1 Formalizacija matematike

Nauka zahteva preciznost!

- Sva tvrđenja moraju biti zapisana precizno i nedvosmisleno.
- Svi zaključci moraju biti zasnovani na principima ispravnog zaključivanja.

Proučavanjem ispravnog zaključivanja (rezonovanja, rasuđivanja, dedukovanja, razmišljanja) bavi se *logika*. U našem fokusu je *formalna logika* koja podrazumeva da su tvrđenja zapisana korišćenjem određenog *simboličkog jezika* i da se zaključci izvode isključivo korišćenjem precizno definisanih i takođe simbolički izraženih pravila zaključivanja. Jezikom koji se može koristiti za zapis tvrđenja bavi se *sintaksa*. Dakle, iako se u neformalnoj matematičkoj literaturi (udžbenicima, člancima i sl.) obično koristi neformalna sintaksa i tvrđenja su izražena govornim jezikom, postoji formalna, potpuno simbolička matematička sintaksa i ona se smatra važnim aspektom matematičke logike.

Formalna logika često ispravnost tvrđenja bazira isključivo na deduktivnom principu. Reći ćemo da se tvrđenje se smatra *ispravnim* (namerno ne kažemo *tačnim*) ako je izvedeno iz nekih jednostavnijih ispravnih tvrđenja primenom preciznih *pravila zaključivanja (izvođenja)*. Dakle, u osnovi leži proces *dedukcije* i ispravna tvrđenja su ona koja su *dedukovana* tj. *dokazana*. Sva tvrđenja koja mogu biti dokazana nazivaju se *teoreme*. Ovakva redukcija, naravno, ne može teći u nedogled. Određeni broj tvrđenja se smatra ispravnim bez potrebe za bilo kakvih dodatnim obrazloženjem. Ta tvrđenja se nazivaju *aksiome*. Aksiome i pravila izvođenja zajedno čine *formalni sistem*. Činjenicu da je formula F teorema sistema obeležavamo sa $\vdash F$. Ako se formula F može dokazati uz korišćenje nekog dodatnog skupa pretpostavki $\mathcal{F}$, pišemo $\mathcal{F} \vdash F$.

Dakle, formalizacija podrazumeva postojanje:

- preciznog jezika za zapis tvrđenja,
- preciznih pravila izvođenja zaključaka,
- polaznih aksioma.

Dedukcija ne obezbeđuje *tačnost* dokazanih tvrđenja. Jedino što se može garantovati je da je nemoguće da se desi da su polazne pretpostavke (aksiome) tačne, a da dokazana tvrđenja (teoreme) nisu. Samo pitanje tačnosti je osetljivo. Šta uopšte znači da je neko tvrđenje tačno? Ako tvrđenje govori o nekoj prirodnoj pojavi (npr. u fizici, hemiji) tačnost se obično ocenjuje na osnovu saglasnosti tvrđenja i izvršenih eksperimenata. Ipak, nas će češće zanimati tvrđenja koja govore o precizno definisanim matematičkim strukturama, gde je moguće veoma precizno definisati šta znači da je neko tvrđenje tačno. Definisanjem tačnosti tvrđenja bavi se *semantika*. Važan zadatak semantike je da definiše određeno značenje (interpretaciju) simbola koji se javljaju u tvrđenju. Činjenicu da je formula F tačna kada se simboli interpretiraju interpretacijom[1] $\mathcal{I}$ zapisujemo pomoću $\mathcal{I} \vDash F$. Ako je formula F tačna pri bilo kojoj interpretaciji, pišemo $\vDash F$.

Uspostavljanje veza između dokazivosti ($\vdash$) i tačnosti ($\vDash$) tj. između teorema i tačnih tvrđenja je uvek veoma poželjno. Cilj kome se uvek teži je definisanje

[1] Definicija pojma interpretacije zavisi od korišćene logike i biće kasnije precizirana.

formalnih deduktivnih sistema koji su *saglasni* (svaka teorema je tačna) i *potpuni* (svako tačno tvrđenje može biti dokazano). Saglasni sistemi su, naravno, *neprotivrečni* (nije moguće dokazati kontradikciju). Značajan rezultat rada na formalizaciji matematike je formulisanje saglasnih i potpunih sistema za čistu logiku tj. saglasnih i potpunih sistema u kojima se može dokazati bilo koja univerzalno valjana formula — formula koja je tačna samo na osnovu svoje logičke forme, bez obzira na značenje simbola koji u toj formuli učestvuju. Najpoznatiji potpuni i salgasni deduktivni sistemi za logiku prvog reda su Hilbertov sistem, prirodna dedukcija, račun sekvenata i rezolucija. Nažalost, kada se sa logike pređe na matematiku, postoji veliki broj matematičkih teorija za koje se zna da nije moguće definisati neprotivrečne (saglasne) i potpune deduktivne sisteme. Najjednostavniji i najznačajniji primer je aritmetika nad prirodnim brojevima — na osnovu Gedelovih rezultata znamo da nije moguće definisati potpuni i neprotivrečni deduktivni sistem za aritmetiku tj. neprotivrečni sistem u kom bi se mogla dokazati sva tvrđenja koja su tačna nad prirodnim brojevima.

Još jedan aspekt, naročito važan za automatizaciju rezonovanja je pitanje *odlučivosti* provere dokazivosti i provere tačnosti datog tvrđenja. Naime, postavlja se pitanje da li je za dati formalni sistem moguće definisati algoritam koji bi za bilo koju datu formulu proverio da li se može dokazati u tom sistemu tj. algoritam koji bi proverio da li je ta formula tačna. Nažalost, znamo da je veliki broj formalnih sistema neodlučiv tj. da takvi algoritmi ne postoje, čak i kada su ti sistemi saglasni i potpuni. Najjednostavniji i najznačajniji primeri takvih sistema su formalni sistemi za logiku prvog reda. Negativan odgovor na tzv. Entscheidungsproblem koji je definisao Hilbert koji su dali Čerč i Tjuring kaže nam da ne postoji opšti algoritam kojim bi se ispitalo da li je data formula logike prvog reda teorema formalnog sistema ove logike (i to važi za bilo koji od nekoliko saglasnih i potpunih sistema koji se u literaturi razmatraju)

1.1 Različite logike

Bez obzira na oblast na koju se odnose, primećuje se da se tvrđenja imaju neku zajedničku strukturu tj. koriste neke veznike i kvanfikatore zajedničke svim precizno definisanim tvrđenjima. Na primer, i u matematičkoj analizi, geometriji i u statistici, ali i u fizici, hemiji ili biologiji, prilikom formulisanja tvrđenja koristimo reči poput ,,i", ,,ili", ,,ne", ,,ako-onda", ,,za svaki", ,,postoji" itd. Ti veznici i kvantifikatori su, dakle, na neki način opšti i ne pripadaju ni jednoj konkretnoj oblasti matematike ili nauke, već pripadaju logici. Takođe, smisao svih tih simbola je isti, bez obzira na to iz koje oblasti dolaze tvrđenja u kojima oni učestvuju.

Iako se u neformalnim matematičkim izlaganjima tvrđenja često umesto u formalnoj logičkoj notaciji zapisuju na govornom jeziku (ili bar u nekoj kombinaciji formalnog i neformalnog zapisa) čitaoc bi implicitno morao da ima osećaj o svim logičkim simbolima koji se u takvom tekstu javljaju i o njihovom značenju (inače neće biti u stanju da taj matematički tekst razume).

Naravno, pored ovih *logičkih simbola*, u tvrđenjima učestvuju i tzv. *nelogički simboli* koji se odnose na pojmove karakteristične za specifičnu oblast iz koje tvrđenja dolaze (na primer, u tvrđenju iz oblasti geometrije može se javiti i relacija paralelnosti, u tvrđenju iz oblasti aritmetike operacija sabiranja dva broja, a u tvrđenju iz oblasti fizike univerzalna gravitaciona konstanta γ). Skup nelogičkih simbola koji se mogu koristiti prilikom zapisa tvrđenja iz neke oblasti (kažemo i teorije) čini *jezik* ili *signaturu*. Kokretne relacije i funkcije su, dakle, deo određenih konkretnih teorija, međutim, mogućnost da prilikom izražavanja tvrđenja u njima koristimo simbole nekih relacija i funkcija je nešto što je deo logike i što logika propisuje.

U zavisnosti od toga koji se logički simboli mogu koristiti, koje je njihovo značenje i koje vrste nelogičkih simbola možemo koristiti razlikujemo različite logike (neke logike, na primer, dopuštaju korišćenje kvantifikatora i relacijskih i funkcijskih simbola, a neke ne).

Što je bogatiji skup logičkih simbola i što je bogatija struktura formula možemo izraziti više složenijih tvrđenja. Sa druge strane, rezonovanje o tim tvrđenjima (njihovo dokazivanje, ispitivanje njihove tačnosti) postaje sve komplikovanije i komplikovanije. Stoga prilikom izbora logike koja će se koristiti za formalizaciju određene teorije treba koristiti što siromašniju logiku koja je dovoljno izražajna.

Logike koje se tradicionalno najčešće razmatraju su:

- iskazna logika
- logika prvog reda
- logika višeg reda (teorija tipova)
- modalne logike (deontičke logike, temporalne logike, ...)
- ...

Pored definicije sintakse i semantike, logiku često karakteriše i određeni deduktivni sistem čija se pravila odnose na veznike i kvantifikatore koji se koriste u toj logici. Najčešće korišćeni deduktivni sistemi su sistemi Hilbertovog tipa, sistemi prirodne dedukcije i računi sekvenata. Ovi sistemi formalizuju pojam dokaza. Sa druge strane, u neformalnim matematičkim tekstovima se pojam dokaza obično ne precizira i koriste se neka pravila „zdravog razuma" tj. čitaocu se prepušta da na osnovu svog osećaja proceni korektnost svakog koraka zaključivanja.

Da bi u okviru neke logike dokazivale teoreme iz neke konkretne oblasti, deduktivni sistem te logike se obično proširuje aksiomama i/ili pravilima koji se odnose na nelogičke simbole iz te oblasti. Često je skup pravila izvođenja fiksiran, ali se kao dodatne polazne pretpostavke koristi neki skup formula koje implicitno daju značenje određenim nelogičkim simbolima (to su aksiome te teorije). Formalnu teoriju definisanu u sklopu neke logike, dakle, određuje njen jezik i njene aksiome.

1.2 Meta-logika

Prilikom formalizacije bilo koje matematičke teorije, koristimo neku pogodnu logiku. Veoma često je to logika prvog reda (npr. poznate su formalizacije geometrije ili realne analize koje koriste sintaksu, semantiku i deduktivne sisteme logike prvog reda). Međutim, postavlja se pitanje da li je moguće formalizovati samu logiku (neku konkretno odabranu)? Odgovor je potvrdan, ali tu treba biti jako obazriv. Naime, u tvrđenjima se govori o toj logici tj. njenim pojmovima, tako da su u ovom slučaju neki nelogički simboli zapravo logički simboli te logike. Sa druge strane, za formulaciju tvrđenja o toj logici i za izvođenje zaključaka želimo da koristimo iste logičke mehanizme koje koristimo prilikom formalizovanja bilo kojih drugih matematičkih pojmova – dakle, opet neku logiku. Stoga se u ovom slučaju istovremeno koriste dve logike – ona koja se formalno definiše i analizira se naziva *objektna logika* dok se ona koja se koristi za to naziva *meta logika*.

Na primer, kada kažemo ,,Formula $p \wedge q$ je tačna ako i samo ako je tačna formula p i formula q", upotrebili smo objektni veznik ,,$\wedge$" i upotrebili smo meta-veznik ,,i" (a uz to i meta-veznik ,,ako i samo ako"). Iako možda zvuči malo paradoksalno, prilikom ovakve definicije značenja veznika $\wedge$ mi pretpostavljamo da znamo šta je značenje veznika ,,i". Prosto, nemamo drugi način da se precizno bavimo nekom teorijom, makar to bila i logika, ako na raspolaganju već nemamo neki oblik logike. Bitno je da nikada ne uđemo u začarani krug (jako je važno da uvek znamo šta je objektni, a šta meta simbol i da ih nikada ne pišemo na isti način).

1.3 Istorijat

1.3.1 Starogrčka matematika

Prva istraživanja u oblasti logike i principa ispravnog zaključivanja pripisuju se još Aristotelu, grčkom filozofu u 4. veku pne. U svom čuvenom delu ,,Organon", Aristotel opisuje tipove silogizama (metoda logičkog zaključivanja).

Stari Grci uvode ključnu novinu u matematiku, tretirajući je kao deduktivnu disciplinu u kojoj se tvrđenja dokazuju iz jednostavnijih pretpostavki (postulata i aksioma). Najznačajni rezultat na ovom polju su svakako Euklidovi ,,Elementi" koji sadrže uniformisanu kolekciju matematičkih (uglavnom geometrijskih) znanja, precizno dokazanih iz malog broja polaznih pretpostavki. Iako vrlo precizni, Euklidovi elementi su iskazani na govornom jeziku i ne predstavljaju formalan matematički tekst.

Uticaj Aristotela, Euklida i starogrčke matematike je bio ogroman i gotovo dve hiljade godina osnovne postavke koje su tada postavljene nisu menjane.

1.3.2 Lajbnicove ideje

Iako rad na uvođenju još većeg stepena rigoroznosti i analizi zasivanja matematike svoj zamajac uzima tek u XIX veku, ideje koje vode u ovom pravcu se mogu sresti i ranije. Čuveni filozof Gotfrid Vilhelm Lajbnic je spekulisao da će biti razvijeni formalni sistemi za logičko rasuđivanje koji će omogućiti ljudima da razreše nesporazume i neslaganja po bilo kom pitanju. Lajbnic predlaže razvoj formalnog, simboličkog jezika (characteristica universalis) i pravila zaključivanja (calculus rationator) koji omogućuju da se tačnost svakog tvrđenja odredi računanjem u tako definisanom formalnom sistemu (,,Calculemus"). Lajbnic percipira i izgradnju mehaničkih uređaja (računara) koji bi vršili automatska izračunavanja u ovakvim formalnim sistemima.

1.3.3 Kantorova naivna teorija skupova

Počeci ozbiljnijeg rada na analizi temelja matematike pripisuju se Georgu Kantoru koji 1870-ih razvija teoriju skupova. Pre njega skupovi se smatraju trivijalnim objektima. Još od doba Aristotela skupovi se implicitno koriste u matematičkom izlaganju, ali im se ne pridaje neki veliki značaj. Kantor pokazuje da beskonačni skupovi pokazuju veoma interesantno ponašanje, dokazuje postojanje različitih kardinalnosti beskonačnih skupova i ukazuje na veoma složenu i interesantnu prirodu beskonačnih skupova. Iako se teorija skupova danas često uzima za osnovu na kojoj se formalizuje moderna matematika, Kantorovi rezultati su u početku dočekani izuzetno oštro i to od strane veoma čuvenih matematičara toga vremena (Poenkarea, Kronekera, Brauera itd.) i proglašavan je za matematičkog šarlatana. Kantor razmatra skupove elemenata koji imaju određena svojstva, ne dajući primere takvih skupova, što se smatra veoma kontraverznim.

1.3.4 Konstruktivizam i intuicionizam

Kao reakcija na probleme uvedene kroz Kantorovu teoriju skupova javlja se konstruktivistički pokret i intuicionizam koji zagovara da se postojanje objekta može prihvatiti samo ako postoji način da se takav objekat eksplicitno konstruiše. Odbacuju se dokazi pozitivnih tvrđenja svođenjem na kontradikciju, jer nam takvi dokazi ne daju nikakvu informaciju o tome zašto su dokazana tvrđenja tačna. Odbacuje se zakon isključenja trećeg $p \vee \neg p$, vodeći se idejom da da bi se tvrđenje moglo smatrati tačnom ono mora eksplicitno i konstruktivno biti dokazano. Stoga se dopušta da je moguće da postoje tvrđenja za koja su takva da ne možemo da dokažemo ni njih ni njihovu negaciju (na primer, trenutna matematika nema odgovor na pitanje da li postoji beskonačno mnogo prostih brojeva blizanaca, jer nije još dokazano ni ovo tvrđenje ni njegova negacija).

1.3.5 Logicizam

Kantorovi rezultati u teoriji skupova inspirišu Dedekinda da pruži definiciju realnih brojeva kao skupova racionalnih brojeva (Dedekindovi preseci). Naime ako skup $\mathbb{Q}$ možemo razdvojiti na dva disjunktna podskupa tako da je bilo koji element jednog manji od bilo kog elementa drugog skupa, tada ta dva skupa predstavljaju neki realan broj. Levi skup nema najveći element, a da desni može, a ne mora da ima najmanji element — ako ima, tada presek odgovara upravo tom (racionalnom) elementu, a ako nema, presek odgovara iracionalnom broju koji ,,popunjava prazninu" između dva preseka. Npr. skupovi $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{1}{2}\}$ i $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{1}{2}\}$ definišu realan broj $\frac{1}{2}$ (koji je ujedno i racionalan), dok skupovi $\{x^2 \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}$ i $\{x^2 \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 2 \wedge x \geq 0\}$ definišu realan broj $\sqrt{2}$ (koji nije racionalan).

Racionalni brojevi se mogu definisati preko celih brojeva, kao klase ekvivalencije parova celih brojeva (brojilaca i imenilaca razlomaka, gde imenilac nije nula), pri čemu su razlomci $\frac{a_1}{b_1}$ i $\frac{a_2}{b_2}$ ekvivalentni ako je je $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Celi brojevi se mogu definisati kao klase ekvivalencije parova prirodnih brojeva (par (a_1, b_1) ekvivalentan je paru (a_2, b_2) ako je $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$ tj. ako je $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$. Dakle, matematika se može zasnivati piramidalno. Složeniji pojmovi se definišu korišćenjem jednostavnijih. Pitanje koje se prirodno nameće je šta leži u dnu te piramide. Kroneker se, na primer, zalaže da su to prirodni brojevi (čuvena je njegova izreka da su prirodni brojevi Božije delo, dok su sve ostalo storili ljudi). Ipak, rađa se pokret pod nazivom *logicizam* koji se zalaže da se u temelju matematike nalazi teorija skupova i matematička logika.

Gotlib Frege se bavi formalizacijom matematičke notacije, jezika i pravila izvođenja. U svojoj čuvenoj knjizi ,,Zapisivanje pojmova — jezik formula čiste misli, po uzoru na aritmetiku" (nem. Begriffsschrift), Frege uvodi ono što se danas suštinski naziva logika prvog reda, opisuje svojstva kvantifikatora, uvodi određeni broj aksiomatskih shema i pravila izvođenja kao i prvi precizan pojam dokaza. Fregova namera u knjizi ,,Osnove aritmetike" bila je da pruži način da se prirodni brojevi definišu korišćenjem skupova kao polazne osnove u okviru svog logičkog sistema, međutim, neposredno pre nego što je knjiga objavljena Bertrand Rasel u delu ovog sistema pronalazi nekonzistentnost (čuveni Raselov paradoks).

Naime, naivna i nekontrolisana upotreba skupova koja potiče još od Kantora a pruža se i kroz Fregeova dela dopušta razmatranje skupa R koji sadrži tačno sve one skupove koji nisu svoji članovi ($R = \{A \mid A \notin A\}$). To odmah dovodi do paradoksa, jer važi da je $R \in R$ ako i samo ako važi $R \notin R$. Dakle, prvi pokušaji logicizma bili su neuspešni i naivni, ali to nije obeshrabrilo logičare da teže kreiranju formalnog sistema zasnovanog na logici koji bi bio osnova celokupne matematike. Rasel i Vajthed definišu svoj sistem mnogo pažljivije nego Kantor i Frege i kroz nekoliko tomova potpuno precizno zapisanog matematičkog teksta i formalnih dokaza uvode prirodne brojeve i aritmetiku (npr. tek posle nekoliko stotina strana izlaganja i zasnivanja pojmova pružaju formalan dokaz da je $1 + 1 = 2$).

Ipak, preciznije zasnivanje teorije skupova u sklopu matematičke logike koje se i danas često koristi kao osnova matematika predlažu Ernst Zermelo i Abraham Frenkel. Oni u okviru logike prvog reda predlažu sistem aksioma koji implicitno opisuje šta sve može biti skup i kako se složeniji skupovi grade od jednostavnijih skupova. Prvobitni sistem aksioma koje je predložio Zermelo precizirao je i dopunio Frenkel, čime se došlo do formalne teorije koja se danas naziva ZF. Često se ovim aksiomama pridružuje i tzv. aksioma izbora (choice) čime se dobija teorija ZFC. U okviru ove teorije moguće je definisati uređene parove, funkcije, relacije, prirodne brojeve, cele, racionalne i realne brojeve, matematičku analizu i ostale grane tradicionalne matematike. Po svemu sudeći, ova teorija je neprotivrečna (iako je nemoguće to formalno dokazati unutar ove ili neke jače teorije, ni nakon dugog istraživanja i njenog korišćenja nisu pronađeni paradoksi niti kontradikcije). ZFC nije potpuna i postoje matematička tvrđenja koja se ne mogu niti dokazati niti opovrgnuti u ZFC (npr. čuvena kontinuum hipoteza koja tvrdi da ne postoji skup čija bi kardinalnost bila između kardinalnosti celih i realnih brojeva). Dakle, logicistički projekat nije u potpunosti ispunjen kroz ZFC jer nije celokupna matematika formalizovana (a niti ikada može biti). Takođe, logicistički projekat je podrazumevao da su polazne aksiome takve da su tačne samo na osnovu svoje forme, a ne osnovu sadržaja o kojem govore, međutim, nisu sve ZFC aksiome takve.

1.3.6 Formalizam

Nastavak zasnivanja matematike u još radikalnijoj formi dolazi kroz *formalizam*. Formalizam posmatra matematiku iz čisto sintaksičko-deduktivne perspektive, ne pridajući joj nikakvo značenje tj. semantiku. Matematika postaje ,,igra" gde se u precizno postavljenom formalnom sistemu transformišu formule primenom datih pravila izvođenja, ne razmatrajući šta te formule zapravo treba da predstave. Iz njihove perspektive matematika ne govori o apstraktnoj slici nekog sveta koji je zadat i postoji van matematike. Na primer, i Euklidska i hiperbolička geometrija su dve formalne teorije koje iz formalističke perspektive imaju potpuno isti status i oni ne odbacuju hipreboličku geometriju zbog toga što se ona možda krši sa nekom našom intuitivnom slikom sveta koji nas okružuje.

Najpoznatiji predstavnik formalizma bio je David Hilbert. Njegov čuveni program predlagao je pronalaženje formalnog sistema za celokupnu matematiku koji bi bio:

- potpun — svako tačno matematičko tvrđenje se može dokazati iz aksioma
- neprotivrečan — iz aksioma se ne može izvesti kontradikcija
- odlučiv — postoji algoritam kojim se može odrediti dokazivost/istinitost bilo kog matematičkog tvrđenja.

Međutim, skoro neposredno nakon što je 1930. Hilbert hrabro porekao čuvenu latinsku izreku ,,Ignoramus et ignorabimus" koja znači ,,ne znamo i nećemo znati" i predstavlja ideju da je naše znanje o nauci i svetu oko nas inherentno ograničeno, rekavši ,,wir musen wissen, wir werden wissen" (što mu je i epitaf), što znači da u matematici moramo da znamo i znaćemo, mladi Kurt Gedel je zadao udarac koji je raspršio skoro sve formalističke snove.

1.3.7 Gedelove teoreme

Prva Gedelova teorema nam je pokazala da nije moguće imati formalni aksiomatski sistem koji bi bio potpun i dovoljno izražajan da dopusti definisanje osnovnih aritmetičkih pojmova. Osnova njegove konstrukcije je zasnovana na paradoksu lažova tj. na paradoksu koji nastaje kada se napiše rečenica ,,Ova rečenica nije tačna" (paradoks je prilično očigledan).

U svakom formalnom sistemu u kom možemo zasnovati prirodne brojeve i elementarnu aritmetiku moguće je izvršiti numeričko kodiranje pojma formule, pojma dokaza i pojma dokazivosti (kontsrukcija kojom se to izvodi se u Gedelovu čast naziva gedelizacija). Tada je moguće definisati aritmetičku formulu koja za samu sebe tvrdi da nije dokaziva. Ako je ona tačna, onda ona nije dokaziva, što ilustruje nepotpunost sistema. Sa druge strane, ako je netačna, onda je ona dokaziva što ilustruje protivrečnost sistema. Dakle, sistem ne može istovremeno biti neprotivrečan i potpun i koliko god da se trudimo uvek će postojati tačne rečenice koje ne mogu da se izvedu iz aksioma. Ovaj problem se ne može rešiti dodavanjem novih aksioma, jer se dodavanjem problematične rečenice kao nove aksiome pojavljuje uvek neka nova rečenica koja ukazuje na isti problem. Rešenje bi jedino moglo biti da se za aksiome uzmu sve rečenice koje su tačne (na primer, u standardnom fon Nojmanovom modelu prirodnih brojeva), međutim, takav skup aksioma ne bi bio rekrurzivno nabrojiv (ne bi postojao algoritam koji bi mogao da navede aksiome), pa takva aksiomatizacija nije korisna.

Prva Gedelova teorema daje negativan odgovor na prvi cilj Hilbertovog programa (potpunost). Druga Gedelova teorema daje prilično negativan odgovor na drugo pitanje (neprotivrečnost). Naime, ona tvrdi da nijedan neprotivrečan sistem koji je dovoljno bogat da se u njemu može definisati elementarna aritmetika ne može da dokaže svoju konzistentnost. Preciznije, u takvim sistemima je moguće definisati aritmetičku formulu koja kodira konzistentnost sistema i ta formula je jedna od formula koje se ne mogu dokazati u tom sistemu (na osnovu prve teoreme znamo da će uvek postojati nedokazive formule, a ovo je jedna od njih). Dakle, ako je npr. ZFC neprotivrečan sistem, mi to ne možemo dokazati unutar ZFC korišćenjem samo matematike zasnovane na ZFC. Ako bismo dokaz izveli u nekoj jačoj teoriji, to nam ne bi značilo previše, jer bi se onda problem neprotivrečnosti našeg celokupnog matematičkog sistema sveo pitanje neprotivrečnosti te teorije, koje opet ne bismo mogli da razrešimo. Dakle, mi suštinski ne znamo da li je ZFC neprotivrečna teorija, ne možemo to da dokažemo i nadamo se da se paradoksi neće pojaviti.

1.3.8 Neodlučivost

Gedelove teoreme su srušile formalistički san o aksiomatizaciji matematike. Nada da će postojati bar algoritam koji može da utvrdi da li je data formula dokaziva unutar nekog formalnog sistema je takođe veoma kratko trajala. Naime prvo Čerč, a zatim i Tjuring su nekoliko godina posle Gedelovih teorema, krajem 1930-ih dokazali da takvi algoritmi ne mogu da postoje. Dat je negativni odgovor na Hilbertov *Enthscheidungsproblem* koji je tražio algoritam za ispitivanje da li je data formula logike prvog reda valjana tj. dokaziva iz nekih aksioma logike prvog reda. Time je stavljena na tačka na optimističke ideje mehanizacije i automatizacije matematičkog rezonovanja, koje potiču još od Lajbnica.

Kao ,,usputni" rezultat tog istraživanja dobili smo preciziranje definicije pojma algoritma (Čerčov lambda račun, Gedelove rekurzivne funkcije i Tjuringove mašine). Tjuringove mašine su veoma jednostavan model računara koji je dovoljno izražajan da formuliše bilo koji algoritam. Čerč-Tjuringova teza nam govori da je svaka od predloženih preciznih definicija algoritma ekvivalentna našoj intuitivnoj predstavi tog pojma. Iako ona ne može biti dokazana, jer povezuje formalne i intuitivne pojmove, u njen prilog ide to što se dokazalo da su sve te, naizgled veoma različite, definicije pojma algoritma međusobno ekvivalentne. Svi savremeni programski jezici i mnogi kasnije uvedeni formalizmi izračunavanja takođe su ekvivalentni (u smislu klase funkcija koje se mogu algoritamski izračunavati) i za njih se kaže da su Tjuring-potpuni.

Tjuring je sveo problem odlučivanja u logici na problem ispitivanja zaustavljanja Tjuringove mašine (tzv. Halting problem). Naime, ako bi se algoritamski moglo ispitati zaustavljanje proizvoljne Tjuringove mašine, rešen bi bio i problem ispitivanja dokazivosti. Za svaku formulu je moguće definisati Tjuringovu mašinu koja će nabrajati redom sve formule koje se mogu izvesti iz aksioma i koja će se zaustaviti kada se ta formula nabroji. Formula je onda dokaziva ako i samo ako se njena Tjuringova mašina zaustavlja. Međutim, Tjuring je dokazao da se zaustavljanje Tjuringove mašine ne može algoritamski ispitati. Pretpostavimo da postoji Tjuringova mašina h koja prima drugu Tjuringovu mašinu (tj. njen program) i neki ulaz vrednost i vraća ,,da" ako se ta mašina zaustavlja za taj ulaz tj. ,,ne" u suprotnom. Pretpostavljamo da mašina h za svaku datu mašinu i za svaki ulaz korektno određuje njeno ponašanje. Mašinu h možemo transformisati u Mašinu H koja prima neku Tjuringovu mašinu (tj. njen program) i predaje je mašini h i kao mašinu i kao ulaznu vrednost. Ako h vrati ,,da", tada H upada u beskonačnu petlju, a ako h vrati "ne", mašina H se zaustavlja. Šta se dešava kada mašini H na ulaz damo njen sopstveni program? Ako se ona zaustavi, to znači da je mašina h rekla da se mašina H neće zaustaviti za ulaz H, a ako se ne zaustavi to znači da je mašina h rekla da će se H zaustaviti za ulaz H. Dakle, mašina h pogrešno određuje zaustavljanje mašine H na nekom ulazu, što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom o mogućnosti postojanja mašine h.

1.4 Posle negativnih rezultata

Iako su rezultati 1930-ih dokazali da formalna matematika može da uradi mnogo manje nego što je to inicijalno bilo planirano, naročito od strane formalista, oni nisu zaustavli interesovanje za formalnu matematiku. Ograničenja su nam postala jasna: opšta rešenja ne postoje. Na primer, jasno nam je da neće nikada biti moguće napisati program koji će za bilo koju formulu ispitati da li je teorema ili ne, to ne znači da ne možemo da se trudimo da pravimo programe koji će moći da daju takav odgovor za što više zadatih formula, u što kraćem vremenu. Jasno nam je i da ne možemo postaviti aksiomatske osnove iz kojih bi se moglo dokazati bilo koje tačno matematičko tvrđenje, ali to ne znači da ne treba da razamtramo formalne aksiomatske sisteme kakav je ZFC ili neka moderna teorija tipova ili logika višeg reda iz kojih se može dokazati zaista veliki procenat korisne, svakodnevne matematike. Svestan ograničenja i negativnih rezultata formalistički pokret je nastavio da živi a dobio je veliki zamah pojavom računara i savremenih sistema za automatsko i interaktivno rezonovanje i dokazivanje teorema.

2 Iskazna logika

2.1 Sintaksa

Logički simboli iskazne logike su samo iskazni veznici $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, i konstante $\top$ i $\bot$, dok su nelogički simboli *iskazi*, koji se predstavljaju iskaznim promenljivama. Na primer, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Precizna definicija konkretne sintakse ove logike se može jednostavno zadati kontekstno-slobodnom gramatikom.

2.2 Semantika

Semantika podrazumeva definisanje da li je zadata formula *tačna* tj. *istinita*. Pošto u formuli učestvuju određeni nelogički simboli, da bi se mogla utvrditi istinitosna vrednost formule, potrebno je pridružiti istinitosne vrednosti svim nelogičkim simbolima koji u noj učestvuju. To znači da o tačnosti iskazne formule možemo govoriti tek kada zadamo istinitosnu vrednost svih iskaza koji u njoj učestvuju. Na primer, formula $p \wedge q$ je tačna kada je iskaz p tačan i iskaz q tačan i netačna u svim drugim slučajevima. Pridruživanje istinitosnih vrednosti svim iskazima naziva se *interpretacija* tih simbola ili *valuacija* tih promenljivih[2]. Ako je v valuacija (funkcija koja slika iskaze u istinitosne vrednosti) i ako je formula F tačna pri toj valuaciji, kažemo i da valuacija v *zadovoljava* formulu F i to zapisujemo $v \vDash F$. Alternativno, možemo definisati i funkciju I_v koja slika formulu u njenu istinitosnu vrednost tako da $v \vDash F$ ako i samo ako je $I_v(F)$ tačno. Definicija funkcije I_v tj. relacije $\vDash$ je veoma jednostavna (rekurzivna, nad strukturom formule, korišćenjem definicije semantike svakog pojedinačnog veznika).

[2]Obratimo pažnju da će u logici prvog reda postojati razlika između pojmova valuacija i interpretacija, a da se u iskaznoj logici oni mogu koristiti sinonimno

Problem ispitivanja tačnosti date formule u datoj valuaciji je trivijalno odlučiv.

Naročito su značajne formule koje su tačne u bilo kojoj valuaciji. Njih nazivamo *tautologije* i one predstavljaju određeni vid logičkih zakona, koji važe bez obzira na to šta predstavljaju i da li su tačni iskazi koji u njima učestvuju. Ako je formula F tautologija, pišemo $\models F$.

Ispitivanje tautologičnosti je takođe odlučiv problem (doduše problem je NP-kompletan i nije još pronađeno njegovo efikasno rešenje). Najjednostavniji čisto semantički metod za ispitivanje tautologičnosti je zasnovan na *istinitosnim tablicama*. Mnogo efikasniji (a ponovo čisto semantički pristupi) su tzv. *SAT solveri* koji vrše ispitivanje nezadovoljivosti negirane formule (formula je zadovoljiva akko je tačna u nekoj valuaciji).

2.3 Dedukcija

Iako se tautologičnost iskaznih formula može ispitati semantički, radi pripreme za bogatije logike u kojima to neće biti moguće, razmotrićemo nekoliko deduktivnih sistema za iskaznu logiku. Tri najčešća tipa deduktivnih sistema za iskaznu logiku su:

- Hilbertov sistem
- Prirodna dedukcija (intuicionistička i klasična)
- Račun sekvenata

Svi navedeni sistemi poseduju svojstva saglasnosti i potpunosti za taugologije: svaka iskazna formula koja se može dokazati u odabranom sistemu je tautologija i svaka se tautologija može dokazati.

2.3.1 Hilbertov sistem

Hilbertov sistem je sasvim veštački sistem, napravljen sa idejom da bude najjednostavniji mogući deduktivni sistem (sa što jednostavnijim aksiomama i pravilima izvođenja). Zbog toga je krajnje neintuitivan i ne koristi se pri realnom dokazivanju. U tradicionalnoj varijanti pokriva samo iskazne formule koje sadrže implikaciju i negaciju (sve formule se primenom određenog pretrpocesiranja mogu svesti na ovakve formule). Postoje tri sheme aksioma:

(A1): $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(A2): $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(A3): $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

Aksioma je zapravo beskonačno, jer se u svakoj shemi A i B mogu zameniti proizvoljnim formulama.

Jedino pravilo izvođenja je modus ponens.

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Dokaz formule F u Hilbertovom sistemu je lista formula koja sadrži F i koja zadovoljava da je svaka formula u listi ili instanca neke sheme aksioma ili se dobija primenom modus ponensa na neke prethodne elemente u listi. Ako formula F ima dokaz, pišemo

$$\vdash F.$$

Dokaz formule F iz pretpostavki iz skupa Γ dopušta da se u listi ravnopravno aksiomama koriste i formule skupa Γ. Ako formula F ima dokaz iz pretpostavki skupa Γ, pišemo

$$\Gamma \vdash F.$$

Na primer, moguće je dokazati formulu $p \Rightarrow p$. Iz ovog jednostavnog primera može se osetiti sva neintuitivnost Hilbertovog sistema i njegova udaljenost od tradicionalnih matematičkih dokaza.

1.	$(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$	A2
2.	$p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$	A1
3.	$(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	MP(1, 2)
4.	$p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	A1
5.	$p \Rightarrow p$	MP(3, 4)

Prethodni dokaz se može predstaviti i drvetom.

$$\dfrac{\dfrac{\mathit{A2}\colon (p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \qquad \mathit{A1}\colon p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)}{(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)} \qquad \mathit{A1}{:}p \Rightarrow (p \Rightarrow p)}{p \Rightarrow p}$$

Hilbertov sistem zaista ima svojstva saglasnosti i potpunosti (važi $\vdash F$ ako i samo ako $\models F$), ali to nije nimalo jednostavno dokazati i time se nećemo baviti.

Primetimo da je svaki korak u dokazu u Hilbertovom sistemu tautologija (i to bezuslovna tautologija, jer formule važe bez ikakvih dodatnih pretpostavki).

2.3.2 Prirodna dedukcija

Za razliku od veoma neintuitivnog Hilbertovog sistema, prirodna dedukcija, kako joj samo ime kaže, teži da dokazi budu prirodni tj. da nalikuju dokazima u tradicionalnoj matematici.

Kako bismo, na primer, obrazložili da formula

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$$

predstavlja ispravan logički zakon (ovo je jedan od čuvenih de Morganovih zakona)? Naravno, lako je moguće dokazati da je u pitanju tautologija, semantički, ispitivanjem svih mogućih valuacija, ali mi želimo da damo deduktivni kriterijum tj. dokaz.

Cilj je da dokažemo formulu $\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$, tj. ustanovimo da važi

$$\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

Razmotrimo kako bi jedan ovakav dokaz mogao da bude zapisan u neformalnom matematičkom tekstu. Na primer, dokažimo da ,,Ako student ne studira matematiku ili informatiku onda on ne studira matematiku niti studira informatiku". Zaista, ako bi ,,studirao matematiku", tada bi ,,studirao matematiku ili informatiku", što je kontradikcija tome da ,,ne studira matematiku ili informatiku". Slično, ako bi ,,studirao informatiku", tada bi ,,studirao matematiku ili informatiku", a to je opet u kontradikciji sa istom pretpostavkom. Dakle, student ne studira ni matematiku ni informatiku. Razmotrimo sada formalno šta se krije iza jednog ovakvog dokaza.

Kao što je to uobičajeno u matematici, da bismo dokazali da je implikacija ispravna, pretpostavićemo da važi njena leva strana i korišćenjem te pretpostavke ćemo dokazati da važi desna (ovaj korak je u prethodnom neformalnom dokazu bio implicitan, jer smo u startu pretpostavili da znamo da važi da ,,student ne studira matematiku ili informatiku"). Dakle, da bi se dokazalo $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$ dovoljno je da dokažemo $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$. Primenom pravila o implikaciji, dakle, naš cilj se promenio i postao je malo jednostavniji. Dokaz, dakle, sprovodimo *unatrag* svođenjem polaznog cilja na što jednostavnije ciljeve. Svaki cilj (pa i onaj polazni) je *sekvent* koji sa leve strane može imati jednu ili više pretpostavku, a sa desne strane ima tačno jedan zaključak[3].

Sada je potrebno da dokažemo da iz pretpostavki sledi konjunkcija formula $\neg A$ i $\neg B$. Da bismo iz pretpostavki dokazali konjunkciju, dovoljno je da pojedinačno iz pretpostavki dokažemo prvu i dokažemo drugu formulu (i u neformalnom dokazu smo posebno dokazivali da ,,student ne studira matematiku" i da ,,student ne studira informatiku"). Dakle, dovoljno je da pojedinačno dokažemo naredna dva cilja: $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ i $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$.

Kako da pretpostavkom $\neg(A \vee B)$ dokažemo da ne važi A? Opet, po uzoru na tradicionalne dokaze u matematici, pokušaćemo da pretpostavimo suprotno (da pretposavimo A) i da iz toga dokažemo kontradikciju (i u neformalnom dokazu smo rekli ,,ako bi studirao matematiku", dobili bismo kontradikciju). Dakle, prvi od dva potrebna dokaza svodimo na dokaz $\neg(A \vee B), A \vdash \bot$, u kome se zahteva da dokaže da su pretpostavke $\neg(A \vee B)$ i A međusobno kontradiktorne.

Kontradikcija bi bila očigledna ako bismo pokazali da iz jedne od pretpostavki sledi negacija ove druge. Pokušajmo zato da dokažemo $A \vdash A \vee B$ (i u neformalnom dokazu smo rekli ,,ako studira matematiku, tada studira matematiku ili informatiku"). Ovo je zapravo prilično očigledno, jer da bi se dokazala disjunkcija dovoljno je da dokažemo bilo koji njen disjunkt. Zato nam je dobro da prethodni dokaz svedemo na $A \vdash A$. Međutim, ovo trivijalno važi, jer se formula koja se dokazuje nalazi među pretpostavkama.

Kako pod pretpostavkom $\neg(A \vee B)$ da dokažemo da ne važi B? Potpuno analogno kao u prethodnom slučaju.

Na ovaj način smo transformacijom onoga što treba da se dokaže i svođenjem na sve jednostavnije i jednostavnije ciljeve uspeli da stignemo do aksioma tj. do tvrđenja koja su potpuno očigledna (jer se ono što se dokazuje nalazi među pretpostavkama) i na taj način dokažemo našu polaznu formulu. Popišimo pravila koja su u tom procesu koristili.

Da bismo dokazali implikaciju, pretpostavili smo njenu levu stranu i iz toga dokazali desnu.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow I)$$

Ovako zapisana pravila izvođenja možemo čitati na sledeći način ,,Da bi cilj ispod crte bio dokazan, dovljno je da je cilj iznad crte bude dokazan". Sa desne strane je napisan naziv pravila (u ovom slučaju to je $\Rightarrow I$. U navedenom pravilu

[3]Iako prirodna dedukcija koristi sekvente, ne treba je mešati sa računom sekvenata — deduktivnim sistemom koji takođe koristi sekvente, ali u kojima se sa desne strane može javljati više formula i u kom se koriste sasvim drugačija pravila izvođenja nego u prirodnoj dedukciji

se eksplicitno piše kontekst Γ. Postoji i drugačiji, tradicionalniji zapis pravila u kome je kontekst implicitan, međutim, mi se njime nećemo baviti. U tom zapisu pravilo uvođenja implikacije bi bilo zapisano na sledeći način.

$$\cfrac{\begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow I)^1$$

Da bismo dokazali konjunkciju, pojedinačno smo dokazivali oba konjunkta.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\wedge I)$$

Da bismo dokazali negaciju, pretpostavili smo suprotno i iz toga izveli kontradikciju.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\neg I)$$

Da bismo dokazali disjunkciju dovoljno je bilo da dokažemo njen prvi disjunkt ili da dokažemo njen drugi disjunkt.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\vee I1) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\vee I2)$$

Ako se zna da istovremeno važe (mogu da se dokažu iz pretpostavki) i negacija nekog tvrđenja i to tvrđenje, iz pretpostavki sledi kontradikcija.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\,(\neg E)$$

Mi smo takvo rezonovanje upotorebili u obliku narednog pravila.

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,(\neg E)$$

Jedina aksioma tj. jedini dokaz koji se smatra trivijalnim je onaj u kom se ono što se dokazuje već nalazi među pretpostavkama.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{ass})$$

Svako pravilo je suštinski vezano za neki od iskaznih veznika. Pri tom, sva pravila, osim pravila $\neg E$ koje se odnosilo na izvođenje kontradikcije iz negativne pretpostavke nam govore kako da dokažemo tvrđenje u kom se javlja neki veznik (veznik se javljao sa desne strane). Ta pravila se nazivaju *pravila uvođenja* (introduction) i zato se obeležavaju sa I. Pravilo $\neg E$ nam je govorilo kako možemo da upotrebimo to što znamo da je neka pretpostavka negirana tj. kako da upotrebimo to što se veznik $\neg$ nalazi na levoj strani. Takva pravila nazivamo *pravila eliminacije* (elimination) i zato se obeležavaju sa E.

Da bismo upoznali još neka pravila eliminacije, razmotrimo i naredni primer.

$$\vdash (A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$$

I ovu implikaciju, naravno, dokazujemo tako što pretpostavljamo njenu levu stranu i iz te pretpostavke dokazujemo desnu.

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$$

Pošto u pretpostavkama znamo da važi konjunkcija, možemo slobodno pretpostaviti i da važi svaki njen pojedinačni konjunkt. Dakle, dovoljno je dokazati C korišćenjem tri odvojene pretpostavke.

$$(A \vee B), (\neg A \vee C), (B \Rightarrow C) \vdash C$$

Ovde smo upotrebili pravilo oslobađanja konjunkcije:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash F}{\Gamma, A \wedge B \vdash F} \ (\wedge E)$$

Kako da iskoristimo to što znamo da važi A ili B? Pa znamo da važi bar jedna od formula A i B, ali ne znamo koja. Ako uspemo da dokažemo C u oba slučaja posebno (i kada važi samo A i kada važi samo B), tada ćemo biti sigurni da će C važiti bez ozbira na to da li važi A ili važi B (a jedno od njih sigurno važi). Dakle, da bismo dokazali trenutno tvrđenje dovoljno je da dokažemo sledeća dva.

$$A, \neg A \vee C, B \Rightarrow C \vdash C$$
$$B, \neg A \vee C, B \Rightarrow C \vdash C$$

Ovde smo upotrebili pravilo oslobađanja disjunkcije, koje odgovara razmatranju slučajeva u tradicionalnim matematičkim dokazima:

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{C} \ (\vee E)$$

Dokaz se dalje lako završava.

Kod prvog dokaza se vrši oslobađanje disjunkcije $\neg A \vee C$ i tada je potrebno dokazati:

$$A, \neg A, B \Rightarrow C \vdash C$$
$$A, C, B \Rightarrow C \vdash C$$

Prvo važi na osnovu oslobađanja negacije (pretpostavke su kontradiktorne pa iz njih sledi bilo šta), a drugo na osnovu aksiome, jer se ono što se dokazuje nalazi među pretpostavkama.

Kod drugog dokaza je potrebno da iskoristimo implikaciju koja je data među pretpostavkama. Da bi se ona iskoristila, potrebno je da dokažemo da njena leva strana sledi iz ostalih pretpostavki, nakon čega ćemo moći da njenu desnu stranu uvrstimo u pretpostavke. Dokaz $B, \neg A \vee C, B \Rightarrow C \vdash C$ se zato svodi na:

$$B, \neg A \vee C \vdash B$$
$$B, \neg A \vee C, C \vdash C$$

Oba trivijalno važe na osnovu aksiome.

Pravila i aksioma prirodne dedukcije su rezimirana na slici 2.3.2.

Negacija:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg E)$$

Konjunkcija:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge E1) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge E2)$$

Disjunkcija:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee I2) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{C}\ (\vee E)$$

Implikacija:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow E)$$

Logičke konstante:

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot E) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top I)$$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ (\text{ass})$$

Slika 1: Pravila prirodne dedukcije

Intuicionistička i klasična logika. Da bi prikazani sistem bio potpun tj. da bi mogao da dokaže bilo koju tautologiju potrebno je da mu se doda bar još jedno pravilo. Bez tog pravila u pitanju je sistem za *intuicionističku* iskaznu logiku, a kada se to pravilo doda dobija se sistem za *klasičnu* iskaznu logiku. Iz filozofskih razloga, intuicionistička logika ne dopušta da se pozitivna tvrđenja dokazuju svođenjem na kontradikciju. Nije moguće dokazati da je neko tvrđenje tačno tako što se pretpostavi njegova negacija i izvede kontradikcija – takav dokaz se smatra nedovoljno informativnim, jer nje eksplicitno dokazano da nešto važi, već je samo dokazano da je nemoguće da ne važi i iz takvog dokaza nemamo dovoljno objašnjenje zašto tvrđenje važi. Sa druge strane, taj način rezonovanja je uobičajen i potpuno prihvaćen u klasičnim matematičkim dokazima, a neophodan je da bi sistem bio potpun. Zato se intuicionističkim pravilima dodaje naredno ,,klasično pravilo".

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\neg I)$$

Bez tog pravila ne bi, na primer, bilo moguće dokazati drugi smer de Morganovog zakona $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$. Zaista, nakon primene uvođenja implikacije i svođenja prethodnog dokaza na $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$, primena uvođenja disjunkcije bilo na koji disjunkt dovodi do nedokazivih tvrđenja (do $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A$ ili $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg B$). Isto se događa i nakon eliminacije negacije ($\vdash A \wedge B$), jer pretpostavke nisu kontradiktorne. Kako se onda može opravdati ovaj de Morganov zakon? Jedino što preostaje je primena primena klasičnog pravila svođenja na kontradikciju.

Razmtrimo ponovo jedan neformalni primer. Broj je deljiv sa 6 akko i samo ako je deljiv sa 2 i deljiv sa 3. Kada kažemo da broj nije deljiv sa 6 to je isto kao da kažemo ,,broj nije deljiv sa 2 i sa 3". Zašto odatle sledi da ,,broj nije deljiv sa 2 ili nije deljiv sa 3"? U klasičnim matematičkim dokazama bi se, zapravo, ovo uzimalo kao trivijalna činjenica i ne bi se ni trošila energija da se ovaj prelaz obrazloži. Međutim, pokušajmo. Ako tvrđenje da ,,broj nije deljiv sa 2 ili nije deljiv sa 3" ne bi bilo tačno, tada bi ,,broj bio deljiv sa 2 i sa 3", što je kontradiktorno sa našom pretpostavkom, da ,,da broj nije deljiv sa 2 i sa 3". Ova implikacija sledi iz de Morganovog zakona $\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$, koji smo već dokazali prirodnom dedukcijom, ali i zakona dvostruke negacije $\neg(\neg A) \Rightarrow A$, koji ima isti logički status kao klasično pravilo (intuicionisti ga odbacuju). Stoga ćemo pokušati da ovu implikaciju opravdamo direktnije, bez pozivanja na neke druge zakone. Dokažimo da bi iz negacije našeg glavnog tvrđenja moralo da važi ,,broj je deljiv sa 2". Ako ,,broj nije deljiv sa 2", tada bi važilo ,,broj nije deljiv sa 2 ili nije deljiv sa 3", što je kontradiktorno sa negacijom glavnog tvrđenja tj. suprotnom pretpostavkom da ovo ne važi. Iz istog razloga važi ,,broj je deljiv sa 3". Dakle, u ovom dokazu smo tri puta primenili svođenje na kontradikciju i pošto se sva tri puta radilo o pozitivnim tvrđenjima, tri puta smo zapravo primenili klasično pravilo.

Formalno, primenom klasičnog pravila dokaz $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$ se svodi na cilj $\neg(A \wedge B), \neg(\neg A \vee \neg B) \vdash \perp$. Sada je eliminacija negacije moguća i dokaz se svodi na cilj $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$. Jasno je da naredni korak treba da bude eliminacija konjunkcije, čime se dokaz svodi na sledeća dva cija: $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A$ i $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash B$. Razmotrimo prvi. Ponovo možemo primeniti klasično pravilo i dobiti $\neg(\neg A \vee \neg B), \neg A \vdash \perp$. Eliminacijom negacije se dobija $\neg A \vdash \neg A \vee \neg B$, što se trivijalno dokazuje uvođenjem disjunkcije ($\neg A \vdash \neg A$) i primenom aksiome. Dokaz cilja $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A$ se sprovodi analogno.

Intuicionistička pravila nisu dovoljna da bi se dokazala bilo koja tautologija u odnosu na tradicionalnu semantiku iskazne logike (opisanu na početku ovog članka). Sa druge strane, postoje drugačije definicije semantike (Hejtingove algebre, Kripkeovi modeli, ...) u odnosu na koje je intuiconistička prirodna dedukcija potpuna.

Mi ćemo se nadalje baviti isključivo klasičnom logikom i nećemo praviti razliku između intuicionističkih i klasičnih pravila.

2.3.3 Račun sekvenata

Za razliku od sistema Hilbertovog tipa u kojima je svaka formula bezuslovna tautologija, sistemi Gencenovog tipa u koje spadaju prirodna dedukcija i račun sekventa u svakom koraku dokaza koriste *sekvente* – uslovne tautologije gde formule sa desne strane važe samo pod pretpostavkama navedenim sa leve strane sekventa. Račun sekvenata je razvijen kao pomoćno sredstvo za analizu svojstava prirodne dedukcije, ali se pokazalo da je i sam za sebe veoma interesantan i značajan. Sama definicija sekventa u računu sekvenata je šira nego u prirodnoj dedukciji, jer dopušta da se sa desne strane javi više od jedne formule. Značenje sekventa $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1, \ldots, B_n$ je da bar jedna od formula B_1 do B_n važi ako važe sve pretpostavke A_1 do A_m. Ovaj sekvent je ekvivalentan sekventu $\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$ – jedan se može dokazati u računu sekvenata akko i samo ako se može dokazati drugi.

Dakle, sa leve strane podrazumevamo određenu konjunkciju, a sa desne strane disjunkciju formula. Ovo proširenje definicije sekventa omogućava da se formuliše sistem pravila koji je mnogo simetričniji i uniformniji nego u slučaju prirodne dedukcije. Takav sistem može biti pogodniji za teorijske analize dokaza i dokazivosti i za automatsko rezonovanje, ali je za razliku od prirodne dedukcije, prilično drugačiji od uobičajenog matematičkog rezonovanja.

Računom sekvenata se nećemo detaljno baviti, a ilustracije radi, prikažimo samo nekoliko osnovnih pravila.

Konjunkcija:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\,(\wedge R)$$

Disjunkcija:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,(\vee L) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\,(\vee R)$$

Primetimo kako su, za razliku od prirodne dedukcije gde su pravila za konjunkciju i disjunkciju prilično različita, u računu sekvenata ova pravila praktično dualna.

Kako bi se dokazi zapisani u prirodnoj dedukciji mogli jednostavnije transformisati u dokaze u računu sekvenata, uvedno je *pravilo sečenja (cut rule)*.

Sečenje (cut):

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', A \qquad \Gamma'', A \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \Delta''}\,(\text{cut})$$

Problem sa pravilom sečenja je pronalaženje formule A (tzv. leme) koja ne mora da se javlja u sklopu donjeg sekventa koji se dokazuje. Kao i u tradicionalnoj matematici, dokazi se korišćenjem lema mogu značajno skratiti, ali pronalaženje pogodnih lema predstavlja izazov.

Gencen je dokazao kao svoj glavni rezultat (Hauptsatz) da se sečenje može ukloniti i da se svaki dokaz sa sečenjem može transformisati u dokaz bez korišćenja sečenja. Dakle, i bez pravila sečenja (ali uz bar jedno klasično pravilo) račun sekvenata je saglasan i potpun.

U nastavku se nećemo dalje baviti računom sekvenata.

2.4 Logika prvog reda

2.4.1 Sintaksa

Predikatska logika prvog reda je naznačajniji sistem formalnog zapisa tradicionalne matematike. Uveo ga je Frege pred kraj 19. veka i od tada se tradicionalno koristi za formalizaciju matematičkih teorija (geometrije, teorije skupova, analize, algebre, ...).

Za razliku od iskazne logike u kojoj su jedini nelogički simboli iskazi, u zapisu formula logike prvog reda koriste se *funkcijski simboli* i *relacijski simboli*. Funkcijski simboli arnosti 0 se nekada nazivaju i simbolima konstanti, dok relacijski simboli arnosti 0 odgovaraju simbolima iskaza iz iskazne logike.

Termovi se grade rekurzivno, primenom funkcijskih simbola na *promenljive* i *konstantne simbole* (doduše, i oni se mogu smatrati funkcijskim simbolima, pa se često ne ističu zasebno). Funkcijski simboli u termovima se mogu zapisivati prefiksno (npr. $f(x)$ ili $-x$), ali i infiksno (npr. $x + 2$). Dubina termova nije ograničena (npr. $f(x + g(y, 0))$ je ispravan term dubine 3).

Primenom relacijskih simbola na termove dobijaju se *atomičke formule*.

Jednakost.

Višesortna logika prvog reda.

2.4.2 Semantika

2.4.3 Dedukcija

2.5 Logika višeg reda

2.5.1 Sintaksa

2.5.2 Semantika

2.5.3 Dedukcija

1. Kakav je odnos formule

$$\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$$

   i formule

$$(\forall x)(x \neq 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 0)?$$

2. Šta se može reći za formulu?

$$(\forall x)(\exists y)(P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists f)(\forall x)(P(x, f(x))$$

3. Kakav je logički status reči ,,otac" u narednim rečenicama?

   - Pera je postao otac.
   - Pera je Jelenin otac.
   - Perin otac je visok.