1. Element $a_{i,j}$ matrike $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, na mestu (i, j), $i, j = 1, 2, \ldots, n$, je podan z

$$a_{i,j} = \begin{cases} -2i; & i = j \\ n-i; & j = i+1 \\ n-j; & i = j+1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}.$$

   (a) V Matlabu pripravite funkcijo, ki za dani n vrne matriko $\boldsymbol{A}$. Pomagate si lahko s funkcijo `diag`.

   (b) Za izbran n z uporabo funkcije `norm` izračunajte $\|\boldsymbol{A}\|_2$. Preverite, da dobljena vrednost ustreza korenu največje lastne vrednosti matrike $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ (funkcija `eig`) oziroma največji singularni vrednosti matrike $\boldsymbol{A}$ (ukaz `svd`).

   (c) Z uporabo funkcije `norm` izračunajte $\|\boldsymbol{A}\|_1$, $\|\boldsymbol{A}\|_\infty$, $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$, $N_\infty(\boldsymbol{A})$ in na podlagi ocen

   - $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_F$,
   - $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{A}\|_\infty$,
   - $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\boldsymbol{A}\|_1$,
   - $N_\infty(\boldsymbol{A}) \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le nN_\infty(\boldsymbol{A})$,
   - $\|\boldsymbol{A}\|_2 \le \sqrt{\|\boldsymbol{A}\|_1\,\|\boldsymbol{A}\|_\infty}$

   karseda natančno omejite $\|\boldsymbol{A}\|_2$.

   (d) Primerjajte čase računanja norm matrike $\boldsymbol{A}$ iz točk (b) in (c) za $n = 1000$.

   (e) Zamenjajte funkcijo za konstrukcijo matrike $\boldsymbol{A}$ s funkcijo, ki kot rezultat vrne matriko v razpršeni obliki. Pomagajte si z ukazom `spdiags`. Raziščite omejitve funkcije `norm` pri računanju norme matrike, podane v razpršeni obliki, in si oglejte še funkcijo `normest`.

2. Polinom $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ stopnje $n \in \mathbb{N}_0$, ki se s funkcijo f ujema v paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$, je določen z rešitvijo sistema linearnih enačb

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f},$$

   kjer je

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left[x_i^j\right]_{i,j=0}^n = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

   Vandermondova matrika, $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vektor koeficientov polinoma p, vektor $\boldsymbol{f} = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$ pa vsebuje vrednosti funkcije f v točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (a) V Matlabu z uporabo funkcije `cond` izračunajte spektralno občutljivost Vandermondove matrike $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$, ki jo lahko konstruirate s pomočjo funkcije `vander`. Preverite, da izračunana vrednost ustreza kvocientu med največjo in najmanjšo singularno vrednostjo matrike $\boldsymbol{V}$ (z ukazom `open cond` si lahko tudi ogledate, kako je implementirana funkcija `cond`).

(b) Izračunajte spektralne občutljivosti matrik $\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{V}_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ za $x_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$, za $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ in jih narišite na grafu v odvisnosti od n v logaritemski skali (ukaz `semilogy`).

(c) Naj bo $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Polinom p stopnje 5, ki se v točkah $0, 1/5, \ldots, 1$ ujema s funkcijo f, je kar f, saj je funkcija polinom stopnje 5. Preverite, da v Matlabu z reševanjem sistema $\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$ (funkcija `linsolve` ali operator \) ne dobimo povsem takega rezultata (oglejte si normo $\|\boldsymbol{a} - \widehat{\boldsymbol{a}}\|_2$, kjer $\widehat{\boldsymbol{a}}$ označuje izračunano rešitev sistema).