaka* $k$*. U ovim tačkama važiće uslov:*

$$a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_n k^n = p_k$$

*U tačkama u kojima se prilikom prenosa dogodila greška, ova jednačina neće važiti. Međutim, kada bismo znali da se greška dogodila na pet pozicija* $e_1, e_2, \ldots, e_5$*, tada bi jednačina:*

$$(k-e_1)(k-e_2)(k-e_3)(k-e_4)(k-e_5)(a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_n k^n - p_k) = 0$$

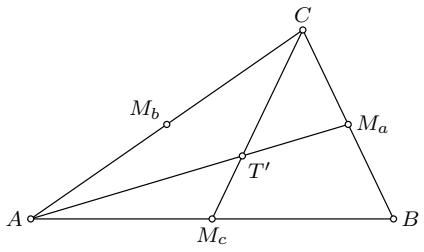
*bila tačna za svako* $k = 0, 1, \ldots, n+5$*.*

*Ako vrednosti* $e_1, e_2, \ldots, e_5$ *i* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *razmotrimo kao nepoznate, dobijamo sistem algebarskih jednačina*

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot e_5 \cdot (a_0 - p_0) &= 0 \\ (1-e_1)(1-e_2)(1-e_3)(1-e_4)(1-e_5)(a_0 + a_1 + \ldots + a_n - p_1) &= 0, \\ (2-e_1)(2-e_2)(2-e_3)(2-e_4)(2-e_5)(a_0 + a_1 \cdot 2 + \ldots + a_n \cdot 2^n - p_2) &= 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

*sa* $n+6$ *promenljivih i* $n+6$ *jednačina, koji se može rešiti korišćenjem Grebnerovih baza. Primetimo da je neophodno poslati barem* $n+1$ *podataka da bi problem mogao da se reši.*

**Primer 3.** *Poznato geometrijsko tvrđenje glasi da se težišne duži trougla seku u jednoj tački. Ta tačka naziva se težištem trougla i označava sa* $T$*. Pokažimo na koji način bismo*




Slika 1.1: Težišne duži trougla $ABC$ seku se u jednoj tački.

*mogli da dokažemo ovo tvrđenje.*

*Razmotrimo primer trougla $ABC$ u ravni. Najpre je potrebno svim značajnim tačkama koje se javljaju u zadatku dodeliti koordinate. Bez narušavanja opštosti, temenima trougla mogu se dodeliti koordinate $A(0,0)$, $B(b_x,0)$ i $C(c_x,c_y)$. Tačka $M_c$ kao središte duži $AB$ imaće koordinate $M_c(b_x/2,0)$, tačka $M_a$ kao središte duži $BC$ koordinate $M_a((b_x+c_x)/2,c_y/2)$, a tačka $M_b$ kao središte duži $AC$ koordinate $M_b(c_x/2,c_y/2)$. Označimo presek težišne duži iz temena $A$ i težišne duži iz temena $C$ sa $T'(t_x,t_y)$. Dokažimo da tačka $T'$ pripada i težišnoj duži iz temena $B$ (slika 5.1).*

*U opštem slučaju uslov da su tačke $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$ i $R(r_1,r_2)$ kolinearne možemo zadati izjednačavanjem koeficijenata pravaca pravih $PR$ i $QR$:*

$$\begin{aligned} \frac{r_2-p_2}{r_1-p_1} &= \frac{r_2-q_2}{r_1-q_1} \\ h &= (r_2-p_2)(r_1-q_1)-(r_2-q_2)(r_1-p_1)=0 \end{aligned}$$

*Prema pretpostavci zadatka tačka $T'(t_x,t_y)$ kolinearna je sa tačkama $A(0,0)$ i $M_a((b_x+c_x)/2,c_y/2)$, što odgovara uslovu:*

$$f = c_y/2\cdot((b_x+c_x)/2-t_x)-(c_y/2-t_y)(b_x+c_x)/2=0$$

*a u isto vreme tačka $T'$ je kolinearna sa tačkama $C(c_x,c_y)$ i $M_c(b_x/2,0)$ što odgovara uslovu:*

$$g = (-c_y)(b_x/2-t_x)-(-t_y)(b_x/2-c_x)=0$$

*Zaključak koji treba izvesti može se opisati uslovom da su tačke $B(b_x,b_y)$, $T'(t_x,t_y)$ i $M_b(c_x/2,c_y/2)$ kolinearne:*

$$h = c_y/2\cdot(c_x/2-t_x)-(c_y/2-t_y)(c_x/2-b_x)=0$$

*Može se pokazati da polinom $h$ pripada idealu generisanom polinomima $f$ i $g$, odnosno da iz $f=0$ i $g=0$ sledi i $h=0$ te polazno tvrđenje važi.*

**Primer 4.** *Razmotrimo površi zadate jednačinama:*

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-2x &= 0 \\ x-y+2z &= 0 \end{aligned}$$

*Tačke preseka ovih površi možemo naći tako što odredimo Grebnerovu bazu ideala generisanog polinomima* $\langle x^2+y^2+z^2-1, x^2+y^2+z^2-2x, x-y+2z\rangle$. *Kao Grebnerovu bazu dobijamo skup polinoma* $\{-1+4z+10z^2, -1+2y-4z, -1+2x\}$ *koji se može jednostavno rešiti. Naime, prvo bismo rešili prvu jednačinu i našli dve moguće vrednosti za* $z$, *iz druge jednačine bismo onda našli vrednost za* $y$, *a iz treće izračunali vrednost promenljive* $x$.

## 1.2 Specijalni slučajevi Grebnerovih baza

Većini studenata, iako ne pod ovim nazivom, već je poznat koncept Grebnerovih baza u dva specijalna slučaja, a to su:

- *Gausova metoda eliminacije* u slučaju sistema polinoma koji su linearni po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i
- *Euklidov algoritam* u slučaju sistema polinoma jedne promenljive.

Ako su svi polinomi u sistemu jednačina linearni po promenljivim, onda je Grebnerova baza ideala generisanog ovih polinomima u stvari novi sistem polinoma dobijen Gausovom metodom eliminacije. Novi sistem ima isti skup rešenja kao i polazni, ali se jednostavnije rešava. Takođe, iz novog sistema jednačina možemo odmah zaključiti da li ovaj sistem ima nula, jedno ili beskonačno mnogo rešenja. Proces transformisanja matrice sistema jednačina u oblik gornje trougaone matrice prati ideje Buhbergerovog algoritma za konstrukciju Grebnerove baze koji ćemo naknadno videti.

**Primer 5.** *Cena goriva se promenila u toku dana. Jutarnja cena iznosila je 160 dinara po litru, a popodnevna 200. Ako znamo da je prodato ukupno 1200 litara goriva i da ukupna zarada u tom danu iznosi 200000 dinara, koliko je goriva prodato po kojoj ceni?*

*Ako količinu goriva prodatu po jutarnjoj ceni označimo sa* $k_j$, *a količinu goriva prodatu po popodnevnoj ceni sa* $k_p$ *dobijamo naredni sistem linearnih jednačina:*

$$\begin{aligned} f_1(k_j,k_p) = k_j + k_p &= 1200 \\ f_2(k_j,k_p) = 160k_j + 200k_p &= 200000 \end{aligned}$$

*koji lako rešavamo Gausovom metodom eliminacije:*

$$\begin{aligned} f_1(k_j,k_p) = k_j + k_p &= 1200 \\ f_3(k_j,k_p) = 40k_p &= 40000 \end{aligned}$$

*pri čemu važi $f_3 = f_2 - 160f_1$. Ovaj proces možemo razumeti kao redukciju polinoma $f_2$ u odnosu na polinom $f_1$, a polinom $f_3$ kao ostatak pri deljenju polinoma $f_2$ polinomom $f_1$. Novi sistem jednačina možemo jednostavno rešiti i njegovo rešenje je $k_p = 200$ i $k_j = 1000$.*

**Primer 6.** *Razmotrimo polinome $f$ i $g$ nad promenljivim $x$, $y$ i $z$:*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 3x + 7y - 5z - 2 \\ g(x,y,z) &= 2x + 3y - 8z - 6 \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Razmotrimo na koji način pojednostaviti ovaj sistem linearnih jednačina. Najmanji zajednički sadržalac koeficijenata uz $x$ jednak je 6 pa možemo pomnožiti prvu jednačinu sa $6/3$ i od nje oduzeti drugu pomnoženu sa $6/2$ i na taj način iz druge jednačine eliminisati član uz $x$:*

$$S_{f,g} = \frac{6}{3}(3x + 7y - 5z - 2) - \frac{6}{2}(2x + 3y - 8z - 6) = 5y + 14z + 14$$

*Dakle, sistem polinoma (1.1) možemo zameniti njemu ekvivalentnim sistemom polinoma koji je jednostavniji (jer druga jednačina ne sadrži član po $x$):*

$$\begin{aligned} f &= 3x + 7y - 5z - 2 \\ S_{f,g} &= 5y + 14z + 14 \end{aligned} \tag{1.2}$$

**Primer 7.** *Razmotrimo malo složeniji sistem linearnih jednačina po promenljivim $x$, $y$ i $z$:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \quad (J1) \\ x + y - 1 &= 0 \quad (J2) \\ x + z - 3 &= 0 \quad (J3) \end{aligned}$$

*Krećemo od matrice sistema dopunjene vektorom slobodnih članova, a zatim Gausovom metodom eliminacije svodimo matricu sistema jednačina na gornje trougaonu.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow_{J_1=J_3,\ J_2=J_1-2J_2,\ J_3=J_1-2J_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow_{J_3=J_3-3J_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*Forma ove matrice nam govori da je promenljiva $z$ slobodna i postavljanjem da je $z = t$ dobijamo skup rešenja ovog sistema jednačina:*

$$\begin{aligned} x &= -t + 3 \\ y &= t - 2 \\ z &= t \end{aligned}$$

Drugi dobro poznat primer je slučaj sistema polinoma jedne promenljive. Najveći zajednički delilac polinoma $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je polinom $h$ koji deli sve $f_i$ i, dodatno, važi da ako je $p$ neki drugi polinom koji deli polinome $f_1, f_2, \ldots, f_m$ onda $p$ deli i polinom $h$. Dakle, najveći zajednički delilac skupa polinoma datog sistema jednačina je polinom čije su nule sva zajednička rešenja polinoma polaznog sistema. Pokazuje se da on predstavlja Grebnerovu bazu ideala generisanog polaznim sistemom polinoma. Pritom, i Euklidov algoritam za izračunavanje najvećeg zajedničkog delioca skupa polinoma prati ideje Buhbergerovog algoritma za izračunavanje Grebnerove baze.

**Primer 8.** *Neka je dat sistem jednačina:*

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= 0 \\ x^2 - 5x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

*Rešenje ovog sistema jednačina predstavlja polinom koji je najveći zajednički delilac polinoma $f(x) = x^2 + 7x + 6$ i $g(x) = x^2 - 5x - 6$ i koga je moguće izračunati Euklidovim algoritmom. Euklidov algoritam izračunava niz ostataka $r_i$, počev od $r_0 = f = x^2 + 7x + 6$ i $r_1 = g = x^2 - 5x - 6$ sukcesivnim deljenjem susednih elemenata u nizu ostataka sve dok ne dobije ostatak nula:*

$$\begin{aligned} r_0 &= q_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3 \\ &\ldots \\ r_{n-1} &= q_n r_n + 0 \end{aligned}$$

*Poslednji nenula ostatak $r_n$ biće jednak najvećem zajedničkom deliocu polinoma $f$ i $g$.*

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= 1 \cdot (x^2 - 5x - 6) + (12x + 12) \quad \Rightarrow \quad r_2 = 12x + 12 \\ x^2 - 5x - 6 &= (12x + 12) \cdot (1/12x - 1/2) + 0 \quad \Rightarrow \quad r_3 = 0 \end{aligned}$$

*Poslednji nenula ostatak je $r_2 = 12x + 12$ i on predstavlja najveći zajednički delilac ovih polinoma. Uobičajeno se vodeći koeficijent polinoma postavlja na jedinicu, te polinom $r_2/12 = x + 1$ proglašavamo najvećim zajedničkim deliocem ovih polinoma.*

**Praktična vežba 1.** Singular *je računarski sistem za algebarska izračunavanja otvorenog koda, sa značajnom primenom na polinomijalna izračunavanja*[1]*. Alat Singular ima sintasku veoma blisku programskom jeziku C: na primer naredbe kontrole toka* `if` *i* `for` *se analogno definišu. Svaka naredba se u alatu Singular završava sa* `;`*.*

*U Singularu je moguće vršiti različita izračunavanja, deklarisati promenljive i koristiti ih u narednim naredbama.*

```
> 1 + 1;
2
> int a = 9;
> a;
9
> a div 2;
4
> a mod 2;
1
> string s = "Zdravo";
> s;
Zdravo
```

*Niz celih brojeva deklariše se ključnom rečju* `intvec`*. Indeksiranje elemenata u nizu kreće od 1.*

```
> intvec v = a,3,1;
> v;
9,3,1
v[2];
3
```

*Komentari počinju od znaka* `//` *i važe do kraja reda. Naredba* `help` *startuje u veb pregledaču onlajn manual.*

*Pored velikog broja već podržanih funkcija raspoloživih kroz različite biblioteke, moguće je pisati i svoje funkcije i definisati svoje biblioteke. Mi ćemo se ovde zadržati na korišćenju već definisanih funkcija za rad sa polinomima, idealima i Grebnerovim bazama.*

*Prvi korak u radu sa polinomima u programu Singular je definisanje prstena nad kojim će biti definisani polinomi i to se postiže naredbom:*

```
ring <ime> = <koeficijenti>, <imena promenljivih>, <oznaka_poretka>
```

*Dakle, potrebno je zadati kom skupu pripadaju koeficijenti polinoma, skup promenljivih nad kojim su polinomi formulisani i željeni poredak monoma (kojim ćemo se kasnije detaljnije baviti). Ako su koeficijenti polinoma iz skupa $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva navodimo vrednost 0, ako želimo da zadamo skup $\mathbb{Z}$ celih brojeva navodimo* `integer`*, ako želimo da radimo sa skupom $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva navodimo* `complex`*, a ako pak želimo da radimo sa polinomima čiji su koeficijenti iz skupa $\mathbb{R}$ realnih brojeva izraženi na 5 decimala navodimo* `(real,5)`*. Skup promenljivih nad kojim su polinomi definisani navodimo*

*u malim zagradama međusobno razdvojene zapetom i to u opadajućem poretku značaja promenljivih.*

*Funkcija* `gcd` *računa najveći zajednički delilac dva broja ili dva polinoma.*

*Izračunajmo najveći zajednički delilac polinoma iz primera 8. Najpre je potrebno definisati okruženje u kome radimo: kom polju pripadaju koeficijenti polinoma, nad kojim promenljivim su polinomi definisani i koju vrstu poretka monoma koristimo (o ovome poslednjem će biti više reči u narednom poglavlju).*

```
> ring r = 0, (x,y,z), lp;
> poly f = x2 + 7x + 6;
> poly g = x2 - 5x - 6;
> gcd(f,g);
x+1
```

*Kao što smo mogli da vidimo, umesto* `x^2` *možemo skraćeno pisati* `x2`*, a umesto* `7*x` *skraćeno* `7x`*.*

Stoga se izračunavanje Grebnerove baze može videti s jedne strane kao uopštenje Gausovog metoda eliminacije na nelinearne sisteme jednačina, a s druge strane i kao uopštenje Euklidovog algoritma za izračunavanje najvećeg zajedničkog delioca polinoma na polinome više promenljivih.

[1] Alat Singular je dostupan na adresi `https://www.singular.uni-kl.de/`, a tutorijal programa Singular na adresi `https://www.singular.uni-kl.de/DEMOS/SummerSchool-Trieste-09/Singular_Tutorial.pdf`.

# Glava 2

# Uvodni pojmovi

Da bismo mogli da precizno definišemo pojam Grebnerovih baza, potrebno je da uvedemo neke algebarske koncepte.

Razmatraćemo polinome po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ čiji su koeficijenti iz polja $K$, gde je $K$ najčešće polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Skup svih polinoma nad promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa koeficijentima u $K$ označavaćemo sa $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Definisanjem operacija sabiranja i množenja polinoma na uobičajen način dobijamo da je $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ komutativni prsten polinoma. Primetimo da $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nije polje jer za proizvoljni polinom iz $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ne postoji uvek multiplikativni inverz. Na primer, ne postoji inverz polinoma $f = x + y$ jer $\frac{1}{x+y} \notin \mathbb{R}[x, y]$ nije polinom.

**Definicija 1** (Ideal)**.** *Neka je $(K, +, \cdot)$ komutativni prsten i $I$ neprazan podskup od $K$. Tada je $I$* ideal *ako:*

1. *za sve $x, y \in I$ važi $x + y \in I$,*
2. *za sve $a \in K$ i $x \in I$ važi $a \cdot x \in I$.*

**Primer 9.** *Skup parnih brojeva $2\mathbb{Z}$ predstavlja ideal prstena $\mathbb{Z}$, dok skup neparnih brojeva nije ideal. U opštem slučaju, skup $k\mathbb{Z}$ celih brojeva deljivih sa $k$ je jedan ideal.*

**Primer 10.** *Skup polinoma iz $\mathbb{Z}[x]$ čiji su svi koeficijenti parni čini jedan ideal.*

**Teorema 1.** *Neka su $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomi iz prstena polinoma $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Tada*

$$\langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle = \{h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_m f_m \mid h_i \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$$

*predstavlja jedan ideal. Za ovaj ideal ćemo reći da je* generisan polinomima *$f_1, f_2, \ldots, f_m$.*

Naime, ideal u prstenu polinoma je podskup prstena koji je zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje svim polinomima iz tog prstena. Ovaj ideal je generisan datim skupom polinoma. Grebnerova baza predstavlja bolji skup generatora (bolju bazu) ovog ideala.

**Primer 11.** *Razmotrimo prsten polinoma nad dve promenljive, na primer $K[x, y]$. Onda je ideal generisan polinomima $x^2 - 1$ i $yx + y$ jednak:*

$$\langle x^2 - 1, yx + y\rangle = \{h_1 \cdot (x^2 - 1) + h_2 \cdot (yx + y) \mid h_1, h_2 \in K[x, y]\}.$$

*Elementi ovog ideala su svi polinomi koji se mogu napisati u obliku $h_1 \cdot (x^2-1)+h_2 \cdot (yx+y)$, pri čemu su $h_1$ i $h_2$ proizvoljni polinomi iz prstena $K[x, y]$. Na primer, ako uzmemo $h_1 = 1$ i $h_2 = 0$ dobijamo da ovom idealu pripada polinom $x^2 - 1$, a, slično, ako odaberemo $h_1 = -y$ i $h_2 = x$ dobijamo da ovom idealu pripada i polinom $yx + y$.*

**Primer za vežbu 1.** *Odrediti barem četiri različita polinoma koji pripadaju idealu $I = \langle 2x + y^2 - 1, 3x^2y - xy + 2\rangle$.*

**Primer 12.** *Razmotrimo ideal $I = \langle f_1, f_2\rangle = \langle 1 + x, 1 + y\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y]$. Polinomi $0, x - y, x + xy$ su elementi ideala $I$, dok polinomi $1, xy$ i $1 + x^2$ nisu.*

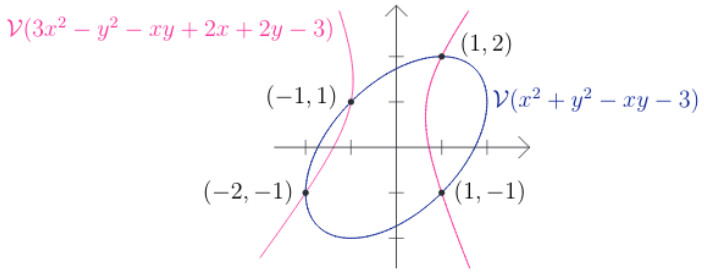
**Definicija 2** (Afini varijetet)**.** Afini varijetet $V(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *skupa polinoma* $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *nad n promenljivih je podskup skupa $K^n$ koji sadrži sve zajedničke nule polinoma $f_1, f_2, \ldots, f_m \in K[x_1, x_2 \ldots, x_n]$, odnosno:*

$$V(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \text{ za sve } 1 \leq i \leq m\}$$

Afini varijetet predstavlja rešenje sistema polinomijalnih jednačina.

**Primer 13.** *Skup od četiri tačke $(-2, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 2)$ u $\mathbb{R}^2$ je afini varijetet polinoma $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3$ i polinoma $f_2(x, y) = 3x^2 - y^2 - xy + 2x + 2y - 3$. Naime, on predstavlja presek elipse zadate jednačinom $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$ i hiperbole koja je data jednačinom $3x^2 - y^2 - xy + 2x + 2y - 3 = 0$ (slika 2.1).*

**Primer za vežbu 2.** *Izračunati afini varijetet $V(2x + y - 1, 3x - y + 2)$.*




Slika 2.1: Presek elipse (plavo) i hiperbole (crveno). Sve tačke sa elipse su afini varijeteti polinoma $f_1$, a sa hiperbole polinoma $f_2$. Presek elipse i hiperbole kao presek dva afina varijeteta je ponovo afini varijetet (preuzeto sa `https://www.math.tamu.edu/~sottile/teaching/15.1/Chapters/Ch1.pdf`).

## 2.1 Poredak monoma

Da bismo mogli da definišemo operaciju deljenja u prstenu više promenljivih, potrebno je da definišemo uređenje na skupu monoma. Naime, ako razmotrimo algoritam deljenja u prstenu jedne promenljive $K[x]$, možemo uočiti da poredak termova u polinomima predstavlja važan faktor (iako se često eksplicitno ne ističe). Na primer, pri deljenju polinoma $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ polinomom $g(x) = x^2 - 4x + 7$ na standardni način, mi bismo:

1. zapisali termove u oba polinoma u opadajućem redosledu stepena po $x$,
2. vodeći term (term sa najvećim stepenom po $x$) u polinomu $f$ je

   $$x^5 = x^3 \cdot x^2 = x^3 \cdot \text{vodeci term u } g.$$

   Zatim bismo od polinoma $f(x)$ oduzeli izraz $x^3 \cdot g(x)$ da bi se poništio vodeći term i ostali bismo sa polinomom:

   $$f_1(x) = f(x) - x^3 \cdot g(x) = x^5 - 3x^2 + 1 - x^3(x^2 - 4x + 7) = 4x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 1,$$

3. ponovili bismo isti postupak sa polinomima $f_1(x)$, $f_2(x)$, itd. sve dok ne dobijemo polinom čiji je stepen manji od 2, odnosno u opštem slučaju manji od stepena polinoma $g$ kojim vršimo deljenje.

Pošto polinom predstavlja sumu monoma, potrebno je da na jednoznačan način uredimo termove unutar polinoma u opadajućem (ili rastućem) poretku. Iz tog razloga potrebno je da budemo u mogućnosti da međusobno uporedimo svaki par monoma da bismo utvrdili njihov relativni poredak.

Ako bismo razmatrali polinome nad samo jednom promenljivom $x$, definisanje poretka monoma bi odgovaralo definisanju poretka nad stepenima promenljive $x$ i zadaje se kao:

$$1 < x < x^2 < \ldots < x^{k-1} < x^k < x^{k+1} < \ldots \tag{2.1}$$

U slučaju monoma nad većim brojem promenljivih, postoji veći broj poredaka koje možemo razmatrati.

Ako bismo pak razmatrali sistem linearnih jednačina nad promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$, poredak monoma bi se sveo na uređenje promenljivih:

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n.$$

Napomenimo i to da kada u praksi radimo sa polinomima nad dve ili tri promenljive, promenljive uobičajeno nazivamo $x, y, z$ umesto $x_1, x_2, x_3$. Ukoliko ne bude drugačije eksplicitno rečeno podrazumevaćemo uređenje promenljivih $x > y > z$.

Kad priču uopštimo na sistem nelinearnih polinoma nad većim brojem promenljivih, možemo definisati različita uređenja monoma: na primer u odnosu na neki poredak može da važi $xy^2 < y^4$ ili pak da važi $xy^2 > y^4$.

Razmotrimo skup monoma nad $n$ promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za koje važi $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$: definisanje uređenja u skupu monoma $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ odgovara definisanju uređenja nad $n$-torkama vrednosti $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ njegovih ekponenata.

**Definicija 3** (Poredak monoma)**.** Poredak monoma *na* $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *je proizvoljna relacija* $>$ *na skupu njegovih eksponenata* $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ *koja zadovoljava:*

1. $>$ *je totalni poredak na* $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *(za svako* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *važi* $\alpha > \beta$*,* $\alpha = \beta$ *ili* $\alpha < \beta$*),*
2. *ako je* $\alpha > \beta$ *i* $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *onda važi* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$*,*
3. $>$ *je dobro uređenje na* $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *(svaki neprazan podskup od* $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *ima najmanji element, tj. ako je* $A$ *neprazan skup, onda postoji* $\alpha \in A$ *tako da je* $\beta > \alpha$ *za svako* $\beta \neq \alpha$ *u* $A$*).*

Da bi postupak deljenja polinoma bio jednostavniji, zahtevaćemo da se množenjem polinoma monomom ne menja vodeći term originalnog polinoma. Naime, ako je $x^\alpha > x^\beta$ onda zahtevamo da važi i $x^\alpha x^\gamma > x^\beta x^\gamma$. U terminima vektora eksponenata, ovo znači da ako je $\alpha > \beta$, onda za svako $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ važi $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Zato nam je potrebno drugo svojstvo poretka monoma.

Važi da je relacija poretka na $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ dobro uređena ako i samo ako se svaki strogo opadajući niz elemenata u $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ zaustavlja. Zahtev da je poredak monoma dobro uređen skup je potreban jer on garantuje da će se procedura deljenja polinoma više promenljivih i, analogno, Buhbergerov algoritam zaustaviti.

Postoji veći broj interesantnih poredaka monoma.

**Definicija 4** (Leksikografski poredak (lex))**.** *Neka su* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$*. Kažemo da je* $\alpha >_{lex} \beta$ *ako je u vektoru* $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ *najlevija nenula vrednost pozitivna.*

Napomenimo da postoji veći broj leksikografskih poredaka monoma, u zavisnosti od toga kako su promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uređene. Naime, mi smo do sada razmatrali poredak $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, međutim, drugačiji poredak promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bi dao drugačiji leksikografski poredak. Tačnije, u slučaju polinoma nad $n$ promenljivih postoji tačno $n!$ različitih leksikografskih poredaka.

**Primer 14.** *Za $x > y > z$ važi:*

- $x^5y^2z^3 >_{lex(x>y>z)} x^2y^3z^4$ *jer je* $(5,2,3) - (2,3,4) = (3,-1,-1)$ *a najleviji nenula element u trojci* $(3,-1,-1)$ *je pozitivan,*
- $x^3y^5z^7 >_{lex(x>y>z)} x^3y^2z^9$ *jer je* $(3,5,7) - (3,2,9) = (0,3,-2)$ *a najleviji nenula element u trojci* $(0,3,-2)$ *je pozitivan,*
- $x >_{lex(x>y>z)} y^{200}z^{500}$ *jer je* $(1,0,0) - (0,200,500) = (1,-200,-500)$*, a najleviji nenula element u trojci* $(1,-200,-500)$ *je pozitivan.*

Primetimo da u leksikografskom poretku monoma ukupan stepen monoma nije ni od kakvog značaja. Leksikografski poredak monoma se koristi kada je potrebno transformisati sistem jednačina u gornje trougaonu formu, kako bi se on jednostavnije rešio. Međutim, pokazuje se da je za računanje Grebnerove baze korišćenje leksikografskog poretka monoma dosta skuplje, te se često izbegava, osim za vrlo jednostavna izračunavanja.

**Definicija 5** (Graduirani leksikografski poredak (grlex))**.** *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Kažemo da je $\alpha >_{grlex} \beta$ ako je:*

- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$ *ili*
- $|\alpha| = |\beta|$ *i* $\alpha >_{lex} \beta$.

**Primer 15.** *Za $x > y > z$ važi:*

- $x <_{grlex(x>y>z)} y^{200}z^{500}$ *jer je* $|(1,0,0)| = 1$*, a* $|(0,200,500)| = 700$*,*
- $x^3y^4z^5 >_{grlex(x>y>z)} x^4y^3z^4$ *jer je* $|(3,4,5)| = 12 > |(4,3,4)| = 11$*,*
- $x^5y^4z^2 >_{grlex(x>y>z)} x^3y^4z^4$ *jer je* $|(5,4,2)| = |(3,4,4)|$ *i* $(5,4,2) - (3,4,4) = (2,0,-2)$*, a krajnji levi nenula element u trojci* $(2,0,-2)$ *je pozitivan.*

Graudirani poredak monoma je pogodno koristiti kada nije cilj iz nekog polinoma eliminisati neku konkretnu promenljivu, već pre svega smanjiti stepen polinoma $p - q$ u polinomijalnoj jednačini $p = q$. Dakle, cilj ovog poretka je smanjiti ukupni stepen izraza.

**Definicija 6** (Obrnuti graduirani leksikografski poredak (grevlex))**.** *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Kažemo da je $\alpha >_{grevlex} \beta$ ako je*

- $|\alpha| > |\beta|$ *ili*
- $|\alpha| = |\beta|$ *i u vektoru* $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ *najdesnija nenula vrednost je negativna.*

**Primer 16.** *Za $x > y > z$ važi:*

- $x^4y^2z^5 >_{grevlex(x>y>z)} x^4y^3z^2$ *jer je* $|(4,2,5)| = 11 > |(4,3,2)| = 9$,
- $xy^4z^2 >_{grevlex(x>y>z)} x^2yz^4$ *jer je* $|(1,4,2)| = |(2,1,4)|$ *i važi* $(1,4,2) - (2,1,4) = (-1,3,-2)$ *a krajnji desni nenula element je negativan. Primetimo da bi za ova dva monoma važilo* $xy^4z^2 <_{grlex(x>y>z)} x^2yz^4$.

Kao i u slučaju leksikografskog poretka, u zavisnosti od toga kako su promenljive uređene postoji $n!$ različitih graduiranih i obrnuto graduiranih leksikografskih poredaka monoma.

Primetimo da za utvrđivanje leksikografskog poretka ukupni stepen monoma nije od važnosti. U slučaju graduiranog leksikografskog poretka i obrnutog graduiranog leksikografskog poretka, ukupni stepen monoma igra veći značaj nego niz eksponenata tog monoma.

Pokazuje se da je graduirani leksikografski poredak lakše izračunati nego prethodna dva poretka monoma, pa se iz tog razloga često koristi.

**Definicija 7** (Težinski poredak monoma)**.** *Neka je $c \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ proizvoljni vektor. Njime je definisan težinski poredak monoma $>_c$ na sledeći način: $\alpha >_c \beta$ ako je:*

- $c \cdot \alpha > c \cdot \beta$ *ili je*
- $c \cdot \alpha = c \cdot \beta$ *i* $\alpha >_{lex} \beta$,

*gde je sa $c \cdot \alpha$ označen skalarni proizvod vektora $c$ i $\alpha$.*

**Primer 17.** *Za $x > y > z$ i $c = (1,5,10)$ važi:*

- $xz^3 >_c x^5yz^2$ *jer je* $(1,5,10) \cdot (1,0,3) = 31$ *i* $(1,5,10) \cdot (5,1,2) = 30$ *i* $31 > 30$.

Definisanje poretka nad monomima nam omogućava da unutar polinoma uredimo monome na jedinstven način.

**Primer 18.** *Razmotrimo primer polinoma*

$$f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in K[x,y,z]$$

*i poretka promenljivih $x > y > z$. Ako preuredimo termove polinoma u opadajućem redosledu u odnosu na leksikografski poredak monoma dobijamo naredni zapis polinoma $f$:*

$$f = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$$

*Ako bismo umesto toga razmatrali graduirani leksikografski poredak monoma, dobili bismo:*

$$f = 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2$$

*dok bismo u odnosu na obrnuti graduirani leksikografski poredak monoma dobili:*

$$f = 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^2$$

**Primer za vežbu 3.** *Urediti monome polinoma* $f(x, y, z) = 3yz^3 - x^2y^2 + x^3 + y^2z^3$ *u odnosu na (a) leksikografski poredak termova (b) graduirani leksikografski poredak termova ako važi* $x > y > z$.

**Primer za vežbu 4.** *Urediti monome polinoma* $f(x, y, z) = x^6 + y^5 - 2x^5z^3 + 4x^4y^3z^4 + 3x^3y^4z^4 - 6z^4 + xyz - 4y^3$ *korišćenjem leksikografskog, graduiranog leksikografskog i obrnutog graduiranog leksikografskog poretka monoma ako važi* $x > y > z$.

**Praktična vežba 2.** *Pri radu sa polinomima u alatu Singular neophodno je zadati željeni poredak monoma. Oznaka poretka monoma završava se karakterom* `p`*, čime se referiše na prsten polinoma, i može biti:*

- `lp` *za leksikografski poredak monoma,*
- `Dp` *za graduirani leksikografski poredak monoma,*
- `dp` *za obrnuti leksikografski poredak monoma.*

*Monomi unutar polinoma se ispisuju uređeno u opadajućem poretku u odnosu na izabrani poredak monoma, od najvećeg ka najmanjem.*

*Na primer, možemo izlistati monome polinoma* $4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2$ *definisanog nad promenljivim* $x$, $y$ *i* $z$ *u leksikografskom poretku za koji važi* $x > y > z$ *na sledeći način:*

```
> ring A1 = 0, (x,y,z), lp;
> poly f = 4xy2z + 4z2 - 5x3 + 7x2z2;
> f;
-5x3+7x2z2+4xy2z+4z2
```

*Ako bismo želeli da članove polinoma izlistamo u graduiranom leksikografskom poretku monoma, umesto parametra* `lp` *naveli bismo* `Dp`*:*

```
> ring A2 = 0, (x,y,z), Dp;
> poly g = 4xy2z + 4z2 - 5x3 + 7x2z2;
> g;
7x2z2+4xy2z-5x3+4z2
```

*Primetimo da je dobijeni poredak monoma u polinomu sad drugačiji. Ako bismo želeli da članove polinoma uredimo u obrnutom graduiranom leksikografskom poretku monoma, kao oznaku poretka naveli bismo* `dp`*:*

```
> ring A3 = 0, (x,y,z), dp;
> poly h = 4xy2z + 4z2 - 5x3 + 7x2z2;
> h;
4xy2z+7x2z2-5x3+4z2
```

*Ako bismo pak hteli da koristimo težinski poredak monoma sa težinskom koeficijentima* $(5, 3, 2)$ *trebalo bi kao oznaku poretka navesti* `Wp` *za kojim slede koordinate težinskog vektora.*

```
> ring A4 = 0, (x,y,z), Wp(5,3,2);
> poly u = 4xy2z + 4z2 - 5x3 + 7x2z2;
> u;
-5x3+7x2z2+4xy2z+4z2
```

**Primer za vežbu 5.** *Dokazati da je* $(0, 0, \ldots, 0)$ *najmanji element u* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *u odnosu na razmatrane poretke monoma.*

**Definicija 8** (Multistepen, vodeći koeficijent, vodeći monom, vodeći term)**.** *Neka je* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *i neka je* $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ *nenula polinom iz* $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$*, gde je* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *i* $a_\alpha \in K$*.* Multistepen *polinoma* $f$ *je*

$$md(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \mid a_\alpha \neq 0\}$$

*pri čemu se maksimum gleda u odnosu na odabrani poredak monoma.* Vodeći koeficijent *polinoma* $f$ *je* $LC(f) = a_{md(f)} \in K$*,* vodeći monom *polinoma* $f$ *je* $LM(f) = x^{md(f)}$*, a* vodeći term *polinoma* $f$ *je* $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f) = a_{md(f)} \cdot x^{md(f)}$*.*

Dakle, multistepen polinoma je najveća $n$-torka eksponenata u odnosu na izabrani poredak monoma, dok je vodeći koeficijent polinoma koeficijent uz član polinoma sa najvećim eksponentom.

**Primer 19.** *Neka je* $f(x, y, z) = 2x^4 - 4x^2y^3 + 5x^2y^2z - 3z^4$ *i neka važi* $x > y > z$*. Ako je* $>$ *graduirani leksikografski poredak monoma tada važi* $md(f) = (2, 3, 0)$*,* $LC(f) = -4$*,* $LM(f) = x^2y^3$*, a* $LT(f) = -4x^2y^3$*.*

**Praktična vežba 3.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular. Multistepen polinoma dobijamo funkcijom* `leadexp`*, vodeći koeficijent polinoma funkcijom* `leadcoef`*, vodeći monom funkcijom* `leadmonom`*, a vodeći term funkcijom* `lead`*.*

```
> ring A = 0, (x,y,z), Dp;
> poly f = 2x4 - 4x2y3 + 5x2y2z - 4z4;
> leadexp(f);
2,3,0
> leadcoef(f);
-4
> leadmonom(f);
x2y3
> lead(f);
-4x2y3
```

**Primer za vežbu 6.** *Neka je* $f(x,y,z) = 2x^4 - 4x^2y^3 + 5x^2y^2z - 4z^4$ *i neka važi* $z > y > x$*. Izračunati multistepen, vodeći koeficijent, vodeći monom i vodeći term u odnosu na leksikografski poredak monoma.*

**Primer za vežbu 7.** *Neka je* $f(x,y,z) = 2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$ *i neka važi* $x > y > z$*. Izračunati multistepen, vodeći koeficijent, vodeći monom i vodeći term u odnosu na graduirani leksikografski i u odnosu na obrnuti graduirani leksikografski poredak monoma.*

## 2.2 Deljenje polinoma u prstenu više promenljivih

Sada kada smo definisali poredak monoma, možemo definisati deljenje polinoma skupom polinoma u prstenu više promenljivih. Zadatak je za proizvoljni polinom $f$ i skup polinoma $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ izračunati količnike $q_1, q_2, \ldots, q_m$ i ostatak $r$ tako da važi $f = q_1f_1 + q_2f_2 + \ldots + q_mf_m + r$. Osnovna ideja algoritma deljenja polinoma $f$ skupom polinoma $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ista je kao i u slučaju polinoma definisanih nad jednom promenljivom: želimo da poništimo vodeći term u polinomu $f$ množenjem nekog od polinoma $f_i$ odgovarajućim monomom i oduzimanjem tog proizvoda od polinoma $f$. Onda ovaj monom postaje term u odgovarajućem količniku $q_i$.

**Primer 20.** *Podelimo polinom* $f = xy^2 + 1$ *polinomima* $f_1 = xy + 1$ *i* $f_2 = y + 1$*, korišćenjem leksikografskog poretka za koji važi* $x > y$*. I vodeći term polinoma* $f_1$ *koji*

*je jednak $LT(f_1) = xy$ i vodeći term polinoma $f_2$ koji je jednak $LT(f_2) = y$ dele vodeći term polinoma $f$: $LT(f) = xy^2$, te imamo mogućnost izbora kojim od polinoma $f_1$ i $f_2$ ćemo najpre vršiti deljenje. Izaberimo da najpre vršimo deljenje polinomom $f_1$. Pošto važi $LT(f) = y \cdot LT(f_1)$ delimo $xy^2$ sa $xy$, kao količnik dobijamo $y$, a potom oduzimanjem izraza $y \cdot f_1$ od $f$ dobijamo novi polinom $f' = -y + 1$. Nastavljamo isti postupak sa polinomom $f'$. Ovoga puta moramo da koristimo polinom $f_2$ jer $LT(f_1) = xy$ ne deli $LT(f') = -y$. Kao ostatak pri deljenju polinoma $f'$ polinomom $y + 1$ dobijamo vrednost 2 i pošto ni $LT(f_1)$ ni $LT(f_2)$ ne dele 2, ostatak pri deljenju polinoma $f$ polinomima $f_1$ i $f_2$ je $r = 2$. Dakle, došli smo do narednog izraza:*

$$xy^2 + 1 = y \cdot (xy + 1) + (-1) \cdot (y + 1) + 2.$$

**Primer 21.** *Ilustrujmo još jedan scenario koji se može dogoditi kada vršimo deljenje polinoma u prstenu više promenljivih.*

*Razmotrimo deljenje polinoma $f = x^2y+xy^2+y^2$ polinomima $f_1 = xy-1$ i $f_2 = y^2-1$. Kao i u prethodnom primeru kao poredak monoma razmatraćemo leksikografski poredak za koji važi $x > y$. Vodeći term polinoma $f_1$ deli vodeći term polinoma $f$ i važi $LT(f) = x \cdot LT(f_1)$ pa vršimo deljenje polinoma $f$ polinomom $f_1$ i ostajemo sa polinomom:*

$$f' = f - xf_1 = (x^2y + xy^2 + y^2) - x(xy - 1) = xy^2 + x + y^2$$

*Pošto vodeći term polinoma $f_1$ deli vodeći term polinoma $f'$ vršimo deljenje polinoma $f'$ polinomom $f_1$ i dobijamo:*

$$f'' = f' - yf_1 = (xy^2 + x + y^2) - y(xy - 1) = x + y^2 + y,$$

*odnosno dobijamo*

$$f = (x + y) \cdot f_1 + (x + y^2 + y).$$

*Primetimo da u ovom trenutku niti $LT(f_1) = xy$ niti $LT(f_2) = y^2$ dele $LT(x+y^2+y) = x$. Ipak, $x+y^2+y$ ne može biti ostatak pri deljenju polinoma $f$ polinomima $f_1$ i $f_2$ jer $LT(f_2)$ deli $y^2$. Stoga ovaj izraz nazivamo "međuostatkom", član $x$ prebacujemo u ostatak, i nakon toga razmatramo da li možemo nastaviti sa deljenjem[1]. Ako je vodeći term "međuostatka" deljiv sa $LT(f_1)$ ili sa $LT(f_2)$, nastavljamo na uobičajen način, a ako ga nijedan od vodećih termova polinoma $f_1$ i $f_2$ ne deli, prebacujemo vodeći term "međuostatka" u kolonu ostatka. U ovom primeru se, dakle, kao konačna vrednost ostatka dobija $x + y + 1$ i važi:*

$$x^2y + xy^2 + y^2 = (x + y) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + x + y + 1.$$

*Zaključujemo da je ostatak pri deljenju polinoma $f$ polinomima $f_1$ i $f_2$ suma monoma, pri čemu nijedan od njih nije deljiv niti vodećim termom polinoma $f_1$ niti vodećim termom polinoma $f_2$.*

[2]Primetimo da se ovakva situacija nikada ne javlja u slučaju polinoma jedne promenljive.

Prethodni primer u potpunosti ilustruje algoritam deljenja. On nam takođe pokazuje koja svojstva želimo da poseduje ostatak: nijedan od njegovih termova ne sme biti deljiv vodećim termom nijednog od polinoma kojima vršimo deljenje. Sada možemo i formalno formulisati algoritam deljenja u prstenu više promenljivih.

**Teorema 2** (Algoritam deljenja u prstenu više promenljivih)**.** *Neka je fiksiran poredak monoma* $>$ *na* $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ *i neka je* $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *uređena* $m$*-torka polinoma. Tada se svako* $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *može zapisati kao:*

$$f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + \ldots + q_m f_m + r$$

*gde su* $q_i, r \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *i pritom važi* $r = 0$ *ili je* $r$ *linearna kombinacija monoma sa koeficijentima u* $K$*, tako da nijedan od njih nije deljiv niti sa jednim od termova* $LT(f_1), LT(f_2), \ldots, LT(f_m)$*. Vrednost* $r$ *zovemo* ostatkom *pri deljenju polinoma* $f$ *skupom polinoma* $F$*. Dodatno, ako je* $q_i f_i \neq 0$ *tada je* $md(f) \geq md(q_i f_i)$*.*

**Algoritam** *Deljenje polinoma* $f$ *skupom polinoma* $F$
**Ulaz:** polinom $f$, skup polinoma $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$
**Izlaz:** količnici $q_1, q_2, \ldots, q_m$ i ostatak $r$

1. $q_1 \leftarrow 0, \ldots, q_m \leftarrow 0$
2. $r \leftarrow 0$
3. $h \leftarrow f$ {međuostatak pri deljenju}
4. **while** $h \neq 0$
5. **if** postoji $j$ tako da $LT(f_j)$ deli $LT(h)$
6. za najmanje $j$ tako da $LT(f_j)$ deli $LT(h)$ {vršimo deljenje}
7. $q_j \leftarrow q_j + \frac{LT(h)}{LT(f_j)}$
8. $h \leftarrow h - \frac{LT(h)}{LT(f_j)} f_j$
9. **else** {dodajemo $LT(h)$ ostatku }
10. $r \leftarrow r + LT(h)$
11. $h \leftarrow h - LT(h)$
12. **return** $q_1, q_2, \ldots, q_m, r$

**Primer 22.** *U prstenu* $\mathbb{Q}[x, y]$ *u kom razmatramo leksikografski poredak monoma za koji važi* $x > y$*, podelimo polinom* $f = x^2y + xy^3 + xy^2$ *polinomima* $f_1 = xy + 1$ *i* $f_2 = y^2 + 1$*, pri čemu najpre vršimo deljenje polinomom* $f_1$ *pa polinomom* $f_2$*.*

*Inicijalna vrednost polinoma* $h$ *jednaka je* $f$*. Primetimo da* $LT(f_1) | LT(h)$ *te je:*

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 + \frac{x^2y}{xy} = x \\ h &= (x^2y + xy^3 + xy^2) - x(xy + 1) = xy^3 + xy^2 - x. \end{aligned}$$

*U narednoj iteraciji vidimo da i dalje* $LT(f_1) | LT(h)$ *te je:*

$$\begin{aligned} q_1 &= x + \frac{xy^3}{xy} = x + y^2 \\ h &= (xy^3 + xy^2 - x) - y^2(xy + 1) = xy^2 - x - y^2. \end{aligned}$$

*I u narednoj iteraciji važi $LT(f_1)|LT(h)$ te je:*

$$\begin{aligned} q_1 &= x + y^2 + \frac{xy^2}{xy} = x + y^2 + y \\ h &= (xy^2 - x - y^2) - y(xy + 1) = -x - y^2 - y. \end{aligned}$$

*Primetimo da sad važi $LT(f_1) \not| LT(h)$ i istovremeno važi $LT(f_2) \not| LT(h)$, te u vrednost ostatka prebacujemo vodeći term međuostatka $h$:*

$$\begin{aligned} r &= 0 + (-x) = -x \\ h &= -x - y^2 - y - (-x) = -y^2 - y. \end{aligned}$$

*U narednoj iteraciji važi da $LT(f_1) \not| LT(h)$, ali zato važi $LT(f_2)|LT(h)$, te je:*

$$\begin{aligned} q_2 &= 0 + \frac{-y^2}{y^2} = -1 \\ h &= (-y^2 - y) - (-1) \cdot (y^2 + 1) = -y + 1. \end{aligned}$$

*U narednom prolazu $LT(f_1) \not| LT(h)$ i istovremeno $LT(f_2) \not| LT(h)$ te ažuriramo vrednost ostatka:*

$$\begin{aligned} r &= -x + (-y) = -x - y \\ h &= (-y + 1) - (-y) = 1. \end{aligned}$$

*U narednoj iteraciji takođe važi $LT(f_1) \not| LT(h)$ i $LT(f_2) \not| LT(h)$ te dobijamo:*

$$\begin{aligned} r &= -x - y + 1 \\ h &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

*Konačno, dobijamo:*

$$\begin{aligned} q_1 &= x + y^2 + y \\ q_2 &= -1 \\ r &= -x - y + 1 \end{aligned}$$

*odnosno važi:*

$$x^2y + xy^3 + xy^2 = (x + y^2 + y) \cdot (xy + 1) - 1 \cdot (y^2 + 1) + (-x - y + 1)$$

**Primer 23.** *Razmotrimo primer polinoma $f = x^2+xy+2x^3$ i skupa polinoma $F = (f_1, f_2)$ gde je $f_1 = xy-x^3$, $f_2 = x+y^2$ i neka je izabran leksikografski poredak monoma za koji važi $x > y$. Ukoliko najpre vršimo deljenje polinomom $f_1$, a zatim polinomom $f_2$, dobijamo:*

$$f = -2f_1 + (x - y^2 + 3y)f_2 + (y^4 - 3y^3)$$

*Ukoliko promenimo značaj polinoma $f_1$ i $f_2$ dobijamo:*

$$f = (2x^2 + 2xy^4 - 2xy^2 + x - y^2 + y)f_2 + 0 \cdot f_1 + (-2y^6 + y^4 - y^3)$$

*Primetimo da je ovako definisana procedura deljenja osetljiva na redosled polinoma $f_1$ i $f_2$ u $F$: izmenom redosleda polinoma menjaju se količnici $q_1$ i $q_2$ i ostatak $r$. Takođe, ako bismo zadržali poredak polinoma u $F$, ali izmenili poredak monoma i umesto $x < y$ razmatrali poredak za koji važi $y < x$ dobile bi se drugačije vrednosti količnika i ostatka. Ovaj problem se, međutim, neće javljati kada budemo vršili deljenje polinomima Grebnerove baze.*

**Primer za vežbu 8.** *Podeliti polinom $f(x, y) = x^2y - y$ skupom polinoma $F = (f_1, f_2)$ pri čemu je $f_1 = xy + x$ i $f_2 = x^2 - 1$ pod pretpostavkom leksikografskog poretka za koji važi $x > y$. Šta se dešava ako se promeni poredak polinoma $f_1$ i $f_2$?*

**Praktična vežba 4.** *Ideal nad datim skupom polinoma se u programu Singular definiše naredbom* `ideal` *za kojom slede polinomi razdvojeni zapetama. Funkcijom* `reduce` *se vrši svođenje polinoma u odnosu na datu bazu ideala, odnosno računa ostatak pri deljenju polinoma $f$ skupom polinoma $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Izračunajmo ostatak pri deljenju polinoma iz primera 23.*

```
> ring r = 0, (x,y), lp;
> poly f1 = xy - x3;
> poly f2 = x + y2;
> ideal I = f1, f2;
> poly f = x2 + xy + 2x3;
> reduce(f,I);
// ** I is no standard basis
-2y6+y4-y3
```

*Primetimo da ako bismo zamenili poredak polinoma u definiciji ideala dobili bismo istu vrednost ostatka. Naime u programu Singular ne možemo zadati prioritet polinomima $f_i$. Međutim, ako bi se promenio poredak promenljivih i razmatrao leksikografski poredak za koji važi $y > x$, dobila bi se drugačija vrednost ostatka:*

```
> ring r = 0, (y,x), lp;
> poly f1 = xy - x3;
> poly f2 = x + y2;
> ideal I = f1, f2;
> poly f = x2 + xy + 2x3;
> reduce(f,I);
// ** I is no standard basis
3x3+x2
```

Sada kada smo definisali algoritam deljenja u prstenu polinoma više promenljivih, možemo se zapitati da li se odgovor na pitanje da li dati polinom $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ pripada idealu $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ može dobiti primenom algoritma deljenja skupom polinoma $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ na polinom $f$. Pokazuje se sledeće: ako je ostatak pri deljenju polinoma $f$ skupom polinoma $f_1, f_2, \ldots, f_m$ jednak nuli onda je jasno da polinom $f$ pripada idealu $I$. Međutim, ako je dobijeni ostatak različit od nule, to nužno ne znači da polinom $f$ ne pripada idealu $I$. Naime, možda postoji neki drugi način da ga podelimo (na primer promenimo značaj polinoma $f_i$ u $F$), tako da se dobije ostatak 0, kao što ćemo videti u narednom primeru.

**Primer 24.** *Razmotrimo primer polinoma $f_1 = x^2 - 1$ i $f_2 = xy + 2$ i polinoma $f = x^2y + xy + 2x + 2$ u odnosu na leksikografski poredak monoma za koji važi $x > y$. Deljenjem polinoma $f$ polinomima $f_1$ i $f_2$ dobijamo:*

$$f = yf_1 + f_2 + (2x + y)$$

*Dobijeni ostatak $r = 2x + y$ je različit od nule i stoga bismo mogli zaključiti da polinom $f$ ne pripada idealu $\langle f_1, f_2 \rangle$, ali ako bismo promenili poredak delilaca u $f_2, f_1$ dobili bismo:*

$$f = 0f_1 + (x + 1)f_2 + 0$$

*odnosno zaključili bismo da polinom $f$ pripada idealu $\langle f_1, f_2 \rangle$.*

**Primer 25.** *Neka su dati polinomi $f_1 = x + y$ i $f_2 = x - y$ i polinom $f = 2y$ u prstenu polinoma $\mathbb{R}[x, y]$ i neka je fiksiran leksikografski poredak monoma za koji važi $x > y$. Očigledno važi $f = f_1 - f_2 \in \langle f_1, f_2 \rangle$, ali s obzirom na to da je $LT(x+y) = LT(x-y) = x$ i da važi $x > y$, razmatrani algoritam deljenja vraća kao ostatak $r = 2y$.*

*Slično bi se desilo i u slučaju leksikografskog poretka za koji važi $y > x$.*

Ipak, postoje baze ideala $I$ za koje je ostatak pri deljenju polinoma $f$ datom bazom jedinstven i koje omogućavaju da se dâ nedvosmislen odgovor na pitanje pripada li polinom $f$ idealu $I$ ili ne. Takve baze zovu se *Grebnerove baze*. Pored metode Grebnerovih baza postoje i drugi algoritmi za proveru pripadnosti polinoma idealu kao što je Vuov metod.

# Glava 3

# Grebnerova baza

Grebnerova baza je specijalni generatorski skup (tj. baza) ideala $\langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ za koji algoritam deljenja polinoma $f$ tim skupom generatora vraća ostatak 0 ako i samo ako $f \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$.

Primetimo da važi naredna teorema.

**Teorema 3** (Hilbertova osnovna teorema)**.** *Svaki ideal $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je konačno generisan.*

Naime, u prstenu polinoma nad konačno mnogo promenljivih, svaki ideal je generisan konačnim brojem elemenata, odnosno ima konačnu bazu.

Neka je $I$ proizvoljni ideal $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Označimo sa $LT(I)$ skup vodećih termova nenula polinoma ideala $I$:

$$LT(I) = \{cx^\alpha \mid \text{postoji } f \in I \text{ tako da je } LT(f) = cx^\alpha\}$$

a sa $\langle LT(I) \rangle$ ideal generisan elementima iz $LT(I)$, odnosno važi:

$$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

Drugim rečima, ovo je ideal generisan vodećim termovima polinoma ideala $I$.

Već smo videli da vodeći termovi igraju važnu ulogu u algoritmu deljenja. Za dati konačno generisani ideal $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ primamljivo je poverovati da je ideal generisan vodećim termovima polinoma $f_i$ jednak baš $LT(I)$. Međutim, ovo ne važi uvek: naime, ideali $\langle LT(f_1), \ldots, LT(f_m) \rangle$ i $\langle LT(I) \rangle$ se mogu razlikovati.

**Primer 26.** *Razmotrimo ideal $I = \langle x + y, x \rangle \subset K[x, y]$. Korišćenjem leksikografskog poretka monoma za koji važi $x > y$ dobijamo $LT(x + y) = LT(x) = x$, te je $\langle LT(x + y), LT(x) \rangle = \langle x \rangle$. Međutim, $y = (x + y) - x \in I$ i važi $LT(y) = y \in LT(I)$, a istovremeno važi $y \notin \langle x \rangle$.*

**Primer 27.** *Neka je* $I = \langle x^2+1, xy\rangle$ *i razmotrimo leksikografski poredak monoma za koji važi* $x > y$. *Važi* $LT(x^2+1) = x^2$ *i* $LT(xy) = xy$, *pa je* $\langle LT(x^2+1), LT(xy)\rangle = \langle x^2, xy\rangle$. *S obzirom na to da važi* $y(x^2+1) - x(xy) = y$ *znamo da* $y \in I$ *i stoga* $LT(y) \in \langle LT(I)\rangle$. *Međutim,* $LT(y) = y \notin \langle x^2, xy\rangle$. *Stoga,* $\langle LT(I)\rangle \neq \langle LT(x^2+1), LT(xy)\rangle$.

**Primer za vežbu 9.** *Neka je* $I = \langle g_1, g_2, g_3\rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ *gde je* $g_1 = xy^2 - xz + y, g_2 = xy - z^2$ *i* $g_3 = x - zy^4$. *Korišćenjem leksikografskog poretka monoma dati primer polinoma* $g \in I$ *tako da važi* $LT(g) \notin \langle LT(g_1), LT(g_2), LT(g_3)\rangle$.

Ipak, iako ovo tvrđenje nužno ne važi za proizvoljne polinome $f_1, f_2, \ldots, f_m$, postoje polinomi za koje će ono važiti.

**Definicija 9.** Grebnerova baza *ideala* $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *(u odnosu na dati poredak monoma) je konačni podskup* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ *ideala* $I$ *tako da važi:*

$$\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_t)\rangle$$

Dakle, konačni podskup ideala $I$ je Grebnerova baza ako su vodeći termovi elemenata iz $G$ dovoljni da se generiše čitav ideal $\langle LT(I)\rangle$.

Naredna važna tvrđenja navodimo bez dokaza.

**Teorema 4.** *Grebnerova baza ideala* $I$ *jeste baza ideala* $I$.

**Teorema 5.** *Svaki nenula ideal* $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *ima Grebnerovu bazu.*

**Teorema 6.** *Ako je* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ *Grebnerova baza ideala* $I$, *ostatak pri deljenju polinoma* $f$ *polinomima Grebnerove baze za proizvoljno* $f \in I$ *ne zavisi od poretka polinoma* $g_i$ *u* $G$.

Ispitivanje da li polinom $f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ pripada idealu $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ može se svesti na izračunavanje Grebnerove baze $G$ ideala $I$ i traženje ostatka pri deljenju polinoma $f$ polinomima baze $G$.

Ostaje još pitanje kako za dati ideal $I$ konstruisati Grebnerovu bazu. Postoji veći broj različitih algoritama za izračunavanje Grebnerove baze. Najpoznatiji je Buhbergerov algoritam koji koristi koncept $S$-polinoma koji predstavlja uopštenje S-polinoma pomenutog u primeru 6.

**Definicija 10** (S-polinom)**.** *Neka su* $f, g \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *dva nenula polinoma i neka je sa* $z$ *označen najmanji zajednički sadržalac njihovih vodećih monoma:*

$$z = NZS(LM(f), LM(g)).$$

*Tada je* S-polinom *polinoma* $f$ *i* $g$ *jednak:*

$$S(f, g) = \frac{z}{LT(f)} \cdot f - \frac{z}{LT(g)} \cdot g$$

**Primer 28.** *Neka je dat prsten* $\mathbb{R}[x,y]$ *i dva polinoma iz ovog prstena:* $f = x^3y^2 - x^2y^3$ *i* $g = 3x^4y + y^2$*. Ako razmatramo graduirani leksikografski poredak monoma za koji važi* $x > y$ *onda je* $LM(f) = x^3y^2$*,* $LM(g) = x^4y$*, a najmanji zajednički sadržalac njihovih vodećih monoma jednak je* $x^4y^2$ *i važi:*

$$S(f,g) = \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g = x \cdot f - \frac{1}{3} \cdot y \cdot g = -x^3y^3 - \frac{1}{3}y^3$$

**Praktična vežba 5.** *U programu Singular postoji funkcija* `spoly` *u biblioteci "teachstd.lib"koja računa S-polinom dva data polinoma:*

```
> LIB "teachstd.lib";
> poly f = x3y2 - x2y3;
> poly g = 3x4y + y2;
> spoly(f,g)
-x3y3-1/3y3
```

Primetimo da S-polinomi omogućavaju poništavanje vodećih termova polinoma $f$ i $g$ i u stvari predstavljaju jedini način da se nad sumom termova istog multistepena izvrši poništavanje. Na osnovu ovog opažanja, Buhberger je definisao naredni kriterijum.

**Primer za vežbu 10.** *Izračunati S-polinom polinoma* $f = xy^3z + y^4 + y^2z^2$ *i* $g = x^2y + xz^4 + y^2z^2$ *iz prstena* $\mathbb{R}[x,y,z]$ *u odnosu na leksikografski poredak monoma za koji važi* $x > y > z$*.*

**Teorema 7** (Buhbergerova teorema)**.** *Neka je* $I$ *ideal. Tada je baza* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ *ideala* $I$ *Grebnerova baza ideala* $I$ *ako i samo ako je za svako* $i \neq j$ *ostatak pri deljenju S-polinoma* $S(g_i, g_j)$ *polinomima baze* $G$ *jednak nula.*

**Primer 29.** *Razmotrimo prsten* $\mathbb{Q}[x,y]$ *sa graduiranim leksikografskim poretkom monoma za koji važi* $x > y$ *i neka je* $I = \langle f_1, f_2\rangle = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\rangle$*. Skup* $(f_1, f_2)$ *nije Grebnerova baza ideala* $I$ *jer je*

$$LT(S(f_1,f_2)) = -x^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2)\rangle = \langle x^3, x^2y\rangle.$$

*Da bismo dobili Grebnerovu bazu, prirodna ideja je nekako proširiti polazni skup baznih elemenata. Koje nove elemente treba dodati? S obzirom na to da je ostatak pri deljenju S-polinoma* $S(f_1,f_2) = -x^2 \in I$ *sa* $F = (f_1, f_2)$ *jednak* $-x^2$*, deluje intuitivno dodati*

*taj ostatak kao novi element baze: $f_3 = -x^2$. Primetimo ponovo da je $S(f_1, f_3) = (x^3 - 2xy) - (-x)(-x^2) = -2xy$ i da je ostatak pri deljenju sa $F = (f_1, f_2, f_3)$ jednak $-2xy$ i različit je od 0. Stoga dodajemo i ovaj ostatak kao novi element baze: $f_4 = -2xy$. Ako sada razmotrimo novu bazu $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ možemo uočiti da je ostatak pri deljenju S-polinoma $S(f_2, f_3) = (x^2y - 2y^2 + x) - (-y)(-x^2) = -2y^2 + x$ sa $F$ različit od nule i ovaj ostatak dodajemo kao novi element u skup baznih elemenata $f_5 = -2y^2 + x$. Sada možemo proveriti da je ostatak pri deljenju $S(f_i, f_j)$ sa $F$ jednak 0 za svako $1 \leq i < j \leq 5$. Konačno, skup $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ predstavlja jednu Grebnerovu bazu ideala $I$.*

**Primer 30.** *Baza $B = \{f, g\}$ gde je $f = xy + 2x - z$ i $g = x^2 + 2y - z$ nije Grebnerova baza ideala $\langle f, g\rangle$ u odnosu na leksikografski poredak jer je ostatak pri deljenju S-polinoma:*

$$S(f, g) = x(xy + 2x - z) - y(x^2 + 2y - z) = 2x^2 - 2y^2 - xz + yz$$

*sa polinomima baze $B$ jednak $-xz - 2y^2 + yz - 4y + 2z$, odnosno različit je od nule.*

**Primer za vežbu 11.** *Ako razmatramo graduirani leksikografski poredak monoma za koji važi $x > y > z$ da li je $\{x^4y^2 - z^5, x^3y^3 - 1, x^2y^4 - 2z\}$ Grebnerova baza ideala generisanog ovim polinomima?*

**Primer za vežbu 12.** *Pokazati da je baza $\{x + z, y - z\}$ Grebnerova baza.*

Dakle, za bazu važi da je Grebnerova baza ako i samo ako za S-polinom proizvoljna dva bazna elementa važi da je ostatak pri deljenju sa polinomima baze jednak 0. Ovaj kriterijum čini osnovu *Buhbergerovog algoritma* za izračunavanje Grebnerove baze.

**Algoritam** *Buhbergerov algoritam*
**Ulaz:** Skup polinoma $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$
**Izlaz:** Grebnerova baza ideala $\langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$
1. $G \leftarrow (f_1, f_2, \ldots, f_m)$
2. **repeat**
3. $\quad G' \leftarrow G$ {pamtimo prethodno $G$}
4. $\quad$ **for** svaki par $g_i, g_j \in G, i \neq j$
5. $\quad\quad$ izračunaj $S(g_i, g_j)$ i ostatak $r_{ij}$ pri deljenju $S(g_i, g_j)$ sa $G$
6. $\quad\quad$ **if** $r_{ij} \neq 0$
7. $\quad\quad\quad$ **then** $G \leftarrow G \cup \{r_{ij}\}$
8. **until** $G = G'$

Na osnovu toga da vodeći term polinoma $r_{ij}$ koji se dodaje u skup ne može biti umnožak vodećih termova polinoma iz skupa $G$ i da na osnovu Diksonove leme (koju u ovom materijalu nećemo razmatrati) važi da ne može postojati beskonačni niz termova u kome nijedan nije umnožak terma koji se ranije javlja u nizu sledi zaustavljanje Buhbergerovog algoritma. Izlaz $G$ algoritma može biti znatno veći od broja polinoma na ulazu. Naime, ako je broj promenljivih jednak $n$, i ako ukupni stepen svakog od polinoma $f_i$ ne prelazi $d$, tada je ukupni stepen svakog od polinoma u $G$ ograničen sa $2(\frac{1}{2}d^2+d)^{2^{n-1}}$, što je dvostruko eksponencijalna funkcija po $n$, ali polinomijalna po $d$. Ovim je opisana složenost problema, a ne konkretnog algoritma za njegovo rešavanje. Uprkos lošim performansama u najgorem slučaju, pokazuje se da se u mnogim slučajevima koji su od praktičnog značaja Grebnerova baza konstruiše u razumnom vremenu.

**Primer 31.** *Izračunati Grebnerovu bazu ideala* $\langle f_1, f_2\rangle = \langle x^2-y, x^3-z\rangle$ *u odnosu na leksikografski poredak za koji važi* $x > y > z$. *Rešenje:* $\{x^2-y, x^3-z, xy-z, xz-y^2, y^3-z^2\}$.

**Primer 32.** *Izračunati Grebnerovu bazu ideala* $\langle f_1, f_2\rangle = \langle x^3-2xy, x^2y-2y^2+x\rangle \subset K[x,y]$ *u odnosu na graduirani leksikografski poredak za koji važi* $x > y$. *Rešenje:* $\{x^3-2xy, x^2y-2y^2+x, -x^2, -2xy, -2y^2+x\}$.

Većina računarskih sistema kojima se vrše algebarska izračunavanja (eng. computer algebra system) poput Singulara, Mejpla, Volfram Matematike sadrži procedure za izračunavanje Grebnerove baze datog ideala. S obzirom na to da je Buhbergerov algoritam zasnovan na algoritmu za deljenje u prstenu više promenljivih, koji opet zavisi od poretka monoma, računanje Grebnerove baze zavisiće od izabranog poretka monoma.

Pomenimo i to da je Grebnerova baza izračunata pomoću Buhbergerovog algoritma obično veoma velika i sadrži dosta veći broj baznih elemenata nego što je to neophodno. Dakle, baza dobijena Buhbergerovim algoritmom ne mora biti optimalna i moguće je eliminisati neke nepotrebne bazne elemente korišćenjem naredne činjenice.

**Teorema 8.** *Neka je* $G$ *Grebnerova baza ideala* $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Neka je* $p \in G$ *polinom za koji važi* $LT(p) \in \langle LT(G \setminus \{p\})\rangle$. *Tada je* $G \setminus \{p\}$ *takođe Grebnerova baza ideala* $I$.

Eliminacijom iz skupa $G$ svih polinoma $p$ za koje važi $LT(p) \in \langle LT(G \setminus \{p\})\rangle$ i postavljanjem da su svi vodeći koeficijenti polinoma Grebnerove baze $G$ jednaki 1 dobijamo tzv. *minimalnu Grebnerovu bazu.*

**Primer 33.** *Da bismo ilustrovali proceduru smanjenja Grebnerove baze, vratimo se idealu* $I$ *koji smo razmatrali u primeru 29. Korišćenjem graduiranog leksikografskog uređenja*

*monoma, odredili smo Grebnerovu bazu ovog ideala:*

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 - 2xy \\ f_2 &= x^2y - 2y^2 + x \\ f_3 &= -x^2 \\ f_4 &= -2xy \\ f_5 &= -2y^2 + x \end{aligned}$$

*Primetimo da je* $LT(f_1) = x^3 = -x \cdot LT(f_3)$. *Prema lemi 8 možemo izostaviti polinom* $f_1$ *u minimalnoj Grebnerovoj bazi. Slično, s obzirom da važi* $LT(f_2) = x^2y = -(1/2)x \cdot LT(f_4)$, *iz Grebnerove baze možemo ukloniti polinom* $f_2$. *Ne postoje dalji slučajevi u kojima vodeći term nekog elementa Grebnerove baze deli vodeći term nekog drugog elementa baze. Dodatno, s obzirom na to da su neki od vodećih koeficijenata polinoma baze različiti od 1, pomnožićemo elemente baze pogodnim konstantama da bi vodeći koeficijenti baznih elemenata postali jednaki 1. Stoga polinomi:*

$$\begin{aligned} f_3' &= x^2 \\ f_4' &= xy \\ f_5' &= y^2 - (1/2)x \end{aligned}$$

*čine minimalnu Grebnerovu bazu ideala* $I$.

*Primetimo da ideal* $I$ *može imati veći broj minimalnih Greberovih baza. Na primer ako umesto polinoma* $f_3'$ *u bazu uvrstimo polinom* $x^2 + axy$ *za* $a \in \mathbb{Q}$ *dobićemo takođe minimalnu Greberovu bazu istog ideala.*

**Praktična vežba 6.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular:*

```
> ring r = 0, (x,y), Dp;
> poly f1 = x3 - 2xy;
> poly f2 = x2y - 2y2 + x;
> poly f3 = -x2;
> poly f4 = -2xy;
> poly f5 = -2y2 + x;
> ideal i1 = lead(f2), lead(f3), lead(f4), lead(f5);
> reduce(lead(f1),i1);
// ** i is no standard basis
0
> ideal i2 = lead(f3), lead(f4), lead(f5);
> reduce(lead(f2),i2);
// ** i is no standard basis
0
> reduce(lead(f3),i3);
// ** i is no standard basis
```

```
-x2
```

**Primer za vežbu 13.** *Koji od navedenih skupova predstavljaju minimalne Grebnerove baze ideala* $I = \langle y^2 + yx + x^2, y + x, y\rangle$*? (a)* $G_1 = \{y, x\}$ *(b)* $G_2 = \{y, x^2\}$*, (c)* $G_3 = \{y + x, x\}$*, (d)* $G_4 = \{y + x, y\}$

Ovako definisan koncept Grebnerovih baza ima jedan nedostatak. Pretpostavimo da su data dva strukturalno različita sistema polinoma $F$ i $F'$ i da želimo da saznamo da li su ova dva sistema ekvivalentna. Možemo izračunati minimalnu Grebnerovu bazu $G$ sistema polinoma $F$ i minimalnu Grebnerovu bazu $G'$ sistema polinoma $F'$. Prema trenutnoj definiciji Grebnerovih baza ne možemo ništa zaključiti o sistemima $F$ i $F'$ na osnovu baza $G$ i $G'$. Međutim, teorija Grebnerovih baza nam govori da kada izračunamo tzv. redukovanu Grebnerovu bazu ova dva sistema polinoma, onda je sistem polinoma $F$ ekvivalentan sistemu polinoma $F'$ ako su redukovane Grebnerove baze ova dva sistema jednake, odnosno ako važi $G = G'$. Uvedimo stoga koncept redukovane Grebnerove baze.

**Definicija 11** (Redukovana Grebnerova baza)**.** Redukovana Grebnerova baza *ideala* $I$ *je Grebnerova baza* $G$ *za koju dodatno važi:*

- $\forall g_i \in G$ *nijedan monom polinoma* $g_i$ *nije deljiv sa* $LT(g_j)$ *gde je* $i \neq j$*,*
- $\forall g_i \in G: \quad LC(g_i) = 1.$

Primetimo da je redukovana Grebnerova baza automatski i minimalna. Međutim, kod redukovane Grebnerove baze važi da ne samo da vodeći term nijednog polinoma baze $g_i$ nije deljiv vodećim termom nekog drugog polinoma baze $g_j$, već to treba da važi za svaki term polinoma $g_i$.

Ako razmotrimo primer 33, jedino Grebnerova baza za koju važi $a = 0$ jeste redukovana (jer bi inače term $axy$ bio deljiv vodećim termom polinoma $f_4'$). Štaviše, redukovana Grebnerova baza je uvek jedinstvena.

Do redukovane Grebnerove baze može se doći na osnovu proizvoljne Grebnerove baze $G$ na sledeći način: svako $g_i \in G$ menjamo njegovim ostatkom pri deljenju sa polinomima iz skupa $G \setminus \{g_i\}$. Konačno, postavljamo da vodeći koeficijent svakog polinoma $g_i$ bude 1.

Procedure za računanje Grebnerove baze u računarskim algebarskim sistemima već vraćaju redukovanu Grebnerovu bazu.

**Primer 34.** *Izračunati redukovanu Grebnerovu bazu za bazu iz primera 32 u odnosu na graduirani leksikografski poredak. Rešenje:* $\{x^2, xy, y^2 - x/2\}$.

**Praktična vežba 7.** *Proverimo primer 1 u sistemu Singular. Funkcijom* `groebner` *izračunava se standardna (Grebnerova) baza ideala. Napomenimo da je implementacija Buhbergerovog algoritma za izračunavanje Grebnerove baze u alatu Singular jedna od najefisnijih implementacija ovog algoritma.*

```
> ring r = 0, (A,B,C), lp;
> poly f = A + B + C - 14;
> poly g = A - B + C + 4;
> ideal I = f, g;
> ideal G = groebner(I);
> poly h = A + C - 5;
> reduce(h,G);
0
```

*Primetimo da isti rezultat dobijamo i kada promenimo poredak promenljivih, na primer u* `(B,C,A)`*, a i kada promenimo poredak monoma, na primer u graduirani leksikografski poredak.*

**Praktična vežba 8.** *Izračunajmo u sistemu Singular redukovanu Grebnerovu bazu skupa polinoma* $\{-x^3+y, x^2y-y^2\}$ *kada se koristi leksikografski poredak termova za koju važi* $x > y$*:*

```
> ring r1 = 0, (x,y), lp;
> poly f1 = -x3 + y;
> poly f2 = x2y - y2;
> ideal I1 = f1, f2;
> ideal G1 = groebner(I1);
> G1;
G1[1]=y3-y2
G1[2]=xy2-y2
G1[3]=x2y-y2
G1[4]=x3-y
```

*Dobijena je naredna Grebnerova baza:* $g_1 = y^3 - y^2, g_2 = xy^2 - y^2, g_3 = x^2y - y^2, g_4 = x^3 - y$*. Primetimo da dobijeni rezultat nije isti kao kada bi se koristio leksikografski poredak monoma za koji važi* $y > x$*.*

```
> ring r2 = 0, (y,x), lp;
> poly f1 = -x3 + y;
> poly f2 = x2y - y2;
> ideal I2 = f1, f2;
> ideal G2 = groebner(I2);
> G2;
G2[1]=x6-x5
G2[2]=y-x3
```

*Možemo izračunati i Grebnerovu bazu istog skupa polinoma u odnosu na težinski vektor* $(1, 3)$.

```
> ring r3 = 0, (x,y), Wp(1,3);
> poly f1 = -x3 + y;
> poly f2 = x2y - y2;
> ideal I3 = f1, f2;
> ideal G3 = groebner(I3);
> G3;
G3[1]=x3-y
G3[2]=y2-x2y
```

**Primer za vežbu 14.** *Proveriti ispravnost tvrđenja iz primera 3 u programu Singular.*

# Glava 4

# Primene Grebnerovih baza

Matematička teorija se može smatrati vrednijom ukoliko se ona može primeniti u širem polju različitih oblasti. Da bismo stekli uvid u moć Grebnerovih baza razmotrićemo samo neke od njihovih primena.

## 4.1 Rešavanje sistema polinomijalnih jednačina

**Primer 35.** *Ana želi da napravi pravougaonu tortu za rođendan. Zapremina torte iznosi* $351cm^3$*. Dužina torte je za 4cm veća od širine, a visina torte iznosi 1/3 širine. Koje dimenzije treba da bude pleh za tortu?*

*Znamo da je zapremina kvadra jednaka proizvodu njegove dužine, širine i visine. Ako sa* $d$ *označimo njegovu dužinu, sa* $s$ *širinu, a sa* $v$ *visinu torte, rešavanje ovog problema svodi se na rešavanje narednog sistema polinomijalnih jednačina:*

$$\begin{aligned} d \cdot s \cdot v &= 351 \\ d &= s + 4 \\ v &= \frac{1}{3}s \end{aligned}$$

*odnosno:*

$$\begin{aligned} p_1 &= d \cdot s \cdot v - 351 = 0 \\ p_2 &= d - s - 4 = 0 \\ p_3 &= v - \frac{1}{3}s = 0 \end{aligned}$$

*Ako izračunamo Grebnerovu bazu ideala generisanog polinomima* $p_1$*,* $p_2$ *i* $p_3$ *u odnosu na leksikografski poredak za koji važi* $d > s > v$ *dobijamo sistem polinoma:*

$$\begin{aligned} g_1 &= 3v^3 + 4v^2 - 117 \\ g_2 &= s - 3v \\ g_3 &= d - 3v - 4 \end{aligned}$$

*koji je jednostavno rešiti.*

**Praktična vežba 9.** *Izračunajmo Grebnerovu bazu ideala nad polinomima $p_1$, $p_2$ i $p_3$ u sistemu Singular.*

```
> ring r = 0, (d,s,v), lp;
> poly p1 = dsv - 351;
> poly p2 = d - s - 4;
> poly p3 = 3v - s;
> ideal I = p1, p2, p3;
> ideal G = groebner(I);
> G;
G[1]=3v3+4v2-117
G[2]=s-3v
G[3]=d-3v-4
```

Izračunavanje redukovane Grebnerove baze za ideal generisan polinomima $p_1$, $p_2$ i $p_3$ u odnosu na leksikografski poredak monoma može znatno pojednostaviti formu jednačina. Naime, na ovaj način se dobijaju jednačine u kojima se promenljive sukcesivno eliminišu. Primetimo, takođe, da poredak eliminisanja promenljivih odgovara poretku promenljivih, odnosno polinome Grebnerove baze moguće je urediti tako da prvi sadrži samo najmanju promenljivu u razmatranom poretku, druga sadrži samo najmanju i drugu najmanju promenljivu itd. Ovakav sistem jednačina je jednostavno rešiti: naime, možemo rešiti prvu jednačinu, njena rešenja uvrstiti u preostale i rešiti preostali sistem na isti način po ostalim promenljivim. Ukoliko bi redukovana Grebnerova baza bila jednaka $\{1\}$, zaključili bismo da sistem nema rešenja. Sistem ima konačno mnogo rešenja ako i samo za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ postoji $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tako da je $LM(g_j) = x_i^{\alpha}$. Dakle, za svaku promenljivu iz sistema postoji neki polinom Grebnerove baze čiji je vodeći monom jednak stepenu te promenljive. Primetimo da je u primeru 35 $LM(g_1) = v^3$, $LM(g_2) = s$ i $LM(g_3) = d$, te važi prethodno tvrđenje i sistem ima konačno mnogo rešenja.

**Primer 36.** *Razmotrimo sistem jednačina:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x^2 + z^2 &= y \\ x &= z \end{aligned}$$

*u $\mathbb{C}^3$. Polinomi koji odgovaraju ovim jednačinama zadaju ideal:*

$$I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$$

*Podsetimo se da je rešenje sistema $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ jedan afini varijetet definisan idealom $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$. Dakle, rešavanje sistema polinoma svodi se na računanje svih tačaka u $V(I)$. Redukovana Grebnerova baza ideala $I$ u odnosu na leksikografski poredak za $x > y > z$ jednaka je:*

$$\begin{aligned} g_1 &= x - z \\ g_2 &= y - 2z^2 \\ g_3 &= z^4 + (1/2)z^2 - 1/4 \end{aligned}$$

*Primetimo da polinom $g_3$ zavisi samo od promenljive $z$ i da se može jednostavno rešiti po $z^2$. Četiri vrednosti za $z$ su:*

$$z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pm\sqrt{5} - 1}$$

*Zamenom ovih vrednosti redom u $g_1$ i $g_2$ dobijamo vrednosti i za promenljive $x$ i $y$. Ukupno nalazimo 4 rešenja polaznog sistema jednačina: dva realna i dva kompleksna.*

**Primer za vežbu 15.** *Proveriti prethodni primer u alatu Singular.*

**Primer 37.** *Razmotrimo sistem jednačina:*

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$

*Polinomi koji odgovaraju ovim jednačinama zadaju ideal:*

$$I = \langle x + y, y^2 - 1, x^2 - 2y \rangle$$

*S obzirom na to da je redukovana Grebnerova baza ovog ideala jednaka $\{1\}$, ovaj sistem jednačina nema rešenja.*

**Praktična vežba 10.** *Proverimo ovaj primer u alatu Singular.*

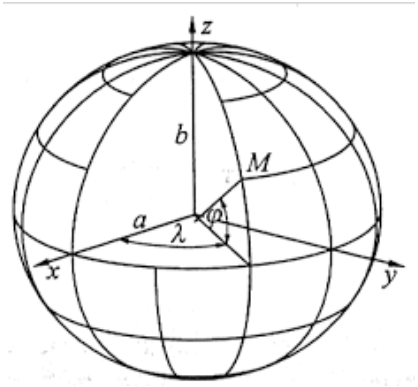
```
> ring r = 0, (x,y), lp;
> poly p1 = x + y;
> poly p2 = y2 - 1;
> poly p3 = x2 - 2y;
> ideal I = p1, p2, p3;
```

```
> ideal G = groebner(I);
> G;
G[1]=1
```

**Primer za vežbu 16.** *Izračunati tačke koje pripadaju afinom varijetetu*

$$V(x^2+y^2+z^2-1, x^2+y^2+z^2-2x, 2x-3y-z).$$

## 4.2 Rešavanje sistema nepolinomijalnih jednačina




Slika 4.1: Geodetski koordinatni sistem (preuzeto sa `https://www.geoskola.hr/~gsurina/Geodetske%20mre%C5%BEe%20i%20koord.%20sustavi.pdf`).

**Primer 38.** *Razmotrimo jedan primer koji potiče iz računarske geodezije. Odnos između geocentričnih dekartovskih koordinata $x$, $y$ i $z$ tačke $M$ na površini ili blizu površine zemlje i geodetskih koordinata $h$ (visina – udaljenost tačke na fizičkoj površini zemlje od tangentne ravni elipsoida), $\lambda$ (dužina – ugao između ravni nultog meridijana i meridijana u datoj tački) i $\varphi$ (širina – ugao između ravni ekvatora i normale na elipsoid u datoj tački) njene projekcije na geocentričnom elipsoidu može se opisati narednim sistemom jednačina:*

$$\begin{aligned} x &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= (N(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{aligned} \tag{4.1}$$

*gde je sa $N$ označen vertikalni poluprečnik zakrivljenosti, a sa $e$ ekscentricitet elipsoida, koji su definisani sa:*

$$\begin{aligned} N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi^2}} \\ e &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \end{aligned}$$

*gde su a i b velika i mala poluosa elipsoida (slika 4.1). Uz pomoć prethodnih jednačina dekartovske koordinate x, y i z tačke sa elipsoida mogu se direktno izračunati na osnovu geodetskih koordinata h, λ i φ. Računanje koordinata h, λ i φ na osnovu koordinata x, y i z je znatno teže: potrebno je rešiti nelinearni sistem jednačina u funkciji nepoznatih h, λ i φ, ako su poznate vrednosti x, y i z. Primetimo da u ovom sistemu figurišu i trigonometrijske funkcije i kvadratni koren.*

*Najpre ćemo datom sistemu jednačina pridružiti sistem polinomijalnih jednačina tako što ćemo za svaki trigonometrijski entitet uvesti po jednu promenljivu i sistemu dodati polinomijalne jednačine koje potiču od dobro poznatih trigonometrijskih identiteta. Uvodimo sledeće nove promenljive:*

$$\begin{aligned} cf &= \cos \varphi \\ sf &= \sin \varphi \\ tf &= \tan \varphi \\ cl &= \cos \lambda \\ sl &= \sin \lambda \end{aligned}$$

*Dodatno, uvešćemo promenljive S i d da označimo vrednost izraza:*

$$S = \sqrt{1 - e^2 \cdot sf^2}$$

*koji se javlja u definiciji vrednosti N i izraza*

$$d = (N + h) \cdot cf$$

*koji se javlja u definiciji vrednosti x i y. Na ovaj način dolazimo do sistema od deset polinomijalnih jednačina:*

$$\begin{aligned} p_1 &= x - (N + h) \cdot cf \cdot cl = 0 \ \{\text{definicija koordinate } x\} \\ p_2 &= y - (N + h) \cdot cf \cdot sl = 0 \ \{\text{definicija koordinate } y\} \\ p_3 &= z - (N(1 - e^2) + h) \cdot sf = 0 \ \{\text{definicija koordinate } z\} \\ p_4 &= cf^2 + sf^2 - 1 = 0 \ \{\text{osnovni trigonometrijski identitet}\} \\ p_5 &= cl^2 + sl^2 - 1 = 0 \ \{\text{osnovni trigonometrijski identitet}\} \\ p_6 &= tf \cdot cf - sf = 0 \ \{\text{osnovni trigonometrijski identitet}\} \\ p_7 &= N \cdot S - a = 0 \ \{\text{veza promenljive } S \text{ i } N\} \\ p_8 &= S^2 + e^2 \cdot sf^2 - 1 = 0 \ \{\text{definicija promenljive } S\} \\ p_9 &= (N + h) \cdot cf - d = 0 \ \{\text{definicija promenljive } d\} \\ p_{10} &= d^2 - x^2 - y^2 = 0 \ \{\text{veza promenljive } d \text{ i } x \text{ i } y\} \end{aligned}$$

*Računamo Grebnerovu bazu ideala* $\langle p_1, p_2 \ldots, p_{10} \rangle$ *u odnosu na leksikografski poredak monoma za koji važi:*

$$N > S > x > y > h > cl > sl > cf > sf > tf.$$

*Kao jedan od polinoma Grebnerove baze dobija se polinom jedne promenljive po promenljivoj* $tf$ *koji je četvrtog stepena i koji se može analitički rešiti. Nakon toga moguće je izračunati vrednost jedne po jedne promenljive, a nakon toga, kada recimo dobijemo vrednosti promenljivih* $cf$ *i* $sf$ *možemo doći i do vrednosti ugla* $\varphi$.

Rešavanje sistema polinoma koji u sebi uključuju pozive trigonometrijskih funkcija ima primenu i u robotici, na primer za izračunavanje na koji način zglobovi robota treba da se okrenu da bi stigao u određeni položaj. Ovaj problem može se rešiti korišćenjem Grebnerovih baza.

**Primer za vežbu 17.** *Izrazi sistem jednačina kao sistem polinomijalnih jednačina:*

$$\begin{aligned} x &= (2 + \cos t) \cos u \\ y &= (2 + \cos t) \sin u \\ z &= \sin t \end{aligned}$$

## 4.3 Rešavanje problema celobrojnog linearnog programiranja

Razmotrimo najpre problem vraćanja kusura.

**Primer 39.** *Pronaći minimalan broj novčića od* $1, 2, 5$ *i* $10$ *dinara koji je potreban da bi se platio iznos od* $48$ *dinara.*

*Ovaj problem se može rešiti metodom Grebnerovih baza. Ključna ideja jeste da se broj novčića izrazi kao stepen odgovarajuće promenljive. Označimo sa* $A$ *novčić od 1 dinara, sa* $B$ *novčić od* $2$ *dinara, sa* $C$ *novčić od* $5$ *dinara, a sa* $D$ *novčić od* $10$ *dinara: proizvodom* $A^3B^2C^7D$ *predstavili bismo tri novčića od 1 dinara, dva novčića od 2 dinara, 7 novčića od 5 dinara i 1 novčić od 10 dinara. Ukupan broj novčića onda je jednak ukupnom stepenu ovog izraza i iznosi* $3 + 2 + 7 + 1 = 13$.

*Da bismo rešili ovaj problem najpre je potrebno odrediti Grebnerovu bazu ideala*

$$\langle A^2 - B, A^5 - C, A^{10} - D \rangle$$

*u odnosu na graduirani leksikografski poredak za koji važi* $A > B > C > D$. *Ona je jednaka:*

$$G = \{C^2 - D, A^2 - B, B^3 - AC, AB^2 - C\}.$$

*Primetimo da dobijene veze daju veoma korisna pravila zamene: na primer zameniti 2 novčića od 5 dinara jednim novčićem od 10, zameniti dva novčića od 1 dinar jednim novčićem od 2, zameniti tri novčića od 2 dinara jednim novčićem od 1 i jednim novčićem od 5 dinara, kao i zameniti jedan novčić od 1 i dva novčića od 2 dinara jednim od 5 dinara.*

*Zbog izabranog poretka monoma, redukcija polinoma u odnosu na Grebnerovu bazu $G$ daje polinom čiji je stepen minimalan u odnosu na sve polinome koji su ekvivalentni polaznom. Stoga je optimalan način da platimo iznos od 48 dinara jednak normalnoj formi proizvoljnog načina da platimo ovaj iznos: na primer sa 3 novčića od 10 dinara, dva novčića od 5 dinara, tri novčića od 2 dinara i dva novčića od 1 dinara. Odgovarajuću normalnu formu računamo kao ostatak pri deljenju polinoma $A^2B^3C^2D^3$ polinomima Grebnerove baze $G$. On je jednak $ABCD^4$ te je minimalan broj novčića jednak 7 i odgovara kombinaciji od po jednog novčića od 1, 2 i 5 dinara i četiri novčića od 10 dinara.*

Ovaj problem pripada problemu celobrojnog linearnog programiranja koji se u opštem slučaju može opisati na sledeći način. Neka važi $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $b_i \in \mathbb{Z}$ i $c_j \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, \ldots, m$ i $j = 1, 2, \ldots, n$. Potrebno je odrediti rešenje $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ sistema jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.2}$$

kojim se minimizuje vrednost funkcije cene

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Dakle, sve vrednosti $a_{ij}$ i $b_i$ su celobrojne, a sva ograničenja nad promenljivim $x_i$ i funkcija cene su linearni po $x_i$.

U primeru 39 funkcija cene bila bi jednaka zbiru broja novčića od 1, 2, 5 i 10 dinara. Naime, ako sa $a$ označimo broj novčića od 1 dinara, sa $b$ broj novčića od 2 dinara, sa $c$ broj novčića od 5 dinara, a sa 10 broj novčića od 10 dinara, funkcija cene jednaka je $c(a, b, c, d) = a + b + c + d$, a sistem jednačina se svodi na narednu jednačinu:

$$1a + 2b + 5c + 10d = 48$$

Razmotrimo na koji način se Grebnerove baze mogu iskoristiti za rešavanje problema celobrojnog linearnog programiranja. $k$-toj jednačini sistema jednačina (4.2), $k = 1, 2, \ldots, m$ može se pridružiti nova promenljiva $X_k$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} X_1^{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n} &= X_1^{b_1} \\ X_2^{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n} &= X_2^{b_2} \\ &\ldots \\ X_m^{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n} &= X_m^{b_m} \end{aligned}$$

Naime, postavljanjem da je $i$-ta jednačina sistema (4.2) eksponent promenljive $X_i$ dobijamo sistem jednačina nad monomima. Množenjem levih i desnih strana jednakosti dobijamo jedinstvenu jednačinu nad monomima koja predstavlja celokupni polazni sistem. Dakle, sistem (4.2) možemo kompaktnije zapisati kao:

$$X_1^{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n} \cdot \ldots \cdot X_m^{a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n} = X_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot X_m^{b_m}$$

Grupisanjem činilaca s leve strane znaka jednakosti čiji su eksponenti redom jednaki $x_i$ dobijamo:

$$(X_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot X_m^{a_{m1}})^{x_1} \cdot \ldots \cdot (X_1^{a_{1n}} \cdot \ldots \cdot X_m^{a_{mn}})^{x_n} = X_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot X_m^{b_m}$$

Svakom od izraza u zagradi u prethodnoj jednačini pridružujemo novu promenljivu $Y_k$ za $k = 1, 2, \ldots, m$ tako da važi:

$$Y_k = X_1^{a_{1k}} \ldots X_m^{a_{mk}}$$

odnosno:

$$p_k = Y_k - X_1^{a_{1k}} \ldots X_m^{a_{mk}} = 0$$

Ovim smo dobili sistem jednačina $p_1 = 0, p_2 = 0, \ldots, p_n = 0$ nad promenljivim $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$. Na osnovu nekoliko teorema koje ovde nećemo navoditi važi da rešenja polaznog sistema jednačina (4.2) možemo naći narednim postupkom:

1. izračunamo redukovanu Grebnerovu bazu $G$ ideala

   $$I = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle = \langle Y_k - X_1^{a_{1k}} X_2^{a_{2k}} \cdots X_m^{a_{mk}} | 1 \leq k \leq n \rangle$$

   u prstenu polinoma $K[X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ u odnosu na težinski poredak monoma u kome je težinski vektor izabran tako da koeficijenti uz $Y_k$ odgovaraju koeficijentima $c_k$, i pritom promenljive $X_i$ imaju veći značaj nego promenljive $Y_k$ (na primer razmatramo slučaj $X_1 > \ldots > X_m > Y_1 > \ldots > Y_n$),

2. izračunamo ostatak $r$ pri deljenju monoma $X_1^{b_1} X_2^{b_2} \cdots X_m^{b_m}$ polinomima baze $G$,

3. ako $r \notin K[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$ onda polazni sistem nema celobrojna rešenja; ako je $r = Y_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot Y_n^{\alpha_n}$ onda je $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ optimalno rešenje polaznog sistema.

Napomenimo da ovo važi u slučaju kada su svi koeficijenti u jednačinama pozitivni. U situaciji kada je neka vrednost $a_{ij}$ ili $b_k$ negativna, potrebno je uvesti novu promenljivu i malo izmeniti polinome kojima se generiše ideal. U ovom materijalu nećemo razmatrati taj slučaj.

**Primer 40.** *Razmotrimo sistem jednačina:*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned} \tag{4.3}$$

*Potrebno je pronaći rešenje ovog sistema kojim se minimizuje vrednost funkcije cene*

$$c(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

*Pridružimo prvoj jednačini promenljivu $X_1$, a drugoj promenljivu $X_2$. Na taj način dobijamo:*

$$X_1^{2x_1+x_2} = X_1^3$$
$$X_2^{x_1+x_2+3x_3} = X_2^5$$

*Množenjem ove dve jednačine dobijamo:*

$$X_1^{2x_1+x_2} \cdot X_2^{x_1+x_2+3x_3} = X_1^3 X_2^5$$

*Grupisanjem članova uz isti eksponent dobijamo:*

$$(X_1^2 X_2)^{x_1} \cdot (X_1 X_2)^{x_2} \cdot (X_2^3)^{x_3} = X_1^3 X_2^5$$

*Razmatramo ideal:*

$$I = \langle Y_1 - X_1^2 X_2, Y_2 - X_1 X_2, Y_3 - X_2^3 \rangle.$$

*Potrebno je odrediti Grebnerovu bazu ideala $I$ u odnosu na težinski poredak monoma za $X_1 > X_2 > Y_1 > Y_2 > Y_3$ sa težinskim vektorom $(10, 5, 1, 2, 3)$. Ona je jednaka:*

$$G = \{X_2Y_1 - Y_2^2, Y_2^6 - Y_1Y_3, X_2^2Y_2 - X_1Y_3, X_1Y_2 - Y_1, X_2Y_2^4 - Y_1^2Y_3,$$
$$X_1Y_1Y_3 - X_2Y_2^3, X_2^3 - Y_3, X_1X_2 - Y_2, X_1^2Y_3 - X_2Y_2^2\}$$

*Deljenjem polinoma $g = X_1^3X_2^5$ polinomima Grebnerove baze $G$ u odnosu na dati težinski poredak monoma dobijamo $Y_1Y_2Y_3$. Pošto je uz sve tri promenljive $Y_i$ eksponent jednak 1, zaključujemo da je optimalno rešenje polaznog sistema:*

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

**Praktična vežba 11.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular. Promenljivim $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2$ pridružujemo promenljive $x, y, z, u, v$ i zapisujemo odgovarajuće polinome. Izračunavamo ideal nad ovim polinomima i njegovu Grebnerovu bazu u odnosu na težinski poredak monoma, a zatim i ostatak pri deljenju polinoma g polinomima Grebnerove baze.*

```
> ring r=0, (x,y,z,u,v), Wp(10,5,3,2,1);
> poly h1 = z - x2y;
> poly h2 = u - xy;
> poly h3 = v - y3;
> ideal I = h1, h2, h3;
> ideal G = groebner(I);
> G;
G[1]=yz-u2
G[2]=u6-z3v
G[3]=y2u-xv
G[4]=xu-z
```

```
G[5]=yu4-z2v
G[6]=xzv-yu3
G[7]=y3-v
G[8]=xy-u
G[9]=x2v-yu2
> poly g = x3y5;
> reduce(g,G);
zuv
```

**Primer za vežbu 18.** *Odrediti rešenje sistema jednačina:*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

*kojim se minimizuje vrednost funkcije cene* $c(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1000x_1 + x_2 + x_3 + 100x_4$.

## 4.4 Računanje hromatskog broja grafa

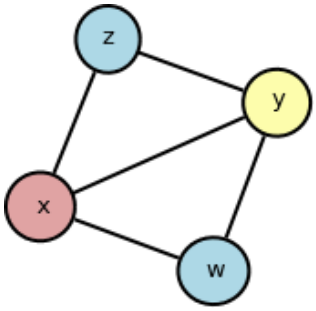
**Primer 41.** *Na fakultetu je potrebno napraviti raspored ispita. Dat je spisak kurseva i studenata koji pohađaju svaki od kurseva. Mnogi kursevi imaju zajedničke studente. Potrebno je napraviti raspored ispita tako da ispiti iz nikoja dva kursa koja pohađa isti student ne budu u isto vreme. Koliki je minimalan broj termina potreban za izvođenje svih ispita?*

*Problem pravljenja rasporeda ispita može se predstaviti kao grafovski problem tako što se svakom kursu dodeljuje jedan čvor u grafu, dok grana između dva čvora postoji ako postoji bar jedan student koji pohađa oba odgovarajuća kursa. Dakle, problem pravljenja rasporeda se može svesti na problem bojenja čvorova u grafu tako da nikoja dva susedna čvora ne budu obojena istom bojom, gde minimalan broj termina odgovara minimalnom broju boja potrebnih da se graf oboji.*

**Primer 42.** *U optimizaciji kompajlera, alokacija registara je proces dodeljivanja potencijalno velikog broja programskih promenljivih ograničenom broju registara procesora. Naime, računar može brzo da piše u i čita iz registara procesora, te se program brže izvršava ako je veći broj promenljivih smešten u registrima. Naravno, ne koriste se sve promenljive u svakom trenutku, te tokom rada programa jedan isti registar može da sadrži vrednost različitih promenljivih, s tim da dve promenljive koje se koriste u isto vreme ne mogu biti dodeljene jednom istom registru. Na koji način se može izvršiti odgovarajuća dodela?*

*I problem dodeljivanja promenljivih registrima se može razmatrati kao problem bojenja grafova, gde je svakoj promenljivoj dodeljen jedan čvor u grafu, grana postoji ako se dve promenljive koriste u isto vreme, a maksimalan dozvoljen broj boja ograničen je brojem raspoloživih registara.*

Graf $G = (V, E)$ je *k-obojiv* ako postoji dodela $k$ različitih boja čvorovima grafa tako da nikoja dva susedna čvora nemaju istu boju. Graf od $N$ čvorova sigurno se može obojiti sa $N$ boja. *Hromatski broj grafa* $\chi(G)$ je najmanji broj boja potreban da se oboji graf $G = (V, E)$ tako da nikoja dva susedna čvora ne budu obojena istom bojom. Hromatski broj grafa je izučavan i određen za različite familije grafova, pa je recimo u cikličkom grafu koji sadrži paran broj čvorova hromatski broj jednak 2, dok je u cikličkom grafu sa neparnim brojem čvorova on jednak 3. Hromatski broj grafa sa slike 4.2 iznosi 3. Postoji veliki broj otvorenih problema i hipoteza koje se odnose na hromatski broj grafa.




Slika 4.2: Bojenje grafa.

Pokazaćemo na koji način se problem odlučivosti $k$-obojivosti grafa može svesti na problem pripadnosti idealu. Radićemo u prstenu $\mathbb{C}[V]$, u kome je svakom čvoru grafa pridružena jedna promenljiva.

*Polinom $f_G$ grafa $G$* pridružen grafu $G = (V, E)$ jednak je:

$$f_G = \prod_{(u,v)\in E} (u - v)$$

**Teorema 9.** *Neka je $k$ pozitivan ceo broj. Neka je $I$ ideal generisan polinomima $v^k - 1$ za $v \in V$. Graf $G$ je $k$-obojiv ako i samo ako $f_G \notin I$.*

Ovaj kriterijum daje algoritam kojim se može utvrditi da li je dati graf $k$-obojiv: izračunamo Grebnerovu bazu ideala $I$ i izvršimo deljenje polinoma $f_G$ polinomima Grebnerove baze. Ukoliko se kao ostatak dobije vrednost 0 onda graf nije obojiv sa $k$ boja, a ako se dobije nenula ostatak onda jeste.

Intuicija iza ovog tvrđenja je sledeća: svaka od $k$ različitih boja predstavlja jedan različiti $k$-ti koren iz jedinice u polju $\mathbb{C}$. Dakle, polinomi nad kojima je ideal $I$ generisan odgovaraju dodeli vrednosti nekog $k$-tog korena iz jedinice promenljivim, odnosno odgovara dodeli boja čvorovima grafa. Međutim, ako kojim slučajem polinom $f_g$ pripada idealu

$I$, onda to znači da će njegova vrednost biti 0, a to znači da je nužno nekim susednim čvorovima dodeliti istu boju, te graf nije $k$-obojiv.

Traženje hromatskog broja datog grafa sa $N = |V|$ čvorova može se sprovesti narednim algoritmom:

**Algoritam** *Hromatski broj grafa*
**Ulaz:** Graf $G = (V, E)$ sa $N$ čvorova zadat matricom susedstva $M$
**Izlaz:** Hromatski broj grafa $\chi(G)$
1. $n \leftarrow 1$
2. **repeat**
3. $I \leftarrow \cup_{v=1}^{N}\{x[v]^n - 1\}$
4. izračunaj Grebnerovu bazu $B$ ideala $I$
5. na osnovu matrice susedstva $M$ izračunaj polinom $f_G$
6. **if** $f_G \in I$ {ostatak pri deljenju $f_G$ polinomima baze $B$ jednak je 0 }
7. **then** $n \leftarrow n + 1$
8. **until** $f_G \notin I$
9. **return** $n$

Međutim, s obzirom na to da se zna gornja granica za $n$ i da za obojivost sa $k$ boji važi svojstvo monotonosti, moguće je ovaj problem rešiti i efikasnije, binarnom pretragom po rešenju.

**Praktična vežba 12.** *Odredimo hromatski broj grafa $G$ sa slike 4.2. Proverimo da li se $G$ može obojiti sa 3 boje. Razmotrimo prsten $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ i ideal $I = \langle x^3 - 1, y^3 - 1, z^3 - 1, w^3 - 1\rangle$. Pokazuje se da je ovo takođe i Grebnerova baza ideala $I$. Polinom $f_G$ grafa $G$ jednak je $f_G = (x - y) \cdot (y - z) \cdot (z - x) \cdot (x - w) \cdot (y - w)$. Ostatak pri deljenju polinoma $f_G$ polinomima Grebnerove baze ideala $I$ različit je od nula, te je graf $G$ 3-obojiv.*

```
> ring A = 0, (x,y,z,w), lp;
> poly f1 = x3 - 1;
> poly f2 = y3 - 1;
> poly f3 = z3 - 1;
> poly f4 = w3 - 1;
> ideal I = f1, f2, f3, f4;
> ideal G = groebner(I);
> poly f = (x-y)*(y-z)*(z-x)*(x-w)*(y-w);
> reduce(f,G);
-x2yz2-x2yzw-x2yw2+x2z2w+x2zw2+x2+xy2z2+xy2zw+xy2w2
-xz2w2-xz-xw-y2z2w-y2zw2-y2+yz2w2+yz+yw
```

*Međutim, dati graf nije 2-obojiv jer polinom $f_G$ pripada idealu $I_1 = \langle x^2 - 1, y^2 - 1, z^2 - 1, w^2 - 1\rangle$*

```
> ring A = 0, (x,y,z,w), lp;
> poly g1 = x2 - 1;
> poly g2 = y2 - 1;
> poly g3 = z2 - 1;
```

```
> poly g4 = w2 - 1;
> ideal I1 = g1, g2, g3, g4;
> ideal G1 = groebner(I1);
> poly f = (x-y)*(y-z)*(z-x)*(x-w)*(y-w);
> reduce(f,G1);
0
```

*Zaključujemo da je hromatski broj grafa G jednak 3.*

# Glava 5

# Radikali i dokazivanje teorema u geometriji

Teoreme elementarne geometrije su oduvek smatrane dobrim test skupom u oblasti metoda za automatsko dokazivanje teorema. Najveći uspeh u automatskom dokazivanju terorema u geometriji imaju algebarske metode. Osnovna ideja algebarskih metoda je u tome da se pretpostavke geometrijskih tvrđenja transformišu u jednakosti nad koordinatama odgovarajućih tačaka i da se zatim nizom algebarskih transformacija pokaže da važi i zaključak odgovarajućeg tvrđenja. Algebarske metode su efikasne, međutim dokazi koji se pomoću njih dobijaju ne oslikavaju geometrijsku prirodu problema koji se rešava, nisu čitljivi niti nalik tradicionalnim geometrijskim dokazima. Pored metode Grebnerovih baza druga veoma uspešna algebarska metoda za dokazivanje teorema u geometriji je Vuova metoda, o kojoj ovde neće biti reči. Pomenimo i to da se metodom Grebnerovih baza mogu dokazati neka tvrđenja, međutim da postoje tvrđenja koja na ovaj način nije moguće dokazati.

## 5.1 Radikali ideala

Da bismo mogli da dokazujemo geometrijska tvrđenja neophodno je da uvedemo još neke algebarske pojmove.

**Definicija 12** (Radikal)**.** *Ideal $I$ je* radikal *ako iz toga da važi $f^m \in I$ za neki ceo broj $m \geq 1$ sledi da i $f \in I$.*

**Primer 43.** *Razmotrimo ideal $I = \langle x^2 - 2x + 1 \rangle$ i polinom $f = x - 1$. Primetimo da polinom $f^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ pripada idealu $I$. Međutim, polinom $f = x - 1$ ne pripada idealu $I$, odnosno ideal $I$ nije radikal.*

**Primer 44.** *U prstenu polinoma nad jednom promenljivom, radikali su ideali generisani polinomima bez ponovljenih nula. Na primer, ideali* $I_1 = \langle x^2 + 1\rangle$ *i* $I_2 = \langle x^2 - 1\rangle$ *jesu radikali. S druge strane, ideal* $I_3 = \langle (x+1)^2 \cdot (x-1)\rangle$ *nije radikal jer za* $f = (x+1)(x-1)$ *važi* $f^2 \in I_3$*, ali* $f \notin I_3$*.*

**Primer 45.** *Razmotrimo ideal* $I = \langle x^2 - y^2, x\rangle$ *iz prstena polinoma nad dve promenljive* $x$ *i* $y$*. On nije radikal jer* $f^2 = y^2 \in I$*, a polinom* $f = y \notin I$*.*

Navedeni primeri govore da neki ideali jesu radikali, a neki nisu.

**Definicija 13** (Radikal ideala)**.** *Neka je* $I \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *ideal.* Radikal ideala $I$ *(u oznaci* $\sqrt{I}$*) je skup* $\{f \mid f^m \in I$ *za neki ceo broj* $m \geq 1\}$*.*

Važi da je radikal nekog ideala i sam jedan ideal. Primetimo i to da je neki ideal radikal ako je jednak svom radikalu.

**Primer 46.** *Za ideal* $I = \langle x^2 - 2x + 1\rangle$ *i polinom* $f = x - 1$ *iz primera 43 možemo zaključiti da pošto* $f^2$ *pripada idealu* $I$*, onda polinom* $f$ *pripada radikalu* $\sqrt{I}$ *ideala* $I$*. Šta više,* $\sqrt{I} = \langle x - 1\rangle$*.*

**Praktična vežba 13.** *Funkcija* `radical` *iz biblioteke* `primdec.lib` *za dati ideal* $I$ *izračunava njegov radikal. Izračunajmo radikal ideala iz primera 46.*

```
> LIB "primdec.lib";
> ring r = 0, (x), lp;
> poly  p = x2 - 2x + 1;
> ideal I = p;
> ideal R = radical(I);
> R;
R[1]=x-1
```

*Zaključujemo da je radikal ideala* $I$ *generisan polinomom* $x - 1$*.*

**Praktična vežba 14.** *Izvršimo proveru da li je ideal* $I_1 = \langle x^2 - 1\rangle$ *iz primera 44 radikal.*

```
> poly q = x2 - 1;
```

```
> ideal I = q;
> ideal R = radical(I);
> R;
R[1]=x2-1
```

*Pošto je radikal ideala $I$ generisan polinomom $x^2 - 1$, zaključujemo da je ideal $I$ radikal.*

**Praktična vežba 15.** *Funkcija* `radicalMemberShip` *iz biblioteke* `tropical.lib` *proverava da li polinom $f$ pripada radikalu ideala $I$ i vraća 1 ako $f \in \sqrt{I}$, a 0 inače. Izvršimo proveru pripadnosti polinoma $x-1$ i polinoma $x+1$ radikalu $I = \langle x^2-2x+1 \rangle$ iz primera 46.*

```
> LIB "tropical.lib";
> ring r = 0, (x), lp;
> poly p = x2 - 2x + 1;
> ideal I = p;
> poly q = x - 1;
> radicalMemberShip(q,I);
1
> poly s = x + 1;
> radicalMemberShip(s,I);
0
```

**Primer 47.** *Radikal ideala $I = \langle x^2 - y^2, x \rangle$ iz primera 45 je $\sqrt{I} = \langle x, y \rangle$.*

**Praktična vežba 16.** *Proverimo prethodni primer u Singularu.*

```
> LIB "primdec.lib";
> ring r=0,(x,y),lp;
> poly p = x2 - y2;
> poly q = x;
> ideal I = p, q;
> ideal R = radical(I);
> R;
R[1]=y
R[2]=x
```

**Primer 48.** *Radikal ideala* $I = \langle x^4 \rangle$ *jednak je* $\sqrt{I} = \langle x \rangle$.

**Praktična vežba 17.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular.*

```
> LIB "primdec.lib";
> ring r = 0, (x), lp;
> poly p = x4;
> ideal I = p;
> ideal R = radical(I);
> R;
R[1]=x
```

**Teorema 10.** *Pretpostavimo da* $f_1, f_2, \ldots, f_m, f \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. *Ako je* $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ *i* $f \in \sqrt{\langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle}$, *onda* $f \in V(I)$, *tj. iz uslova da važi* $f_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \ldots, f_m(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ *sledi i* $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$.

Tvrđenje Teoreme 10 možemo iskoristiti za dokazivanje da iz nekog skupa tvrđenja $f_i = 0$, $1 \leq i \leq m$ sledi tvrđenje $f = 0$. Međutim, potrebno je imati neki jednostavan test kojim bi se moglo proveriti da li neki polinom $f$ pripada radikalu ideala $I$. Bilo bi jako neefikasno za svako $m > 0$ proveravati da li $f^m \in I$ i stati kada pronađemo takvo $m$. S druge strane, može se desiti da $f \notin \sqrt{I}$ što na ovaj način ne bismo mogli da utvrdimo.

Tvrđenje da za svako $x_1, \ldots, x_n$ iz skupa jednakosti $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ sledi jednakost $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ekvivalentno je tvrđenju da ne postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako da istovremeno važi $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ i $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Ako je $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ onda $f(x_1, \ldots, x_n)$ ima inverz u odnosu na množenje, tj. postoji neko $y$ tako da je $y \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, odnosno $1 - y \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Ovo pak odgovara tome da ne postoje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y$ tako da istovremeno važi $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ i $1 - y \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Na ovaj način smo problem pripadnosti radikalu sveli na pitanje postojanja zajedničkih nula polinoma što je moguće utvrditi metodom Grebnerovih baza: naime, kao što je već navedeno u poglavlju 4.1 skup polinoma nema zajedničkih nula ako i samo ako je njegova redukovana Grebnerova baza jednaka $\{1\}$. Odavde dobijamo naredno tvrđenje.

**Teorema 11** (Pripadnost radikalu)**.** *Neka je* $K$ *proizvoljno polje i neka je* $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *ideal. Tada* $f \in \sqrt{I}$ *ako i samo ako konstantni polinom* 1 *pripada idealu* $I' = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m, 1 - yf \rangle \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n, y]$, *gde je* $y$ *nova promenljiva.*

Pokazuje se, međutim, da u mnogim situacijama odgovarajući sistem jednačina ima zajedničke nule, odnosno odgovarajuća Grebnerova baza daje moguća rešenja koja se mogu razmatrati kao degenerisani slučajevi. U tim situacijama se ne može garantovati da tvrđenje važi, dok je inače tvrđenje tačno.

Uvođenje novih promenljivih (kao u prethodnoj teoremi) se pokazuje kao korisna tehnika za rešavanje problema pripadnosti radikalu.

Na osnovu Teoreme 10 i Teoreme 11 sledi naredna teorema.

**Teorema 12.** *Neka su $h_1, h_2, \ldots, h_m$ hipoteze, a $g$ zaključak tvrđenja koje treba dokazati. Zaključak $g$ sledi iz hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ako i samo ako je $\{1\}$ redukovana Grebnerova baza ideala $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m, 1 - yg\rangle$, gde je $y$ nova promenljiva.*

Ova teorema biće korišćena za dokazivanje geometrijskih tvrđenja.

## 5.2 Osnovni postupak dokazivanja

Razmatraćemo geometriju kao teoriju prvog reda i njenu interpretaciju u domenu koji čini brojevni sistem koji je algebarsko zatvorenje[1] $\overline{K}$ polja $K$, odnosno geometrijski objekti leže u $\overline{K}^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Razlog zbog koga je neophodno da polje bude algebarski zatvoreno ćemo navesti nešto kasnije u okviru ovog poglavlja. Tvrđenja koja je moguće dokazivati se sastoje od određenog broja hipoteza i jednog ili većeg broja zaključaka, gde se na hipoteze i zaključke može gledati kao na neku konfiguraciju geometrijskih objekata poput tačaka, pravih i krugova. Uvođenjem Dekartovih koordinata u Euklidsku ravan, moguće je definisati odgovarajući skup polinoma $h_1, h_2, \ldots, h_m$ u terminima promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako da je $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ldots = h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ tačno kada su uslovi tvrđenja zadovoljeni. Tvrđenja koja ćemo dokazivati su oblika:

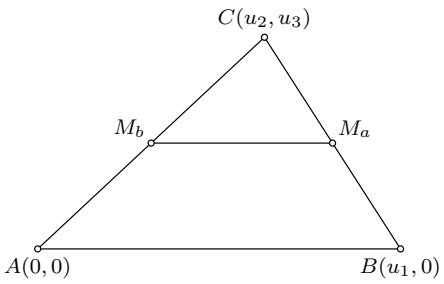
$$(\forall x \in \overline{K}^n)(h_1(x) = \ldots = h_m(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0)$$

gde su $h_1, h_2, \ldots, h_m, f$ polinomi u $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Polinome $h_1, h_2, \ldots, h_m$ zvaćemo *hipotezama* ili *premisama*, a polinom $f$ *zaključkom* tvrđenja koje dokazujemo. Na ovaj način možemo da rezonujemo o raznim geometrijskim tvrđenjima kao što su incidencija tačaka, paralelnost i upravnost pravih, pripadnost tačaka krugu i dr.

Najpre je potrebno smestiti osnovne objekte u koordinatnu ravan, pridruživanjem koordinata svim značajnim tačkama i to tako da tačke čiji je položaj nezavisan od pozicija ostalih tačaka sa slike imaju koordinate $u_i$, a tačke čiji položaj zavisi od položaja ostalih tačaka na slici sa $x_i$. Dodeljivanje koordinata tačkama omogućava prevođenje hipoteza i zaključka (ili zaključaka) teoreme iz jezika geometrije u polinomijalne jednakosti u odnosu na pogodno odabran koordinatni sistem. Da bi teorema važila potrebno je da polinomi koji predstavljaju zaključak teoreme pripadaju idealu koji je generisan polinomima koji predstavljaju hipoteze. To se može proveriti na sledeći način: za ideal generisan hipotezama tvrđenja koje se dokazuje računa se njegova Grebnerova baza, a zatim se polinom koji predstavlja zaključak deli skupom polinoma Grebnerove baze: ako se pritom dobije ostatak 0, tada se zaključak može zapisati kao linearna kombinacija polinoma Grebnerove baze što znači da je on element ideala generisanog hipotezama tvrđenja koje dokazujemo. Napomenimo da je postupak ispitivanja da li neki polinom pripada datom idealu primenom algoritma deljenja u prstenu više promenljivih vremenski zahtevan i da se zbog toga često koristi metod koji proverava pripadnost radikalu.

U kom smislu zaključak $g$ tvrđenja treba da sledi iz hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$? Potrebno je da se tvrđenje $g$ anulira u svakoj od tačaka u kojoj se anuliraju hipoteze $h_1, h_2, \ldots, h_m$. Drugim rečima, potrebno je da svaka tačka afinog varijeteta definisanog hipotezama $h_1, h_2, \ldots, h_m$ zadovoljava i zaključak $g$.

[1] Algebarsko zatvorenje polja $K$ je njegovo raširenje koje je algebarski zatvoreno, odnosno za koje važi da svaki nekonstantan polinom sa koeficijentima iz $K$ ima koren u $K$. Polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, jer na primer jednačina $x^2 + 1 = 0$ čiji su koeficijenti iz skupa $\mathbb{R}$ nema rešenja u polju realnih brojeva. Slično, ni polje racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ nije algebarski zatvoreno. Međutim, polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ jeste algebarski zatvoreno.




Slika 5.1: Srednja linija trougla paralelna je naspramnoj stranici trougla.

**Primer 49.** *Neka je $ABC$ trougao i neka je $M_b$ središte stranice $AC$, a $M_a$ središte stranice $BC$. Srednja linija $M_bM_a$ trougla $ABC$ paralelna je stranici $AB$.*

*Potrebno je najpre smestiti osnovne objekte u koordinatnu ravan i nakon toga interpretirati hipoteze i zaključak teoreme kao tvrđenja u terminima koordinata. Naravno, da bi dokaz bio korektan u opštem slučaju, koordinate tačaka ne smeju biti direktno zadate; ipak, možemo zadati koordinate kojima se ne narušava opštost, a sa kojima se lakše računa. Na primer, teme $A$ možemo smestiti u koordinatni početak, tj. možemo mu pridružiti koordinate $A(0,0)$, a stranicu $AB$ postaviti tako da bude paralelna $x$ osi, tj. temenu $B$ možemo pridružiti koordinate $B(u_1, 0)$. Na koordinate temena $C$ ne smemo postaviti nikakva ograničenja da bismo razmatrali proizvoljan trougao. Dakle, temenu $C$ pridružujemo koordinate $C(u_2, u_3)$ (slika 5.1).*

*Pozicije tačaka $M_b$ i $M_a$ zavise od pozicija temena trougla $ABC$ te ćemo njima pridružiti koordinate $M_b(x_1, y_1)$ i $M_a(x_2, y_2)$. Tačka $M_b$ je središte duži $AC$ te za $x$ koordinatu tačke $M_b$ važi uslov:*

$$\begin{aligned} 2x_1 &= u_2 \\ h_1 &= 2x_1 - u_2 = 0 \end{aligned}$$

*Slično, za $y$ koordinatu tačke $M_b$ važi:*

$$\begin{aligned} 2y_1 &= u_3 \\ h_2 &= 2y_1 - u_3 = 0 \end{aligned}$$

*Pošto je tačka $M_a$ središte duži $BC$ za njenu $x$ koordinatu važi uslov:*

$$\begin{aligned} 2x_2 &= u_1 + u_2 \\ h_3 &= 2x_2 - u_1 - u_2 = 0 \end{aligned}$$

*i slično važi:*

$$\begin{aligned} 2y_2 &= u_3 \\ h_4 &= 2y_2 - u_3 = 0 \end{aligned}$$

*Jednakosti $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$ i $h_4 = 0$ predstavljaju hipoteze tvrđenja koje treba dokazati. Zaključak tvrđenja, da su duži $M_bM_a$ i $AB$ paralelne, s obzirom na to da je duž $AB$ paralelna $x$ osi može se zapisati u vidu uslova da su $y$ koordinate tačaka $M_b$ i $M_a$ jednake, odnosno da važi:*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ g &= y_2 - y_1 = 0 \end{aligned}$$

*Dakle, treba pokazati da svaka $n$-torka vrednosti koja zadovoljava jednačine $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0, h_4 = 0$ takođe zadovoljava i jednačinu $g = 0$, odnosno da važi:*

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ u_2\ u_3\ x_1\ y_1\ x_2\ y_2 \in \mathbb{R} \\ 2x_1 - u_2 = 0 \ \wedge\ 2y_1 - u_3 = 0 \ \wedge\ 2x_2 - u_1 - u_2 = 0 \ \wedge\ &2y_2 - u_3 = 0 \\ &\Rightarrow y_2 - y_1 = 0 \end{aligned}$$

*Primetimo da je*

$$g = y_2 - y_1 = \frac{1}{2}h_4 - \frac{1}{2}h_2$$

*te pripada idealu $I = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$ odakle sledi tačnost polaznog tvrđenja.*

**Praktična vežba 18.** *Proverimo ovaj primer u alatu Singular. Promenljive $u_1$, $u_2$ i $u_3$ preimenovaćemo u $a$, $b$ i $c$, redom, dok ćemo promenljive $x_1, x_2, y_1$ i $y_2$ preimenovati u $x$, $y$, $z$ i $w$ (želimo da napravimo razliku između koordinata polaznih, nezavisnih tačaka i koordinata tačaka čije vrednosti zavise od pozicije polaznih tačaka). Definišemo polinome $h_1, h_2, h_3$ i $h_4$ koji predstavljaju hipoteze i polinom $g$ koji predstavlja zaključak tvrđenja koje se dokazuje. Proverimo da li polinom $g$ pripada idealu $I$ koji je generisan polinomima hipoteza tvrđenja.*

```
> ring r = 0, (a,b,c,x,y,z,w), lp;
> poly h1 = 2x - b;
> poly h2 = 2y - c;
> poly h3 = 2z - a - b;
> poly h4 = 2w - c;
> poly g = w - y;
> ideal I = h1, h2, h3, h4;
> ideal G = groebner(I);
> reduce(g,G);
0
```

*Kao ostatak pri deljenju polinoma $g$ polinomima Grebnerove baze ideala $I$ dobijamo 0, te zaključujemo da polinom $g$ pripada idealu $I$ i da će njegova vrednost biti jednaka 0 uvek kada polinomi hipoteza $h_i$ imaju vrednost 0.*

*Do istog zaključka možemo doći i na drugačiji način: izračunavamo redukovanu Grebnerovu bazu ideala $I$ nad skupom hipoteza $h_1, h_2, h_3$ i $h_4$ i polinomom $1 - v \cdot g$, gde je $v$*

*nova promenljiva i proveravamo da li je jednaka* 1. *U ovom slučaju prilikom definisanja prstena polinoma, potrebno je navesti i dodatnu promenljivu* $v$.

```
> ring r = 0, (a,b,c,x,y,z,w,v), lp;
> poly h1 = 2x - b;
> poly h2 = 2y - c;
> poly h3 = 2z - a - b;
> poly h4 = 2w - c;
> poly g = w - y;
> ideal I = h1, h2, h3, h4, 1 - v * g;
> ideal G = groebner(I);
G;
G[1]=1
```

*Pošto je Grebnerova baza ovog ideala jednaka* $\{1\}$ *zaključujemo da polinom* $g$ *sledi iz polinoma* $h_1, h_2, h_3$ *i* $h_4$.

Kazaćemo da zaključak $g$ *sledi striktno* (eng. follows strictly) iz hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$ ako $g \in I(V) \subset K[u_1, u_2, \ldots, u_l, x_1, x_2, \ldots, x_j]$ gde je $V = V(h_1, h_2, \ldots, h_m)$. U nekim slučajevima geometrijsko tvrđenje je tačno, ali zaključak ne sledi striktno iz skupa hipoteza. Kada zaključak ne sledi striktno iz skupa hipoteza, potencijalno zbog degenerisanih slučajeva, želeli bismo da analiziramo tačnost tvrđenja izuzimajući degenerisane slučajeve. U tom slučaju ispitivaćemo da li zaključak *sledi uopšteno* (eng. follows generically) iz skupa hipoteza.

Važe naredna dva tvrđenja:

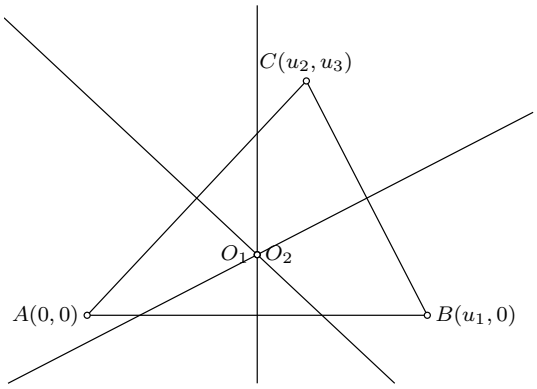
**Teorema 13.** *Ako* $g \in \sqrt{\langle h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle}$ *onda* $g$ *striktno sledi iz* $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

**Teorema 14.** *Neka su* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *hipoteze, a* $g$ *zaključak tvrđenja. Zaključak* $g$ *sledi uopšteno iz hipoteza* $h_i$ *ako i samo ako je* $\{1\}$ *redukovana Grebnerova baza ideala* $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m, 1 - yg \rangle \subset R(u_1, u_2, \ldots, u_m)[x_1, x_2, \ldots, x_n, y]$, *gde je* $y$ *nova promenljiva.*

**Primer 50.** *Dokazati da se medijatrise (simetrale) stranica trougla* $ABC$ *seku u jednoj tački.*

*Teme* $A$ *smeštamo u koordinatni početak, tj. pridružujemo mu koordinate* $A(0, 0)$, *a stranicu* $AB$ *postavljamo tako da bude paralelna* $x$ *osi, tj. temenu* $B$ *možemo pridružiti koordinate* $B(u_1, 0)$. *Na koordinate temena* $C$ *ne postavljamo nikakva ograničenja i pridružujemo mu koordinate* $C(u_2, u_3)$ *(slika 5.2).*

*Razmotrimo na koji način možemo doći do jednačine medijatrise duži* $PQ$ *čije krajnje tačke imaju koordinate* $P(p_1, p_2)$ *i* $Q(q_1, q_2)$. *Medijatrisu duži* $PQ$ *možemo okarakterisati kao pravu koja prolazi kroz središte duži* $PQ$ *i koja je upravna na duž* $PQ$. *Označimo središte duži* $PQ$ *sa* $M$ – *ono ima koordinate* $M(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2})$. *Za koeficijente pravaca međusobno upravnih pravih (osim kada je jedna od njih horizontalna) važi da im je proizvod jednak* $-1$. *Duž* $PQ$ *ima koeficijent pravca* $k_1 = \frac{q_2-p_2}{q_1-p_1}$, *te medijatrisa duži* $PQ$ *kao*




Slika 5.2: Medijatrise stranica trougla seku se u jednoj tački.

*njoj upravna prava ima koeficijent pravca* $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{q_1-p_1}{q_2-p_2}$. *Dakle, medijatrisa duži* $PQ$ *ima jednačinu:*

$$y - y_M = k_2(x - x_M).$$

*Zamenom vrednosti* $x$ *i* $y$ *koordinata tačke* $M$ *i vrednosti koeficijenta pravca medijatrise duži* $PQ$ *dobijamo jednačinu medijatrise duži* $PQ$*:*

$$y - \frac{p_2 + q_2}{2} = -\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2}(x - \frac{p_1 + q_1}{2}).$$

*Grupisanjem članova uz* $x$ *i* $y$ *dobijamo:*

$$\frac{q_1 - p_1}{q_2 - p_2}x + y - \frac{q_2^2 - p_2^2 + q_1^2 - p_1^2}{2(q_2 - p_2)} = 0.$$

*Specijalno, kada razmatramo trougao* $ABC$*, medijatrise njihovih stranica imaju naredne jednačine: medijatrisa* $m_c$ *stranice* $AB$ *zadata je jednačinom:*

$$m_c : \ x - \frac{u_1}{2} = 0,$$

*medijatrisa* $m_a$ *stranice* $BC$ *jednačinom:*

$$m_a : \ \frac{u_2 - u_1}{u_3}x + y - \frac{u_3^2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_3} = 0,$$

*a medijatrisa* $m_b$ *stranice* $AC$ *jednačinom:*

$$m_b : \ \frac{u_2}{u_3}x + y - \frac{u_3^2 + u_2^2}{2u_3} = 0.$$

*Postavlja se pitanje kako formulisati tvrđenje ove teoreme. Pretpostavimo da se medijatrise stranica* $AB$ *i* $BC$ *seku u tački* $O_1(x_1, y_1)$*, a medijatrise stranica* $AB$ *i* $AC$ *u tački*

*$O_2(x_2, y_2)$. Dobijamo naredni sistem jednačina:*

$$\begin{aligned}
h_1 &= x_1 - \frac{u_1}{2} = 0 \ \ (O_1 \in m_c) \\
h_2 &= \frac{u_2 - u_1}{u_3} x_1 + y_1 - \frac{u_3^2 - u_1^2 + u_2^2}{2u_3} = 0 \ \ (O_1 \in m_a) \\
h_3 &= x_2 - \frac{u_1}{2} = 0 \ \ (O_2 \in m_c) \\
h_4 &= \frac{u_2}{u_3} x_2 + y_2 - \frac{u_3^2 + u_2^2}{2u_3} = 0 \ \ (O_2 \in m_b)
\end{aligned}$$

*kojim je zadata konstrukcija tačaka $O_1$ i $O_2$. Tvrđenje koje treba pokazati jeste da za ovako konstruisane tačke $O_1$ i $O_2$ važi $O_1 = O_2$, odnosno da važi $x_1 = x_2$ i istovremeno važi $y_1 = y_2$, odnosno da li važe uslovi:*

$$\begin{aligned}
g_1 &= x_1 - x_2 = 0 \\
g_2 &= y_1 - y_2 = 0
\end{aligned}$$

*Dato tvrđenje je moguće pokazati na nekoliko načina. Prvi način se zasniva na proveri da li polinomi $g_1$ i $g_2$ pripadaju idealu $I = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$. Da bismo to utvrdili izračunaćemo Grebnerovu bazu $B$ ideala generisanog skupom polinoma $S = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ u prstenu $K[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, y_1, y_2]$ i pokazati da je ostatak pri deljenju polinoma $g_1 = x_1 - x_2$ polinomima baze $B$ jednak $0$ i, analogno, da je ostatak pri deljenju polinoma $g_2 = y_1 - y_2$ polinomima baze $B$ jednak $0$. Kao redukovanu Grebnerovu bazu datog ideala dobijamo $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, pri čemu važi:*

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2x_1 - u_1 = 0 \\
b_2 &= 2x_2 - u_1 = 0 \\
b_3 &= u_3 y_1 - u_3 y_2 = 0 \\
b_4 &= 2u_3 y_2 + u_1 u_2 - u_2^2 - u_3^2 = 0
\end{aligned}$$

*Lako se pokazuje da je ostatak pri deljenju polinoma $g_1 = x_1 - x_2$ polinomima Grebnerove baze $B$ jednak 0 i, slično, ostatak pri deljenju polinoma $g_2 = y_1 - y_2$ polinomima Grebnerove baze $B$ jednak je 0. Naime, važi:*

$$\begin{aligned}
g_1 &= x_1 - x_2 = \frac{1}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 \\
g_2 &= y_1 - y_2 = \frac{1}{3} u_3 b_3
\end{aligned}$$

*Na osnovu prethodne dve jednakosti možemo zaključiti da bez obzira na to da li je $u_3$ parametar, odnosno vrednost iz prstena $K$ ili promenljiva, važi da polinomi $g_1$ i $g_2$ pripadaju idealu nad polinomima baze $B$. Primetimo da smo kojim slučajem umesto $g_2 = \frac{1}{3} u_3 b_3$ dobili da je $g_2 = \frac{1}{3} \frac{b_3}{u_3}$, onda bi polinom $g_2$ pripadao idealu $I$ samo kada je $u_3$ element skupa $K$, dok u slučaju kada je $u_3$ iz skupa promenljivih $\frac{b_3}{u_3}$ ne bi bio polinom.*

*Prethodno tvrđenje je moguće pokazati i proverom pripadnosti radikalu. Redukovana Grebnerova baza ideala $I_1 = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, 1 - y g_1 \rangle$ u prstenu polinoma*

$\mathbb{R}[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, y_1, y_2]$ *jednaka je* $\{1\}$ *i, analogno, redukovana Grebnerova baza ideala* $I_2 = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, 1 - yg_2 \rangle$ *jednaka je* $\{1\}$ *te tvrđenje teoreme sledi. Razlog za ispitivanje pripadnosti radikalu jeste taj što može biti vremenski zahtevno utvrditi da li je zaključak* $g$ *element određenog ideala.*

**Praktična vežba 19.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular. Najpre je potrebno zadati da su koeficijenti polinoma koje razmatramo racionalni brojevi, da su polinomi iz hipoteza i zaključaka formulisani u terminima promenljivih* $u_1$, $u_2$ *i* $u_3$ *(koje odgovaraju koordinatama tačaka koje su inicijalno date) i promenljivih* $x_1, x_2, y_1$ *i* $y_2$ *koje odgovaraju koordinatama zavisnih tačaka. Redom ćemo ih preimenovati u* $a$, $b$ *i* $c$, *odnosno* $x$, $y$, $z$ *i* $w$. *Definišemo polinome* $h_1, h_2, h_3$ *i* $h_4$ *koji predstavljaju hipoteze tvrđenja koje se dokazuje i polinome* $g_1$ *i* $g_2$ *koji predstavljaju zaključke. Proverimo da li polinomi* $g_1$ *i* $g_2$ *pripadaju idealu* $I = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$.

```
> ring r = 0, (a,b,c,x,y,z,w,v), lp;
> poly h1 = x - a/2;
> poly h2 = (a - b)/c*x - z + (c2 - a2 + b2)/(2*c);
> poly h3 = y - a/2;
> poly h4 = b/c*y + w - (c2 + b2)/(2*c);
> ideal I = h1, h2, h3, h4;
> ideal G = groebner(I);
> poly g1 = x - y;
> reduce(g1,G);
0
> poly g2 = z - w;
> reduce(g2,G);
0
```

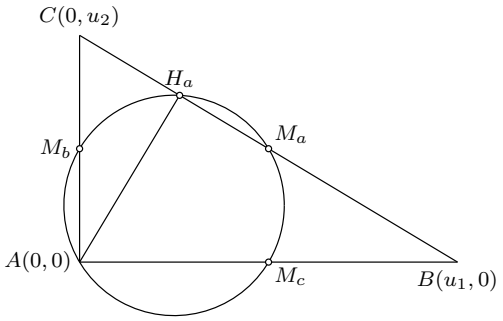
*Pošto je ostatak pri deljenju i polinoma* $g_1$ *i polinoma* $g_2$ *polinoma Grebnerove baze jednak 0, zaključujemo da oba polinoma pripadaju idealu* $I$ *i stoga će imati vrednost 0 uvek kada i polinomi* $h_1, h_2, h_3$ *i* $h_4$ *imaju vrednost 0.*

*Do ovog zaključka možemo doći i na drugi način. Za to će nam biti potrebna i dodatna promenljiva za proveru pripadnosti idealu koju ćemo označiti sa* $v$. *Nakon toga generišemo ideal* $I_1$ *nad datim skupom polinoma* $h_1, h_2, h_3$ *i* $h_4$ *i polinomom* $1 - v \cdot g_1$, *računamo redukovanu Grebnerovu bazu* $G_1$ *tog ideala i proveravamo da li je jednaka* $1$. *Sličan postupak ponavljamo i za drugi polinom u zaključku tvrđenja* $g_2$.

```
> ring r = 0, (a,b,c,x,y,z,w,v), lp;
> poly h1 = x - a/2;
> poly h2 = (a - b)/c*x - z + (c2 - a2 + b2)/(2*c);
> poly h3 = y - a/2;
> poly h4 = b/c*y + w - (c2 + b2)/(2*c);
> poly g1 = x - y;
> ideal I1 = h1, h2, h3, h4, 1 - v * g1;
```

```
> ideal G1 = groebner(I1);
G1;
G1[1]=1
> poly g2 = z - w;
> ideal I2 = h1, h2, h3, h4, 1 - v * g2;
> ideal G2 = groebner(I2);
G2;
G2[1]=1
```

*Pošto kao redukovanu Grebnerovu bazu ideala $I_1$ i $I_2$ dobijamo $\{1\}$, na osnovu Teoreme 12 zaključujemo da polinomi $g_1$ i $g_2$ koji predstavljaju zaključke tvrđenja koje se dokazuje slede iz hipoteza $h_1, h_2, h_3$ i $h_4$, te da je tvrđenje da se medijatrise trougla seku u jednoj tački tačno.*




Slika 5.3: Ilustracija Apolonijeve teoreme.

**Primer 51.** *Neka je $ABC$ pravougli trougao sa pravim uglom kod temena $A$. Središta tri stranice trougla i podnožje visine iz temena $A$ pripadaju jednom krugu (slika 5.3). Ovo tvrđenje poznato je pod nazivom* Apolonijeva teorema *i odnosi se na krug koji je poznat kao* Ojlerov krug, *odnosno* krug devet tačaka.

*Smestimo teme $A$ u koordinatni početak, a teme $B$ u tačku sa koordinatama $B(u_1, 0)$. Pošto je trougao pravougli, $x$ koordinata tačke $C$ je 0, dok $y$ koordinata ima proizvoljnu vrednost, te temenu $C$ pridružujemo koordinate $C(0, u_2)$. Označimo središta stranica $AB$, $AC$ i $BC$ redom sa $M_c$, $M_b$ i $M_a$ i neka ona imaju koordinate $M_c(x_1, 0)$, $M_b(0, x_2)$ i $M_a(x_3, x_4)$. Tvrđenje da je tačka $M_c$ središte duži može se zapisati kao $x_1 = \frac{u_1}{2}$. Dakle prva hipoteza tvrđenja koje dokazujemo glasi:*

$$h_1 = 2x_1 - u_1 = 0.$$

*Slično, tvrđenju da je tačka $M_b$ središte duži $AC$ odgovara hipoteza:*

$$h_2 = 2x_2 - u_2 = 0.$$

*Tvrđenju da je tačka $M_a$ središte duži $BC$ odgovaraju uslovi da je $x_3 = \frac{u_1}{2}$ i $x_4 = \frac{u_2}{2}$, odnosno naredne dve hipoteze:*

$$h_3 = 2x_3 - u_1 = 0$$

$$h_4 = 2x_4 - u_2 = 0$$

*Dodelimo podnožju visine iz temena $A$ koordinate $H_a(x_5, x_6)$. Duž $AH_a$ je upravna na stranicu $BC$ ako je skalarni proizvod vektora $AH_a(x_5, x_6)$ i vektora $BC(-u_1, u_2)$ jednak $0$, te iz ovog uslova dobijamo narednu hipotezu:*

$$h_5 = (x_5, x_6) \cdot (-u_1, u_2) = -u_1x_5 + u_2x_6 = 0$$

*Dodatno, važi da su tačke $B$, $H_a$ i $C$ kolinearne, te za koeficijente pravaca duži $BC$ i $BH_a$ važi $k_{BC} = k_{BH_a}$, odnosno $\frac{u_2}{-u_1} = \frac{x_6}{x_5 - u_1}$, odakle dobijamo novu hipotezu:*

$$h_6 = x_5u_2 - u_1u_2 + x_6u_1 = 0$$

*Razmotrimo tvrđenje da tačke $M_a$, $M_b$, $M_c$ i $H_a$ pripadaju krugu. Možemo ga pogodnije formulisati na sledeći način: ako konstruišemo krug kroz tačke $M_a$, $M_b$ i $M_c$, onda tačka $H_a$ takođe pripada ovom krugu. Da bismo konstruisali krug kroz tačke $M_a$, $M_b$ i $M_c$ potrebno je da razmotrimo njegovo središte $O$ i pridružimo mu koordinate $O(x_7, x_8)$: tačke $M_a$, $M_b$ i $M_c$ su na krugu sa središtem $O$ ako važi da je $|M_aO| = |M_cO|$ i $|M_bO| = |M_cO|$. Odavde dobijamo*

$$(x_7 - x_3)^2 + (x_8 - x_4)^2 = (x_7 - x_1)^2 + x_8^2$$

*i*

$$x_7^2 + (x_8 - x_2)^2 = (x_7 - x_1)^2 + x_8^2,$$

*odnosno dobijamo dve nove hipoteze tvrđenja koje treba pokazati:*

$$h_7 = (x_7 - x_1)^2 + x_8^2 - (x_7 - x_3)^2 - (x_8 - x_4)^2 = 0$$

$$h_8 = (x_7 - x_1)^2 + x_8^2 - x_7^2 - (x_8 - x_2)^2 = 0$$

*Zaključak, da tačka $H_a$ pripada krugu kroz tačke $M_a$, $M_b$ i $M_c$, odnosno da važi $|H_aO| = |M_cO|$, može se formulisati u vidu uslova:*

$$g = (x_7 - x_5)^2 + (x_8 - x_6)^2 - (x_7 - x_1)^2 - x_8^2 = 0$$

*Ukoliko radimo u prstenu polinoma $K[u_1, u_2, x_1, \ldots, x_8]$ pri deljenju polinoma $g$ polinomima Grebnerove baze dobijamo vrednost različitu od 0, te zaključak $g$ ne sledi striktno iz skupa hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$.*

*Podsetimo se da su sa $u_i$ označene vrednosti koje su proizvoljno izabrane i čija vrednost treba da bude različita od nule ako hoćemo da izbegnemo degenerisane slučajeve. Stoga, možemo ispitati da li zaključak tvrđenja sledi uopšteno (do na degenerisane slučajeve)*

*iz hipoteza tvrđenja i izračunavanja izvršavati u prstenu* $\mathbb{R}(u_1, u_2)[x_1, x_2, \ldots, x_8]$. *Naime, ako vrednosti* $u_1$ *i* $u_2$ *posmatramo kao parametre iz polja* $K$ *onda se može pokazati da polinom* $g$ *pripada idealu nad polinomima* $h_1, h_2, \ldots, h_8$ *u prstenu polinoma* $K(u_1, u_2)[x_1, x_2, \ldots, x_8]$. *Naime pokazaje se da je ostatak pri deljenju polinoma* $g$ *polinomima Grebnerove baze* $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_8\}$ *ovog ideala jednak 0, odnosno da polinom* $g$ *pripada idealu definisanim hipotezama* $h_1, h_2, \ldots, h_8$*:*

$$\begin{aligned} g &= (-x_1 + 2x_7 - \frac{u_1}{2}) \cdot f_1 + (x_5 - 2x_7 + \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}) \cdot f_5 \\ &+ (x_6 - 2x_8 + \frac{u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}) \cdot f_6 + \frac{u_1^3 - u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \cdot f_7 + \frac{-2u_1^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \cdot f_8 \end{aligned}$$

*Obratimo pažnju da kada bismo radili u prstenu polinoma* $K[u_1, u_2, x_1, \ldots, x_8]$ *prethodna veza ne bi označavala pripadnost idealu, jer recimo izraz* $\frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}$ *ne predstavlja polinom nad promenljivim* $u_1$ *i* $u_2$.

**Praktična vežba 20.** *Proverimo prethodni primer u alatu Singular. Pokažimo najpre da ako i vrednosti promenljivih* $u_1$ *i* $u_2$ *razmatramo na isti način kao i promenljive* $x_i$*, ispitivanje pripadnosti polinoma* $g$ *idealu* $I = \langle h_1, h_2, \ldots, h_8 \rangle$ *u prstenu polinoma* $K[u_1, u_2, x_1, x_2, \ldots, x_8, y]$ *neće uspeti.*

*U Singularu ćemo promenljive* $u_1$ *i* $u_2$ *preimenovati u* $a$ *i* $b$*, redom, dok ćemo promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_8$ *nazvati redom* $x$*,* $y$*,* $z$*,* $u$*,* $v$*,* $w$*,* $s$ *i* $t$.

```
> ring r = 0, (a,b,x,y,z,u,v,w,s,t), lp;
> poly h1 = 2x - a;
> poly h2 = 2y - b;
> poly h3 = 2z - a;
> poly h4 = 2u - b;
> poly h5 = -av + bw;
> poly h6 = bv - ab + aw;
> poly h7 = (s-x)^2 + t2 - (s-z)^2 - (t-u)^2;
> poly h8 = (s-x)^2 + t2 - s2 - (t-y)^2;
> ideal I = h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8;
> ideal G = groebner(I);
G;
G[1]=uw2s2+uw2t2-4uws2t
G[2]=uvs-uwt
G[3]=uvwt+uw2s-4uwst
G[4]=uv2+uw2-4uwt
G[5]=u2-2ut
G[6]=zwt-u2v+2uvt-uws
G[7]=zw2-2u2v+uvw+4uvt-4uws
G[8]=zv-uw
```

```
G[9]=2zu-zw-uv
G[10]=z2-2zs-u2+2ut
G[11]=y-u
G[12]=x-z
G[13]=b-2u
G[14]=a-2z
> poly g = (s-v)^2 + (t-w)^2 - (s-x)^2 - t2;
> reduce(g,G);
v2-2vs+w2-2wt
```

*Slično, ispitivanje pripadnosti polinoma $g$ radikalu ideala nad polinomima $h_1, h_2, \ldots, h_8$ u prstenu polinoma $K[u_1, u_2, x_1, x_2, \ldots, x_8, y]$ neće uspeti. Na osnovu Teoreme 10 i Teoreme 11 važi $g \in \sqrt{\langle h_1, h_2, \ldots, h_8\rangle}$ ako i samo ako $1 \in \langle h_1, h_2, \ldots, h_8, 1-yg\rangle$ u prstenu polinoma $\mathbb{R}[u_1, u_2, x_1, \ldots, x_8]$. Međutim, kada izračunamo redukovanu bazu ovog ideala, možemo zaključiti da nismo dobili $\{1\}$ i test pripadnosti radikalu ne uspeva.*

```
> ring r = 0, (a,b,x,y,z,u,v,w,s,t,n), lp;
> poly h1 = 2x - a;
> poly h2 = 2y - b;
> poly h3 = 2z - a;
> poly h4 = 2u - b;
> poly h5 = -av + bw;
> poly h6 = bv - ab + aw;
> poly h7 = (s-x)^2 + t2 - (s-z)^2 - (t-u)^2;
> poly h8 = (s-x)^2 + t2 - s2 - (t-y)^2;
> poly g = (s-v)^2 + (t-w)^2 - (s-x)^2 - t2;
> ideal I1 = h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8, 1 - n*g;
> ideal G1 = groebner(I1);
> G1;
G1[1]=v2n-2vsn+w2n-2wtn-1
G1[2]=u
G1[3]=z
G1[4]=y-u
G1[5]=x-z
G1[6]=b-2u
G1[7]=a-2z
```

*Primetimo da kao redukovanu bazu ideala nismo dobili $\{1\}$.*

*Probajmo sada da isključimo razmatranje degenerisanih slučajeva i da koeficijente polinoma koje razmatramo vidimo kao racionalne izraze u terminima promenljivih $u_1$ i $u_2$. Podsetimo se da vrednosti $u_i$ predstavljaju vrednosti koje su nezavisne od ostalih i one treba da budu različite od nula ako želimo da isključimo degenerisane slučajeve. Stoga izračunavanja možemo da vršimo u prstenu polinoma $\mathbb{R}(u_1, u_2)[x_1, x_2, \ldots, x_8]$.Proverimo najpre da li polinom $g$ pripada idealu $\langle h_1, h_2, \ldots, h_8\rangle$ u prstenu polinoma $K(u_1, u_2)[x_1, \ldots, x_8]$. Ovo možemo proveriti računanjem ostatka pri deljenju polinoma $g$ polinomima Greberove baze ideala $\langle h_1, h_2, \ldots, h_8\rangle$.*

```
> ring r = (0,a,b), (x,y,z,u,v,w,s,t), lp;
> poly h1 = 2x - a;
> poly h2 = 2y - b;
> poly h3 = 2z - a;
> poly h4 = 2u - b;
> poly h5 = -av + bw;
> poly h6 = bv - ab + aw;
> poly h7 = (s-x)^2 + t2 - (s-z)^2 - (t-u)^2
> poly h8 = (s-x)^2 + t2 - s2 - (t-y)^2;
> ideal I = h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8;
> ideal G = groebner(I);
G;
G[1]=(4b)*t+(-b2)
G[2]=(4a)*s+(-4b)*t+(-a2+b2)
G[3]=(a2+b2)*w+(-a2b)
G[4]=(b)*v+(a)*w+(-ab)
G[5]=2*u+(-b)
G[6]=2*z+(-a)
G[7]=2*y+(-b)
G[8]=2*x+(-a)
> poly g = (s-v)^2 + (t-w)^2 - (s-x)^2 - t2;
> reduce(g,G);
0
```

*Isto tvrđenje možemo proveriti i na drugi način. Generisaćemo ideal nad skupom polinoma $h_1, h_2, \ldots, h_8$ u prstenu polinoma $K(u_1, u_2)[x_1, \ldots, x_8, y]$, izračunati Grebnerovu bazu $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ tog ideala i izvršiti proveru da li 1 pripada idealu $\langle g_1, \ldots, g_t, 1 - yg\rangle$. Ovo pak uspeva.*

```
> ring r = (0,a,b), (x,y,z,u,v,w,s,t,n), lp;
> poly h1 = 2x - a;
> poly h2 = 2y - b;
> poly h3 = 2z - a;
> poly h4 = 2u - b;
> poly h5 = -av + bw;
> poly h6 = bv - ab + aw;
> poly h7 = (s-x)^2 + t2 - (s-z)^2 - (t-u)^2;
> poly h8 = (s-x)^2 + t2 - s2 - (t-y)^2;
> poly g = (s-v)^2 + (t-w)^2 - (s-x)^2 - t2;
> ideal I = h1, h2, h3, h4, h5, h6, h7, h8;
> ideal G = groebner(I);
> G;
G[1]=(4b)*t+(-b2)
G[2]=(4a)*s+(-4b)*t+(-a2+b2)
G[3]=(a2+b2)*w+(-a2b)
G[4]=(b)*v+(a)*w+(-ab)
```

```
G[5]=2*u+(-b)
G[6]=2*z+(-a)
G[7]=2*y+(-b)
G[8]=2*x+(-a)
> ideal G1 = G[1], G[2], G[3], G[4], G[5], G[6], G[7], G[8], 1 - n*g;
> ideal G2 = groebner(G1);
> G2;
G2[1]=(b2)
> reduce(1,G2);
0
```

*Dakle, tvrđenje važi ako isključimo degenerisane slučajeve.*

Procedura dokazivanja geometrijskih tvrđenja korišćenjem metode Grebnerovih baza se sastoji iz narednih koraka:

1. detektovati sve relevantne tačke koje se javljaju u geometrijskom problemu koji rešavamo;
2. značajnim tačkama dodeliti koordinate tako da:
   - vrednosti $u_i$ predstavljaju koordinate tačaka koje su nezavisne od pozicija ostalih tačaka na slici,
   - vrednosti $x_i$ predstavljaju koordinate tačaka koje zavise od pozicija ostalih tačaka na slici;
3. zapisati hipoteze $h_1, h_2, \ldots, h_m$ i zaključak (zaključke) $g$ tvrđenja u vidu polinoma nad promenljivim $u_i$ i $x_i$;
4. proveriti da li polinom $g$ pripada radikalu ideala $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$ testiranjem da li je konstanta $\{1\}$ redukovana Grebnerova baza ideala $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m, 1-yg\rangle$ u prstenu polinoma $K[u_1, \ldots, u_l, x_1, \ldots, x_n, y]$, gde je sa $y$ označena nova promenljiva:
   (a) ako ovo važi, onda na osnovu Teoreme zaključak $g$ sledi striktno na osnovu hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$;
   (b) ako ne važi, onda računamo redukovanu Grebnerovu bazu $g_1, g_2 \ldots, g_t$ ideala $\langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$ u prstenu polinoma $K(u_1, u_2, \ldots, u_l)[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Primenjujemo test pripadnosti radikalu da utvrdimo da li je 1 element ideala $\langle g_1, g_2, \ldots, g_t, 1 - yg\rangle$ u prstenu polinoma $K(u_1, u_2, \ldots, u_l)[x_1, x_2, \ldots, x_n, y]$, gde je sa $y$ označena nova promenljiva. Ako je ovo tačno onda na osnovu Teoreme zaključak $g$ sledi uopšteno (do na uslove degenerisanosti) na osnovu hipoteza $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

Važan korak prilikom dokazivanja teorema na ovaj način čini prelaz sa pitanja da li se polinom $g$ poništava na afinom varijetetu ideala $I$ generisanog polinomima $h_1, h_2, \ldots, h_m$ na pitanje da li polinom $g$ pripada radikalu ideala $I$. Ovo je moguće samo u afinim varijetetima koji su definisani na algebarski zatvorenim poljima. Stoga, na primer, nije

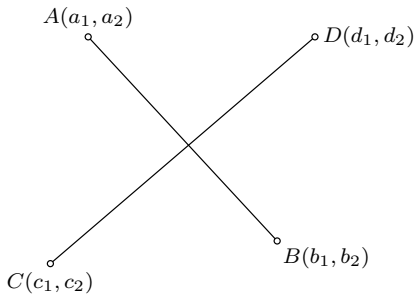
moguće testirati odlučivost geometrijskog tvrđenja u polju realnih brojeva, već samo u polju kompleksnih brojeva. Međutim, s obzirom na to da je tvrđenje koje razmatramo univerzalno kvantifikovano, tačnost tvrđenja u odnosu na kompleksne brojeve povlači i tačnost tvrđenja u odnosu na realne brojeve. Ako bi se, u suprotnom, pokazalo da tvrđenje nije tačno u polju kompleksnih brojeva, nikakva odluka o tačnosti tvrđenja u polju realnih brojeva se ne bi mogla doneti. Dakle, teoreme u polju realnih brojeva se na ovaj način mogu samo dokazati, ali se ne mogu opovrgnuti.

## 5.3 Algebrizacija osnovnih geometrijskih tvrđenja

Pri radu sa geometrijskim teoremama neki od osnovnih predikata sa kojim manipulišemo su paralelnost pravih, upravnost pravih, kolinearnost tačaka i dr. Razmotrimo na koji način je moguće u vidu jednog ili većeg broja polinoma formulisati osnovna geometrijska tvrđenja.

**Upravnost duži** Neka su koordinate tačaka $A$, $B$, $C$ i $D$ redom jednake $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ i $D(d_1, d_2)$. Uslov da je duž $AB$ upravna na duž $CD$ (slika 5.4) može se zapisati u vidu uslova da je skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ i $\overrightarrow{CD}(d_1 - c_1, d_2 - c_2)$ jednak 0.

$$h = (b_1 - a_1)(d_1 - c_1) + (b_2 - a_2)(d_2 - c_2) = 0$$

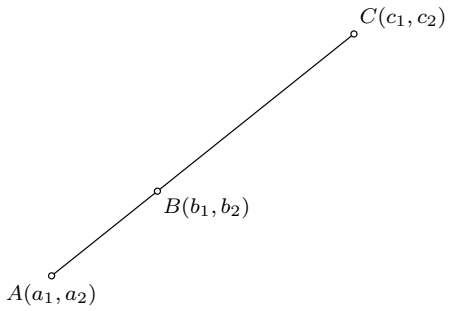



Slika 5.4: Ilustracija kada su duži $AB$ i $CD$ međusobno upravne.

**Kolinearnost tačaka** Uslov da su tačke $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$ kolinearne (slika 5.5) možemo zadati izjednačavanjem koeficijenata pravaca pravih $AC$ i $BC$:

$$\begin{aligned} \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1} &= \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1} \\ h &= (c_2 - a_2)(c_1 - b_1) - (c_2 - b_2)(c_1 - a_1) = 0 \end{aligned}$$

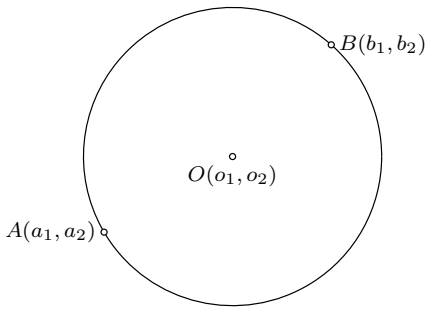
Ovo odgovara interpretaciji da je površina trougla $ABC$ jednaka 0.




Slika 5.5: Slučaj kada su tačke $A$, $B$ i $C$ kolinearne.

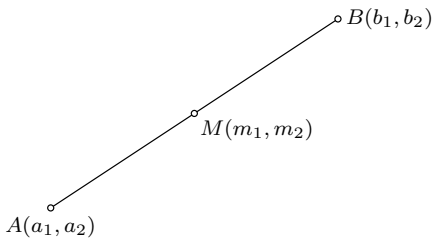
**Pripadnost krugu** Uslov da tačka $B(b_1, b_2)$ pripada krugu sa središtem $O(o_1, o_2)$ koji prolazi kroz tačku $A(a_1, a_2)$ (slika 5.6) može se zadati izjednačavanjem rastojanja tačaka $A$ i $B$ od središta kruga $O$.

$$\begin{aligned} |OB|^2 &= |OA|^2 \\ (b_2 - o_2)^2 + (b_1 - o_1)^2 &= (a_2 - o_2)^2 + (a_1 - o_1)^2 \\ h &= (b_2 - o_2)^2 + (b_1 - o_1)^2 - (a_2 - o_2)^2 - (a_1 - o_1)^2 = 0 \end{aligned}$$




Slika 5.6: Slučaj kada tačka $B$ pripada krugu $c(O, A)$ sa središtem $O$ koji sadrži tačku $A$.

**Središte duži** Neka je tačka $M(m_1, m_2)$ središte duži $AB$, pri čemu važi $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ (slika 5.7). Odatle sledi da je $x$ koordinata tačke $M$ jednaka aritmetičkoj sredini $x$ koordinata tačaka $A$ i $B$.




Slika 5.7: Tačka $M$ je središte duži $AB$.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a_1 + b_1}{2} \\ 2m_1 &= a_1 + b_1 \\ h_1 &= 2m_1 - a_1 - b_1 \end{aligned}$$

Analogno važi i za $y$ koordinatu tačke $M$:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{a_2 + b_2}{2} \\ 2m_2 &= a_2 + b_2 \\ h_2 &= 2m_2 - a_2 - b_2 \end{aligned}$$

**Primer za vežbu 19.** *Formulisati u vidu polinoma uslove:*

- *paralelnosti duži $AB$ i $CD$,*
- *da tačka $X$ pripada duži $AB$ i deli duž $AB$ u odnosu $2:1$,*
- *da je duž $AB$ tangentna na krug $c(O, C)$ sa središtem $O$ koji prolazi kroz tačku $C$,*
- *da su krugovi $c(O_1, A)$ i $c(O_2, B)$ tangentni.*

**Primer za vežbu 20.** *Dokazati da se dijagonale paralelograma seku u tački koja polovi obe dijagonale.*

**Primer za vežbu 21.** *Dokazati da se težišne linije trougla seku u jednoj tački.*

**Primer za vežbu 22.** *Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački.*

**Primer za vežbu 23.** *Dokazati da su centar opisanog kruga, težište i ortocentar trougla kolinearne tačke.*

## 5.4 Identifikovanje uslova nedegenerisanosti

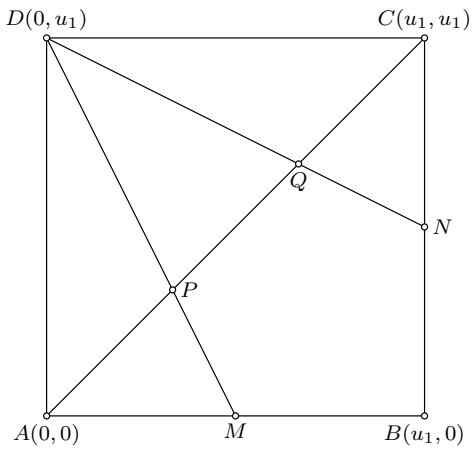
Geometrijska tvrđenja često nisu sasvim precizna. Ona prave neke implicitne pretpostavke o geometrijskim figurama čija se svojstva dokazuju. Često je geometrijska teorema tačna samo ako važe neki dodatni uslovi (uslovi nedegenerisanosti). U ovom slučaju kažemo da zaključak tvrđenja koje dokazujemo sledi uopšteno iz skupa hipoteza (eng. generically true). Degenerisani slučajevi najčešće odgovaraju situaciji kada su neke dve polazne tačke identične ili kada su neke tri polazne tačke kolinearne. Automatske procedure za dokazivanje geometrijskih tvrđenja moraju da budu u stanju da se izbore sa ovom vrstom problema, odnosno da automatski nađu odgovarajuće uslove nedegenerisanosti (i to što jednostavnije moguće) koji čine tvrđenje tačnim, ako oni uopšte postoje. Kao i za hipotezu i zaključak tvrđenja koje dokazujemo, da bismo mogli da odredimo te dodatne uslove neophodno je da se taj dodatni uslov može izraziti u terminima polinoma i to u vidu (jedne ili više) nejednakosti oblika $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$. Dakle, potrebno je ispitati tačnost tvrđenja:

$$(\forall x \in \overline{K}^n)(h_1(x) = \ldots = h_m(x) = 0 \wedge s(x) \neq 0 \Rightarrow g(x) = 0)$$

Često kada se javi degenerisanost, to je zato što jednačina koja je zavisna samo od jednog $u_i$ važi na afinom varijetetu, što je problematično jer su vrednosti $u_i$ nezavisne promenljive. Pokazuje se da kada kao jedan od polinoma redukovane Grebnerove baze dobijemo polinom $g$ koji se može se napisati kao proizvod dva polinoma $p$ i $q$ takvih da je polinom $p$ formulisan samo u terminima promenljivih $u_i$, onda nam situacije kada je vrednost polinoma $p$ jednaka 0 daju potencijalne degenerisane slučajeve.

**Primer 52.** *Razmotrimo tvrđenje koje kaže da dve prave koje prolaze kroz isto teme kvadrata i središta suprotnih strana seku naspramnu dijagonalu kvadrata na tri jednaka dela (slika 5.8) i probajmo da ga dokažemo.*

*Označimo temena kvadrata redom sa $A, B, C$ i $D$ i bez narušavanja opštosti dodelimo im koordinate $A(0,0)$, $B(u_1,0)$, $D(0,u_1)$, $C(u_1,u_1)$. Središte stranice $AB$ označimo sa*




Slika 5.8: Ilustracija tvrđenja o podeli dijagonale kvadrata na tri jednaka dela.

*$M$, središte stranice $BC$ sa $N$, a preseke dijagonale $AC$ sa dužima $DM$ i $DN$ redom sa $P$ i $Q$. Dodelimo koordinate ovim tačkama uzimajući u obzir da tačke sa dijagonale $AC$ imaju istu $x$ i $y$ koordinatu: $M(u_1/2,0)$, $N(u_1,u_1/2)$, $P(x_1,x_1)$, $Q(x_2,x_2)$.*

*Tačke $D$, $P$ i $M$ su kolinearne, odakle sledi prva hipoteza:*

$$\begin{aligned} k_{DP} &= k_{MP} \\ \frac{x_1-u_1}{x_1} &= \frac{x_1}{x_1-u_1/2} \\ x_1^2 &= (x_1-u_1)(x_1-u_1/2) \\ h_1 &= u_1^2-3u_1x_1=0 \end{aligned}$$

*Tačke $D$, $Q$ i $N$ su kolinearne, odakle sledi druga hipoteza:*

$$\begin{aligned} k_{DQ} &= k_{NQ} \\ \frac{x_2-u_1}{x_2} &= \frac{x_2-u_1/2}{x_2-u_1} \\ (x_2-u_1)^2 &= x_2(x_2-u_1/2) \\ h_2 &= 2u_1^2-3u_1x_2=0 \end{aligned}$$

*Tvrđenja koje je potrebno dokazati su da je $|AP|=|PQ|$ i $|PQ|=|QC|$, odnosno treba pokazati tačnost tvrđenja:*

$$\begin{aligned} 2x_1^2 &= 2(x_2-x_1)^2 \\ g_1 &= x_1^2-(x_2-x_1)^2=0 \end{aligned}$$

*i, slično, tvrđenja:*

$$\begin{aligned} 2(x_2 - x_1)^2 &= 2(x_2 - u_1)^2 \\ g_2 &= (x_2 - x_1)^2 - (x_2 - u_1)^2 = 0 \end{aligned}$$

**Praktična vežba 21.** *Razmotrimo prsten polinoma $\mathbb{R}[u_1, x_1, x_2]$, pri čemu ćemo promenljivoj $u_1$ pridružiti oznaku $u$, a promenljivim $x_1$ i $x_2$ oznake $x$ i $y$. Dodatnu promenljivu, potrebnu za ispitivanje pripadnosti radikalu, nazvaćemo $z$.*

```
> ring r = 0, (u,x,y,z), lp;
> poly h1 = u2 - 3ux;
> poly h2 = 2u2 - 3uy;
> poly g1 = x2 - (y-x)*(y-x);
> ideal I1 = h1, h2, 1 - z*g1;
> ideal G1 = groebner(I1);
> G1;
G1[1]=2xyz-y2z-1
G1[2]=u
> poly g2 = (y-x)^2 - (y-u)^2;
> ideal I2 = h1, h2, 1 - z*g2;
> ideal G2 = groebner(I2);
> G2;
G2[1]=x2z-2xyz+1
G2[2]=u
```

*Primetimo da kao redukovanu Grebnerovu bazu ideala ne dobijamo $\{1\}$, te tvrđenje ne važi uvek. Šta više, iz redukovane Grebnerove baze možemo zaključiti da se degenerisani slučaj dešava kada je $u_1 = 0$ i tada se sva temena polaznog kvadrata poklapaju.*

*Pokušajmo da tvrđenje dokažemo isključujući degenerisane slučajeve. Stoga ćemo izračunavanja izvršavati u prstenu polinoma $\mathbb{R}(u_1)[x_1, x_2]$. Najpre računamo Grebnerovu bazu $B = \{b_1, b_2\}$ ideala $\langle h_1, h_2\rangle$, a zatim računamo Grebnerovu bazu ideala $\langle b_1, b_2, 1-yg_1\rangle$ i, analogno, Grebnerovu bazu ideala $\langle b_1, b_2, 1 - yg_2\rangle$.*

*Primetimo da je u Singularu potrebno u situaciji kada je u oznaka parametra iz $\mathbb{R}$, a ne promenljiva, a $x$ promenljiva, term polinoma nužno zadati kao $ux$, a ne kao $xu$.*

```
> ring r = (0,u), (x,y,z), lp;
> poly h1 = u2 - 3ux;
> poly h2 = 2u2 - 3uy;
> poly g1 = x2 - (y-x)*(y-x);
> poly g2 = (y-x)^2 - (y-u)^2;
> ideal I = h1, h2;
> ideal B = groebner(I);
> B;
```

```
B[1]=3*y+(-2u)
B[2]=3*x+(-u)
> ideal I1 = B[1], B[2], 1 - z*g1;
> ideal G1 = groebner(I1);
> G1;
G1[1]=1
> ideal I2 = B[1], B[2], 1 - z*g2;
> ideal G2 = groebner(I2);
> G2;
G2[1]=1
```

*Kao redukovanu Grebnerovu bazu oba ideala $I_1$ i $I_2$ dobijamo $\{1\}$ te važi da je tvrđenje tačno do na uslove degenerisanosti.*

Uslovi nedegenerisanosti generisani algebarskim metodama su dati u algebarskim terminima. U kontekstu dokazivanja teorema u geometriji, važan i ne tako lako problem jeste formulisanje njihovih interpretacija sa jasnim geometrijskim značenjem. Kada se uslovi nedegenerisanosti formulišu u formi geometrijskih pretpostavki (što često nije nimalo lako), dobija se konačni oblik geometrijske teoreme, koji isključuje neke degenerisane slučajeve za koje polazno tvrđenje nije tačno. Primetimo da je nekada moguće da je tvrđenje tačno i pod nekim slabijim dodatnim pretpostavkama. Dodatno, tvrđenje nekada može biti tačno i kada uslovi nedegenerisanosti nisu zadovoljeni.

## 5.5 Dokazivanje ispravnosti rešenja konstruktivnih problema u geometriji

U ovom poglavlju razmotrićemo primenu Grebnerovih baza na dokazivanje ispravnosti rešenja konstruktivnih problema. Za formalno zadavanje konstrukcija, njihovu vizuelizaciju i dokazivanje metodom Grebnerovih baza koristićemo alat GCLC.

### 5.5.1 GCLC

GCLC je alat za vizuelizaciju geometrije koji omogućava generisanje digitalnih matematičkih ilustracija visokog kvaliteta i može biti od pomoći prilikom učenja geometrije[2]. Naime, pored vizuelizacije geometrijskih figura, on raspolaže i automatskim dokazivačima teorema i to:

- dokazivačem teorema zasnovanim na metodi površina (eng. area method),
- dokazivačem teorema zasnovanim na Vuovoj metodi i
- dokazivačem teorema zasnovanim na metodi Grebnerovih baza

[2]Alat GCLC dostupan je sa adrese `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/`.

U alatu GCLC se matematičke figure zadaju korišćenjem jezika GCLC, bliskog LaTeX formatu. Razmotrimo neke osnovne primitivne konstrukcije i neke osnovne naredbe u alatu GCLC. Trougao $ABC$ čije su koordinate $A(15, 10)$, $B(50, 10)$ i $C(40, 35)$ možemo zadati i iscrtati na sledeći način.

```
point A 15 10
point B 50 10
point C 40 35
cmark_lb A
cmark_rb B
cmark_rb C
drawsegment A B
drawsegment B C
drawsegment C A
```

Naime, naredbom `point P x y` zadaje se tačka $P$ sa koordinatama $x$ i $y$, dok se naredbama `cmark_lb` i `cmark_rb` odgovarajuća tačka označava svojim imenom i to kad je sufiks naredbe `lb` levo-dole (eng. left-bottom), a kad je sufiks `rb` desno-dole (eng. right-bottom) u odnosu na poziciju tačke. Naredbom `drawsegment P Q` duž $PQ$ se iscrtava.
Pravu $a$ kroz tačke $B$ i $C$ možemo konstruisati i iscrtati narednim kodom:

```
line a B C
drawline a
```

Tačku $M_a$ kao središte duži $BC$ možemo zadati i označiti na sledeći način:

```
midpoint M_a B C
cmark_b M_a
```

Pravu $m_a$ kroz tačku $M_a$ upravnu na pravu $a$ (drugim rečima medijatrisu duži $BC$) možemo konstruisati i iscrtati narednim kodom:

```
perp m_a M_a a
drawline m_a
```

Presečnu tačku $M'_a$ pravih $a$ i $m_a$ možemo zadati i označiti narednim kodom:

```
intersec M_a' a m_a
cmark_b M_a'
```

Tačku $M_b$ za koju važi $\overrightarrow{AM_b} = 0.5 \cdot \overrightarrow{AC}$ možemo konstruisati i označiti sledećim kodom:

```
towards M_b A C 0.5
cmark_b M_b
```

Geometrijsko tvrđenje možemo probati da dokažemo nekim od raspoloživih dokazivača teorema korišćenjem naredbe `prove {tvrdjenje}`. Na primer, tvrđenje da se prethodno definisane tačke $M_a$ i $M_a'$ poklapaju možemo zadati na sledeći način:

```
prove { identical M_a M_a' }
```

Pritom je naravno potrebno izabrati metodu dokazivanja koju želimo da koristimo. Neki od predikata koji se mogu naći unutar naredbe `prove` su `identical`, `midpoint`, `collinear`, `perpendicular`, `collinear`[3].

### 5.5.2 Konstruktivni problemi u geometriji

*Problemi konstrukcije trougla* su problemi u kojima je potrebno uz pomoć lenjira i šestara konstruisati trougao koji zadovoljava dati skup ograničenja (najčešće tri). Naime, zadatak konstruktivnih problema je da se za datu deklarativnu specifikaciju geometrijske figure odredi odgovarajuća, po mogućstvu ekvivalentna, proceduralna specifikacija zasnovana na raspoloživim konstruktivnim koracima. Dakle, konstrukcija nije ilustracija, već procedura kojom se na osnovu zadatih primitivnih konstrukcija daje uputstvo kako konstruisati traženi objekat.

Formalno, pod konstrukcijom pomoću lenjira i šestara se podrazumeva niz elementarnih konstruktivnih koraka, tako da je svaki od njih iz narednog skupa koraka:

- konstrukcija proizvoljne tačke,
- konstrukcija prave kroz dve date tačke,
- konstrukcija kruga sa središtem u nekoj zadatoj tački kroz neku drugu zadatu tačku,
- konstrukcija preseka (ukoliko postoji) dve prave, dva kruga ili prave i kruga.

[3]Kompletno upustvo za korišćenje alata GCLC dostupno je na adresi `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/gclc_man.pdf`

Ipak, tradicionalno se prilikom opisivanja geometrijskih konstrukcija kao primitivni koraci razmatraju i tzv. složeni konstruktivni koraci koji se sastoje iz više elementarnih koraka, kao što su konstrukcija središta duži, normale na datu pravu kroz datu tačku, prave paralelne sa datom pravom kroz datu tačku i sl.

Glavnu poteškoću prilikom rešavanja konstruktivnih problema, i za čoveka i za računar, predstavlja kombinatorna eksplozija uslovljena ogromnim prostorom pretrage: naime, postoji veliki broj primitivnih koraka i svaki od njih se može primeniti na veliki broj načina, i broj načina na koji se mogu primeniti raste kako konstrukcija napreduje.

Tradicionalno, rešenje konstruktivnog problema se sastoji od četiri faze:

- analize – u kojoj se kreće od pretpostavke da geometrijski objekti zadovoljavaju specifikaciju problema, a onda se dokazuje da važe neka svojstva koja omogućavaju konstrukciju,
- konstrukcije – u kojoj se na osnovu analize formuliše konstrukcija pomoću lenjira i šestara,
- dokaza – u ovoj fazi se dokazuje da generisana konstrukcija (pomoću lenjira i šestara) zadovoljava specifikaciju problema,
- diskusije – u kojoj se razmatra koliko problem ima rešenja i pod kojim uslovima ona postoje.

*Vernikov korpus* predstavlja jedan od značajnih korpusa konstruktivnih problema. On sadrži spisak lokacijskih problema konstrukcije trougla kod kojih je zadatak konstruisati trougao $ABC$ ako su poznate pozicije neke tri značajne tačke trougla od narednih 16 (slika 5.9):

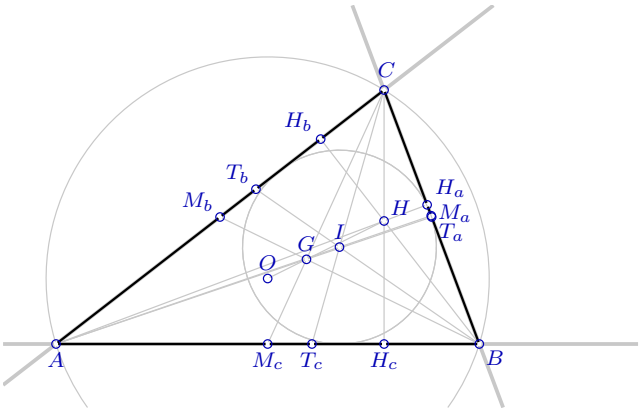
- temena trougla $A$, $B$ i $C$, središte opisanog kruga $O$,
- središta stranica trougla $M_a$, $M_b$ i $M_c$, težište $T$,
- podnožja visina $H_a$, $H_b$ i $H_c$, ortocentar $H$,
- preseci bisektrisa unutrašnjih uglova sa naspramnim stranicama trougla $T_a$, $T_b$ i $T_c$ i središte upisanog kruga $I$.

Vernikov korpus sadrži ukupno $\binom{16}{3} = 560$ instanci problema; za neke probleme je dokazano da su rešivi, za neke da su redundantni (da je na osnovu neke dve date tačke moguće konstruisati treću), za neke da su zavisni od položaja (da je lokacija jedne od zadatih tačaka uslovljena položajem druge dve tačke), a za neke da se ne mogu rešiti uz pomoć lenjira i šestara[4].

### 5.5.3 Automatsko rešavanje konstruktivnih problema

Uprkos dugoj tradiciji rešavanja konstruktivnih zadataka uz pomoć lenjira i šestara, njihovo automatsko rešavanje se malo pominje u literaturi i postoji tek nekoliko alata za njihovo rešavanje. Jedan od takvih sistema je i ArgoTriCS koji predstavlja alat za

[4]Status svih problema iz Vernikovog korpusa dat je na adresi `http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/wernick/`.




Slika 5.9: Značajne tačke Vernikovog korpusa.

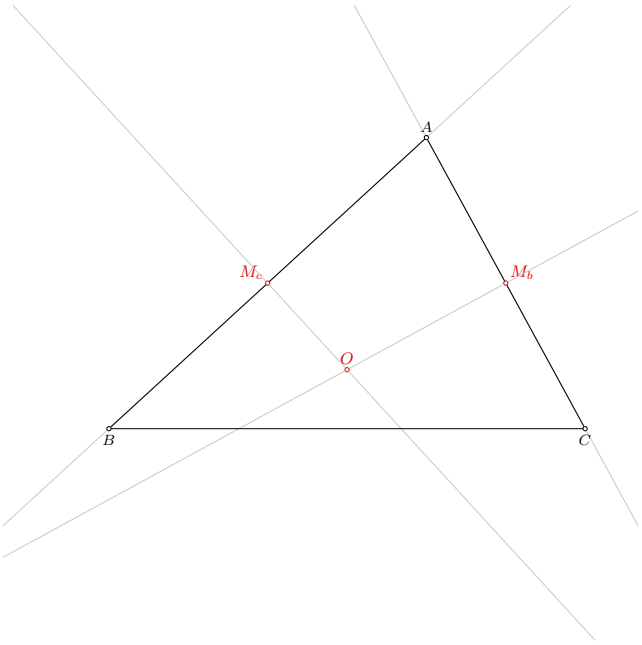
automatsko rešavanje konstruktivnih problema u geometriji, koji je u stanju da reši veliki broj problema iz Vernikovog korpusa[5]. On se zasniva na geometrijskom znanju identifikovanom kao potrebno za rešavanje ovih problema, a koje je razvrstano na skup definicija, skup lema i skup primitivnih konstrukcija. Neke od raspoloživih primitivnih konstrukcija su:

- konstrukcija prave kroz dve tačke,
- konstrukcija kruga sa središtem u jednoj tački kroz drugu tačku,
- konstrukcija presečnih tačaka dve prave, prave i kruga, i dva kruga,
- konstrukcija prave kroz datu tačku upravne na drugu datu pravu,
- konstrukcija prave kroz datu tačku paralelne sa drugom datom pravom,
- konstrukcija tačke $Y$ za koju važi $\overrightarrow{XY}/\overrightarrow{XZ} = k$, gde su tačke $X$ i $Z$ date, a $k$ je neki racionalni broj.

ArgoTriCS kao izlaz automatski generiše neformalni opis konstrukcije na prirodnom jeziku (poput onih u udžbenicima), formalni opis konstrukcije u jeziku GCLC uz generisanje odgovarajuće ilustracije, dokaz ispravnosti konstrukcije i uslove kada rešenje postoji.

Dokaz ispravnosti konstrukcije podrazumeva da ako se objekti konstruišu na dati način, onda oni zadovoljavaju specifikaciju problema. ArgoTriCS za dokazivanje ispravnosti generisanih konstrukcija koristi dokazivač OpenGeoProver i dokazivače implementirane u okviru alata GCLC. Tvrđenje koje se dokazuje jeste da su tačke koje su zadate postavkom problema zaista odgovarajuće tačke konstruisanog trougla $ABC$. Na primer, ako je cilj konstruisati trougao $ABC$ ako su zadati središte opisanog kruga $O$, središte $M_b$ stranice $AC$ i središte $M_c$ stranice $AB$, onda je cilj pokazati da su tačke $O, M_b$ i $M_c$ zaista odgovarajuće značajne tačke konstruisanog trougla $ABC$. Da bismo to pokazali koristimo definicije značajnih tačaka trougla.

[5] Zbirka rešenih problema iz Vernikove liste dostupna je na adresi `http://poincare.matf.bg.ac.rs/~vesnap/animations/compendium_wernick.html`.




Slika 5.10: Ilustracija konstrukcije trougla $ABC$ ako su data središta dve stranice $M_b$ i $M_c$ i središte opisanog kruga $O$.

**Primer 53.** *Razmotrimo problem konstrukcije trougla $ABC$ ako su dati središte opisanog kruga $O$, tačka $M_b$ koja predstavlja središte stranice $AC$ i tačka $M_c$ koja predstavlja središte stranice $AB$.*

*Konstrukcija na prirodnom jeziku automatski generisana korišćenjem alata ArgoTriCS glasi*[6]*:*

1. *Konstruisati pravu $m_b$ kroz tačke $O$ i $M_b$;*
2. *Konstruisati pravu $m_c$ kroz tačke $O$ i $M_c$;*
3. *Konstruisati pravu $b$ kao pravu koja prolazi kroz tačku $M_b$ i upravna je na pravu $m_b$;*
4. *Konstruisati pravu $c$ kao pravu koja prolazi kroz tačku $M_c$ i upravna je na pravu $m_c$;*
5. *Konstruisati presečnu tačku $A$ pravih $b$ i $c$;*
6. *Konstruisati tačku $C$ za koju važi $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{AM_b} = 2$;*
7. *Konstruisati tačku $B$ za koju važi $\overrightarrow{M_cB}/\overrightarrow{M_cA} = -1$.*

*Ilustracija odgovarajuće konstrukcije prikazana je na slici 5.10.*

*Odgovarajući automatski generisani formalni opis konstrukcije u jeziku GCLC glasi:*

```
point O 65 51.14
point M_{b} 95 67.5
point M_{c} 50 67.5

cmark_t O
cmark_rt M_{b}
cmark_lt M_{c}

% Constructing a line m_{b} passing through point O and point M_{b}
line m_{b} O M_{b}
drawline m_{b}

% Constructing a line m_{c} passing through point O and point M_{c}
line m_{c} O M_{c}
drawline m_{c}

% Constructing a line b which is perpendicular to line m_{b}
% and which passes through point M_{b}
perp b M_{b} m_{b}
drawline b

% Constructing a line c which is perpendicular to line m_{c}
% and which passes through point M_{c}
perp c M_{c} m_{c}
drawline c

% Constructing a point A which belongs to line c and line b
intersec A c b
cmark_t A

% Constructing a point C such that AC/AM_{b}=2
towards C A M_{b} 2
cmark_b C

% Constructing a point B such that M_{c}B/M_{c}A=-1
towards B M_{c} A -1
cmark_b B

drawsegment A B
drawsegment A C
drawsegment B C

% Proving constuctions correct
```

```
% Defining significant points of constructed triangle ABC
line c' A B
line b' A C
midpoint M_{b}' A C
midpoint M_{c}' A B
perp m_{c}' M_{c}' c
perp m_{b}' M_{b}' b
intersec O' m_{b}' m_{c}'

% prove {identical M_{b} M_{b}'}
prove {identical M_{c} M_{c}'}
% prove {identical O O'}
```

*Sva tri tvrđenja moguće je dokazati korišćenjem dokazivača zasnovanog na metodi Grebnerovih baza implementiranih u okviru alata GCLC. Generisani dokazi dostupni su na adresama:*

- https://github.com/milanbankovic/symbolic_computing/blob/master/grebnerove_baze/konstrukcija_trougla_proof1.pdf,
- https://github.com/milanbankovic/symbolic_computing/blob/master/grebnerove_baze/konstrukcija_trougla_proof2.pdf *i*
- https://github.com/milanbankovic/symbolic_computing/blob/master/grebnerove_baze/konstrukcija_trougla_proof3.pdf.

# Bibliografija


[1] F. Winkler, Groebner basis in geometry theorem proving and simplest degeneracy conditions, Mathematica Pannonica, pp. 15-32, 1990.

[2] I. Eser, Automated geometry theorem proving, Master Thesis, 2011.

[3] K. Rivas, Geometric theorem proving using the Groebner basis algorithm, Theses Digitization Project, 3531, 2009.

[4] M. Mencinger, On Groebner Bases and Their Use in Solving Some Practical Problems, Universal Journal of Computational Mathematics 1(1): 5-14, 2013.

[5] D. A. Cox et al, Ideals, Varieties, and Algorithms, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[6] R. Ablamowitz, Some applications of Groebner bases in robotics and engineering, Tennesse Technological University, 2008.

[7] M. Steglehner, Flexible solutions of polynomial systems andtheir applications in robotics, Master thesis, JKU Linz, 2014.

[8] B. Buchberger, M. Kauers, Scholarpedia, 5(10):7763, 2010, `http://www.scholarpedia.org/article/Groebner_basis`

[9] B. Buchberger, Groebner Bases and Applications, Cambridge University Press, 1998.

[10] K.O.Geddes, S.R.Czapor, G.Labahn, Algorithms for Computer Algebra, Kluwer Academic Publishers, 1992.