

Grebnerove baze – obnavljanje

Vesna Marinković

Ideal

- 1 Da li polinomi $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 2x^3 + x^2$, $h(x) = x^2 - 1$ pripadaju idealu $I = \langle 2x + 1 \rangle$ u prstenu polinoma $\mathbb{Q}[x]$?
- 2 Pokazati da polinom $f = y$ pripada idealu $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$ za $f_1 = x^2y + 1$ i $f_2 = xy^2$.
- 3 Dokazati da važi $\langle x + xy, y + xy, x^2, y^2 \rangle = \langle x, y \rangle$ u $\mathbb{Q}[x, y]$.
- 4 Dokazati da važi $\langle x + xz, y + yz, z \rangle = \langle x, y, z \rangle$ u $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Poredak monoma

1 Prezapisati polinom

$$f(x, y, z) = 10xy^2 + 3yz^3 + 6z^4 + x^2 - 15y^2z - 7x^3$$

uređivanjem termova polinoma u leksikografskom, graduiranom leksikografskom i obrnutom graduiranom leksikografskom poretku monoma za koji važi $x > y > z$.

- 2 Korišćenjem alata Singular proveriti rešenje prethodnog problema.
- 3 Uporediti termove xy^2z^3 i x^3yz^2 ako se koristi težinski poredak monoma za težinski vektor $(2, 5, 1)$ za koji važi $x > y > z$.
- 4 Ako bismo razmatrali skup polinoma koji su linearni nad datim skupom promenljivih, da li bi postojala razlika između leksikografskog i graduiranog leksikografskog poretka? Odgovor obrazložiti.
- 5 Ako bismo razmatrali skup polinoma nad jednom promenljivom, da li bi postojala razlika između leksikografskog i graduiranog leksikografskog poretka? Odgovor obrazložiti.

Multistepen, vodeći koeficijent, vodeći monom

- 1 Odrediti multistepen, vodeći koeficijent i vodeći monom polinoma $f(x, y, z) = 2x^2y^9 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$ kada se razmatra leksikografski, graduirani i obrnuti graduirani poredak monoma za poredak promenljivih $x > y > z$.
- 2 Korišćenjem alata Singular proveriti rešenje prethodnog problema.

Deljenje polinoma

- 1 Podeliti polinom $f(x, y, z) = 4x^2yz^2 - xy^3z - x^2y^2z - 1$ skupom polinoma $F = \{x^2y - 1, yz + 1\}$ korišćenjem graduiranog leksikografskog poretka.
- 2 Rešenje prethodnog zadatka proveriti u sistemu Singular.
- 3 Da li su ostatak i količnici pri deljenju polinoma skupom polinoma jedinstveni bez obzira na značaj polinoma?
- 4 Izračunati (ručno) ostatak pri deljenju polinoma $f = x^2y^2 + xy^2 - y + 1$ uređenim skupom polinoma $F = \{xy^2 - x, x - y^3\}$ korišćenjem leksikografskog poretka. Ponoviti postupak sa obrnutim redosledom polinoma u skupu F .

Grebnerova baza

- ① Koja od navedenih tvrđenja važe za proizvoljnu Grebnerovu bazu?
 - postoji za svaki nenula ideal (da) (ne)
 - jedinstvena je za svaki ideal (da) (ne)
 - važna je za ispitivanje pripadnosti nekog polinoma idealu (da) (ne)
 - vodeći koeficijent svakog baznog polinoma je 1 (da) (ne)
- ② Neka je $I = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$, pri čemu je $g_1 = xy^2 - xz + y$, $g_2 = -z^2 + xy$ i $g_3 = -yz^4 + x$. Korišćenjem leksikografskog poretka monoma za $x > y > z$, dati primer polinoma $g \in I$ tako da $LT(g) \notin \langle LT(g_1), LT(g_2), LT(g_3) \rangle$.
- ③ Pri deljenju polinoma f skupom polinoma $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ ostatak će biti jedinstven ako je F :
 - proizvoljna baza ideala I (da) (ne)
 - Grebnerova baza ideala I (da) (ne)
 - minimalna Grebnerova baza ideala I (da) (ne)
 - redukovana Grebnerova baza ideala I (da) (ne)

S-polinom

- 1 Izračunati S-polinom polinoma $f(x, y) = x^3y^2 - x^2y^3$ i polinoma $g(x, y) = 3xy^4 + 2x^3$ za graduirani leksikografski poredak monoma.
- 2 Proveriti prethodni primer u alatu Singular.
- 3 Da li vrednost S-polinoma zavisi od toga koji se poredak monoma koristi? Ilustrovati svoj zaključak primerom.
- 4 Izračunati S-polinom za polinome $f = 4x^2z - 7y^2$ i $g = xyz^2 + 3xz^4$ korišćenjem težinskog poretka sa težinskim vektorom $(1, 5, 3)$.
- 5 Šta treba da važi za S-polinom svaka dva polinoma baze ideala da bi ona bila Grebnerova?

Buhbergerov algoritam

- ➊ Neka je $I = \langle x - z^2, y - z^3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.
 - Da li je $G = \{x - z^2, y - z^3\}$ Grebnerova baza ideala I u odnosu na leksikografski poredak za poredak promenljivih $x > y > z$?
 - Da li je $G = \{x - z^2, y - z^3\}$ Grebnerova baza ideala I u odnosu na leksikografski poredak za poredak promenljivih $z > y > x$?
- ➋ Razmotrimo leksikografski poredak $x > y$ i ideal $I = \langle x^2y - z, xy - 1 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Pokazati da $\{x^2y - z, xy - 1\}$ nije Grebnerova baza ideala I .
- ➌ Napisati pseudokod Buhbergerovog algoritma.
- ➍ Odrediti ručno Grebnerovu bazu ideala $\langle x^2y + z, xz + y \rangle$ u odnosu na leksikografski poredak monoma za koji važi $x > y > z$.
- ➎ Napisati kod u alatu Singular kojim se računa Grebnerova baza prethodnog ideala.
- ➏ Pokazati da je baza $B = \{x + z, y - z\}$ Grebnerova baza.

Minimalna i redukovana Grebnerova baza

- ① Kada za Grebnerovu bazu kažemo da je minimalna, a kada da je redukovana?
- ② Koji od navedenih skupova predstavljaju redukovane Grebnerove baze ideala $I = \langle y^2 + yx + x^2, y + x, y \rangle$?
 - (a) $G_1 = \{y, x\}$
 - (b) $G_2 = \{y, x^2\}$
 - (c) $G_3 = \{y + x, x\}$
 - (d) $G_4 = \{y + x, y\}$

Rešavanje sistema polinomijalnih jednačina i pripadnost idealu

- ❶ Korišćenjem Singulara rešiti naredni sistem jednačina:

$$\begin{aligned}x - y - z &= 0 \\x + y - z^2 &= 0 \\x^2 + y^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

- ❷ Kako na osnovu Grebnerovih baza zaključiti da sistem polinomijalnih jednačina nema rešenja?
- ❸ Pretpostavimo da su nam dati brojevi a , b i c koji zadovoljavaju jednačine $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ i $a^3 + b^3 + c^3 = 7$. Dokazati uz pomoć Singulara da onda važi $a^4 + b^4 + c^4 = 9$.
- ❹ Korišćenjem alata Singular ispitati pripadnost polinoma $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z$ idealu $I = \langle -x^3 + y, x^2y - z \rangle$.

Rešavanje sistema trigonometrijskih jednačina

- 1 Metodom Grebnerovih baza rešiti jednačinu $\cos^2 \alpha + \cos \alpha = \sin^2 \alpha$.
- 2 Metodom Grebnerovih baza rešiti sledeći sistem jednačina:

$$\sin x + \cos y = 1$$

$$\sin^2 y + \cos^2 x = 0.5$$

Radikal, radikal ideala

- ❶ Da li je ideal $\langle (x+2)^2(x-1) \rangle$ radikal? Odgovor obrazložiti.
- ❷ Da li je ideal $\langle x^3 + x^2y, y \rangle$ radikal? Odgovor obrazložiti.
- ❸ Navesti bar tri različita polinoma koji pripadaju radikalu ideala $\langle (x+2)^2(x-1) \rangle$.
- ❹ Da li polinom $f = x - 2$ pripada radikalu ideala $I = \langle x^2 - x - 2 \rangle$?
(da)(ne)
Kako bi se to moglo proveriti u alatu Singular?
- ❺ Kako možemo zaključiti da neki zaključak sledi striktno, a kako da sledi uopšteno iz nekog skupa hipoteza?

Modelovanje i rešavanje geometrijskih problema 1

- 1 Formulirati tvrdjenje da je u pravouglom trouglu centar opisanog kruga središte hipotenuze i dokazati ga korišćenjem alata Singular.
- 2 Formulirati tvrdjenje da podnožja visina iz temena A i B trougla ABC pripadaju krugu nad prečnikom AB i dokazati ga korišćenjem alata Singular
- 3 Formulirati tvrdjenje Talesove teoreme i dokazati ga korišćenjem alata Singular.

Modelovanje i rešavanje geometrijskih problema 2

- ① Zapisati u vidu polinoma hipoteze i zaključak narednog tvrđenja: ako je ABC jednakokraki trougao čije su stranice AB i AC jednake dužine, onda važi da je podnožje visine trougla iz temena A istovremeno i središte stranice BC . Napisati program u Singularu kojim se proverava ispravnost ovog tvrđenja.
- ② Zapisati u vidu polinoma hipoteze i zaključak tvrđenja Ptolomejeve teoreme koja glasi: dat je četvorougao $ABCD$ upisan u krug. Tada je proizvod dužina njegove dve dijagonale jednak sumi proizvoda naspramnih stranica četvorougla:
$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|.$$
- ③ U vidu polinoma zapisati uslove:
 - (a) krugovi $k_1(O_1, A_1)$ i $k_2(O_2, A_2)$ se dodiruju.
 - (b) tačke A, B i C su temena jednakonstraničnog trougla.