

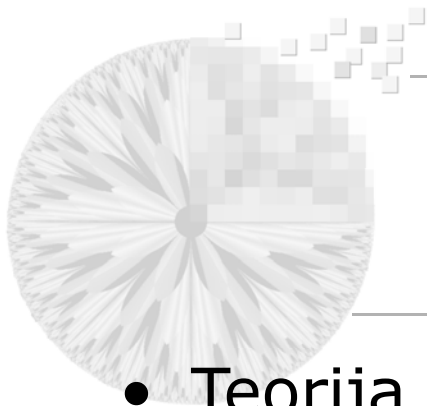
MORFOLOŠKA OBRAĐA SLIKE

POGLAVLJE 8



MATEMATIČKA MORFOLOGIJA

- Morfologija
 - Grana biologije koja se bavi oblicima i strukturama biljaka i životinja
- Matematička morfologija
 - Metoda izdvajanja komponenata slike u cilju opisivanja i reprezentacije regiona slike, kao i drugi postupci nastali na ovaj način: filtriranje, orezivanje i stanjivanje
- Teorija skupova je osnov matematičke morfologije
 - Skupovi predstavljaju objekte u slici
 - U binarnoj slici skupovi su podskupovi prostora \mathbf{Z}^2 , a članovi su 2D vektori sa koordinatama (x,y)
 - U sivoj slici skupovi su podskupovi prostora \mathbf{Z}^3 , a članovi su 3D vektori sa koordinatama (x,y,z)



OSNOVI MORFOLOGIJE

- Teorija skupova

- Element skupa
- Podskup skupa
- Unija i presek
- Komplement skupa

$$A^c = \{w | w \notin A\}$$

- Razlika skupova

$$A - B = \{w | w \in A, w \notin B\} = A \cap B^c$$

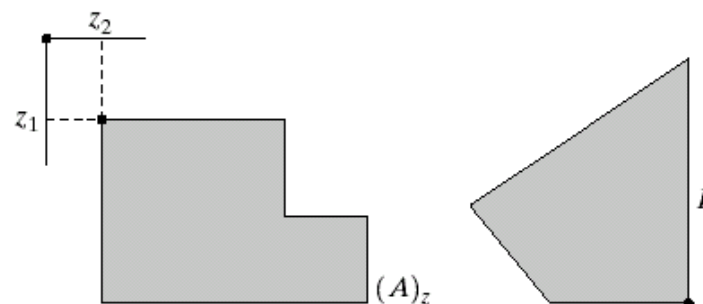
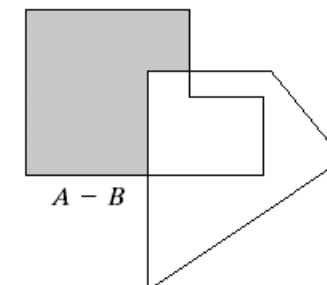
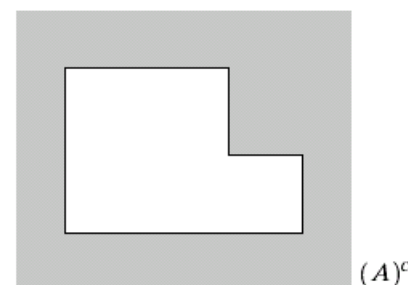
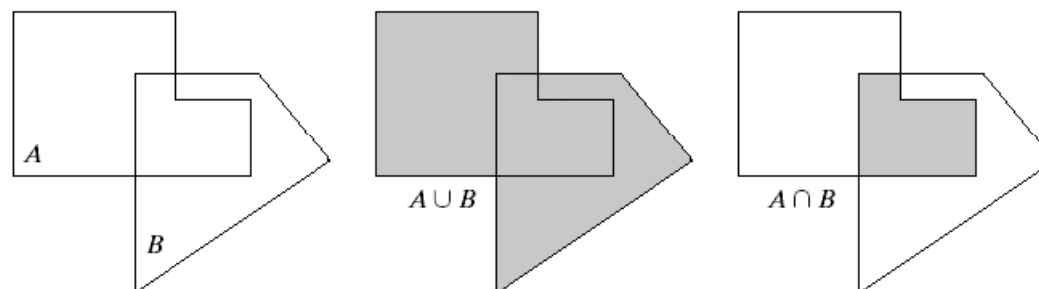
- Refleksija skupa

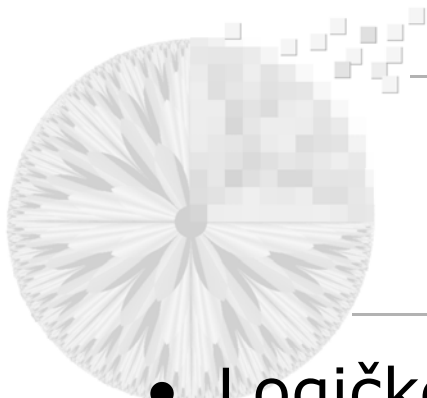
$$B = \{w | w = -b, b \in B\}$$

- Translacija skupa

$$(A)_z = \{c | c = a + z, a \in A\}, z = (z_1, z_2)$$

- Crna tačka označava koordinatni početak

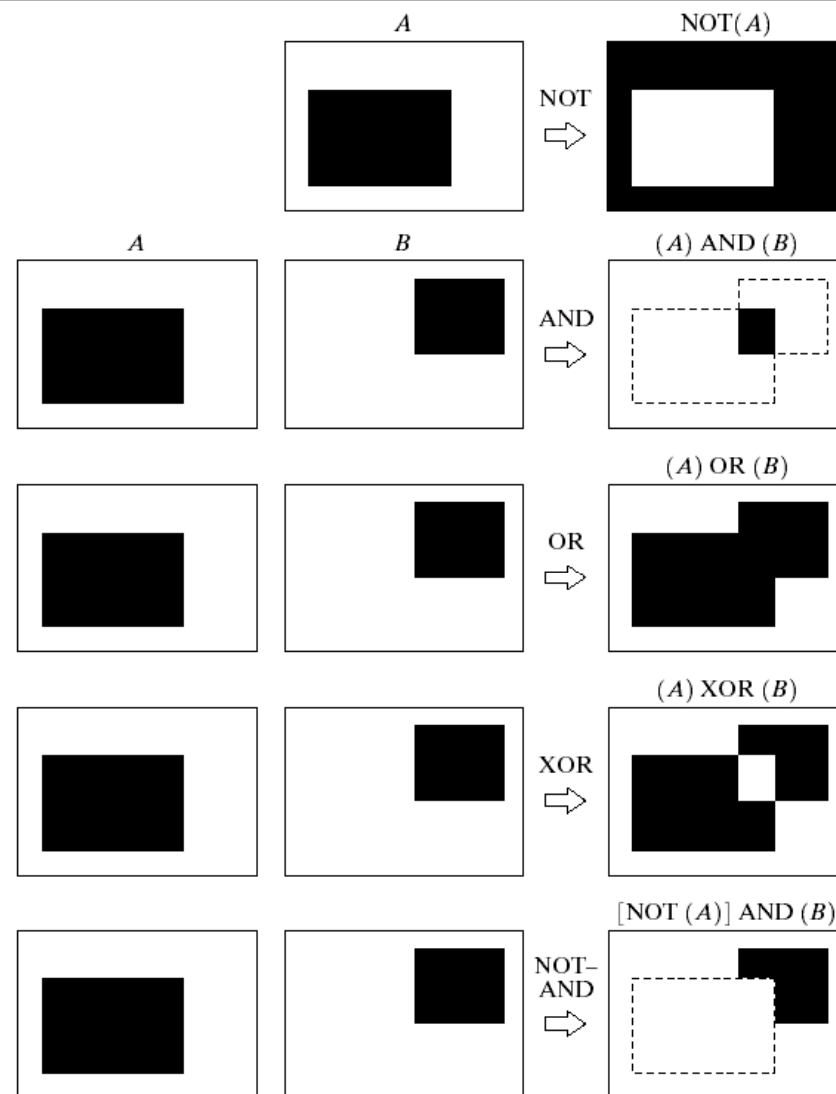




OSNOVI MORFOLOGIJE

- Logičke operacije
 - Definisane između datih piksela binarnih slika
 - Omogućavaju realizaciju morfoloških operacija
 - Tri osnovne: AND, OR, NOT
 - Bilo koja logička operacija može se realizovati pomoću ove tri

p	q	$p \text{ AND } q \text{ (also } p \cdot q)$	$p \text{ OR } q \text{ (also } p + q)$	$\text{NOT } (p) \text{ (also } \bar{p})$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0





MORFOLOŠKE OPERACIJE

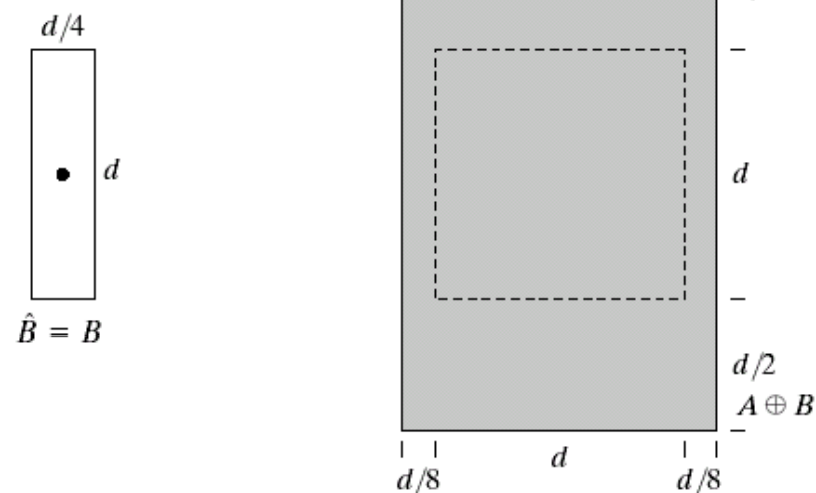
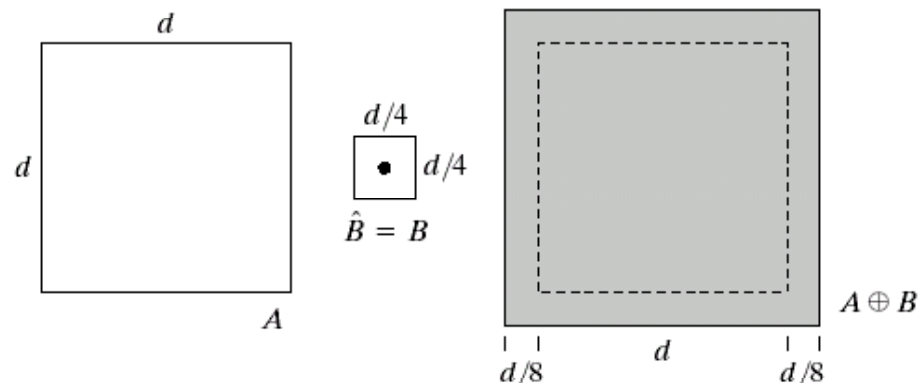
- Dilatacija (*dilation*)

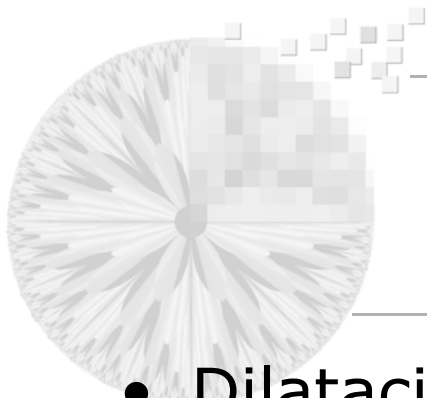
$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

- Rezultat je skup svih z za koje refleksija B oko koordinatnog početka, pomeren za z ima presek sa A

- Iako su morfološke operacije zasnovane na skupovima, ovako se ostvaruje analogija sa konvolucijom

- B je **strukturni element** koji definiše operaciju proširenja objekta

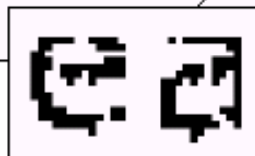




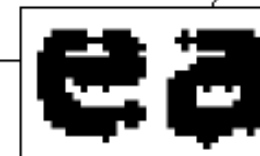
MORFOLOŠKE OPERACIJE

- Dilatacija – primer povezivanja prekida (*bridging gaps*)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



-Najveći prekid u okviru jednog karaktera je 2 piksela, pa će dati strukturni element izvršiti povezivanje.

-Za razliku od ublažavanja, morfološka obrada radi direktno na binarnoj slici.

0	1	0
1	1	1
0	1	0



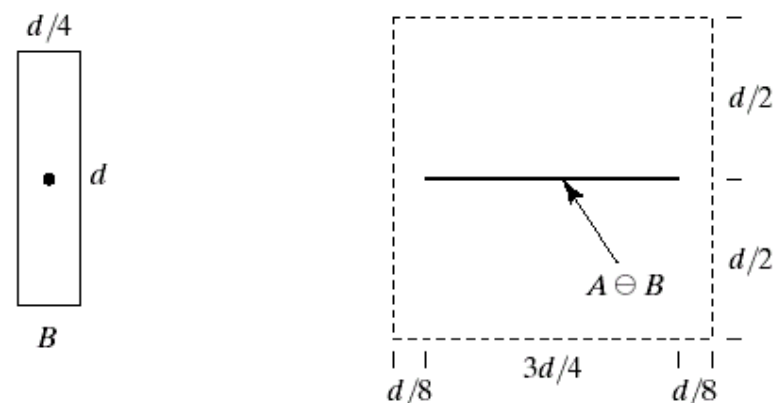
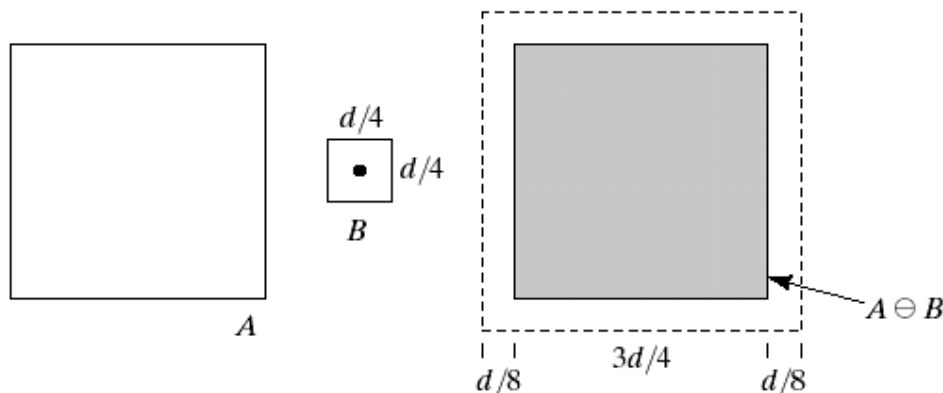
MORFOLOŠKE OPERACIJE

- Erozija (*erosion*)

$$A \ominus B = \{z | (\hat{B})_z \subseteq A\}$$

- Rezultat je skup svih z za koje je refleksija B oko koordinatnog početka, pomeren za z podskup od A
- B je **strukturni element** koji definiše sužavanje objekta
- Erozijska i dilatacijska su duali u odnosu na komplement i refleksiju

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

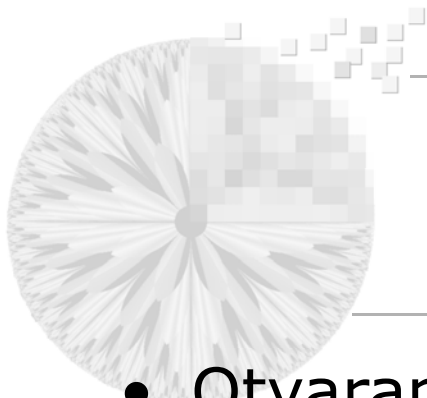




MORFOLOŠKE OPERACIJE

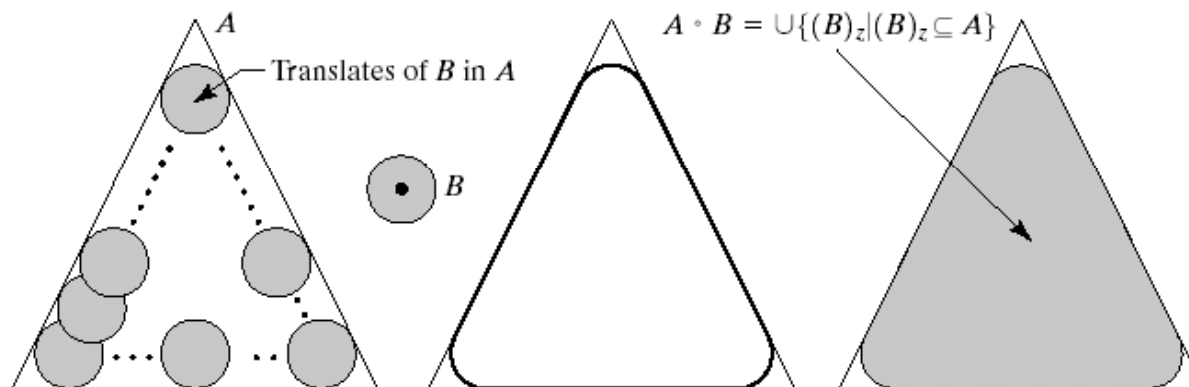
- Sukcesivna erozija i dilatacija koriste se za eliminaciju malih objekata su binarnoj slici
 - Slika sadrži kvadrante stranica 1, 3, 5, 7, 9 i 15 piksela
 - Erozijom sa kvadratnim strukturnim elementom 13×13 piksela nestaju svi objekti manji od strukturnog elementa
 - Dilatacijom sa istim strukturnim elementom restauriraju se dovoljno veliki objekti – ova restauracija nije jednoznačna



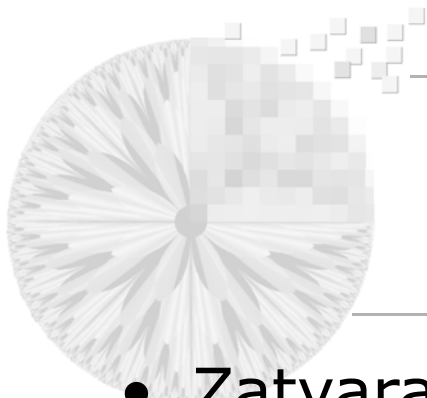


MORFOLOŠKE OPERACIJE

- Otvaranje $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$
 - Ublažava konturu objekta, ukida tanke veze između delova objekta i eliminiše male oštre delove objekta
 - Otvaranje kružnim strukturnim elementom predstavlja skup tačaka koje dodiruje element upisan u objekat



- Osobine otvaranja:
 1. $(A \circ B) \subseteq A$,
 2. $C \subseteq D \Rightarrow (C \circ B) \subseteq (D \circ B)$,
 3. $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

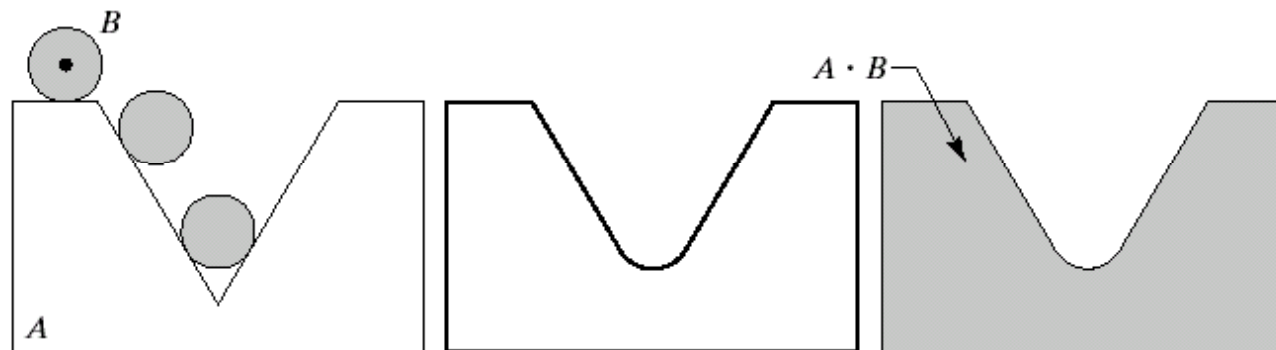


MORFOLOŠKE OPERACIJE

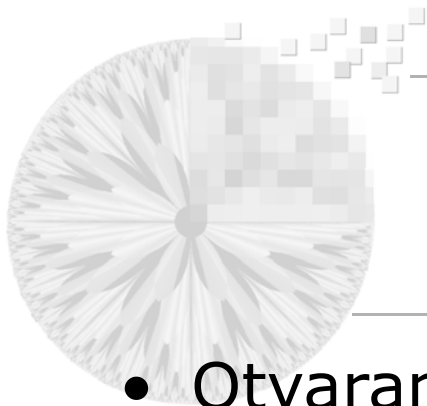
- Zatvaranje

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- Ublažava konturu objekta, stapa uske prekide i duge tanke uvale, eliminiše male rupe i popunjava procepe u konturi
- Otvaranje kružnim strukturnim elementom predstavlja skup tačaka koje dodiruje element kada klizi oko objekta



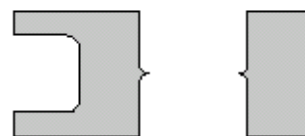
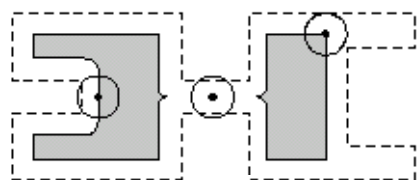
- Osobine zatvaranja:
 1. $A \subseteq (A \bullet B)$,
 2. $C \subseteq D \Rightarrow (C \bullet B) \subseteq (D \bullet B)$,
 3. $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$



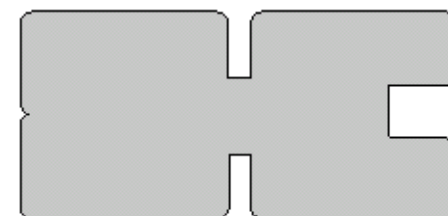
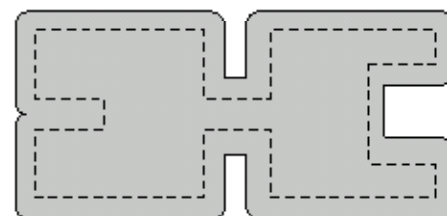
MORFOLOŠKE OPERACIJE

• Otvaranje

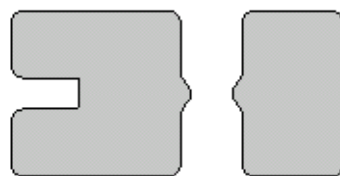
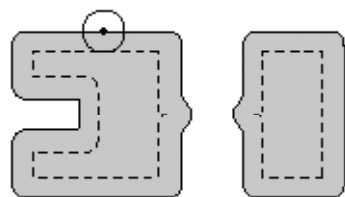
- Erozijom se prekida veza koja je manja od strukturnog elementa
- Usled oblika strukturnog elementa, zaobljuju se ćoškovi orijentisani ka spoljašnjosti i eliminišu se delovi oblika manji od strukturnog elementa



$$A \ominus B$$



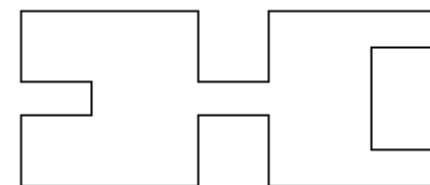
$$A \oplus B$$



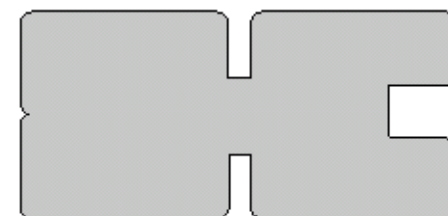
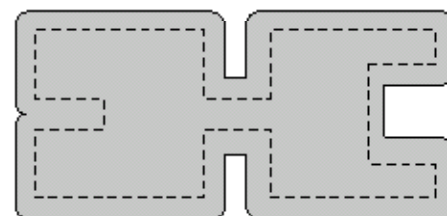
$$A \bullet B = (A \ominus B) \oplus B$$

• Zatvaranje

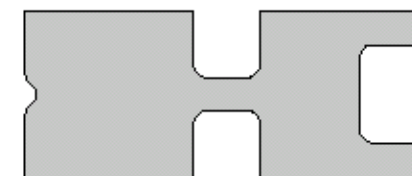
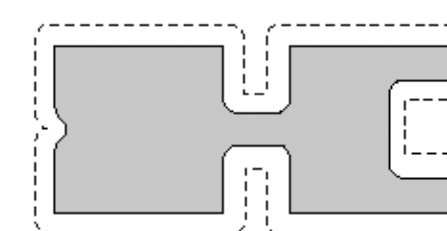
- Zaobljuju se ćoškovi orijentisani ka unutrašnjosti i popunjavaju šupljine manje od str. elementa



$$A$$



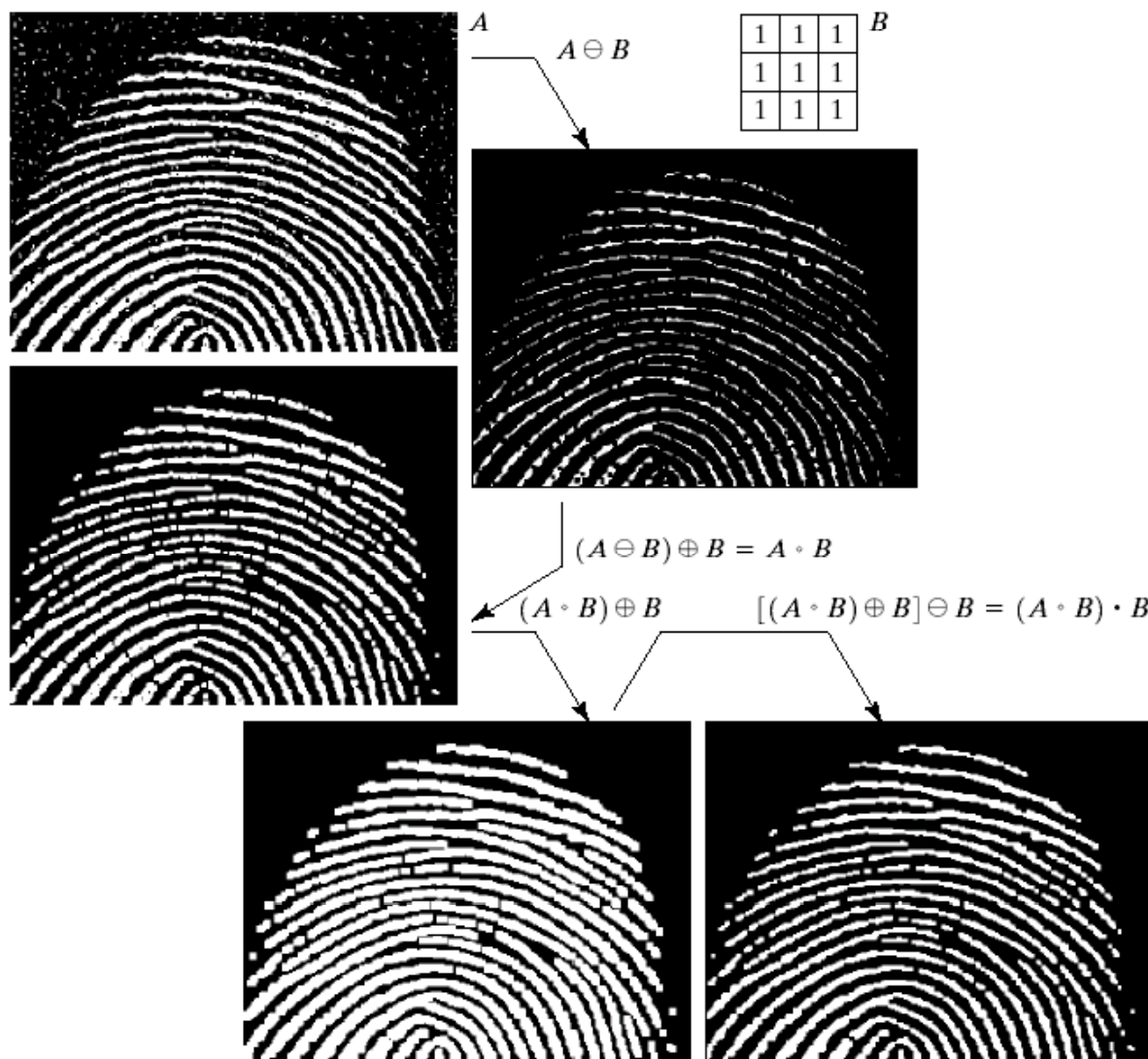
$$A \oplus B$$

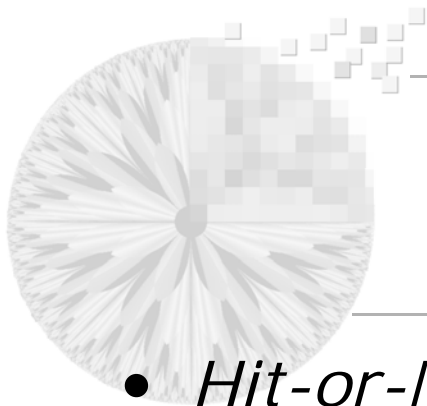


$$A \blacklozenge B = (A \oplus B) \ominus B$$

MORFOLOŠKE OPERACIJE

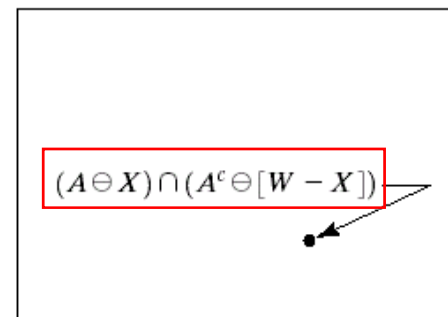
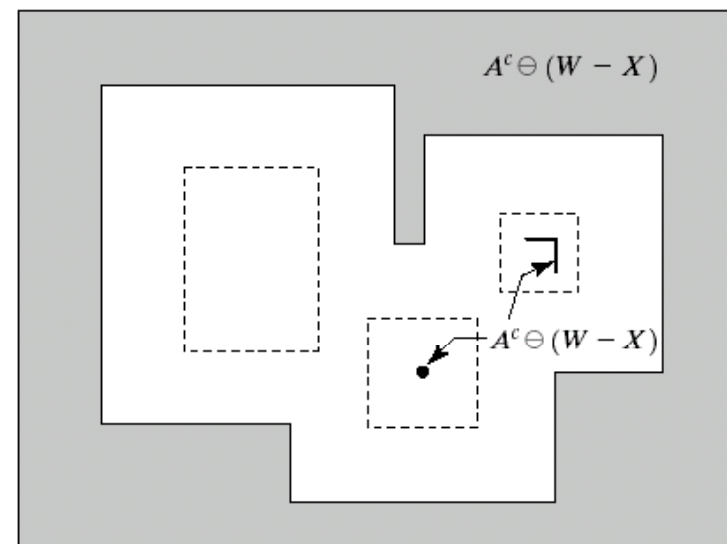
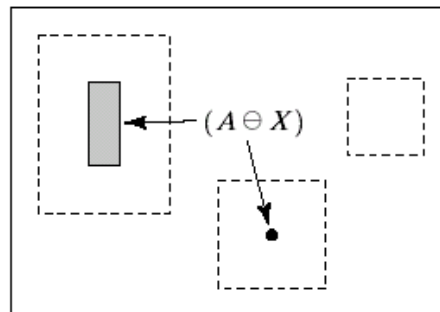
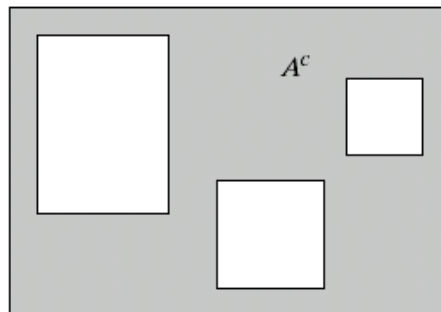
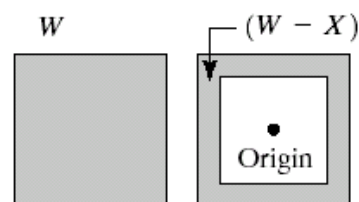
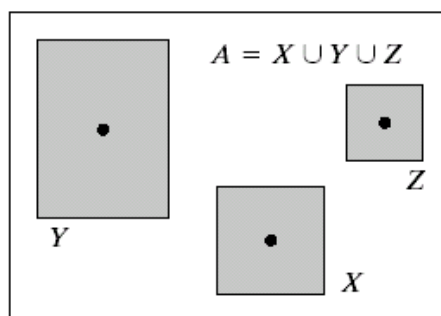
- Otvaranje i zatvaranje
 - Cilj je uklanjanje šuma iz slike otiska prsta, koji se ogleda u belim tačkama na crnoj podlozi i crnim tačkama na belo
 - Nakon otvaranja i zatvaranja dobija kao rezultat se dobija slika bez šuma u kojoj su neke linije otiska prekinute usled erozije





MORFOLOŠKI ALGORITMI

- *Hit-or-Miss* transformacija (pogodi-ili-promaši)
 - Omogućava detekciju izolovanog objekta određenog oblika
(objekat X iz skupa A ima oko sebe pozadinu W koja ga razdvaja od ostalih objekata u skupu A i koje je veća od objekta X za barem jedan piksel)
 - Ukoliko objekti nisu izolovani, zводи se obična erozija ($A \ominus X$)





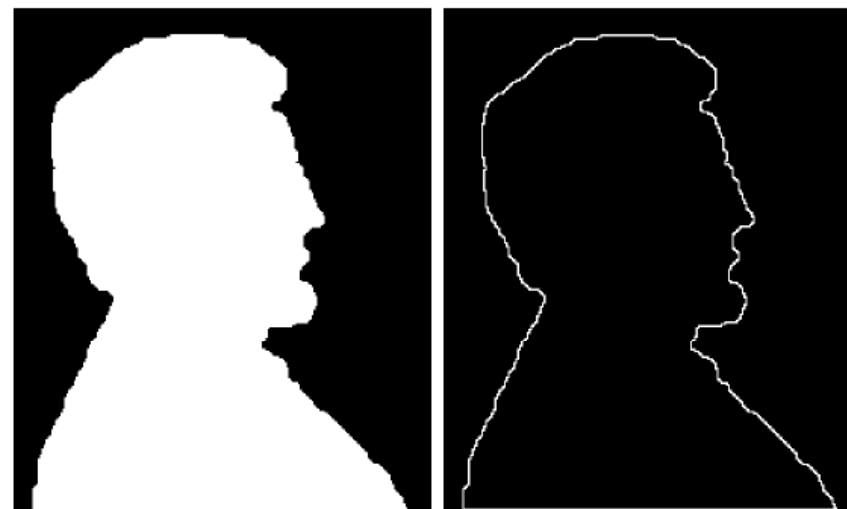
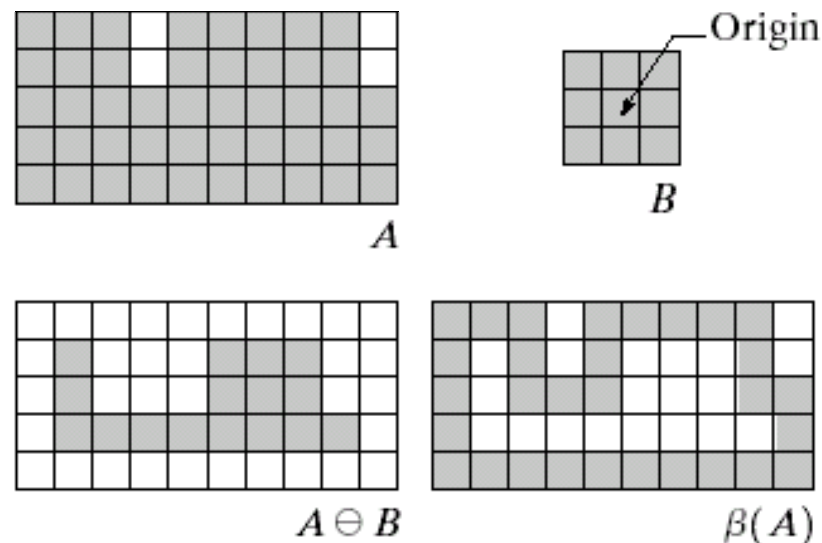
MORFOLOŠKI ALGORITMI

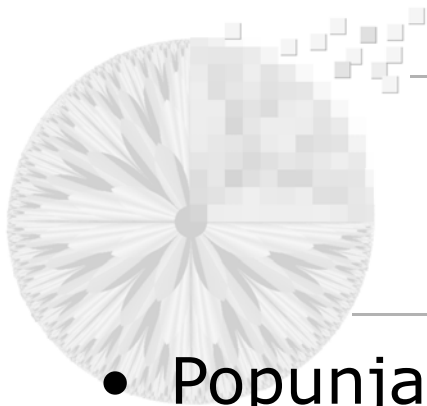
- Izdvajanje granice objekta (*Boundary extraction*)

- Granica skupa A dobija se oduzimanjem istog skupa nakon erozije strukturnim elementom B

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

- Debljina izdvojene granice zavisi od izbora strukturnog elementa u eroziji:
3×3 – 1 piksel,
5×5 – 2-3 piksela



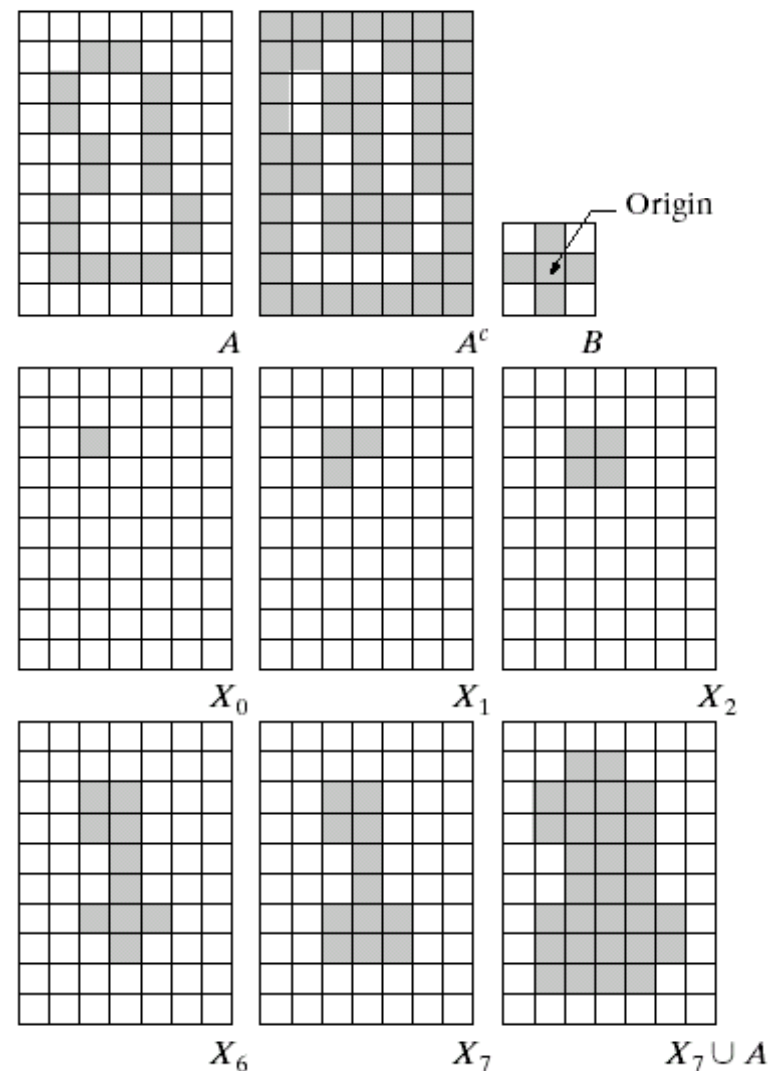


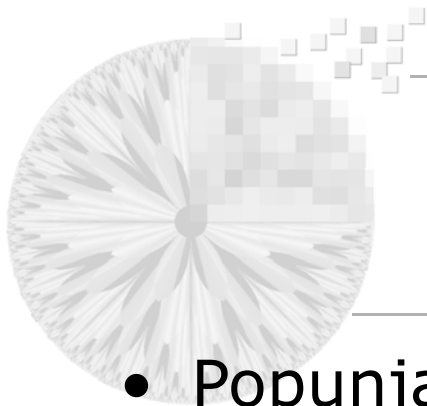
MORFOLOŠKI ALGORITMI

- Popunjavanje (*filling*) regiona
 - Počevši od jedne tačke unutar regiona, dilatacijom strukturnim elementom u obliku krsta (4-susedi), čitav se region iterativno popunjava jedinicama u skladu sa izrazom

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

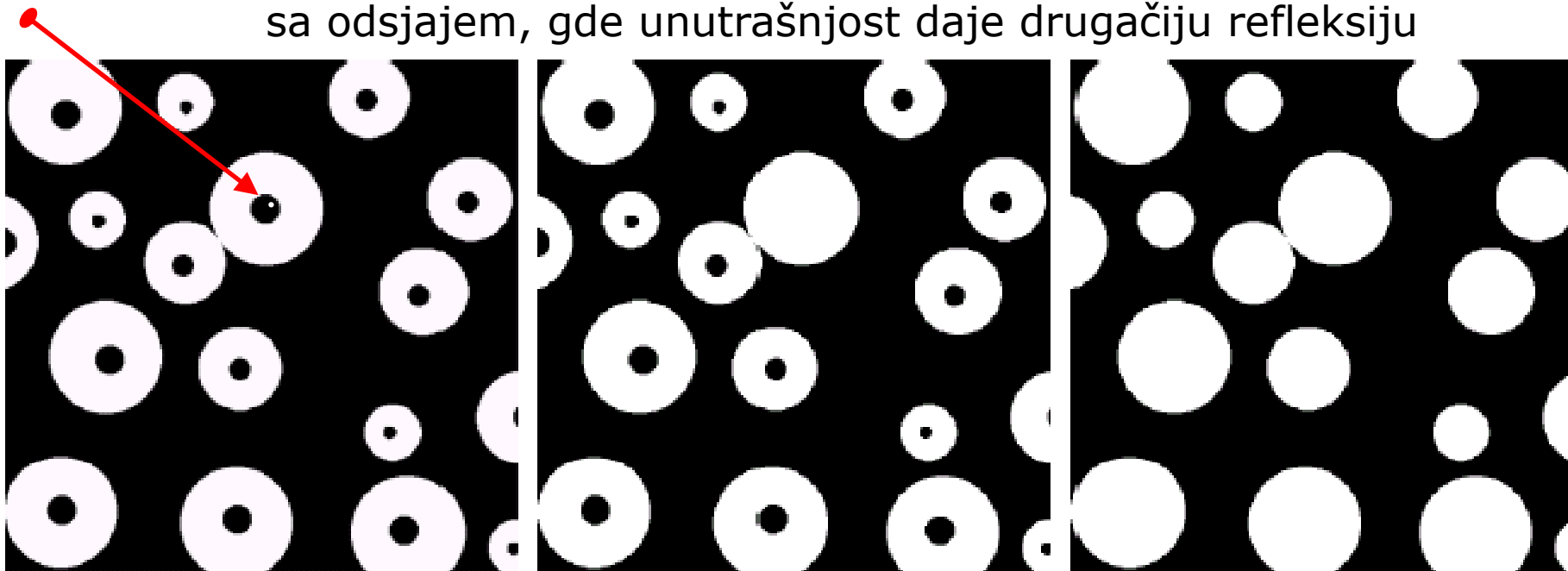
- Presek sa A^c zadržava dilataciju u okviru granica regiona
- Proces se zaustavlja kada se između dve iteracije više ne javljaju razlike: $X_k = X_{k-1}$
- Unija unutrašnjosti regiona sa granicom daje popunjen region

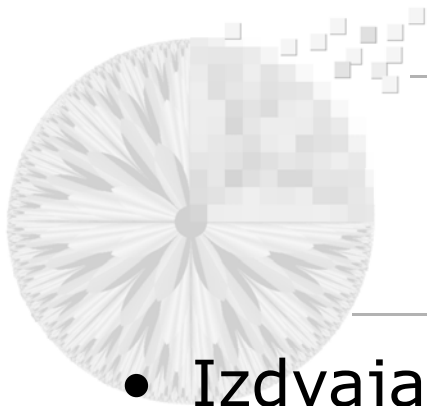




MORFOLOŠKI ALGORITMI

- Popunjavanje regiona
 - Počevši od označene tačke u okviru jednog kružnog regiona izvršeno je njegovo popunjavanje
 - Na sličan način popunjeni su i ostali regioni
 - Ovakva slika može nastati poređenjem sa pragom slike sfera sa odsjajem, gde unutrašnjost daje drugačiju refleksiju

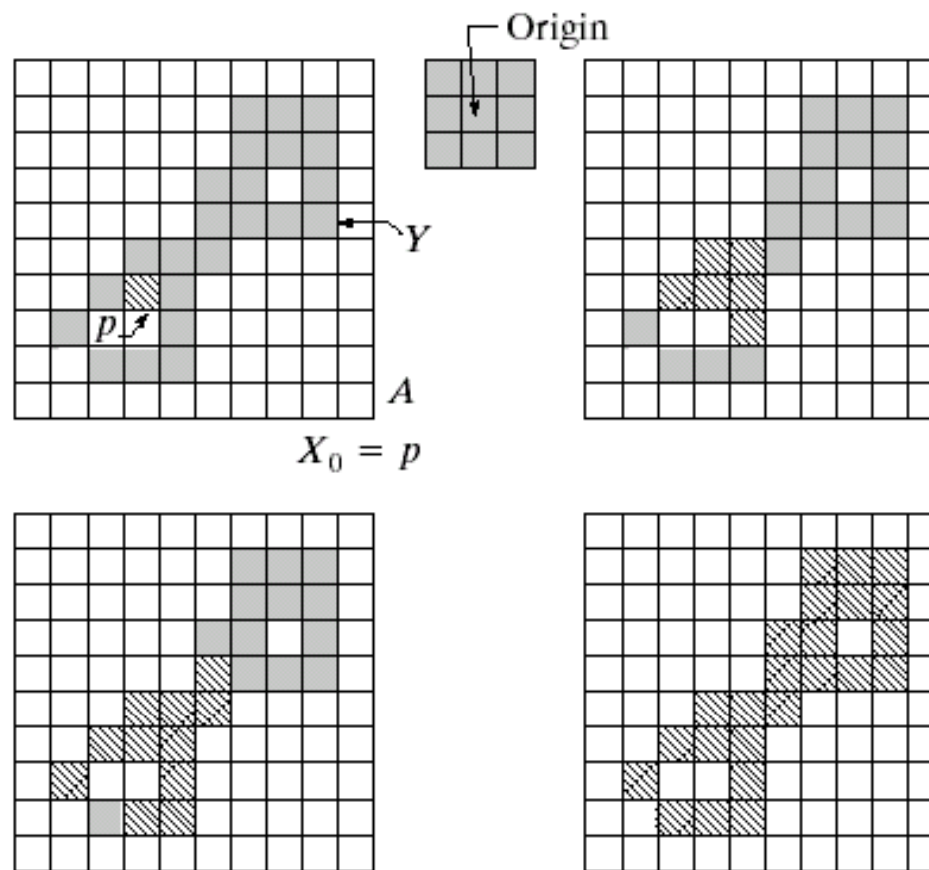


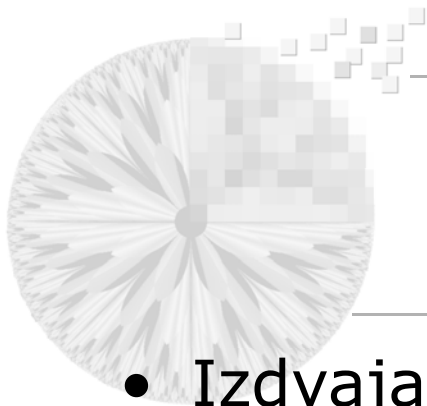


MORFOLOŠKI ALGORITMI

- Izdvajanje povezanih komponenti
 - Ako je Y povezana komponenta u skupu A , iterativna dilatacija (koja počinje od jedne tačke p koja pripada Y) i presek sa A , izdvajaju čitavu komponentu Y
 - Algoritam se zaustavlja kada se između dve iteracije više ne javljaju razlike: $X_k = X_{k-1}$
 - Inicijalni korak algoritma, prva i druga iteracija, i konačni rezultat →

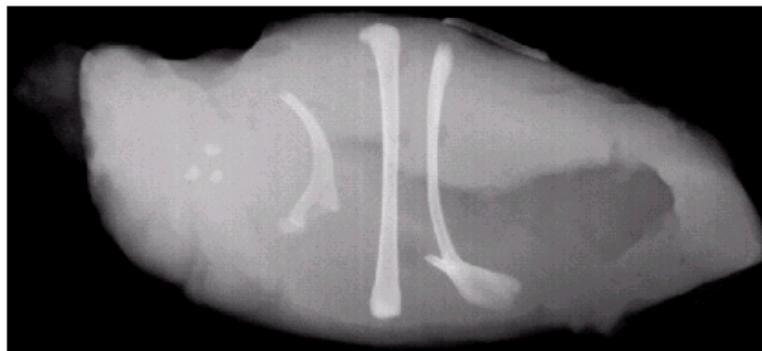
$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$





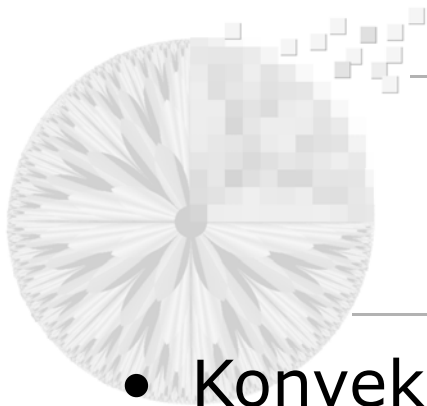
MORFOLOŠKI ALGORITMI

- Izdvajanje povezanih komponenti
 - Rentgen otkrivanje prisustva kostiju u mesu pri pakovanju
 - Poredjenjem sa pragom dobija se binarna slika
 - Erozijom sa strukt. elementom od 5×5 piksela eliminišu se manji objekti
 - Lista povezanih komponenti sadrži velike objekte



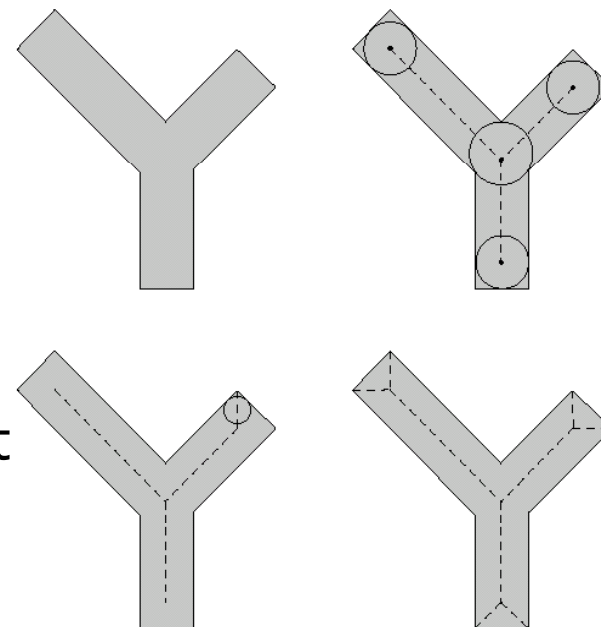
Velike povezane komponente u listi ukazuju na prisustvo stranih objekata - kosti u mesu (belo pileće)

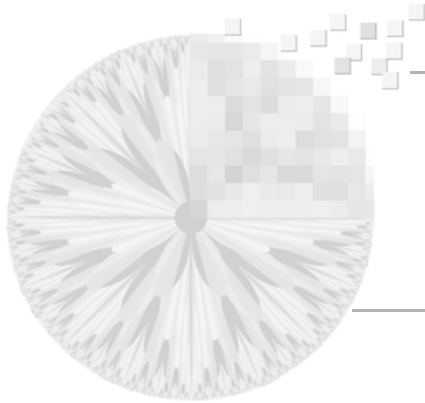
Connected component	No. of pixels in connected comp
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85



MORFOLOŠKI ALGORITMI...

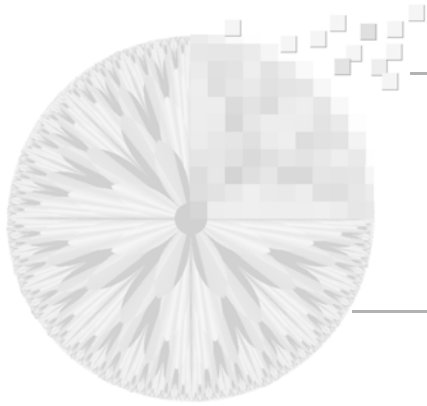
- Konveksni omotač (*Convex Hull*)
 - Najmanji konveksni skup H koji sadrži dati skup S
- Stanjivanje (*Thinning*)
 - Eliminacija piksela u objektu dok se ne svede na debljinu 1
- Podebljavanje (*Thickening*)
 - Dodavanje piksela objektu dok se ne ispuni dati skup, uz očuvanje konture
- Skeletizacija →
 - Reprezentacija objekta linijskom strukturom debljine 1, definisanom preko centra diska upisanog u objekat
- Orezivanje (*Prunning*)
 - Ukidanje malih delova skeleta





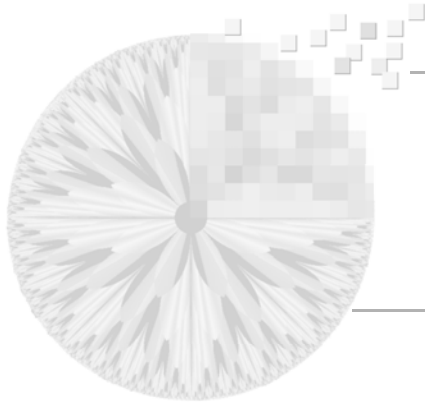
MORFOLOŠKI ALGORITMI

		Comments (The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).
Operation	Equation	
Translation	$(A)_z = \{w w = a + z, \text{ for } a \in A\}$	Translates the origin of A to point z .
Reflection	$\hat{B} = \{w w = -b, \text{ for } b \in B\}$	Reflects all elements of B about the origin of this set.
Complement	$A^c = \{w w \notin A\}$	Set of points not in A .
Difference	$A - B = \{w w \in A, w \notin B\}$ $= A \cap B^c$	Set of points that belong to A but not to B .
Dilation	$A \oplus B = \{z (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	“Expands” the boundary of A . (I)
Erosion	$A \ominus B = \{z (B)_z \subseteq A\}$	“Contracts” the boundary of A . (I)
Opening	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	Smooths contours, breaks narrow isthmuses, and eliminates small islands and sharp peaks. (I)
Closing	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	Smooths contours, fuses narrow breaks and long thin gulfs, and eliminates small holes. (I)



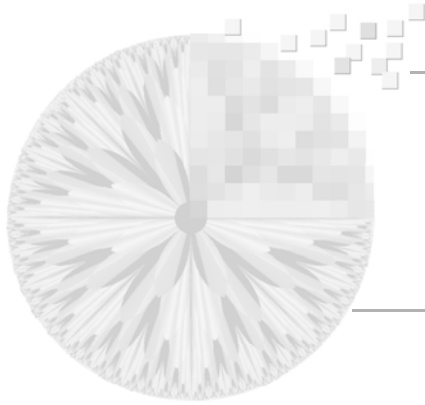
MORFOLOŠKI ALGORITMI

Hit-or-miss transform	$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$ $= (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$	The set of points (coordinates) at which, simultaneously, B_1 found a match (“hit”) in A and B_2 found a match in A^c .
Boundary extraction	$\beta(A) = A - (A \ominus B)$	Set of points on the boundary of set A . (I)
Region filling	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Fills a region in A , given a point p in the region. (II)
Connected components	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Finds a connected component Y in A , given a point p in Y . (I)
Convex hull	$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B^i) \cup A; i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, 3, \dots; X_0^i = A; \text{ and } D^i = X_{\text{conv}}^i$	Finds the convex hull $C(A)$ of set A , where “conv” indicates convergence in the sense that $X_k^i = X_{k-1}^i$. (III)



MORFOLOŠKI ALGORITMI

		Comments
		(The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).
Operation	Equation	
Thinning	$A \otimes B = A - (A \oplus B)$ $= A \cap (A \oplus B)^c$ $A \otimes \{B\} =$ $((\dots ((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n)$ $\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$	Thins set A . The first two equations give the basic definition of thinning. The last two equations denote thinning by a sequence of structuring elements. This method is normally used in practice. (IV)
Thickening	$A \odot B = A \cup (A \oplus B)$ $A \odot \{B\} =$ $((\dots (A \odot B^1) \odot B^2 \dots) \odot B^n)$	Thickens set A . (See preceding comments on sequences of structuring elements.) Uses IV with 0's and 1's reversed.



MORFOLOŠKI ALGORITMI

Skeletons	$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$ $S_k(A) = \bigcup_{k=0}^K \{ (A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B] \}$ <p>Reconstruction of A:</p> $A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$	<p>Finds the skeleton $S(A)$ of set A. The last equation indicates that A can be reconstructed from its skeleton subsets $S_k(A)$. In all three equations, K is the value of the iterative step after which the set A erodes to the empty set. The notation $(A \ominus kB)$ denotes the kth iteration of successive erosion of A by B. (I)</p>
Pruning	$X_1 = A \otimes \{B\}$ $X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \otimes B^k)$ $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$ $X_4 = X_1 \cup X_3$	<p>X_4 is the result of pruning set A. The number of times that the first equation is applied to obtain X_1 must be specified. Structuring elements V are used for the first two equations. In the third equation H denotes structuring element I.</p>

MORFOLOŠKA OBRADA SIVE SLIKE

- Dilatacija i erozija

- b i f su funkcije, a ne skupovi kao u slučaju binarne slike

- Definicije osnovnih pojmova prilagođene su funkcijama

$$(f \oplus b)(s, t) = \max \{f(s - x, t - y) + b(x, y) | (s - x), (t - y) \in D_f, (x, y) \in D_b\}$$

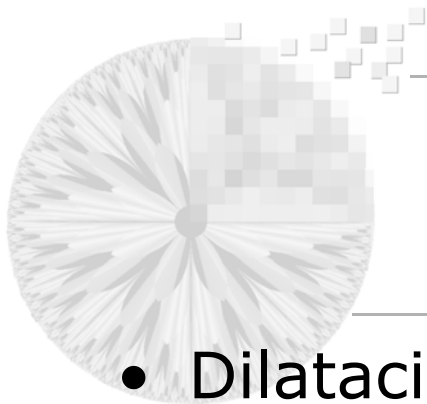
$$(f \ominus b)(s, t) = \min \{f(s + x, t + y) - b(x, y) | (s + x), (t + y) \in D_f, (x, y) \in D_b\}$$

Original

Dilatacija 5×5

Erozija 5×5

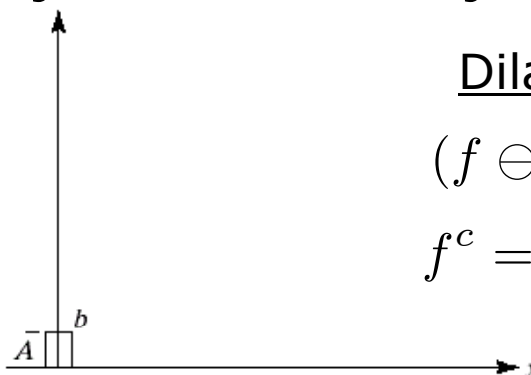
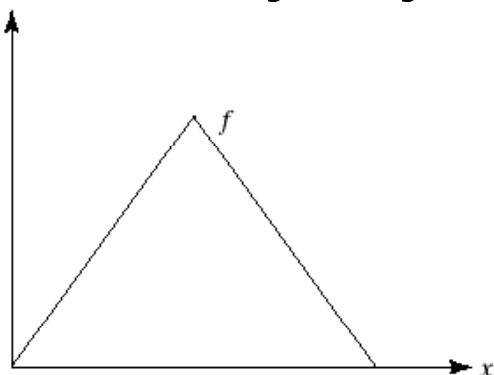




MORFOLOŠKA OBRADA SIVE SLIKE

- Dilatacija i erozija

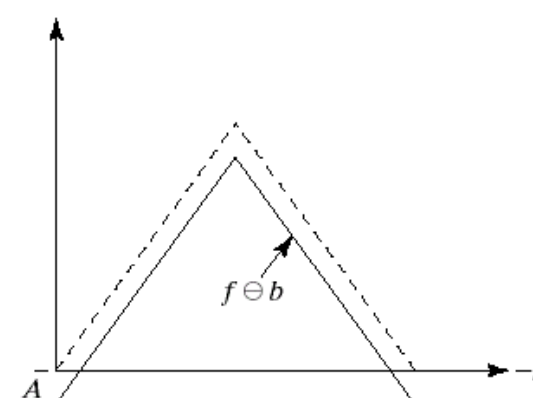
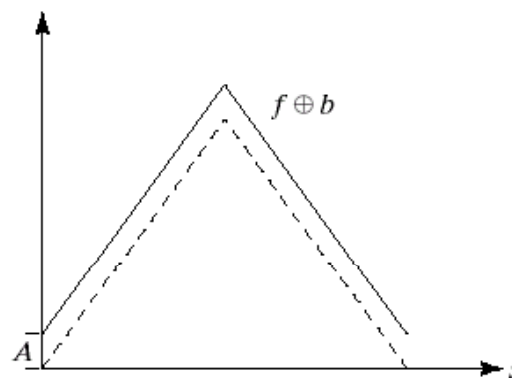
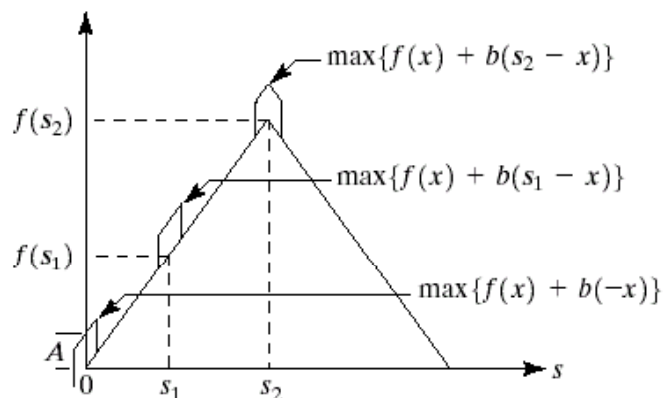
- Dilatacija daje svetliju sliku i redukuje tamne detalje (*max*)
- Erozija daje tamniju sliku i redukuje svetle detalje (*min*)

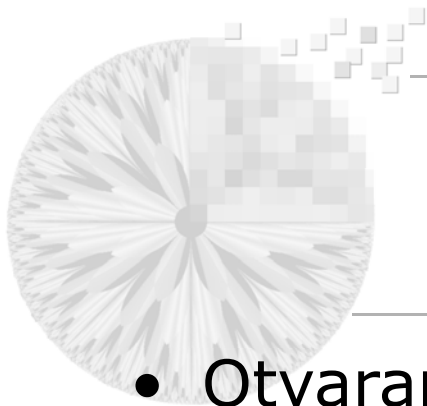


Dilatacija i erozija su duali

$$(f \ominus b)^c(s, t) = (f^c \oplus \hat{b})(s, t),$$

$$f^c = -f(x, y), \quad \hat{b} = b(-x, -y)$$





MORFOLOŠKA OBRADA SIVE SLIKE

- Otvaranje i zatvaranje

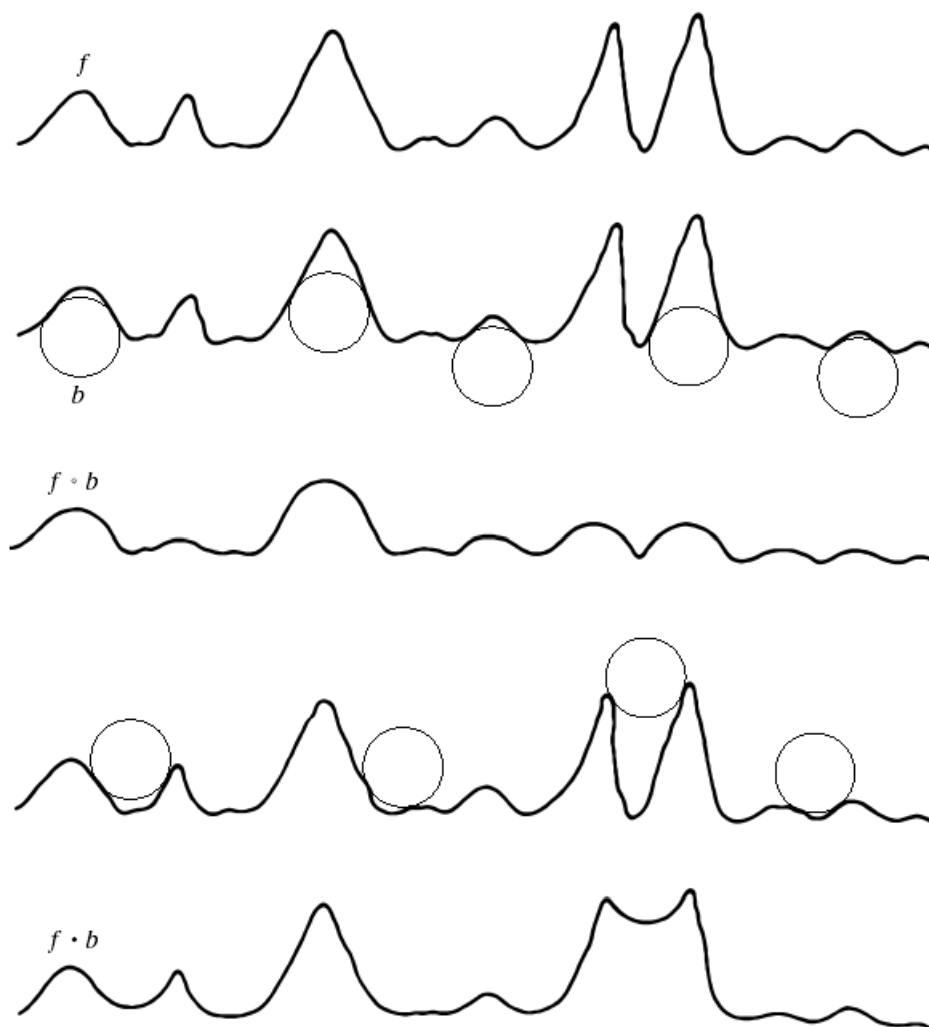
- Definicije su analogne onima za binarnu sliku

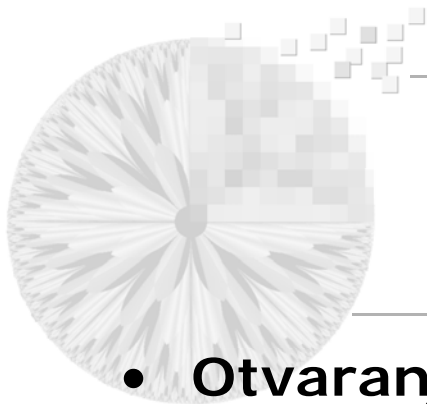
$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b,$$

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b,$$

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$$

- Dualne operacije
- 3D interpretacija sa sfernim strukturnim elementom:
- Dilatacija je skup najviših tačaka sfere pri prolasku ispod 3D površi
- Eroziija je skup najnižih tačaka sfere pri prolasku preko 3D površi





MORFOLOŠKA OBRADA SIVE SLIKE

- **Otvaranje** ukida male svetle detalje i čuva osvetljaj slike (Erozija ukida svetle detalje i potamnjuje sliku, a dilatacija vraća ukupni osvetljaj slike bez rekonstrukcije eliminisanih svetlih detalja)
- **Zatvaranje** ukida male tamne detalje i čuva osvetljaj slike (Dilatacija ukida tamne detalje i potamnjuje sliku, a erozija vraća ukupni osvetljaj slike bez rekonstrukcije eliminisanih tamnih detalja)

Original

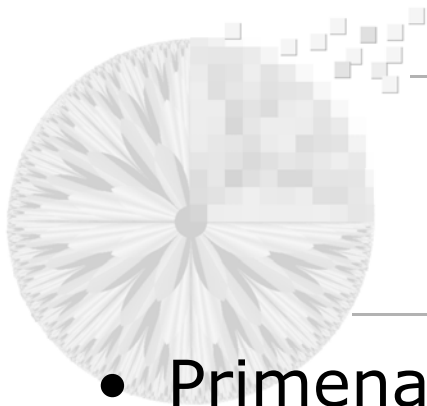


Otvaranje 5×5



Zatvaranje 5×5





MORFOLOŠKA OBRADA SIVE SLIKE

- Primena morfoloških operacija u sivoj slici

- Morfološko ublažavanje – otvaranje, pa potom zatvaranje

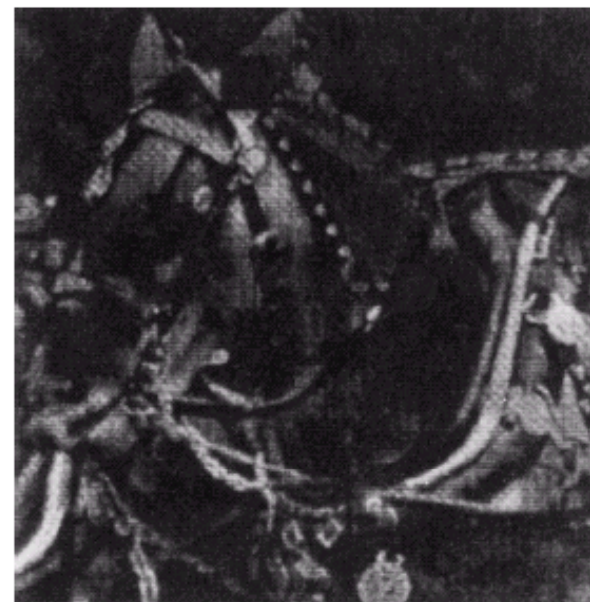
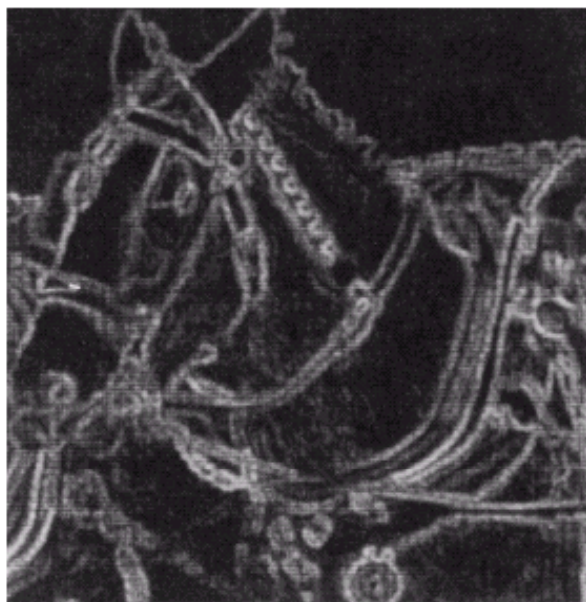
- Morfološki gradijent

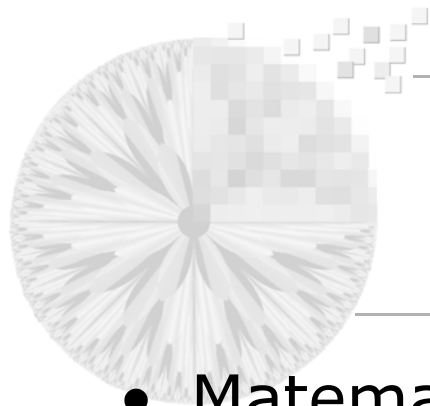
- Manje zavisi od orijentacije ivice
nego konvencionalni gradijent slike

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

- *Top-hat* transformacija

- Ujednačavanje osvetljaja slike





ZAKLJUČAK

- Matematička morfologija
 - Teorija skupova i logičke operacije
- Dilatacija i erozija
- Otvaranje i zatvaranje
- Morfološki algoritmi
 - *Hit-or-Miss* transformacija, izdvajanje granica i popunjavanje regiona, izdvajanje povezanih komponenti, konveksni omotač, stanjivanje i podebljavanje, skeletizacija, orezivanje
- Morfološka obrada sive slike
- Erozija i dilatacija, otvaranje i zatvaranje
 - Morfološko ublažavanje, gradijent i *top-hat* transformacija