



SYSTEMTHEORIE BAND I

**THEORIE UND ANALYSE
LINEARER ZEITINVARIANTER
SYSTEME**

03.08.2022

Milan Rother

VORWORT

Dieses Kurzschrift soll einen Einstieg und Überblick über die Verwendung der Laplacetransformation für die Analyse linearer zeitinvarianter Systeme und gewöhnlicher Differentialgleichungen liefern. Dabei werden elementare Begriffe der Systemtheorie, wie der Übertragungsfunktion, Stabilität, Stoßantwort und Sprungantwort motiviert und eingeführt. Die vorgestellten Methoden ermöglichen die Analyse eines linearen Systems bezüglich seiner Stabilität, des transienten Einschwingverhaltens und des Frequenzverhaltens.

Die Konzepte werden dabei hauptsächlich anhand von Systemen mit einem Eingang und einem Ausgang, aber ohne Verlust der Allgemeingültigkeit behandelt. Einige der Herleitungen sind eher als Motivationen zu verstehen und nicht unbedingt als strenge Beweisvorschrift. Generell ging es mir bei der Erstellung dieses Kurzschriftes darum einige wichtige Konzepte der linearen Systemtheorie und die Nützlichkeit der Laplacetransformation gut nachvollziehbar herauszustellen. Besonders wichtig war mir dabei alle Folgerungen und Behauptungen auch durch Herleitungen zu stützen und dadurch zugänglicher zu machen. Die meisten Zwischenschritte sind daher bewusst – als Teil des Weges zum Verständnis – recht detailliert und hoffentlich dadurch nachvollziehbar dargestellt. Dieses Dokument wird im Laufe der Zeit immer weiter wachsen und ist noch lange nicht vollständig. Hinweise für eine bessere Formulierung und auf Fehler sind gerne gesehen.

Braunschweig, April 2021

Milan Rother

LESEANLEITUNG

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Beschreibung linearer zeitinvarianter Systeme im Zeitbereich und liefert damit sozusagen die grundlegende Struktur und die Notation des Systems, von der dann im weiteren Verlauf ausgegangen wird. Dann kommt ein allgemeines Kapitel zur Laplacetransformation, welches ziemlich losgelöst von den restlichen Kapiteln ist und eher als eine Art Nachschlagewerk angesehen werden kann. Es liefert wichtige Grundlagen und Herleitungen zur Laplacetransformation. Einige der Methoden der Systemanalyse setzen die Inhalte dieses Kapitels voraus. Den Abschluss bilden zwei Beispielkapitel, in denen die vorgestellten Methoden demonstriert werden. Vermutlich ist es sinnvoll zwischen den Beispielen und den zugehörigen allgemeinen Theoriekapiteln hin und her zu wechseln.

AKTUELLE VERSIONEN

Das vorliegende Dokument befindet sich noch im Entstehungsprozess und erhält regelmäßig kleinere oder größere Updates. Die aktuellste Version ist in einem Microsoft Onedrive-Ordner unter folgendem Link (*QR-Code*) zu finden



NOTATION

Exemplarisch ist die Notation der mathematischen Symbole in diesem Dokument an dem Symbol a dargestellt:

$a \in \mathbb{R}$	Reelle Zahl
$\underline{a} \in \mathbb{C}$	Komplexe Zahl, Unterstrich kennzeichnet komplexwertige Größen
$a(t)$	Reellwertige Funktion mit einem reellen Argument
$\underline{A}(\underline{s}), \underline{a}(\underline{s})$	Komplexwertige Funktion mit komplexem Argument
$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$	Reellwertiger Vektor der Dimension n
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$	Reellwertige Matrix mit n Zeilen und m Spalten
\mathcal{A}	Transformation oder Operator, beispielsweise \mathcal{H} , \mathcal{D} , \mathcal{L} und \mathcal{F}
\square^T	transponiert, angewandt auf Matrix oder Vektor
$\square^{(n)}$	Abkürzung für die n -te Ableitung einer Funktion

INHALTSVERZEICHNIS

INHALTSVERZEICHNIS	v
1 LINEARE ZEITINVARIANTE SYSTEME	1
1.1 DER SYSTEMBEGRIFF	2
1.1.1 ALLGEMEINE SYSTEMBESCHREIBUNG	2
1.1.2 LINEARITÄT	3
1.1.3 ZEITINVARIANZ	3
1.1.4 KAUSALITÄT	3
1.2 SYSTEMBESCHREIBUNG IM ZEITBEREICH	4
1.2.1 SYSTEM UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	4
1.2.2 DIFFERENTIALGLEICHUNG ALS OPERATORGLEICHUNG	4
1.2.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG	5
1.2.4 EIGENSCHAFTEN DER ZUSTANDSMATRIX (WIP)	5
1.2.5 SYSTEMBESCHREIBUNG UND ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG	6
1.2.6 SYSTEME MIT MEHREREN EIN- UND AUSGÄNGEN	7
1.2.7 DIFFERENZIERENDE SYSTEME	7
1.3 LINEARISIERUNG NICHTLINEARER SYSTEME	8
1.3.1 NICHTLINEARE MODELLBESCHREIBUNG	8
1.3.2 TYPISCHE NICHTLINEARE EFFEKTE	8
1.3.3 APPROXIMATION DURCH TAYLORREIHENENTWICKLUNG	9
1.3.4 KLEINSIGNALNÄHERUNG	10
1.3.5 WIE KLEIN IST KLEIN GENUG?	10
1.3.6 LINEARISIERUNG IM ARBEITSPUNKT	11
1.4 ALLGEMEINES SYSTEMVERHALTEN	12
1.4.1 ZUM DIRACSTOSS	12
1.4.2 ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT UND FALTUNG	13
1.4.3 ANFANGSBEDINGUNGEN	14
1.4.4 AUSGLEICHSVORGÄNGE ZUM BEOBACHTUNGSBEGINN	14
1.4.5 ALLGEMEINER LÖSUNGSANSATZ	15
1.4.6 HOMOGENE LÖSUNG VON SYSTEMEN ERSTER ORDNUNG	16
1.4.7 PARTIKULÄRE LÖSUNG VON SYSTEMEN ERSTER ORDNUNG	17

1.4.8	ANMERKUNG ZUR MATRIXEXPONENTIALFUNKTION	18
1.4.9	HOMOGENE LÖSUNG VON SYSTEMEN HÖHERER ORDNUNG	19
1.4.10	PARTIKULÄRE LÖSUNG VON SYSTEMEN HÖHERER ORDNUNG	19
1.4.11	ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT LINEARER ZEITINVARIANTER SYSTEME	20
1.4.12	DARSTELLUNG DER LÖSUNG ALS INTEGRALTRANSFORMATION	20
1.4.13	LÖSUNG FÜR DIFFERENZIERENDE SYSTEME	21
1.4.14	VERHALTEN IM STATISCHEN FALL	21
2	DIE LAPLACETRANSFORMATION	23
2.1	INTEGRALTRANSFORMATIONEN	24
2.1.1	DEFINITION DER INTEGRALTRANSFORMATION	24
2.1.2	DAS FALTUNGSINTEGRAL ALS INTEGRALTRANSFORMATION	24
2.2	LAPLACETRANSFORMATION UND LAPLACEBEREICH	25
2.2.1	DEFINITION DER LAPLACETRANSFORMATION	25
2.2.2	EXISTENZBEDINGUNGEN DER LAPLACETRANSFORMIERTEN	26
2.2.3	MOTIVATION DER GÜLTIGKEIT UND EINDEUTIGKEIT	26
2.3	EIGENSCHAFTEN DER LAPLACETRANSFORMATION	27
2.3.1	LINEARITÄT DER LAPLACETRANSFORMATION	27
2.3.2	DER ABLEITUNGSSATZ	28
2.3.3	DER ABLEITUNGSSATZ FÜR HÖHERE ABLEITUNGEN	29
2.3.4	DER FALTUNGSSATZ IM ZEITBEREICH	30
2.3.5	DER ANFANGSWERTSATZ	31
2.3.6	DER ENDWERTSATZ	31
2.3.7	DER VERSCHIEBUNGSSATZ	32
2.3.8	DER DÄMPFUNGSSATZ	32
2.3.9	DER ÄHNLICHKEITSSATZ	33
2.4	GÄNGIGE FUNKTIONEN IM LAPLACEBEREICH	34
2.4.1	SPRUNGFUNKTION	34
2.4.2	POLYNOMFUNKTION	35
2.4.3	EXPONENTIALFUNKTION	36
2.4.4	MATRIXEXPONENTIALFUNKTION	36
2.4.5	KOMPLEXE EXPONENTIALFUNKTION – SINUS UND KOSINUS	37
2.4.6	DIRACSTOSS / DIRAC-DISTRIBUTION	38
2.4.7	ABLEITUNG DES DIRACSTOSSES	38

3	SYSTEMANALYSE IM LAPLACEBEREICH	39
3.1	ALLGEMEINES VERFAHREN	40
3.2	DIE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	42
3.2.1	DEFINITION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	42
3.2.2	SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	42
3.2.3	DARSTELLUNGSFORMEN DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	43
3.2.4	POL- UND NULLSTELLEN DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	43
3.2.5	POL- UND NULLSTELLEN IN DER KOMPLEXEN EBENE	44
3.2.6	ZUSAMMENHANG ZWISCHEN POLSTELLEN UND EIGENWERTEN	45
3.2.7	ÜBERTRAGUNGSFUNKTION IN POL-RESIDUUM-FORM	45
3.2.8	ANMERKUNG ZUR PARTIALBRUCHZERLEGUNG	46
3.2.9	SYMMETRIERELATION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	46
3.3	ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG (SISO) IM LAPLACEBEREICH	47
3.3.1	ÜBERGANG IN DEN LAPLACEBEREICH	47
3.3.2	FORMULIERUNG EINER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	47
3.3.3	ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN EIGENWERTEN UND POLSTELLEN	48
3.4	SYSTEMEBENE UND BLOCKSCHALTBILDER	48
3.4.1	KASKADIERUNG	48
3.4.2	PARALLELSCHALTUNG	49
3.4.3	RÜCKKOPPLUNG	49
3.4.4	ZUSAMMENGESETZTES SYSTEM AM BEISPIEL DER STREUPARAMETER	50
4	TRANSIENTENANALYSE	51
4.1	DIE STOSSANTWORT	52
4.1.1	MOTIVATION DER STOSSANTWORT IM LAPLACEBEREICH	52
4.1.2	DEFINITION DER STOSSANTWORT	52
4.1.3	SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DIE STOSSANTWORT	53
4.1.4	ALLGEMEINE FORM DER STOSSANTWORT	53
4.1.5	PROMINENTER SPEZIALFALL DER ALLGEMEINEN STOSSANTWORT	54
4.2	DIE SPRUNGANTWORT	55
4.2.1	DIE SPRUNGFUNKTION	55
4.2.2	ABSCHNEIDEN BELIEBIGER FUNKTIONEN MIT DER SPRUNGFUNKTION	55
4.2.3	DEFINITION DER SPRUNGANTWORT	57
4.2.4	ABLEITUNG DER SPRUNGANTWORT (WIP)	57
4.3	STABILITÄT	58

4.3.1	MOTIVATION ANHAND DER STOSSANTWORT UND DER EIGENWERTE	58
4.3.2	ASYMPTOTISCHE STABILITÄT	59
4.3.3	GRENZSTABILITÄT	60
4.3.4	INSTABILITÄT	60
4.4	STABILITÄTSKRITERIEN	61
4.4.1	HURWITZ-POLYNOME	61
4.4.2	HURWITZ-DETERMINANTEN-KRITERIUM	61
4.4.3	HURWITZ-KETTENBRUCH-KRITERIUM	62
4.5	DER EINGESCHWUNGENE ZUSTAND	62
4.5.1	GRUNDVORAUSSETZUNGEN	62
4.5.2	HOMOGENE LÖSUNG IM EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND (WIP)	63
4.5.3	MOTIVATION EINER PRAKTIKABLEN EINSCHWINGZEIT	64
4.5.4	BESCHRÄNKTHEIT DER ANTWORT IM EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND	65
4.5.5	ANMERKUNG ZUR KONVERGENZ UND DER STOSSANTWORT	66
4.5.6	DER ZEITUNABHÄNGIGE EINGESCHWUNGENE ZUSTAND	67
4.5.7	DER HARMONISCHE EINGESCHWUNGENE ZUSTAND	68
5	SYSTEMANALYSE IM FREQUENZBEREICH	71
5.1	PERIODISCHE SIGNALE	72
5.1.1	PERIODIZITÄT	72
5.1.2	FOURIERREIHE	72
5.1.3	FOURIERSYNTHESE UND APPROXIMATION	72
5.1.4	KOMPLEXE ZEIGER UND PHASOREN	73
5.2	DER FREQUENZGANG	74
5.2.1	GRUNDANNAHMEN UND DEFINITION DES FREQUENZGANGS	74
5.2.2	ANMERKUNG ZUR EXISTENZ EINES FREQUENZGANGS	75
5.2.3	SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DEN FREQUENZGANG	76
5.2.4	MESSUNG DES FREQUENZGANGS	76
5.2.5	FREQUENZGANG UND ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	77
5.2.6	FREQUENZGANG IN POLARDARSTELLUNG	78
5.2.7	BETRAG DES FREQUENZGANGS	78
5.2.8	ANMERKUNG ZU KOMPLEXEN POLYNOMFUNKTIONEN	78
5.2.9	FALLUNTERSCHIEDUNG FÜR DIE BERECHNUNG DER PHASE	79
5.2.10	KAUSALITÄTSRELATION LINEARER SYSTEME	80
5.3	DAS BODEDIAGRAMM	82

5.3.1	BETRAG DES FREQUENZGANGS IM BODEDIAGRAMM	82
5.3.2	PHASE DES FREQUENZGANGS IM BODEDIAGRAMM	82
5.3.3	BEITRAG REELLER POLSTELLEN ZUM BETRAG IM BODEDIAGRAMM	83
5.3.4	BEITRAG REELLER POLSTELLEN ZUR PHASE IM BODEDIAGRAMM	84
5.3.5	BEITRAG KOMPLEXER POLSTELLEN ZUM BETRAG IM BODEDIAGRAMM	85
5.3.6	BEITRAG KOMPLEXER POLSTELLEN ZUR PHASE IM BODEDIAGRAMM	86
5.4	DIE ORTSKURVE	87
5.4.1	DEFINITION	87
5.4.2	NYQUIST-DIAGRAMM	87
5.5	RESONANZ	88
5.5.1	RESONANZ UND HARMONISCH EINGESCHWUNGENER ZUSTAND	88
5.5.2	RESONANZFREQUENZEN	88
5.5.3	ANMERKUNG ZU DEN RESONANZFREQUENZEN	89
5.5.4	ALLGEMEINE BERECHNUNG DER RESONANZFREQUENZEN (WIP)	89
5.5.5	ZUSAMMENHANG DER RESONANZFREQUENZ ZU DEN EIGENWERTEN	89
A	LINEARE FILTER (WIP)	91
A.1	FILTER ALS LINEARE ZEITINVARIANTE SYSTEME	92
A.2	IDEALE FILTER	92
A.2.1	IDEALER TIEFPASSFILTER	93
A.2.2	IDEALER HOCHPASSFILTER	93
A.2.3	IDEALER BANDPASSFILTER	93
A.2.4	IDEALER BANDSTOPPFILTER	93
A.3	BUTTERWORTH-FILTER	94
A.4	TSCHEBYSCHOW-FILTER	95
A.4.1	TSCHEBYSCHOW-POLYNOME ERSTER ART	95
A.4.2	TSCHEBYSCHOW-POLYNOME ZWEITER ART	95
A.4.3	TSCHEBYSCHOW-TIEFPASSFILTER TYP I	96
A.4.4	TSCHEBYSCHOW-TIEFPASSFILTER TYP II	96
A.5	FILTER-TRANSFORMATIONEN (WIP)	96
A.5.1	ALLGEMEINE VARIABLENTRANSFORMATION	97
A.5.2	HOCHPASS-TIEFPASS-TRANSFORMATION	97
A.5.3	BANDPASS-TRANSFORMATION	97
B	ELEKTRISCHES RC-NETZWERK	99

B.1 MODELLBESCHREIBUNG IM ZEITBEREICH	100
B.1.1 NETZWERKGLEICHUNGEN DES RC-NETZWERKS	100
B.1.2 FORMULIERUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG	100
B.2 ÜBERGANG ZUM ALLGEMEINEN FALL	101
B.2.1 BESTANDTEILE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG	101
B.3 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM LAPLACEBEREICH	102
B.3.1 LAPLACETRANSFORMATION DES SYSTEMS	102
B.3.2 LÖSUNG IM LAPLACEBEREICH	102
B.3.3 LÖSUNG IM ZEITBEREICH	102
B.3.4 ÜBERTRAGUNGSFUNKTION DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	103
B.3.5 STRUKTUR DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	103
B.4 TRANSIENTENANALYSE DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	103
B.4.1 HOMOGENE LÖSUNG DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	104
B.4.2 STABILITÄT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	104
B.4.3 STOSSANTWORT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	105
B.4.4 SPRUNGANTWORT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	106
B.4.5 TRANSIENTES VERHALTEN DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	107
B.4.6 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM ZEITUNABH. EINGESCHW. ZUSTAND	108
B.5 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM FREQUENZBEREICH	109
B.5.1 FREQUENZGANG DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	109
B.5.2 ANTWORT IM HARMONISCHEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND	109
B.5.3 BODEDIAGRAMM DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	110
B.5.4 ORTSKURVE DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG	110
 C DER GEDÄMPFTE HARMONISCHE OSZILLATOR	 111
C.1 MODELLBESCHREIBUNG DES MECHANISCHEN SYSTEMS	112
C.1.1 KRÄFTEGLEICHGEWICHT	112
C.1.2 BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG	113
C.1.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG	113
C.2 MODELLBESCHREIBUNG IM LAPLACEBEREICH	114
C.2.1 TRANSFORMATION DER BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG	114
C.2.2 LÖSUNG IM LAPLACEBEREICH	114
C.2.3 ÜBERTRAGUNGSFUNKTION DES HARMONISCHEN OSZILLATORS	114
C.2.4 EIGENWERTE DES SYSTEMS ZWEITER ORDNUNG	115
C.2.5 ANMERKUNG ZUR STABILITÄT	116

C.2.6 ANMERKUNG ZU SCHWINGFÄHIGKEIT UND EIGENFREQUENZ	116
C.3 TRANSIENTES VERHALTEN	117
C.3.1 HOMOGENE LÖSUNG	117
C.3.2 HOMOGENE LÖSUNG UND ENERGIE	119
C.3.3 STOSSANTWORT	120
C.3.4 ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT UND DUHAMEL-INTEGRAL	121
C.3.5 SPRUNGANTWORT	122
C.3.6 SPRUNGANTWORT UND ENERGIE	123
C.3.7 VOLLSTÄNDIGES TRANSIENTES VERHALTEN	123
C.3.8 GESAMTENERGIE IM SYSTEM	124
C.3.9 TRAJEKTORIEN IM ZUSTANDSRAUM	124
C.4 VERHALTEN IM FREQUENZBEREICH	125
C.4.1 FREQUENZGANG	125
C.4.2 BETRAG DES FREQUENZGANGS	125
C.4.3 PHASE DES FREQUENZGANGS	126
C.4.4 ANTWORT IM HARMONISCHEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND	126
C.4.5 ANTWORT IM ZEITUNABHÄNGIGEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND	126
C.4.6 BODEDIAGRAMM	127
C.4.7 NYQUIST-DIAGRAMM	127
C.4.8 RESONANZFREQUENZ	128
C.4.9 VERHALTEN BEI RESONANZ (WIP)	129

KAPITEL 1

LINEARE ZEITINVARIANTE SYSTEME

In der Systemtheorie ist ein lineares System ein Modell für einen hinreichend gut isolierten Teil der Natur, in dem alle auftretenden Funktionen lineare Abbildungen sind. Für viele reale Systeme ist die Beschreibung des Verhaltens unter Näherungen (*häufig die Kleinsignalnäherung oder die bekannte Kleinwinkelnäherung für trigonometrische Funktionen*) durch ein solches Modell genau genug. Lineare zeitinvariante (*Englisch: linear timeinvariant, kurz LTI als Abkürzung*) dynamische Systeme spielen in der Physik und den Ingenieurwissenschaften daher eine extrem wichtige Rolle.

Oft werden im Entwicklungsprozess genaue, aber einfache Modelle gesucht um das Produkt zu analysieren, zu charakterisieren, oder zu optimieren. Die Modellierung des realen Verhaltens durch ein LTI-System ist dabei in vielen Fällen zielführend. Es handelt sich dabei um kontinuierliche physikalische Modelle, deren beschreibende Funktionen und Lösungen analytisch (*formelmäßig, auch symbolisch*) angegeben werden können und oft viel Einsicht in das modellierte System liefern.

1.1 DER SYSTEMBEGRIFF

Generell lässt sich ein System über die Interaktion zwischen einer reellen Eingangsfunktion $y(t)$ und einer reellen Ausgangsfunktion $x(t)$ (später auch allgemein $u(t)$ bzw. $\vec{u}(t)$ für mehrere Ausgänge) beschreiben, wobei es natürlich auch mehrere Ein- und Ausgänge und dementsprechend mehrere Ein- und Ausgangsfunktionen geben kann. Das System selbst ist in der Regel ein mathematisches Modell der Realität mit dem anhand einer bekannten Eingangsfunktion $y(t)$ das Verhalten in Form von einer Ausgangsfunktion $x(t)$ vorhergesagt werden soll (die Verallgemeinerung auf Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen wird später ebenfalls motiviert).

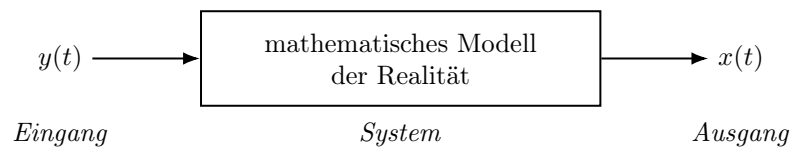


Abbildung 1.1: Visualisierung eines allgemeinen Systems als Blockdiagramm mit dem Systemeingang $y(t)$ und dem Systemausgang $x(t)$

1.1.1 ALLGEMEINE SYSTEMBESCHREIBUNG

Ganz allgemein kann die Verknüpfung von Ein- und Ausgang über eine Transformation \mathcal{H} ausgedrückt werden, die das System charakterisiert und vom Eingang $y(t)$ auf den Ausgang $x(t)$ abbildet:

$$\mathcal{H} : y(t) \mapsto x(t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \mathcal{H}\{y(t)\} \quad (1.1)$$

Diese allgemeine Formulierung für die Beziehung zwischen Ein- und Ausgang des Systems wirkt erstmal etwas abstrakt und wenig aussagekräftig. Ein Ziel dieses Skripts ist es unter anderem die Struktur dieser Beziehung und somit die Wirkung bzw. Antwort des Systems bei einer Vorgabe des Eingangs zu ergründen. Im weiteren Verlauf wird (hoffentlich) klar, was sich im Falle linearer zeitinvarianter Systeme hinter der Transformation \mathcal{H} verbirgt und wie sie systematisch aus den das System beschreibenden Parametern, den Systemparametern konstruiert werden kann.

1.1.2 LINEARITÄT

Anschaulich bedeutet die Linearität eines Systems, dass kleine Änderungen am Eingang $y(t)$ zu kleinen Änderungen am Ausgang $x(t)$ führen (*gemeint ist damit eher eine direkte Proportionalität der Eingangsamplitude zur Ausgangsamplitude*). Insbesondere bei mehreren Teilsignalen am Eingang, kann der Ausgang als eine Linearkombination der Einzelwirkungen der beschrieben werden. Sei also:

$$y(t) = \sum_i \alpha_i \cdot y_i(t)$$

Die Transformation \mathcal{H} und somit das System heißt Linear, wenn die folgende Äquivalenz erfüllt ist:

$$x(t) = \mathcal{H}\left\{\sum_i \alpha_i \cdot y_i(t)\right\} = \sum_i \alpha_i \cdot \mathcal{H}\{y_i(t)\} \quad (1.2)$$

Im Falle der Linearität des Systems ist es also egal, in welcher Reihenfolge die Transformation \mathcal{H} angewendet wird. Das Ergebnis bleibt unverändert. Eine Folge dessen ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips / Überlagerungssatzes, bei dem Teile der Lösung separat berechnet und anschließend zu einem Ergebnis zusammengesetzt / überlagert werden können.

1.1.3 ZEITINVARIANZ

Die Zeitinvarianz des Systems bedeutet dabei, dass unabhängig von der Verschiebung um ein T in der Zeit bei gleicher Erregung immer die gleiche, ebenfalls um ein T zeitverschobene Systemantwort folgt.

Die Transformation \mathcal{H} und somit das System heißt zeitinvariant, wenn für ein beliebiges $T \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x(t) = \mathcal{H}\{y(t)\} \xrightarrow{(t) \rightarrow (t-T)} x(t-T) = \mathcal{H}\{y(t-T)\} \quad (1.3)$$

Bei zeitlich unveränderlichen Systemparametern – also konstanten Koeffizienten – ist dies in der Regel erfüllt. Die Eigenschaft der Zeitinvarianz des Systems ermöglicht es das Systemverhalten allgemein für einen Zeitraum ab $t = 0$ zu berechnen und anschließend die Verschiebung der Lösung zum Betrachtungszeitpunkt durchzuführen. Dies vereinfacht die Berechnung meistens wesentlich. In diesem Skript wird daher im Folgenden immer der Zeitpunkt $t = 0$ als der Betrachtungsbeginn bzw. Entstehungszeitpunkt des Systems angenommen. Spezialfälle lassen sich aufgrund der Zeitinvarianz aus den vorgestellten Methoden ableiten.

1.1.4 KAUSALITÄT

Kausalität (*lateinisch: causa \Leftrightarrow Ursache*) ist die Beziehung zwischen Ursache und Wirkung. Sie betrifft die Abfolge von Ereignissen und Zuständen, die aufeinander bezogen sind. Demnach ist A die Ursache für die Wirkung B, wenn B von A herbeigeführt wird. Wesentliche Voraussetzung für die Realisierbarkeit eines Systems ist die Forderung, dass die Werte der Ausgangssignale zu einem gegebenen Zeitpunkt nur von Werten der Eingangssignale zu diesem oder einem früheren Zeitpunkt abhängen, nicht jedoch von zukünftigen Werten (*keine Zeitreisen*).

Speziell folgt die Kausalität in der linearen Systemtheorie aus einer Stoßantwort $h(t)$, welche nur für positive Zeiten t existiert bzw. ansonsten Null ist. Was genau die Stoßantwort ist, wird später noch ausführlich diskutiert.

1.2 SYSTEMBESCHREIBUNG IM ZEITBEREICH

Wie können lineare zeitinvariante Systeme durch mathematische Formeln beschrieben werden?

1.2.1 SYSTEM UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Das Verhalten vieler physikalischer Systeme (z.B. *mechanische Oszillatoren, elektrische Netzwerke, etc.*) lässt sich mathematisch über lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (*konstante Koeffizienten und linear* \Rightarrow *LTI*) beschreiben. Die allgemeine Form einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dt^2}x(t) + a_1 \frac{d}{dt}x(t) + a_0 x(t) = y(t) \quad (1.4)$$

Die Koeffizienten a_0, \dots, a_{n-1} sind dabei konstant (*können aber auch durchaus Null sein*) und charakterisieren das System. Die Ordnung des Systems wird über die höchste enthaltene Ableitung der unbekannten Funktion $x(t)$ gegeben. Diese ist hier allgemein n mit der n -ten Ableitung $\frac{d^n}{dt^n}x(t)$ als höchste enthaltene Ableitung. Die Systembeschreibung über Differentialgleichungen ist deshalb so charmant, da es sich dabei um eine lokale Beschreibung handelt. Das heißt zu jedem Zeitpunkt t geht aus der Gleichung hervor, wie sich die gesuchte Funktion $x(t)$ bei einer infinitesimalen Änderung der Zeit dt und unter dem Einfluss einer extern wirkenden Größe $y(t)$ ändern wird. Das Verhalten des Systems ist dadurch bei zusätzlicher Vorgabe der Anfangsbedingungen \vec{x}_0 zu jedem Zeitpunkt eindeutig durch die Differentialgleichung beschrieben.

1.2.2 DIFFERENTIALGLEICHUNG ALS OPERATORGLEICHUNG

Die Differentialgleichung (1.4) lässt sich alternativ als eine lineare Operatorgleichung interpretieren. Sei dabei \mathcal{D} der Differentialoperator, der das System beschreibt gegeben als:

$$\mathcal{D} := \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} \quad \text{mit} \quad a_n = 1 \quad (1.5)$$

Dementsprechend kann das Problem nun in eine Operatorgleichung umformuliert werden. Dann:

$$\mathcal{D}x(t) = y(t) \quad (1.6)$$

Der Operator \mathcal{D} (*hier ein Differentialoperator n -ter Ordnung*) beschreibt das System, die Funktion $y(t)$ ist die bekannte Erregung bzw. die Inhomogenität und $x(t)$ ist die unbekannte Lösungsfunktion. Allgemein ist die Lösungsfunktion immer charakteristisch zum Operator (*also implizit charakteristisch zum System*) und der jeweiligen Erregung. Als Lösung wird eine Funktion $x(t)$ gesucht, die diese Gleichung erfüllt.

1.2.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG

Eine einer lineare gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich immer auch in ein System von n gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung überführen. Für diesen Schritt werden die Ableitungen der gesuchten Funktion $x(t)$ im Folgenden mit $\frac{d^k}{dt^k}x(t) = x^{(k)}(t)$ für $k = 0, \dots, n-1$ abgekürzt. In dieser Schreibweise wird die Differentialgleichung (1.4) zu:

$$\frac{d}{dt}x^{(n-1)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2x^{(2)}(t) + a_1x^{(1)}(t) + a_0x(t) = y(t) \quad (1.7)$$

Die durch diese Umformulierung des Problems entstandenen neuen Variablen $x^{(k)}(t)$ des Systems sind durch Ableitungen miteinander verknüpft und werden auch als die Zustandsgrößen (*auch Basisfunktionen des Zustandsraums*) bezeichnet. Die Ausgangsgröße $x(t)$ sie ist wegen der Linearität des Systems eine Linearkombination der Zustandsgrößen und liegt im sogenannten Zustandsraum.

Die Verknüpfung bzw. Überlagerung der Zustandsgrößen kann als lineares Gleichungssystem interpretiert und in ein Matrixgleichungssystem überführt werden. Dieses Matrixgleichungssystem lässt sich als eine Frobenius-Begleitmatrix zur DGL höherer Ordnung direkt aufstellen. Dabei entspricht die Differentialgleichung (1.7) der letzten Zeile in der Begleitmatrix, während die restlichen Zeilen die Ableitungen miteinander verknüpfen:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} y(t) \quad (1.8)$$

Das Differentialgleichungssystem (1.8) lässt sich nun über die Zustandsmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und den Vektor der Zustandsgrößen $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ charakterisieren. Das Gleichungssystem heißt auch Zustandsraummodell. Die Dimension des Zustandsraummodells ist die Ordnung des Systems. Der Vektor \vec{b} beschreibt die Wirkung der Eingangsgröße des Systems auf die Zustandsgrößen (*für MIMO Systeme mit mehreren Eingängen wird aus dem Vektor \vec{b} eine Matrix \mathbf{B}*). Die Systembeschreibung lässt sich auf diese Weise abkürzen:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} \cdot y(t) \quad (1.9)$$

1.2.4 EIGENSCHAFTEN DER ZUSTANDSMATRIX (WIP)

Die Eigenwerte des Systems sind genau die Eigenwerte der Zustandsmatrix \mathbf{A} . Sie sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung bzw. des charakteristischen Polynoms:

$$\underline{\Delta}(s) = \det(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (1.10)$$

Diagonalisierbarkeit, etc ...

1.2.5 SYSTEMBESCHREIBUNG UND ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG

Mit der Zustandsraumdarstellung (1.9) liegt nun eine Beschreibung des Systems vor, in der die Zustände $\vec{x}(t)$ (*innere Variablen des Systems*) von außen durch die Erregung $y(t)$ angeregt werden. In vielen Fällen können die Zustandsgrößen des Systems nicht direkt gemessen werden. Die messbare Ausgangsgröße $u(t)$ des Systems ist daher im allgemeinen eine Linearkombination (*auch Überlagerung bzw. Superposition*) der Zustandsgrößen und der Eingangsgrößen. Zur Systembeschreibung gehört neben der Zustandsraumdarstellung also eine zusätzliche Gleichung, welche den Systemausgang als eine Linearkombination der Zustandsgrößen und Eingänge angibt:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} \cdot y(t) \quad (1.11)$$

$$u(t) = \vec{c}^T \cdot \vec{x}(t) + d \cdot y(t) \quad (1.12)$$

Die Systembeschreibung über das Zustandsraummodell wird also über die reelle Zustandsmatrix \mathbf{A} und die Überlagerungsvektoren \vec{b} , \vec{c} und dem Skalar d charakterisiert.

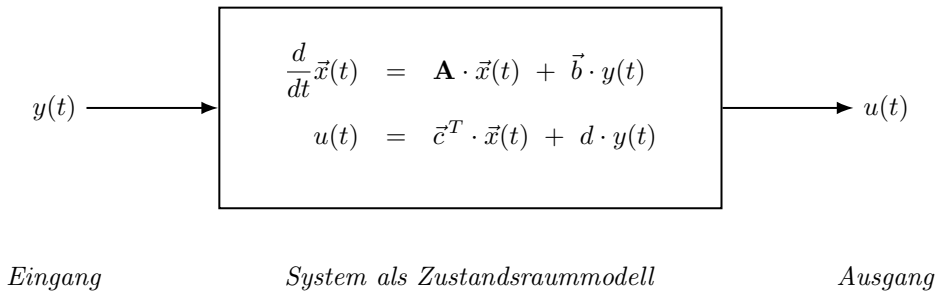


Abbildung 1.2: SISO-System (*ein Eingang und ein Ausgang*) als Zustandsraummodell in einer Darstellung als Blockdiagramm mit dem Systemeingang $y(t)$ und dem Systemausgang $x(t)$

Die Eingangsgröße $y(t)$ wirkt dabei über den Vektor \vec{b} auf die Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$ des Systems, welche über ein Differentialgleichungssystem – das Zustandsraummodell mit der Zustandsmatrix \mathbf{A} – das dynamische Verhalten beschreiben. Umgangssprachlich redet man auch davon, dass die Zustände angeregt werden. Der Ausgang $u(t)$ des Systems – also die Messgröße – setzt sich nun aus einer Überlagerung (*Linearkombination / Superposition*) der Zustandsgrößen mit dem Vektor \vec{c} und der Eingangsgröße über das Skalar d zusammen. Bezogen auf den allgemeinen Fall des Systems ist also die Lösung des das System beschreibenden Differentialgleichungssystems ein Teil der Transformation \mathcal{H} , welche den Eingang $y(t)$ auf den Ausgang $x(t)$ abbildet.

1.2.6 SYSTEME MIT MEHREREN EIN- UND AUSGÄNGEN

Die Matrixformulierung der Differentialgleichung in der Zustandsraumdarstellung legt die Möglichkeit nahe, dass auch ein System mit mehreren Ein- und Ausgängen (*MIMO* \Leftrightarrow *Multiple Input Multiple Output*) durch eine Zustandsraumdarstellung beschrieben werden kann. Dann sind die Vektoren \vec{b} , \vec{c} und das Skalar d im MIMO-Fall Matrizen entsprechender Dimension:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \vec{y}(t) \quad (1.13)$$

$$\vec{u}(t) = \mathbf{C}^T \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \vec{y}(t) \quad (1.14)$$

Dabei sind $\vec{y}(t)$ die Eingangsgrößen und $\vec{u}(t)$ die Ausgangsgrößen in vektorieller Schreibweise. Die Variablen $\vec{x}(t)$ sind die Zustandsgrößen. Die Systembeschreibung erfolgt dementsprechend über die quadratische Zustandsmatrix \mathbf{A} und die rechteckigen Kopplungsmatrizen \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} :

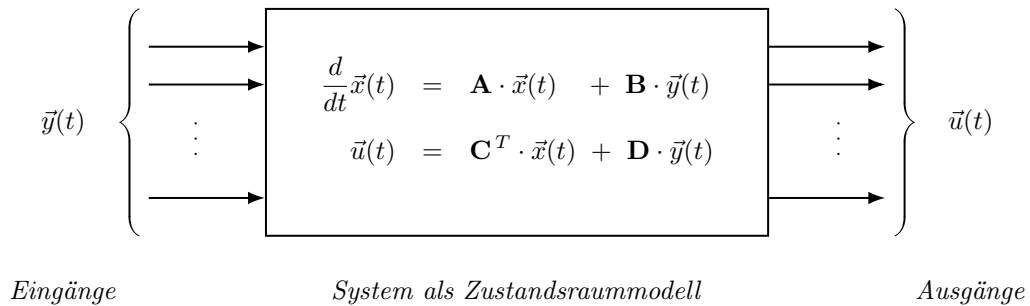


Abbildung 1.3: MIMO-System als Zustandsraummodell in einer Darstellung als Blockdiagramm mit den Systemeingängen $\vec{y}(t)$ und den Systemausgängen $\vec{u}(t)$

1.2.7 DIFFERENZIERENDE SYSTEME

In der Praxis wirken manchmal auch Ableitungen der Erregungen auf die Zustandsgrößen und / oder direkt auf die Ausgangsgrößen. Dann muss die Formulierung der Zustandsraumdarstellung um die entsprechenden Ableitungen $\vec{y}^{(k)}(t)$ erweitert werden. Systeme bei denen die Ableitung (*mindestens die erste Ableitung*) einer Erregungsgröße als direkte Proportionalität am Ausgang sichtbar ist, heißen differenzierend¹.

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \sum_{k=0} \mathbf{B}_k \cdot \vec{y}^{(k)}(t) \quad (1.15)$$

$$\vec{u}(t) = \mathbf{C}^T \cdot \vec{x}(t) + \underbrace{\sum_{k=0} \mathbf{D}_k \cdot \vec{y}^{(k)}(t)}_{\text{differenzierende Terme}} \quad (1.16)$$

¹Mehr zu differenzierenden Systemen ist im Kapitel zur Systemanalyse mit der Laplacetransformation zu finden

1.3 LINEARISIERUNG NICHTLINEARER SYSTEME

Bei der Linearisierung werden nichtlineare Funktionen oder nichtlineare Differentialgleichungen durch lineare Funktionen oder durch lineare Differentialgleichungen angenähert. Da in der Realität viele Systeme zumindest in einem bestimmten Bereich näherungsweise linear sind, ist dieser Schritt oft zielführend für die Analyse und kann durchaus gute Ergebnisse liefern. Nach der Linearisierung steht einem dann das gesamte Arsenal der linearen Systemtheorie offen, welches mächtige Analyse- und Lösungsmethoden (*siehe: die Inhalte dieses Skripts*) liefert.

1.3.1 NICHTLINEARE MODELLBESCHREIBUNG

Beispielsweise eine gewöhnliche nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, wobei f eine nichtlineare Funktion ist:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f[x(t), t] \quad (1.17)$$

Im MIMO-Fall und für Systeme höherer Ordnung erfolgt die Modellbeschreibung durch ein nichtlineares Differentialgleichungssystem. Reale Systeme lassen sich oft durch ein nichtlineares Zustandsraummodell beschreiben, dessen linearer Anteil mit der Zustandsmatrix \mathbf{A} durch einen nichtlinearen Anteil erweitert wurde:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \vec{y}(t)}_{\text{linearer Anteil}} + \underbrace{\vec{F}[\vec{x}(t), \vec{y}(t)]}_{\text{nichtlinearer Anteil}} \quad (1.18)$$

1.3.2 TYPISCHE NICHTLINEARE EFFEKTE

Die Kleinsignalnäherung kann für reale Signale nicht immer eingehalten werden. Dann werden auch höhere Terme (*z.B. quadratische oder kubische*) der Taylorentwicklung für das Verhalten relevant. Wenn diese nichtlinearen Effekte gegenüber dem linearen Verhalten signifikant werden, geht der Spaß erst richtig los.

Dann kommt es nämlich zu Oberwellen, also weiteren als der von Außen eingeführten Frequenzen, die sich im System ausbreiten können. Besonders deutlich wird dies bei der Betrachtung einer der einfachsten nichtlinearen Funktionen, der Parabel:

$$f[x(t)] = x^2(t) \quad (1.19)$$

Für das Signal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ folgt damit :

$$f[x(t)] = \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2\omega_0 t) \right) \quad (1.20)$$

Es werden durch die quadratische Funktion die Frequenzen $\omega = 0$ und $\omega = 2\omega_0$ in das System eingepreßt. Die vereinfachte Systembeschreibung durch Phasoren im Frequenzbereich in Kapitel 5 ist dann nicht mehr zulässig.

Ein Beispiel aus der Physik ist die Energie und Leistung im System, welche quadratisch mit den Signalen geht. So ist beispielsweise $E_{kin}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$ und in elektrischen Widerstandsnetzwerken $P(t) = Ri^2(t)$. Energiefunktionen sind also nichtlinear.

1.3.3 APPROXIMATION DURCH TAYLORREIHENENTWICKLUNG

Die Taylorreihe (nach Brook Taylor) wird in der Analysis verwendet, um eine glatte Funktion $f(x)$ (glatt \Leftrightarrow unendlich oft differenzierbar) in der Umgebung einer Stelle x_0 durch eine Potenzreihe darzustellen, welche der Grenzwert der Taylor-Polynome ist. Diese Reihenentwicklung wird Taylor-Entwicklung genannt. Die Entwicklung der Funktion $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0 als Taylorreihe ist allgemein angebar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (x - x_0)^k \cdot \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=x_0} \quad (1.21)$$

Eine Approximation der Funktion um die Entwicklungsstelle herum entsteht, wenn die Reihenentwicklung – beispielsweise bis zu einem $k = n$ – vorzeitig abgebrochen wird. Dann ist die Taylorapproximation n -ter Ordnung von $f(x)$ für x nahe x_0 mit den Taylorkoeffizienten f_k :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n f_k \cdot (x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{1}{k!} \cdot \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=x_0} \quad (1.22)$$

Die Approximation der Funktion $f(x)$ durch Taylorentwicklung liefert ein Polynom, dessen Summanden bestimmte Eigenschaften der Funktion im Entwicklungspunkt x_0 zugeordnet werden können:

$$f(x) \approx \underbrace{f_0}_{\text{konst.}} + \underbrace{f_1 \cdot (x - x_0)}_{\text{linearer Term}} + \underbrace{f_2 \cdot (x - x_0)^2 + f_3 \cdot (x - x_0)^3 + \dots}_{\text{nichtlineare Anteile}} \quad (1.23)$$

Tangentengleichung

Die Koeffizienten f_0 und f_1 bilden eine Tangentengleichung, die die Funktion im Entwicklungspunkt x_0 berührt und das lineare Verhalten repräsentiert. Die Koeffizienten f_2, f_3, \dots repräsentieren den nichtlinearen Anteil der Funktion im Entwicklungspunkt.

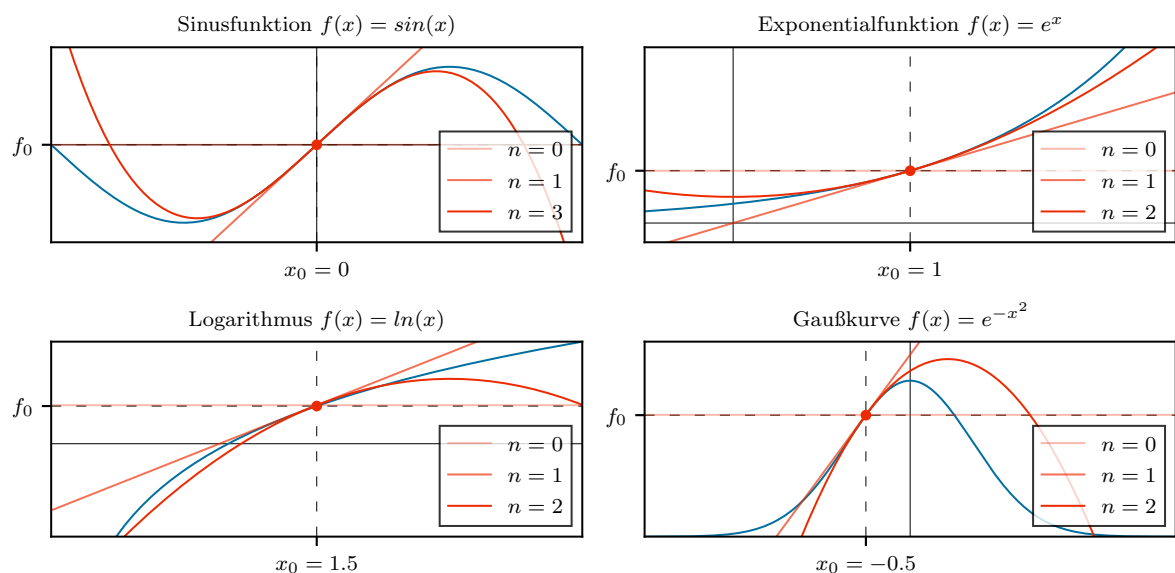


Abbildung 1.4: Beispielhafte Taylor-Reihenentwicklungen von typischen nichtlinearen Funktionen in einem generischen Entwicklungspunkt x_0 . Abgebildet sind Sinus, Exponentialfunktion, Logarithmus und Gaußkurve für verschiedene Approximationsstufen n .

1.3.4 KLEINSIGNALNÄHERUNG

Das Kleinsignalverhalten beschreibt das Verhalten eines Systems bei Aussteuerung mit kleinen Signalen, wobei das Wort *klein* nicht als geringer Abstand zum Nullpunkt, sondern zu einem Arbeitspunkt x_0 zu verstehen ist. In einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal werden Signale als Kleinsignale bezeichnet, solange sich in einem beschränkten, aber für die Aufgabe wesentlichen Bereich ein dennoch näherungsweise lineares Übertragungsverhalten ergibt. Dafür sei das Signal (*auch als Großsignal bezeichnet*) als ein konstanter Gleichanteil x_0 (*Arbeitspunkt*) und ein zeitabhängiger Kleinsignalanteil $x_{ks}(t)$ darstellbar:

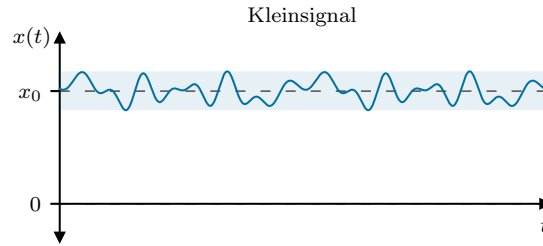


Abbildung 1.5: Visualisierung der Kleinsignalnäherung für Eingangssignale

$$x(t) = x_0 + x_{ks}(t) \quad (1.24)$$

1.3.5 WIE KLEIN IST KLEIN GENUG?

Damit die Kleinsignalnäherung und damit die Linearisierung ihre Gültigkeit behält, muss die maximale Amplitude des zeitabhängigen Kleinsignalanteils $x_{ks}(t)$ so klein sein, dass die lineare Näherung der Funktion $f(x)$ durch eine Tangentengleichung ihre Gültigkeit behält. Das ist dann der Fall, wenn für die Anteile der Taylorreihenentwicklung (1.21) bzw. (1.22) gilt:

$$f_0 + f_1 \cdot (x_{ks}(t) - x_0) \gg \sum_{k=2}^{\infty} f_k \cdot (x_{ks}(t) - x_0)^k \quad (1.25)$$

Also der lineare Anteil gegenüber dem Rest der Taylorreihe dominiert also wesentlich größer ist. Um eine effiziente Faustregel für die maximal zugelassene Amplitude des Kleinsignalanteils herzuleiten, kann äquivalent zu (1.25) folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$f_0 + f_1 \cdot x_{ks}(t) \gg f[x_0 + x_{ks}(t)] - f_0 - f_1 \cdot x_{ks}(t) \quad (1.26)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich:

$$x_{ks}(t) \gg \frac{1}{2f_1} \cdot f[x_0 + x_{ks}(t)] - \frac{f_0}{f_1} \quad (1.27)$$

Im gegebenen Arbeitspunkt, festgelegt durch x_0 und f_0 mit dem Kleinsignalparameter f_1 muss die Zeitabhängigkeit des Signals also die Ungleichung (1.27) erfüllen.

1.3.6 LINEARISIERUNG IM ARBEITSPUNKT

Die Annahme ist nun, dass die Funktion nahe am Entwicklungspunkt bzw. für kleine Abweichungen $|x - x_0|$ um den Entwicklungspunkt herum bereits gut durch die Tangentengleichung approximiert wird. Dies entspricht der oben eingeführten Kleinsignalnäherung. Die Entwicklungsstelle bzw. der konstante Anteil x_0 zusammen mit dem Funktionswert $f_0 = f(x_0)$ wird auch als Arbeitspunkt bezeichnet.

Für kleine Signale kann so die nichtlineare Funktion $f(x)$ in einem Arbeitspunkt (f_0, x_0) linearisiert werden, da dann die ersten beiden Terme der Taylorreihenentwicklung das Verhalten gut approximieren. Einsetzen des Kleinsignalansatzes (*das ist noch keine Näherung*) in das Argument der nichtlinearen Funktion liefert:

$$f[x(t)] = f[x_0 + x_{ks}(t)] \quad (1.28)$$

Für Signale deren zeitabhängiger Anteil $x_{ks}(t)$ klein ist gilt $x(t) \approx x_0$ und die nichtlineare Funktion kann nach (1.22) durch eine Tangentengleichung angenähert werden, welche eine lineare Funktion ist:

$$f[x(t)] \approx f_0 + f_1 \cdot x_{ks}(t) \quad (1.29)$$

Das Zeitliche Verhalten wird dann lediglich durch die Tangentensteigung f_1 und den zeitabhängigen Kleinsignalanteil $x_{ks}(t)$ bestimmt. Unter diesen Bedingungen kann das Verhalten nichtlinearer Systeme durch lineare Systeme approximiert. So steht wieder das gesamte Arsenal an Methoden der linearen Systemtheorie zur Verfügung, welche Gegenstand dieses Dokuments ist.

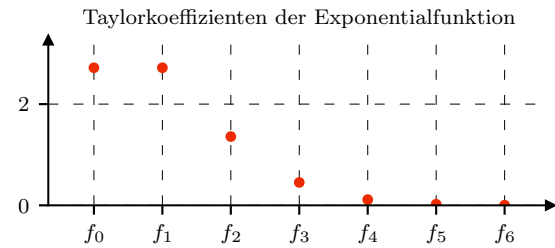


Abbildung 1.6: Taylorkoeffizienten der Exponentialfunktion im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

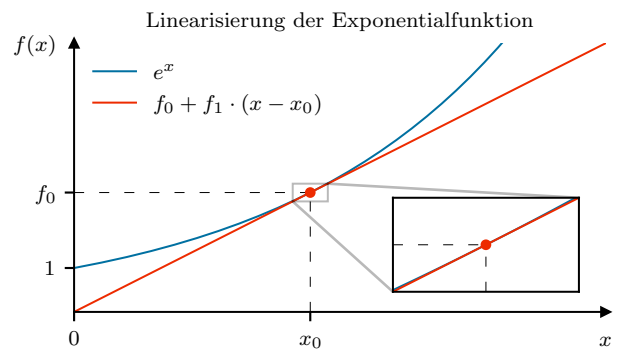


Abbildung 1.7: Linearisierung der Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 1$ (Arbeitspunkt x_0, f_0)

1.4 ALLGEMEINES SYSTEMVERHALTEN

Nachdem die Beschreibung des Systems durch ein mathematisches Modell in Form eines linearen Differentialgleichungssystems (bzw. *Differentialgleichung*, *Operatorgleichung*) mit konstanten Koeffizienten diskutiert wurde, erfolgt nun die Diskussion einer Lösung. Die folgenden Formulierungen sind zunächst sehr allgemein. Es kann daher sinnvoll sein zwischen diesem Abschnitt und den Beispielen am Ende des Dokuments (*insbesondere dem Beispiel zum System erster Ordnung*) hin und her zu wechseln.

1.4.1 ZUM DIRACSTOSS

Nun ist vermutlich der richtige Zeitpunkt gekommen um den Diracstoß einzuführen. Dabei handelt es sich um ein Gebilde der Distributionentheorie (*also um eine Distribution*) und keine gewöhnliche Funktion. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Funktionen sind Ableitung und Integration etwas anders definiert.

Insbesondere die im Folgenden diskutierte Integrationseigenschaft des Diracstoßes macht ihn zu einem mächtigen Werkzeug, wenn nicht sogar dem Arbeitstier der linearen Systemtheorie.

Abbildung 1.8 zeigt einen Ansatz zur Herleitung der wichtigsten Eigenschaft des Diracstoßes. Er besitzt die Fläche Eins und wird im Grenzwert unendlich schmal. Sei also:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{für } -\epsilon \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.30)$$

Die Fläche unter der Rechteckfunktion $\delta_\epsilon(t)$ ergibt sich zu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = \left[\frac{t}{2\epsilon} \right]_{t=-\epsilon}^{t=\epsilon} = 1 \quad (1.31)$$

Damit kann der Diracstoß über eine Grenzwertbildung obiger Rechteckfunktion definiert werden:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) \quad (1.32)$$

Der Diracstoß ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion $g(t)$ (oft auch *Testfunktion*) eine reelle bzw. komplexe Zahl $\delta(g) = g(0)$ zu. Dies entspricht der Auswertung der Funktion an der Stelle $t = 0$. Formal wird diese Auswerteeigenschaft durch ein Integral ausgedrückt:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \delta(t) dt \quad (1.33)$$

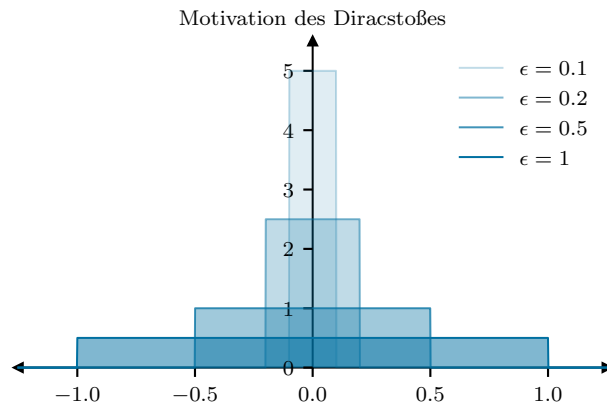


Abbildung 1.8: Motivation des Diracstoßes durch Rechtecke mit der Fläche 1

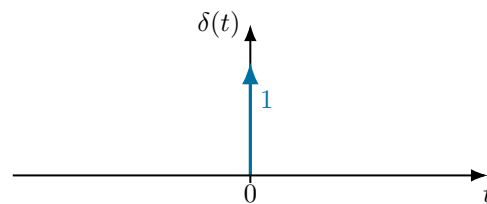


Abbildung 1.9: Visualisierung des mit 1 gewichteten Diracstoßes im Zeitbereich als nach oben gerichteter Pfeil.

1.4.2 ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT UND FALTUNG

Bevor wir uns näher mit der Lösung / Antwort von Systemen beschäftigen, die durch Differentialgleichungen oder gar Differentialgleichungssysteme beschrieben werden, können bereits einige Aussagen alleine aus der Linearität und der Zeitinvarianz getroffen werden. So beschreibt nach (1.1) die Transformation \mathcal{H} die Wirkung des Systems. Durch Ausnutzung der Auswertungseigenschaft des Diracstoßes kann die Eingangsfunktion $y(t)$ mittels Faltungsintegral (*dazu später genaueres*) umformuliert werden:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau \quad (1.34)$$

Setze nun diese Schreibweise der Erregung in Gleichung (1.1) ein:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{H}\{y(t)\} \\ &| \quad (1.34) \text{ einsetzen} \\ &= \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau\right\} \\ &| \quad \mathcal{H} \text{ wirkt nur bezüglich } t \text{ und ist linear} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{\delta(t - \tau)\} \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad h(t - \tau) := \mathcal{H}\{\delta(t - \tau)\} \text{ da Transformation zeitinvariant} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.35)$$

Die Schreibweise (1.34) ermöglicht also eine Darstellung der Systemantwort ohne die direkte Verwendung der Transformation \mathcal{H} . An ihre Stelle tritt die Funktion $h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$, welche im weiteren Verlauf als Stoßantwort des Systems bezeichnet wird. Dies ist eine zum System charakteristische Funktion und elementar bei der Behandlung linearer zeitinvarianter Systeme.

Obiger Formalismus ist besonders charmant, da er die lästige und zum Teil abstrakte Transformation \mathcal{H} komplett durch eine Funktion ersetzt, welche wiederum analysiert und interpretiert werden kann. Die Stoßantwort ist in der Systemtheorie quasi omnipräsent und ihre systematische Bestimmung und die Diskussion ihrer Eigenschaften sind elementarer Bestandteil dieses Skripts.

1.4.3 ANFANGSBEDINGUNGEN

Die Anfangsbedingungen beschreiben das Verhalten des Systems zum Zeitpunkt, ab dem eine Lösung angegeben werden kann, also dem Lösungsanfang. Sie enthalten die bereits zum Lösungsbeginn (*auch Betrachtungsbeginn*) im System gespeicherten Informationen.

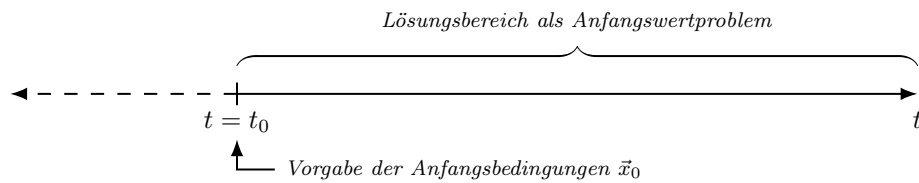


Abbildung 1.10: Visualisierung des Lösungsbereichs für $t > t_0$ von Anfangswertproblemen anhand eines Zeitstrahls

In der Physik und Technik ist das häufig die bereits im System gespeicherte Energie, beispielsweise die potentielle Energie in einer Feder, oder die elektrische Feldenergie in einer Kapazität. Diese Energiespeicher werden durch die Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$ charakterisiert. Aufgrund der Energieerhaltung ist klar, dass die Energie im System vor dem Betrachtungszeitpunkt $t < t_0$ erhalten ist und somit – sofern diese nicht zum Zeitpunkt t_0 verschwindet – eine Wirkung auf das Systemverhalten für den Lösungszeitraum $t > t_0$ haben muss.

Der Zeitpunkt $t = t_0$ wird auch als Betrachtungsbeginn oder Entstehungszeitpunkt des betrachteten Systems bezeichnet. Die Berechnung der Wirkung der Anfangsbedingungen auf die resultierende Systemantwort heißt Anfangswertproblem. Die Anfangsbedingungen werden im Anfangszustandsvektor $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ angegeben. Im weiteren Verlauf wird der Betrachtungsbeginn auf $t_0 = 0$ festgelegt.

Ohne Verlust der Allgemeinheit können mit den vorgestellten Methoden durch die Zeitinvarianz des Systems auch andere Zeitpunkte $t_0 \neq 0$ behandelt werden

1.4.4 AUSGLEICHSVORGÄNGE ZUM BEOBACHTUNGSBEGINN

In der Praxis ist der Übergang zum Betrachtungsbeginn t_0 zumeist stetig und die Anfangsbedingungen sind mit $\vec{x}(t_0^-) = \vec{x}(t_0^+)$ konsistent, da die Grenzwerte übereinstimmen. Allgemein muss das aber nicht immer gelten. Insbesondere, wenn das System vor und nach dem Betrachtungsbeginn eine andere Struktur hat, die sich in einer Veränderung in der Verknüpfung der Zustandsgrößen äußert (*oder gar Zustandsgrößen wegfallen, beispielsweise durch Vorgabe einer Zustandsgröße durch äußere Erregungen*) stimmen die Grenzwerte nicht immer überein.

In diesen Fällen kann es zu Ausgleichsvorgängen zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch Sprünge im zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen kommen. Die Sprunghöhe ergibt sich als Differenz der Grenzwerte der differenzierbaren Variablen des Systems:

$$\vec{x}_{\text{Ausgleich}} = \vec{x}(t_0^-) - \vec{x}(t_0^+) \quad (1.36)$$

Lokal kann die Änderung der Zustandsgrößen am Zeitpunkt $t = t_0$ also durch zeitverschobene Sprungfunktionen $\theta(t - t_0)$ dargestellt werden. Durch die Ableitung der Zustandsgrößen werden dann zum Betrachtungsbeginn gewichtete Dirac-Stöße in das System eingeprägt, welche in der Praxis zu unendlichen Leistungen (*unendlich schnelle Änderung endlicher Energie*) führen können:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \delta(t - t_0) \cdot \vec{x}_{\text{Ausgleich}} \quad \text{für} \quad t = t_0 \quad (1.37)$$

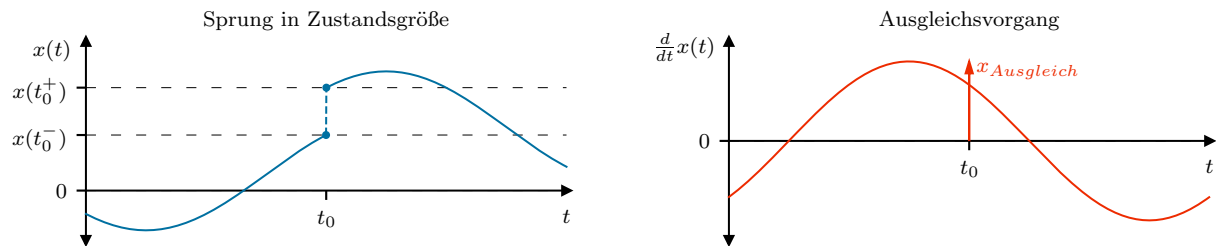


Abbildung 1.11: Visualisierung eines Sprungs in einer Zustandsgröße beim Zeitpunkt $t = t_0$ und resultierendem Stoß.

1.4.5 ALLGEMEINER LÖSUNGSANSATZ

Losgelöst von der allgemeinen Systemantwort linearer zeitinvarianter Systeme (1.35), schauen wir uns nun den klassischen Lösungsweg über die Lösung des beschreibenden Differentialgleichungssystems an. Im späteren Verlauf sollte klar werden, dass beide Wege zum selben Ziel führen und der allgemeine Weg über die Faltung in vielen Fällen der schnellere, aber wenigstens der elegantere ist.

Ein allgemeiner Ansatz zur Lösung des Differentialgleichungssystems (1.13) ist die Aufspaltung der Lösungsfunktion in einen homogenen $\vec{x}_h(t)$ und einen partikulären $\vec{x}_p(t)$ Anteil:

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\vec{x}_h(t)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\vec{x}_p(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (1.38)$$

Dieser Ansatz scheint auf den ersten Blick etwas willkürlich, leuchtet aber ein, wenn man die Linearität des Systems bedenkt. Demnach muss sich die Lösung zusammensetzen aus einer Teillösung bezüglich der Anfangswerte / Anfangsbedingungen \vec{x}_0 (*homogener Anteil*) und einer Teillösung bezüglich der Erregungen $\vec{y}(t)$ (*partikulärer Anteil*). Die Linearität erlaubt hier also die Anwendung des Superpositionsprinzips.

Zunächst wird hier der allgemeine Fall für Systeme erster Ordnung, die durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben werden können behandelt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda \cdot x(t) + y(t) \quad (1.39)$$

Die Lösung dieses Problems wird dann im Anschluss auf Systeme höherer Ordnung ausgeweitet.

1.4.6 HOMOGENE LÖSUNG VON SYSTEMEN ERSTER ORDNUNG

Die homogene Lösung beschreibt die Lösung der homogenen Differentialgleichung. Das entspricht dem unerregten System mit dem Eingang $y(t) = 0$. Gesucht ist also eine Lösung (*eine Funktion, welche die Operatorgleichung erfüllt*) für die Eigenwertgleichung:

$$\frac{d}{dt}x_h(t) = \lambda \cdot x_h(t) \quad (1.40)$$

Im ersten Schritt der Lösung erfolgt eine Substitution der Funktion $x_h(t) = x$, was eine Umformung (*oft als Trennung der Variablen bezeichnet*) der Eigenwertgleichung erlaubt:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x \quad \xrightarrow{\text{Trennung der Variablen } x \text{ und } t} \quad \frac{1}{x} dx = \lambda dt$$

Die rechte und linke Seite der Gleichung sind jetzt von komplett unterschiedlichen Variablen abhängig. Sie können als unbestimmte Integrale interpretiert werden:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \lambda dx \quad (1.41)$$

Der Eigenwert λ ist nicht von t abhängig. Bilde nun die Stammfunktionen der beiden unbestimmten Integrale. Die Integrationskonstanten sind – wie der Name schon sagt konstant – und können daher zu einer gemeinsamen Konstante c zusammengefasst werden:

$$\ln(x) = \lambda \cdot t + c \quad (1.42)$$

Die Beziehung des natürlichen Logarithmus auf der linken Seite zur Exponentialfunktion kann nun ausgenutzt werden, um die Gleichung weiter umzuformen. Mit der Rücksubstitution folgt:

$$x = e^{\lambda \cdot t} \cdot e^c \quad \xrightarrow{\text{Rücksubstitution } x=x_h(t)} \quad x_h(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot e^c$$

Die Lösung ist jetzt noch nicht vollständig bestimmt. Es bleibt noch die Konstante e^c . Untersuche dafür die homogene Lösung an der Stelle $t = 0$:

$$x_h(0) = e^{\lambda \cdot 0} \cdot e^c = \cdot e^c \quad (1.43)$$

Damit ist also die Konstante in der Lösung der Wert der gesuchten Funktion an der Stelle $t = t_0$. Dieser Wert wird im Folgenden als Anfangswert bezeichnet und mit $x(0) = x_0$ abgekürzt. Er repräsentiert den Startwert des Systems und damit die Ausgangssituation zu Beginn der Betrachtung des Systems. Die daraus hervorgehende Lösung ist über den Anfangswert abhängig vom Verhalten des Systems bis zu diesem Zeitpunkt hin und kann aufgrund der Kausalität (*Ursache vor Wirkung*) nur ab diesem Zeitpunkt – also für $t > 0$ – gelten:

$$x_h(t) = x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (1.44)$$

Die homogene Lösung ist dementsprechend nur abhängig vom Anfangswert und vom Eigenwert des Systems, wobei ersterer vom Systemverhalten für $t < 0$ abhängt und letzterer charakteristisch zum System selbst ist. Aufgrund der Zeitinvarianz des Systems (λ ist konstant) kann die Vorgabe des Anfangswertes x_0 auch zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt t_0 erfolgen. Die Lösung gilt dann ab diesem Zeitpunkt der Vorgabe der Anfangswerte

1.4.7 PARTIKULÄRE LÖSUNG VON SYSTEMEN ERSTER ORDNUNG

Um die vollständige Lösung zu berechnen fehlt also noch der partikuläre Anteil der Lösung. Mit der Bereits bekannten homogenen Lösung kann der folgende Ansatz für die gesamte Lösung gewählt werden:

$$x(t) = \underbrace{x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (1.45)$$

Die Wahl des Ansatzes $K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$ für die partikuläre Lösung scheint auf den ersten Blick etwas willkürlich. Die Nützlichkeit dieser Schreibweise wird allerdings schnell klar, wenn der gesamte Lösungsansatz abgeleitet wird:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}) + \frac{d}{dt}(K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}) \quad (1.46)$$

| Ableitung des part. Anteils über Produktregel

$$= \lambda \cdot \underbrace{x_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}}_{x_h(t)} + \left(\lambda \cdot \underbrace{K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}}_{x_p(t)} + e^{\lambda \cdot t} \cdot \frac{d}{dt}K(t) \right) \quad (1.47)$$

| mit $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ folgt die Ersetzung

$$= \lambda \cdot x(t) + \underbrace{e^{\lambda \cdot t} \cdot \frac{d}{dt}K(t)}_{y(t)} \quad (1.48)$$

Durch diesen Schritt kann jetzt durch Vergleich mit der ursprünglichen Differentialgleichung dem rechten Anteil die Erregung $y(t)$ zugeordnet werden. Es folgt:

$$e^{\lambda \cdot t} \cdot \frac{d}{dt}K(t) = y(t) \quad (1.49)$$

Eine kurze Umformung liefert einen Ausdruck für die Ableitung der noch unbekannten Funktion $K(t)$:

$$\frac{d}{dt}K(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot y(t) \quad (1.50)$$

Durch beidseitige Integration (*Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*) kann die unbekannte Funktion (*bis auf eine Konstante*) bestimmt werden:

$$K(t) = \int_0^t e^{-\lambda \cdot \tau} \cdot y(\tau) d\tau \quad (1.51)$$

Die untere Integrationsgrenze $\tau = 0$ bedeutet, dass der Integrand nur für $\tau > 0$ ausgewertet wird und somit nur Anteile der Erregung $y(\tau)$ für diesen Zeitbereich in der Lösung enthalten sein können. Die Lösung kann also wieder aufgrund der Kausalität nur für $t > 0$ sinnvoll sein. Für die partikuläre Lösung ergibt sich damit für eine beliebige Erregung:

$$x_p(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot K(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \cdot y(\tau) d\tau \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (1.52)$$

Auch hier erlaubt die Zeitinvarianz des Systems wieder die Wahl eines beliebigen Betrachtungsbeginns t_0 der Lösung.

1.4.8 ANMERKUNG ZUR MATRIXEXPONENTIALFUNKTION

Für die Erweiterung der Lösung auf lineare Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung wie der Zustandsraumdarstellung wird unter anderem die Matrixexponentialfunktion verwendet. Diese wird in diesem Abschnitt etwas genauer behandelt.

Sei die reellwertige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Die Matrixexponentialfunktion ist über eine Potenzreihe definiert:

$$e^{\mathbf{A} \cdot x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \mathbf{A}^k \cdot x^k \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ mal}} \quad (1.53)$$

Völlig äquivalent zur skalaren Exponentialfunktion gilt für die Ableitung der Matrixexponentialfunktion über die Darstellung als unendliche Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\mathbf{A} \cdot x} &= \frac{d}{dx} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot x^3 + \dots \right) \\ &| \quad \text{Ableitung der Matrixpolynomfunktion} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot x^2 + \dots \\ &| \quad \mathbf{A} \text{ ausklammern} \\ &= \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot x^2 + \dots \right) \\ &| \quad \text{unendliche Reihe durch Summe ersetzen} \\ &= \mathbf{A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \mathbf{A}^k \cdot x^k \\ &| \quad \text{ersetze die Reihe durch die Exponentialfunktion} \\ &= \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot x} \\ &| \quad \text{wegen der Kommutativität von } \mathbf{A} \text{ mit sich selbst gilt außerdem} \\ &= e^{\mathbf{A} \cdot x} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Durch rekursive Anwendung der Beziehung (1.54) ergibt sich direkt ein allgemeiner Ausdruck für höhere Ableitungen der Matrixexponentialfunktion:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{\mathbf{A} \cdot x} = \mathbf{A}^n \cdot e^{\mathbf{A} \cdot x} \quad (1.55)$$

Die Stammfunktion der Matrixexponentialfunktion ergibt sich bei genauerer Betrachtung von (1.54) ebenfalls direkt und sogar relativ intuitiv. Analog zur skalaren Exponentialfunktion wird hier wegen dem Matrixcharakter statt dem Kehrwert die Inverse gebildet. Die Integration funktioniert also nur, wenn \mathbf{A} invertierbar ist. Aber dann:

$$\int_0^x e^{\mathbf{A} \cdot \sigma} d\sigma = \mathbf{A}^{-1} \cdot e^{\mathbf{A} \cdot x} \quad (1.56)$$

1.4.9 HOMOGENE LÖSUNG VON SYSTEMEN HÖHERER ORDNUNG

Betrachte für die homogene Lösung das mit $\vec{y}(t) = \vec{0}$ unerregte lineare zeitinvariante System in der Zustandsraumdarstellung (1.13). Zu lösen ist dabei das folgende lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (*Matrizeinträgen*) nach den Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$ als Anfangswertproblem:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) \quad (1.57)$$

Die Lösung ist direkt und ausschließlich von den Anfangsbedingungen $\vec{x}(t_0)$ und der Zustandsmatrix \mathbf{A} abhängig. Sie kann direkt durch Ersetzung der Exponentialfunktion $e^{\lambda \cdot (t-t_0)} \rightarrow e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)}$ durch die Matrixexponentialfunktion der Lösung (1.44) gewonnen werden. Die Validität dieser Ersetzung folgt direkt aus (1.54):

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0 \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.58)$$

Die homogene Lösung beschreibt das Verhalten des Systems anhand der zum Betrachtungsbeginn t_0 im System gespeicherten Werte der Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$. Diese Werte werden auch als Anfangswerte bzw. Anfangsbedingungen bezeichnet und mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ abgekürzt. Der Systemausgang bzw. die Systemausgänge $\vec{u}(t)$ des unerregten Systems ergeben sich dann mit der Überlagerungsgleichung (1.14) zu:

$$\vec{u}(t) = \mathbf{C}^T \cdot e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0 \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.59)$$

1.4.10 PARTIKULÄRE LÖSUNG VON SYSTEMEN HÖHERER ORDNUNG

Unter der inhomogenen Lösung versteht man den Teil der Lösung $x(t)$, welcher nur aus der Wirkung einer externen Erregung $y(t)$ (*der Inhomogenität*) hervorgeht. Die Anfangsbedingungen werden bei dieser Lösung mit $\vec{x}_0 = \vec{0}$ komplett vernachlässigt. Die Inhomogene Lösung kann als Wirkung des Eingangs auf den Ausgang verstanden werden. Gesucht ist also zunächst die Lösung der Zustandsgrößen $\vec{x}(t)$ des inhomogenen Zustandsraummodells (1.13). Hier zunächst ohne Ableitungen von Quelltermen:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \vec{y}(t) \quad (1.60)$$

Die allgemeine partikuläre Lösung kann aus der Lösung für Systeme erster Ordnung (1.52) adaptiert werden. Ersetze dafür $e^{\lambda \cdot (t-\tau)} \rightarrow e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)}$ und $y(\tau) \rightarrow \mathbf{B} \cdot \vec{y}(\tau)$ im Integral. Zu beachten ist außerdem die Multiplikationsreihenfolge für die Matrizen. Dann folgt:

$$\vec{x}(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{y}(\tau) d\tau \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.61)$$

Der Systemausgang ergibt sich dann wieder über die Überlagerungsgleichung (1.14) durch:

$$\vec{u}(t) = \mathbf{C}^T \cdot \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{y}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \cdot \vec{y}(t) \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.62)$$

1.4.11 ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT LINEARER ZEITINVARIANTER SYSTEME

Die gesamte inhomogene Systemlösung ergibt sich aufgrund der Linearität des Systems durch die Überlagerung der Antworten bezüglich aller Erregungen (*enthalten in der partikulären Lösung*) und der Systemantwort bezüglich der bereits im System gespeicherten Anfangswerte (*homogene Lösung*). Auch diese Gesamtlösung kann nur für einen Zeitbereich $t > t_0$ angegeben werden:

$$\vec{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{y}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.63)$$

Durch die Überlagerungsmatrix \mathbf{C}^T und die mit \mathbf{D} direkt durchgeschleiften Erregungen ergeben sich die Systemausgänge als Superposition der Zustandsgrößen und der Erregungen:

$$\vec{u}(t) = \mathbf{C}^T \cdot \underbrace{e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0}_{\text{homogene Lösung}} + \mathbf{C}^T \cdot \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{y}(\tau) d\tau}_{\text{partikuläre Lösung}} + \mathbf{D} \cdot \vec{y}(t) \quad \text{für } t > t_0 \quad (1.64)$$

Für Systeme mit nur einem Eingang $y(t)$ und einem Ausgang $u(t)$ (*SISO* \Leftrightarrow *Single Input Single Output*) vereinfacht sich die Darstellung erheblich. Die Matrizen werden dann zu Vektoren, welche die Überlagerung der Zustandsgrößen auf den Ausgang repräsentieren. Im weiteren Verlauf dieses Skripts werden hauptsächlich Systeme mit nur einem Eingang und einem Ausgang behandelt.

1.4.12 DARSTELLUNG DER LÖSUNG ALS INTEGRALTRANSFORMATION

Die allgemeine Systemantwort kann jetzt weiter umformuliert werden. Die Wirkung der Erregungen $\vec{y}(t)$ lässt sich unter Einführung eines Diracstoßes vollständig als eine Integration schreiben:

$$\vec{u}(t) = \underbrace{\mathbf{C}^T \cdot e^{\mathbf{A} \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0}_{\text{Wirkung der Anfangsbed.}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \left(\mathbf{C}^T \cdot e^{\mathbf{A} \cdot (t-\tau)} \cdot \mathbf{B} + \delta(t-\tau) \cdot \mathbf{D} \right) \cdot \vec{y}(\tau) d\tau}_{\vec{u}_p(t) \text{ Wirkung der Erregungen}} \quad \text{für } t > t_0$$

In dieser Schreibweise lässt sich eine Funktion (*hier Matrixfunktion*) identifizieren, die die Wirkung der Eingänge auf die Ausgänge beschreibt und somit das System charakterisiert:

$$\mathbf{H}(t) = \theta(t) \cdot \mathbf{C}^T \cdot e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{B} + \delta(t) \cdot \mathbf{D} \quad (1.65)$$

Bei dieser Funktion handelt es sich um die später noch viel diskutierte Stoßantwort des Systems. Diese ist hier für das allgemeine MIMO-System eine Matrixfunktion, bei der die Anzahl der Zeilen der Anzahl der Ausgänge und die Anzahl der Spalten der Anzahl der Eingänge entspricht. Die Matrixeinträge beschreiben also jeweils die Wirkung von einem Eingang auf einen Ausgang. Die Wirkungen werden durch die Matrixschreibweise linear überlagert (*Superposition*). Die Wirkung der Erregungen $\vec{u}_p(t)$ (*partikulärer Anteil*) kann mit der Formulierung der Stoßantwort (1.65) weiter abgekürzt werden. Außerdem lässt sich so die zu Beginn dieses Dokumentes eingeführte Transformation \mathcal{H} identifizieren, bei der es sich um eine Integraltransformation (*Faltungsintegral*) handelt:

$$\vec{u}_p(t) = \mathcal{H}\{\vec{y}(t)\} = \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau) \cdot \vec{y}(\tau) d\tau \quad \text{für } t > 0 \quad (1.66)$$

1.4.13 LÖSUNG FÜR DIFFERENZIERENDE SYSTEME

Für den in Abschnitt 1.2.7 motivierten Fall zusätzlicher Ableitungen der Erregungsgrößen $\vec{y}(t)$ durch das System kann die allgemeine Lösung ebenfalls angegeben werden. Dies ist ohne weiteres durch Substitution der Erregungsfunktionen und Überlagerungsmatrizen durch die entsprechenden Ableitungen möglich:

$$\mathbf{B} \cdot \vec{y}(t) \longrightarrow \sum_{k=0} \mathbf{B}_k \cdot \vec{y}^{(k)}(t) \quad (1.67)$$

$$\mathbf{D} \cdot \vec{y}(t) \longrightarrow \sum_{k=0} \mathbf{D}_k \cdot \vec{y}^{(k)}(t) \quad (1.68)$$

Es ist leicht vorstellbar, dass die Lösungsformel für diesen allgemeinen Fall lang und umständlich ausfällt.

1.4.14 VERHALTEN IM STATISCHEN FALL

Bisher wurden lineare zeitinvariante dynamische Systeme und deren allgemeine Lösung behandelt. Das dynamische (*zeitabhängige*) Verhalten wurde dabei auf die zum System charakteristischen Eigenwerte des Zustandsraummodells zurückgeführt. Ein besonderer Fall tritt dann ein, wenn die Dimension des Zustandsraummodells und somit die Ordnung des Systems Null ist:

$$\dim\{\mathbf{A}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dim\{\vec{x}(t)\} = 0 \quad (1.69)$$

Dann handelt es sich um ein zustandsloses System und somit um ein System ohne Dynamik. Systeme solcher Art werden auch als statisch bezeichnet. Für die vollständige Systembeschreibung reicht in diesem Fall ein rein algebraisches Gleichungssystem, welches die Eingänge und Ausgänge direkt miteinander verknüpft. Es wird kein Differentialgleichungssystem für die Beschreibung benötigt (*bzw. es existiert keine differential algebraische Beschreibung und die Dimension des Zustandsraumes ist Null*).

Aus dem Gleichungssystem (1.15, 1.16) entfallen dann alle Terme bis auf die direkte Durchschleifung der Systemeingänge und deren Ableitungen. Also gilt für die Systemausgänge:

$$\vec{u}(t) = \sum_{k=0} \mathbf{D}_k \cdot \vec{y}^{(k)}(t) \quad (1.70)$$

KAPITEL 2

DIE LAPLACETRANSFORMATION

Die Laplacetransformation ist eine einseitige Integraltransformation und bildet vom kontinuierlichen – zumeist reellen – Zeitbereich in den komplexen Laplacebereich ab. Die Eigenschaften der Laplacetransformation, wie die Eindeutigkeit der Hin- und Rücktransformation – unter bestimmten Voraussetzungen – und der Ableitungssatz ermöglichen es die Berechnungen zur Lösung linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen wesentlich zu vereinfachen. Außerdem lassen sich einige Eigenschaften des Systems, wie die Stabilität und das Verhalten bei Anregung mit harmonischer Schwingung unterschiedlicher Frequenzen – also einem Frequenzgang – direkt aus der Struktur der Darstellung im Laplacebereich ablesen.

2.1 INTEGRALTRANSFORMATIONEN

Da es sich bei der Laplacetransformation um eine (*einseitige*) Integraltransformation handelt, werden an dieser Stelle allgemeine Integraltransformationen etwas näher behandelt. Außerdem werden einige Begrifflichkeiten im Zusammenhang mit Integraltransformationen eingeführt.

2.1.1 DEFINITION DER INTEGRALTRANSFORMATION

Ein linearer Operator bzw. eine lineare Transformation \mathcal{T} heißt Integraltransformation, wenn die Transformationsvorschrift folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\mathcal{T}\{f(\tau)\}(t) = \int K(\tau, t) \cdot f(\tau) d\tau = k(t) \quad (2.1)$$

Dabei ist $K(\tau, t)$ der Integralkern und die Funktion $k(t)$ die \mathcal{T} -Transformierte der Funktion $f(t)$. Die Integraltransformation ist über den Integralkern definiert. Für die Existenz des Integrals (*also die Transformierbarkeit*) werden in der Regel sowohl an den Kern, also auch an die zu transformierende Funktion einige Anforderungen gestellt. Die Transformationsvorschrift lässt sich ohne Verlust der Allgemeinheit auch auf komplexe Funktionen und Integralkerne erweitern. Es lässt sich erkennen, dass der Integralkern $K(\tau, t)$ die charakterisierende Größe der Transformation \mathcal{T} ist. Die allgemeine Lösung der Operatorgleichung über Greensche Funktionen im vorherigen Kapitel entspricht demnach also einer Integraltransformation, welche einer Invertierung bzw. Umkehrung des Differentialoperators \mathcal{D}^{-1} entspricht.

2.1.2 DAS FALTUNGSINTEGRAL ALS INTEGRALTRANSFORMATION

Das Faltungsintegral ist ein sehr prominentes Beispiel für eine Integraltransformation, sie ist in vielen Ingenieursdisziplinen ein essentieller Bestandteil. Das Faltungsintegral ist definiert als:

$$(f(\tau) * g(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Das Integral (2.7) wird als die Faltung der Funktion $f(t)$ mit der Funktion $g(t)$ bezeichnet. Der Integralkern ist in diesem Fall als $K(\tau, t) = f(t - \tau)$ identifizierbar. Anschaulich werden bei der Faltung im Integranden die beiden Funktionen $f(\tau)$ und $g(\tau)$ mit der Verschiebung um t bzw. $(t - \tau)$ übereinander geschoben / gefaltet. Dies entspricht einer Gewichtung jedes Funktionswertes der um t verschobenen Funktion $f(t - \tau)$ mit jedem Funktionswert von $g(\tau)$ für alle τ . Die gedachten Nullpunkte $\tau = 0$ der beiden Funktionen laufen dabei mit steigendem t immer weiter auseinander.

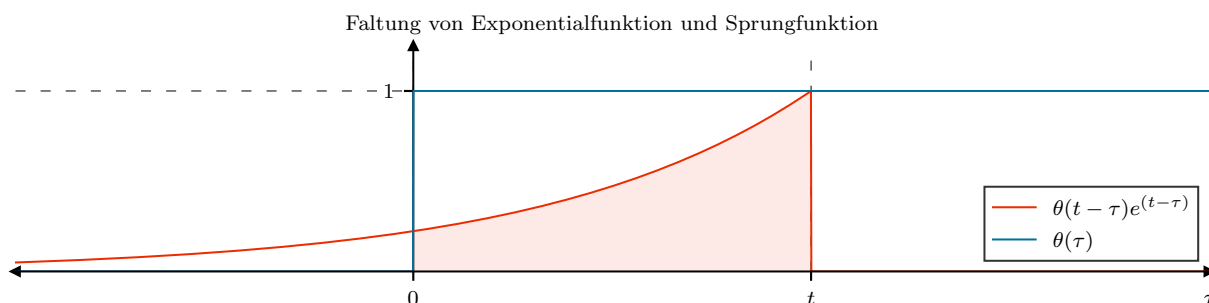


Abbildung 2.1: Visualisierung der Gewichtung von zwei Funktionen (*hier Exponentialfunktion und Sprungfunktion*) im Integranden des Faltungsintegrals.

2.2 LAPLACETRANSFORMATION UND LAPLACEBEREICH

Für eine reelle Funktion $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ im Zeitbereich – Zeitabhängige Funktion mit der Variable t – folgt mit der Anwendung der Laplacetransformation \mathcal{L} eine Überführung bzw. Transformation vom Zeitbereich in den Laplacebereich. Dabei ist $\underline{F}(\underline{s}) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ die Laplacetransformierte von $f(t)$ bzw. die Bildfunktion im von $f(t)$ Laplacebereich.

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto \underline{F}(\underline{s}) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \circ \bullet \underline{F}(\underline{s}) \quad (2.3)$$

Die komplexe Variable $\underline{s} = \alpha + j\omega \in \mathbb{C}$ hat einen Realteil $\alpha \in \mathbb{R}$ und einen Imaginärteil $\omega \in \mathbb{R}$. Das Argument hat zwei Freiheitsgrade und ein Punkt im Laplacebereich kann als Punkt in der α - ω -Ebene interpretiert werden. Häufig wird daher die Bezeichnung komplexe \underline{s} -Ebene oder Laplaceebene für den Definitionsbereich der Laplacetransformation verwendet.

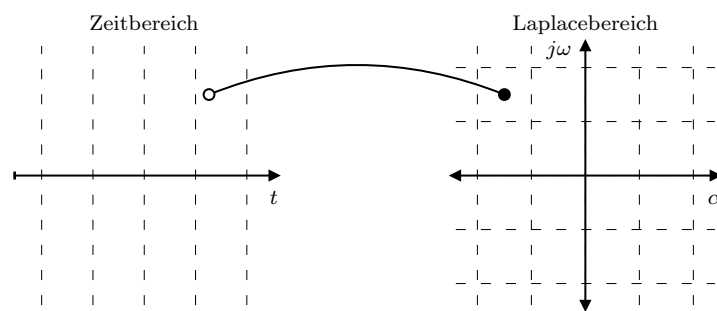


Abbildung 2.2: Visualisierung der Überführung von Zeitbereich und Laplacebereich. Dabei ist $\underline{s} = \alpha + j\omega$

2.2.1 DEFINITION DER LAPLACETRANSFORMATION

Die Laplacetransformation verknüpft beiden Funktionen $f(t)$ und $\underline{F}(\underline{s})$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\underline{s}) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt = \underline{F}(\underline{s}) \quad (2.4)$$

Dabei handelt es sich um eine einseitige Integraltransformation mit dem komplexen Integrationskern $\underline{K}(t, \underline{s}) = e^{-\underline{s}t}$ und dem Integrationsintervall $[0, \infty)$. Ferner hat die komplexe Variable \underline{s} im Laplacebereich, wenn t die Zeit mit der Einheit Sekunde ist, die Einheit einer Frequenz. Das folgt aus der Dimensionslosigkeit des Exponenten $\underline{s}t$ im Integralkern. Daher wird \underline{s} auch häufig als komplexe Frequenz bezeichnet.

2.2.2 EXISTENZBEDINGUNGEN DER LAPLACETRANSFORMIERTEN

Die Laplacetransformierte existiert nicht für jede beliebige Funktion $f(t)$. Grundsätzlich stützt sich die Existenzbedingung darauf, dass das Integral für die gewählten Grenzen konvergiert. Dazu muss die zu transformierende Funktion $f(t)$ von exponentieller Ordnung sein und gelten:

$$|f(t)| \leq |C \cdot e^{\alpha t}| \quad \text{für alle } t > 0$$

Dabei sind C und α beliebig groß wählbare reelle Konstanten. Wenn das erfüllt ist, kann immer ein $\underline{s} \in \mathbb{C}$ gewählt werden, sodass das Laplaceintegral konvergiert. Für die Konvergenz des Laplaceintegrals muss also die zu transformierende Funktion $f(t)$ immer in einem Schlauch liegen, der von einer beliebigen Exponentialfunktion aufgespannt wird. Speziell konvergiert das uneigentliche Laplaceintegral (2.4) in einer Konvergenzebene ab einem Realteil $\Re\{\underline{s}\} > \alpha$ der komplexen Frequenz.

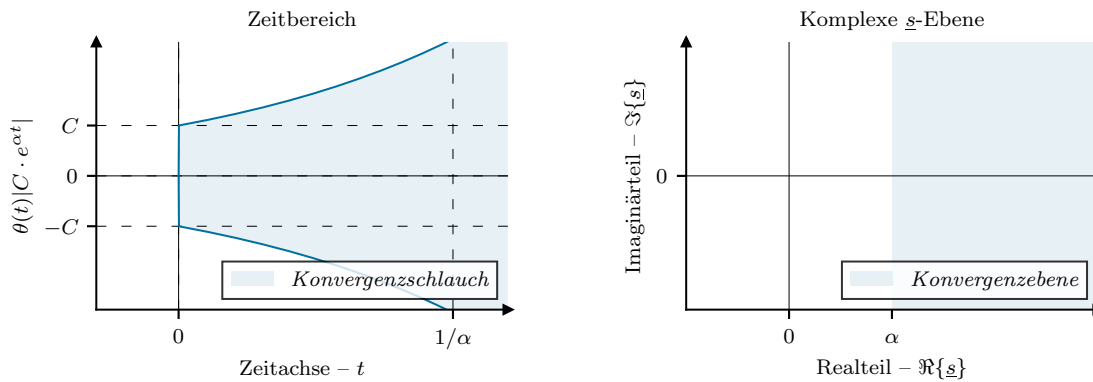


Abbildung 2.3: Visualisierung der Konvergenzkriterien für das Laplaceintegral. Links: Konvergenz von Funktionen exponentieller Ordnung innerhalb eines Schlauches im Zeitbereich, Rechts: Konvergenz ab einem Realteil α in der komplexen \underline{s} -Ebene

2.2.3 MOTIVATION DER GÜLTIGKEIT UND EINDEUTIGKEIT

Die spezielle Formulierung des Laplaceintegrals (2.4) mit der unteren Integrationsgrenze 0 führt dazu, dass die Funktion $f(t)$ während der Transformation nur für positive Werte von t ausgewertet wird. Die Laplacetransformierte $\underline{F}(\underline{s})$ ist also lediglich eine Repräsentation der Funktion für positive t , also für $t > 0$. Das bedeutet, dass keine Informationen über $f(t)$ für $t < 0$ in der Laplacetransformierten enthalten sind und demnach im Laplacebereich nur Aussagen über das Verhalten für positive t getroffen werden kann. Die Eindeutigkeit der Laplacetransformation – insbesondere der Rücktransformation \mathcal{L}^{-1} – wird damit also nicht für alle t gewährleistet. Für die Analyse mit der Laplacetransformation (im Zeitbereich $t > 0$) wird daher die Funktion als $f(t) = 0$ für alle $t < 0$ vorausgesetzt / angenommen. Formal kann dies durch ein Abschneiden der Funktion für $t < 0$ mittels der Sprungfunktion $\theta(t)$ realisiert werden.

2.3 EIGENSCHAFTEN DER LAPLACETRANSFORMATION

Aus der Definition der Laplacetransformation über das Integral (2.4) folgen (*unter der Annahme, dass die Laplacetransformierte existiert ...*) direkt einige wichtige Eigenschaften. Diese Eigenschaften sind unter anderem der Grund dafür, dass die Laplacetransformation so gut für die Analyse linearer Differentialgleichungen geeignet ist.

2.3.1 LINEARITÄT DER LAPLACETRANSFORMATION

Die Wichtigkeit und Bedeutung der Linearität wird häufig unterschlagen, deswegen hier noch einmal ganz ausführlich. Sei also die Funktion $\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$ gegeben, dann handelt es sich dabei um eine Linearkombination der beiden Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ mit den Linearfaktoren α und β (*hier reell, können aber auch komplex sein*). Dann folgt für die Laplacetransformierte:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty (\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)) \cdot e^{-st} dt \\
 &| \quad \text{Integral ist linear} \\
 &= \int_0^\infty \alpha \cdot f(t) \cdot e^{-st} + \beta \cdot g(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &| \quad \text{Aufspalten und Linearfaktoren herausziehen} \\
 &= \alpha \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt + \beta \cdot \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &| \quad \text{mit der Definition folgt} \\
 &= \alpha \cdot \underline{F}(\underline{s}) + \beta \cdot \underline{G}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

Die Linearität der Laplacetransformation ermöglicht die Überlagerung – also die Linearkombination – mehrere Funktionen zu einer Gesamtfunktion. Die Teilfunktionen – auch Basisfunktionen – können daher einzeln analysiert / berechnet / transformiert und anschließend wieder zusammengesetzt werden. Diese Form der Überlagerung wird auch als Superposition und deren Anwendung als Superpositionsprinzip bezeichnet.

2.3.2 DER ABLEITUNGSSATZ

Der Ableitungssatz ist wohl die wichtigste Eigenschaft für den Umgang mit Differentialgleichungen. Die Anwendung der Laplacetransformation \mathcal{L} auf die Ableitung einer Funktion $f(t)$, die für $t > 0$ gegeben und mindestens einmal differenzierbar ist liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\
 &| \quad \text{partielle Integration} \\
 &= \left[f(t) \cdot e^{-\underline{s}t}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty f(t) \cdot (-\underline{s})e^{-\underline{s}t} dt \\
 &| \quad \text{Auswertung: } f(t) \text{ exponentieller Ordnung} \\
 &= 0 - f(0^+) + \underline{s} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\
 &| \quad \text{mit der Definition folgt} \\
 &= \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+)
 \end{aligned}$$

Der Ableitungssatz ist also:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}(\underline{s}) = \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \quad (2.5)$$

Dabei ist $f(0^+)$ der rechtsseitige Grenzwert der Funktion $f(t)$ für $t \rightarrow 0$. Dieser konstante reelle Wert ist der Anfangswert der Funktion im Zeitbereich. Oft wird als Anfangswert auch $f(0)$ spezifiziert, die Äquivalenz $f(0) = f(0^+)$ gilt aber nur wenn die Funktion $f(t)$ zum Entstehungszeitpunkt $t = 0$ stetig ist. Das ist jedoch nicht immer gewährleistet.

Dieser Zusammenhang (2.5) führt nun dazu, dass beim Übergang in den Laplacebereich aus der Ableitung eine Multiplikation mit der Variablen \underline{s} wird. In Hinsicht auf die Analyse von Differentialgleichungen wird also aus einem differential-algebraischen Problem ein rein algebraisches Problem, welches durch rein algebraische Operationen – wie Multiplikation und Addition – gelöst werden kann. Es ist keine Integration (außer für den Transformationsschritt ... obwohl man sich auch diesen sparen kann \rightarrow Korrespondenztabelle) notwendig und die Anfangswerte können direkt in das Gleichungssystem übergeben werden!

2.3.3 DER ABLEITUNGSSATZ FÜR HÖHERE ABLEITUNGEN

Als Verallgemeinerung für höhere Ableitungen kann ebenfalls ein Ableitungssatz formuliert werden. Insbesondere für Differentialgleichungen höherer Ordnung kann diese Formulierung gewinnbringend eingesetzt werden. Die Schreibweise für die Ableitung wird im Folgenden für alle $k \in \mathbb{N}_0$ abgekürzt:

$$f^{(k)}(t) := \frac{d^k}{dt^k} f(t) \quad \text{und} \quad f_0^{(k)} := \frac{d^k}{dt^k} f(t) \Big|_{t \rightarrow 0}$$

Für die n -te Ableitung einer ab $t > 0$ gegebenen und mindestens n -fach differenzierbaren Funktion $f(t)$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty f^{(n)}(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{partielle Integration} \\ &= \left[f^{(n-1)}(t) \cdot e^{-\underline{s}t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \underline{s} \int_0^\infty f^{(n-1)}(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{Auswertung des linken Terms hat immer gleiche Form} \\ &= -f_0^{(n-1)} + \underline{s} \int_0^\infty f^{(n-1)}(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{partielle Integration bis } f^{(n-1)}(t) \text{ vollständig abgebaut ist} \\ &= -f_0^{(n-1)} + \underline{s} \left(-f_0^{(n-2)} + \underline{s} \left(\dots \left(-f_0^{(1)} + \underline{s} \left(-f_0 + \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) \right) \right) \dots \right) \right) \\ &| \quad \text{ausmultiplizieren der einzelnen Schichten} \\ &= -f_0^{(n-1)} - \underline{s} f_0^{(n-2)} \dots - \underline{s}^{n-2} f_0^{(1)} - \underline{s}^{n-1} f_0 + \underline{s}^n \cdot \underline{F}(\underline{s}) \\ &| \quad \text{Darstellung als Summe} \\ &= \underline{s}^n \cdot \underline{F}(\underline{s}) - \sum_{k=0}^{n-1} \underline{s}^{n-k-1} f_0^{(k)} \end{aligned}$$

Es folgt also für die Laplacetransformierte der n -ten Ableitung einer Funktion:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\}(\underline{s}) = \underline{s}^n \cdot \underline{F}(\underline{s}) - \sum_{k=0}^{n-1} \underline{s}^{n-k-1} f_0^{(k)} \quad (2.6)$$

In der Regel reicht es wenn man den Ableitungssatz für die erste Ableitung (2.5) im Kopf hat. Höhere Ableitungen lassen sich dann daraus zusammenbauen.

2.3.4 DER FALTUNGSSATZ IM ZEITBEREICH

Das Faltungsprodukt zweier Funktionen $f(t), g(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist definiert als Integraltransformation:

$$(f(\tau) * g(\tau))(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

Das Faltungsintegral (2.7) tritt als Teil der partikulären Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen auf und hat daher eine besondere Bedeutung. Unter Anwendung der Laplacetransformation folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{(f(\tau) * g(\tau))(t)\right\}(\underline{s}) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &\quad | \quad \text{umformulieren} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) \cdot e^{-\underline{s}t} d\tau dt \\ &\quad | \quad \text{substituiere: } t' = t - \tau \text{ und } dt' = dt \\ &= \int_{-\tau}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot g(\tau) \cdot e^{-\underline{s}(t' + \tau)} d\tau dt' \\ &\quad | \quad \text{umformulieren nach Integrationsvariablen} \\ &= \int_{-\tau}^{\infty} f(t') \cdot e^{-\underline{s}t'} dt' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-\underline{s}\tau} d\tau \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Integrationsgrenzen anpassen, da } g(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0 \\ \text{und } f(t') = 0 \text{ für } t' < 0 \text{ sind} \end{array} \right. \\ &= \int_0^{\infty} f(t') \cdot e^{-\underline{s}t'} dt' \cdot \int_0^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-\underline{s}\tau} d\tau \\ &\quad | \quad \text{Einsetzen der Definition} \\ &= \underline{F}(\underline{s}) \cdot \underline{G}(\underline{s}) \end{aligned}$$

Damit folgt der Faltungssatz der Laplacetransformation für die Faltung von Funktionen im Zeitbereich. Die Faltung von zwei Funktionen entspricht im Laplacebereich also einer Multiplikation:

$$\mathcal{L}\left\{(f(\tau) * g(\tau))(t)\right\}(\underline{s}) = \underline{F}(\underline{s}) \cdot \underline{G}(\underline{s}) \quad (2.8)$$

2.3.5 DER ANFANGSWERTSATZ

Der Anfangswertsatz verknüpft das Verhalten im Unendlichen der Laplacetransformierten mit dem Anfangswert der Funktion im Zeitbereich. Dabei werden die Grenzwerte für $t \rightarrow 0$ und $|\underline{s}| \rightarrow \infty$ gebildet. Bilde den beidseitigen Grenzwert $|\underline{s}| \rightarrow \infty$ mit dem Ableitungssatz (2.5):

$$\begin{aligned}
 \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt &= \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \\
 &| \quad \text{Integrand ist auf } [0, \infty) \text{ Riemann-integrierbar} \\
 \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) \cdot \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} e^{-\underline{s}t} dt &= \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \\
 &| \quad \text{linker Anteil verschwindet} \\
 0 &= \lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt der Anfangswertsatz der Laplacetransformation:

$$\lim_{|\underline{s}| \rightarrow \infty} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) = f(0^+) \quad (2.9)$$

Insbesondere, wenn die Funktion $f(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht stetig ist, können so die Anfangsbedingungen für $t > 0$ über den Anfangswertsatz aus der Laplacetransformierten berechnet werden.

2.3.6 DER ENDWERTSATZ

Der Endwertsatz verknüpft das Verhalten der Laplacetransformierten im Ursprung mit dem Endwert der Funktion im Zeitbereich. Dafür werden die Grenzwerte $t \rightarrow \infty$ und $\underline{s} \rightarrow 0$ gebildet. Bilde den beidseitigen Grenzwert $\underline{s} \rightarrow 0$ mit dem Ableitungssatz (2.5):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \\
 &| \quad \text{Integrand ist auf } [0, \infty) \text{ Riemann-integrierbar} \\
 \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) \cdot \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} e^{-\underline{s}t} dt &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \\
 &| \quad \text{linken Anteil umformulieren} \\
 \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) dt &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+) \\
 &| \quad \text{Integral lösen über Stammfunktion} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+) &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) - f(0^+)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt der Endwertsatz der Laplacetransformation:

$$\lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s}) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (2.10)$$

2.3.7 DER VERSCHIEBUNGSSATZ

Verschiebt man eine Funktion $f(t)$ im Zeitbereich um eine Konstante $T > 0$, dann kann diese Verschiebung $f(t - T)$ auch in den Laplacebereich übernommen werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f(t - T)\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty f(t - T) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\
 &\quad | \quad \text{substituiere: } \tau = t - T \text{ und } d\tau = dt \\
 &= \int_{-T}^\infty f(\tau) \cdot e^{-\underline{s}(\tau+T)} d\tau \\
 &\quad | \quad \text{Integrationsgrenzen anpassen, da } f(\tau) = 0 \text{ f\"ur } \tau < 0 \\
 &= e^{-\underline{s}T} \cdot \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-\underline{s}\tau} d\tau \\
 &\quad | \quad \text{mit der Definition folgt} \\
 &= e^{-\underline{s}T} \cdot \underline{F}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

Damit folgt der Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}\{f(t - T)\}(\underline{s}) = e^{-\underline{s}T} \cdot \underline{F}(\underline{s}) \quad (2.11)$$

Insbesondere bei der Zerlegung einer Funktion in mehrere Zeitbereiche, wie beispielsweise bei einer Rechteck-, oder Sägezahnfunktion in einzelne verschobene Teilfunktionen kann die Verschiebung auf diese Weise im Laplacebereich berücksichtigt werden (*hier steckt die Zeitinvarianz des Systems drin*).

2.3.8 DER DÄMPFUNGSSATZ

Analog zur Verschiebung im Zeitbereich kann auch im Laplacebereich eine Verschiebung um eine reelle Konstante a durchgeführt werden. Für $\underline{F}(\underline{s} - a)$ folgt eine Repräsentation im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(\underline{s} - a) &= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(\underline{s}-a)t} dt \\
 &\quad | \quad \text{umformulieren} \\
 &= \int_0^\infty e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\
 &\quad | \quad \text{mit der Definition folgt} \\
 &= \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}(\underline{s})
 \end{aligned}$$

Eine Verschiebung im Laplacebereich führt zu einem zusätzlichen Term e^{at} im Zeitbereich. Dieser bewirkt für $a < 0$ eine Dämpfung der Funktion $f(t)$. Damit folgt der Dämpfungssatz:

$$\underline{F}(\underline{s} - a) = \mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\}(\underline{s}) \quad (2.12)$$

2.3.9 DER ÄHNLICHKEITSSATZ

Neben der Verschiebung des Arguments im Zeitbereich, kann das Argument auch skaliert werden. Mit dem Linearfaktor $\alpha \in \mathbb{R}^+$ folgt die Skalierung des Arguments $f(\alpha \cdot t)$ im Laplacebereich zu:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f(\alpha \cdot t)\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty f(\alpha \cdot t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\
 &\quad \left| \text{substituiere: } \tau = \alpha \cdot t \text{ und } dt = \frac{d\tau}{\alpha} \right. \\
 &= \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-\frac{\underline{s}}{\alpha}\tau} \frac{d\tau}{\alpha} \\
 &\quad \left| \text{umformulieren} \right. \\
 &= \frac{1}{\alpha} \cdot \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-\frac{\underline{s}}{\alpha}\tau} d\tau \\
 &\quad \left| \text{mit der Definition und der Linearität folgt} \right. \\
 &= \frac{1}{\alpha} \cdot \underline{F}\left(\frac{\underline{s}}{\alpha}\right)
 \end{aligned}$$

Es folgt also für eine Skalierung des Arguments im Zeitbereich um einen Faktor α die Skalierung der Laplacetransformierten und der komplexen Frequenz \underline{s} mit dem Inversen Faktor $\frac{1}{\alpha}$:

$$\mathcal{L}\{f(\alpha \cdot t)\}(\underline{s}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \underline{F}\left(\frac{\underline{s}}{\alpha}\right) \quad (2.13)$$

Gerade für Sinus und Kosinus Terme kann der Ähnlichkeitssatz nützlich sein, da dann eine Skalierung des Arguments im Zeitbereich einer Skalierung der Frequenz entspricht.

2.4 GÄNGIGE FUNKTIONEN IM LAPLACEBEREICH

Es folgen die Laplacetransformierten einiger gängiger Funktionen. Insbesondere wegen der Eindeutigkeit der Hin- und Rücktransformation – nach Abschneiden durch eine Sprungfunktion $\theta(t)$ – und der Linearität können oft große, unübersichtliche Funktionen (*beispielsweise unter Verwendung des Verschiebungssatzes, etc.*) im Zeitbereich in diese einfacheren Funktionen zerlegt und einzeln transformiert werden (*folgt aus der Linearität*). Die Rücktransformation kann gleichermaßen einzeln erfolgen (*Zerlegung der Laplacetransformierten über eine Partialbruchzerlegung \rightarrow Korrespondenzen bekannter Funktionen*).

2.4.1 SPRUNGFUNKTION

Gemäß der Überlegungen zur Eindeutigkeit der Hin- und Rücktransformation sehen wir uns als Erstes die Sprungfunktion / Einheitssprung an:

$$\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Da die Laplacetransformation – bzw. die Rücktransformation – nur für positive t definiert ist, kann die Sprungfunktion dazu verwendet werden, eine beliebige Funktion für negative t abzuschneiden. Sei also die zu transformierende Funktion im Zeitbereich gegeben als $f(t) = \theta(t)$, dann folgt mit der Definition:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t)\}(\underline{s}) &= \int_0^{\infty} \theta(t) \cdot e^{-st} dt \\ &| \quad \text{es gilt } \theta(t) = 1 \text{ innerhalb der Integrationsgrenzen} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &| \quad \text{Integration der Exponentialfunktion} \\ &= \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &| \quad \text{Auswertung der Stammfunktion} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Die Laplacetransformierte der Sprungfunktion ist also:

$$\mathcal{L}\{\theta(t)\}(\underline{s}) = \frac{1}{s} \tag{2.14}$$

2.4.2 POLYNOMFUNKTION

Polynomfunktionen tauchen auch immer wieder auf – beispielsweise in einer Approximation durch eine Taylorentwicklung – und werden daher hier genauer behandelt. Allgemein haben sie die Form (*hier für negative t abgeschnitten durch eine Sprungfunktion*):

$$f(t) = a_0 \theta(t) + a_1 \theta(t) t + a_2 \theta(t) t^2 + a_3 \theta(t) t^3 + \dots \quad (2.15)$$

Besonders hervorzuheben ist, dass aufgrund der Linearität der Laplacetransformation die einzelnen Summanden / Polynomglieder (*manchmal auch als Monome bezeichnet*) einzeln transformiert und anschließend wieder aufsummiert werden können. Daher wird nun ohne Verlust der Allgemeinheit ein Polynomglied $\theta(t) t^n$ für eine beliebige Potenz $n \in \mathbb{N}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t) t^n\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty \theta(t) t^n \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{es gilt } \theta(t) = 1 \text{ innerhalb der Integrationsgrenzen} \\ &= \int_0^\infty t^n \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{partielle Integration bis } t^n \text{ komplett abgebaut ist} \\ &= \left[-\frac{1}{\underline{s}} t^n \cdot e^{-\underline{s}t} \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty -\frac{n}{\underline{s}} t^{n-1} \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \dots \text{ der linke Anteil verschwindet immer } \dots \\ &= \int_0^\infty \frac{n!}{\underline{s}^n} \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{Exponentialfunktion integrieren} \\ &= \left[-\frac{n!}{\underline{s}^{n+1}} \cdot e^{-\underline{s}t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &| \quad \text{auswerten} \\ &= \frac{n!}{\underline{s}^{n+1}} \end{aligned}$$

Für die Laplacetransformierte eines Polynomglieds der Potenz n gilt also:

$$\mathcal{L}\{\theta(t) t^n\}(\underline{s}) = \frac{n!}{\underline{s}^{n+1}} \quad (2.16)$$

Bei genauerer Betrachtung kann man die Laplacetransformierte der Sprungfunktion für den speziellen Fall $n = 0$ in dem allgemeinen Polynom wiedererkennen.

2.4.3 EXPONENTIALFUNKTION

Eine weitere gängige Funktion (*vielleicht sogar die Wichtigste, wie man später noch sehen wird*) ist die Exponentialfunktion. Diese sei wieder aus Gründen der Eindeutigkeit für negative t abgeschnitten und mit reellem a sei dann die zu transformierende Funktion gegeben als:

$$f(t) = \theta(t) e^{at} \quad (2.17)$$

Dann folgt für die Laplacetransformierte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\theta(t) e^{at}\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty \theta(t) e^{at} \cdot e^{-\underline{s}t} dt \\ &| \quad \text{Kombination der Exponenten} \\ &= \int_0^\infty e^{-(\underline{s}-a)t} dt \\ &| \quad \text{Integration der Exponentialfunktion} \\ &= \left[-\frac{1}{\underline{s}-a} \cdot e^{-(\underline{s}-a)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \\ &| \quad \text{Auswertung der Stammfunktion} \\ &= \frac{1}{\underline{s}-a} \end{aligned}$$

Die Laplacetransformierte der Exponentialfunktion ist also:

$$\mathcal{L}\{\theta(t) e^{at}\}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}-a} \quad (2.18)$$

2.4.4 MATRIXEXPONENTIALFUNKTION

In der Mathematik ist die Matrixexponentialfunktion analog zur gewöhnlichen (*skalaren*) Exponentialfunktion definiert. Dabei sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle $n \times n$ Matrix und es gilt:

$$e^{\mathbf{A} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \mathbf{A}^k \cdot t^k \quad (2.19)$$

Des weiteren verhalten sich die Ableitung und Stammfunktion ebenfalls äquivalent zur gewöhnlichen Exponentialfunktion. Daher kann für die Laplacetransformation das Ergebnis (2.18) verwendet und auf mehrdimensionale Größen erweitert werden. Aus dem Bruch wird dann die Inverse:

$$\mathcal{L}\{\theta(t) e^{\mathbf{A} \cdot t}\}(\underline{s}) = \left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \quad (2.20)$$

2.4.5 KOMPLEXE EXPONENTIALFUNKTION – SINUS UND KOSINUS

Die Laplacetransformation nach dem selben Schema kann auch für eine Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten durchgeführt werden. Ersetze dazu in (2.18) den Exponenten $a \rightarrow j\omega$. Dann:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\theta(t) e^{j\omega t}\}(\underline{s}) &= \frac{1}{\underline{s} - j\omega} \\
 &| \quad \text{erweitere komplex-konjugiert} \\
 &= \frac{1}{\underline{s} - j\omega} \cdot \frac{\underline{s} + j\omega}{\underline{s} + j\omega} \\
 &| \quad \text{ausmultiplizieren} \\
 &= \frac{\underline{s} + j\omega}{\underline{s}^2 + \omega^2} \\
 &| \quad \text{Aufspalten in Real- und Imaginärteil} \\
 &= \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{\omega}{\underline{s}^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

Die Eulerformel liefert einen Zusammenhang von Sinus und Cosinus zur komplexen Exponentialfunktion:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) \quad (2.21)$$

Ersetze nun die soeben transformierte komplexe Exponentialfunktion mit der Eulerformel:

$$\mathcal{L}\{\theta(t) \cos(\omega t) + j \cdot \theta(t) \sin(\omega t)\}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{\omega}{\underline{s}^2 + \omega^2}$$

Durch die Linearität der Laplacetransformation können Realteil und Imaginärteil einzeln transformiert werden. Das erlaubt eine Zuordnung der Laplacetransformierten von $\theta(t) \cos(\omega t)$ und $\theta(t) \sin(\omega t)$:

$$\mathcal{L}\{\theta(t) \cos(\omega t)\}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + \omega^2} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}\{\theta(t) \sin(\omega t)\}(\underline{s}) = \frac{\omega}{\underline{s}^2 + \omega^2} \quad (2.23)$$

2.4.6 DIRACSTOSS / DIRAC-DISTRIBUTION

Ein etwas exotischeres Gebilde, als die bereits behandelten ist die Dirac-Distribution, oder der Diracstoß.

Der Diracstoß ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion $g(t)$ (oft auch Testfunktion) eine reelle bzw. komplexe Zahl $\delta(g) = g(0)$ zu. Dies entspricht der Auswertung der Funktion an der Stelle $t = 0$.

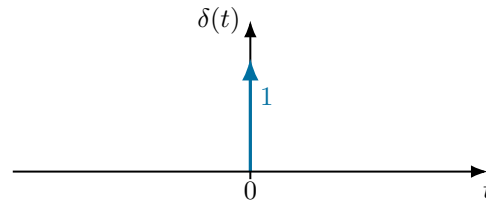


Abbildung 2.4: Visualisierung des mit 1 gewichteten Diracstoßes im Zeitbereich als nach oben gerichteter Pfeil.

Wird die zu Transformierende Funktion zu $f(t) = \delta(t)$ gewählt, folgt mit der Definition der Laplacetransformation:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta(t)\}(\underline{s}) &= \int_0^\infty \delta(t) \cdot e^{-st} dt \\
 &\quad | \quad \text{Integral wird ausgewertet für } t = 0 \\
 &= e^{-st} \Big|_{t=0} \\
 &\quad | \quad \text{es folgt} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Die Laplacetransformierte des Diracstoßes ist also im Laplacebereich eine Konstante:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(\underline{s}) = 1 \quad (2.24)$$

2.4.7 ABLEITUNG DES DIRACSTOSSES

In manchen Fällen wird die Laplacetransformation der Ableitung des Diracstoßes benötigt (*Die Herleitung kann man mal selber machen ... distributionelles Differenzieren sollte man sich dafür mal angucken*). Für die n -te Ableitung des Diracstoßes gilt jedoch:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right\}(\underline{s}) = \underline{s}^n \quad (2.25)$$

KAPITEL 3

SYSTEMANALYSE IM LAPLACEBEREICH

3.1 ALLGEMEINES VERFAHREN

Kernstück der folgenden Betrachtungen bildet der Ableitungssatz (2.5). Dieser macht aus dem differential algebraischen Gleichungssystem im Zeitbereich ein rein algebraisches Gleichungssystem im Laplacebereich. Die Grundannahme / Behauptung ist dabei, dass der Umweg über den Laplacebereich wesentlich leichter als die direkte Lösung im Zeitbereich ist und der vermeintliche Mehraufwand durch die zusätzlichen Transformationsschritte daher gerechtfertigt ist.

Das Generelle Vorgehen zur Lösung mit der Laplacetransformation beinhaltet also als ersten Schritt die Überführung des Problems in den Laplacebereich. Kompliziertere Funktionen können aufgrund der Linearität in einzelne Funktionen zerlegt werden. Diese können dann mit den bereits motivierten Korrespondenzen und Rechenregeln einzeln transformiert werden (*hier das berüchtigte Tabellenbuch aufschlagen* ...). Das Problem im Laplacebereich lässt sich jetzt durch einfache algebraische Umformungen (*plus, minus, mal, geteilt*) nach der gesuchten Größe auflösen.

Die Lösung im Zeitbereich kann dann über die inverse Laplacetransformation der Lösung im Laplacebereich bestimmt werden. Auch hierfür können aufgrund der Eindeutigkeit die Korrespondenzen und Rechenregeln verwendet werden. Oft lassen sich diese aber nicht direkt anwenden. Eine Partialbruchzerlegung ermöglicht dann aber meistens die Zuordnung der bekannten Funktionen und somit eine Rücktransformation.

Kennt man also die Rechenregeln und die Korrespondenzen der gängigsten Funktionen, kann man ohne großen Aufwand den Übergang zwischen Zeitbereich und Laplacebereich machen, ohne auch nur ein einziges Integral lösen zu müssen. Der zusätzliche Aufwand für die Transformationen \mathcal{L} und \mathcal{L}^{-1} werden als vernachlässigbar angenommen, sodass der hauptsächliche Aufwand die Umformung des algebraischen Gleichungssystems im Laplacebereich in eine geeignete Form für die Rücktransformation darstellt.

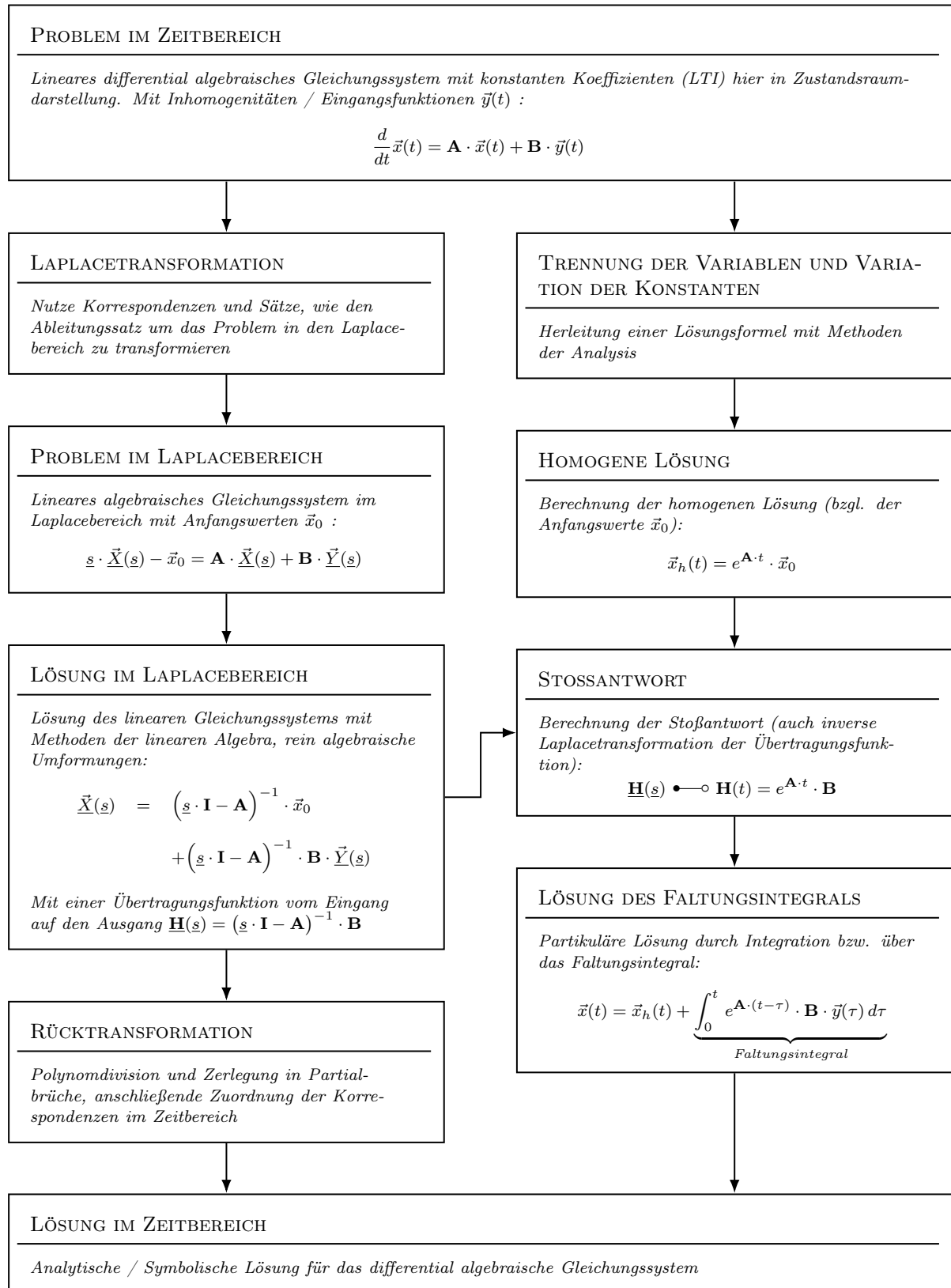


Abbildung 3.1: Darstellung des Allgemeinen Verfahrens zur Lösung von Differentialgleichungen / Anfangswertproblemen mit der Laplacetransformation und Gegenüberstellung zur Lösung im Zeitbereich als Blockdiagramm

3.2 DIE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Die Übertragungsfunktion oder auch Systemfunktion beschreibt in der ingenieurwissenschaftlichen Systemtheorie mathematisch die Beziehung zwischen dem Ein- und Ausgangssignal eines linearen dynamischen Systems in einem Bildraum (*hier im Bildbereich der Laplacetransformation, auch Laplacebereich*). Mithilfe der Übertragungsfunktion kann (*alternativ zur Berechnung im Zeitbereich*) für ein beliebiges kontinuierliches Eingangssignal das Ausgangssignal bzw. die Reaktion des Systems bestimmt werden. Dieser Lösungsweg ist zumeist einfacher, als durch das Lösen von Differentialgleichungen im Zeitbereich.

Die Eigenschaften der Übertragungsfunktion, einige grundsätzliche Zusammenhänge und darauf basierende Analyseverfahren werden in diesem Unterkapitel behandelt.

3.2.1 DEFINITION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Die Übertragungsfunktion ist eine komplexwertige Funktion mit einem komplexen Argument und definiert als das Verhältnis einer Eingangsgröße $\underline{Y}(s)$ zu einer Ausgangsgröße $\underline{X}(s)$ im Laplacebereich:

$$\underline{H}(s) := \frac{\underline{X}(s)}{\underline{Y}(s)} \quad (3.1)$$

Die Übertragungsfunktion beschreibt also im Laplacebereich die Wirkung des Systems auf die Eingangsgröße am Systemausgang. Für Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen wird aus der Übertragungsfunktion eine Übertragungsmatrix und es gilt das Superpositionsprinzip. In der Übertragungsfunktion sind die Anfangswerte \vec{x}_0 des Systems nicht enthalten. Sie beschreibt als nur das Systemverhalten als Antwort aus einem Ruhezustand heraus.

3.2.2 SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DIE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Bei Vernachlässigung der Anfangswerte $x_0 = 0$ (*... auch die Antwort aus dem Ruhezustand heraus genannt*) entfällt die homogene Lösung und das Systemverhalten wird komplett durch die partikuläre Lösung beschrieben. Im Laplacebereich erfolgt die Systembeschreibung und Charakterisierung daher ausschließlich anhand der Übertragungsfunktion:

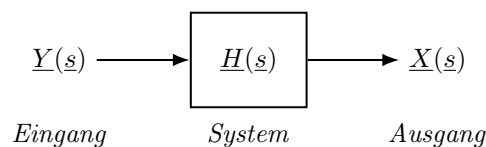


Abbildung 3.2: Visualisierung des Systems als Blockschaltbild im Laplacebereich, welches durch die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ charakterisiert wird. Mehrere Teilsysteme lassen sich so in einem Signalflussgraphen zusammenfassen.

Die Systemantwort ergibt sich dann im Laplacebereich als eine Multiplikation der Erregung (*des Eingangssignals*) mit der Übertragungsfunktion:

$$\underline{X}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{Y}(s) \quad (3.2)$$

3.2.3 DARSTELLUNGSFORMEN DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Die Übertragungsfunktion ist charakteristisch zum System und kann je nach System anders aussehen. Für lineare zeitinvariante Systeme ist sie eine rationale Funktion mit einem Zähler- und einem Nennerpolynom und hat daher verschiedene gängige Darstellungsformen:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}(\underline{s}) &= \frac{\underline{X}(\underline{s})}{\underline{Y}(\underline{s})} \dots \text{implizit als Verhältnis von Ein- und Ausgang} \\
 &= \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \dots \text{symbolisch als Zähler- und Nennerpolynom} \\
 &= \frac{b_m \underline{s}^m + \dots + b_2 \underline{s}^2 + b_1 \underline{s} + b_0}{a_n \underline{s}^n + \dots + a_2 \underline{s}^2 + a_1 \underline{s} + a_0} \dots \text{explizit in Polynomform} \\
 &= \frac{c \frac{(\underline{s} - \underline{z}_m) \cdots (\underline{s} - \underline{z}_1)}{(\underline{s} - \underline{p}_n) \cdots (\underline{s} - \underline{p}_1)}}{\dots} \dots \text{explizit mit Pol- / Nullstellen}
 \end{aligned}$$

3.2.4 POL- UND NULLSTELLEN DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Für Polynome bestimmt ihr Grad die Anzahl der Nullstellen. Für die Übertragungsfunktion in Polynomform ist der Grad des jeweiligen Polynoms die höchste Potenz des Arguments, also der Variable \underline{s} :

$$\text{grad}\{\underline{P}(\underline{s})\} = m \quad \text{und} \quad \text{grad}\{\underline{Q}(\underline{s})\} = n \quad (3.3)$$

Hier hat also $\underline{P}(\underline{s})$ genau m Nullstellen und $\underline{Q}(\underline{s})$ genau n Nullstellen. Mit dem Fundamentalsatz der Algebra können die Polynome also auch über ihre Nullstellen ausgedrückt werden. Dabei seien \underline{z}_i mit $i = 1, \dots, m$ die Nullstellen von $\underline{P}(\underline{s})$ und \underline{p}_i mit $i = 1, \dots, n$ die Nullstellen von $\underline{Q}(\underline{s})$:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} = c \frac{\overbrace{(\underline{s} - \underline{z}_m) \cdots (\underline{s} - \underline{z}_2)(\underline{s} - \underline{z}_1)}^{\text{Nullstellen}}}{\underbrace{(\underline{s} - \underline{p}_n) \cdots (\underline{s} - \underline{p}_2)(\underline{s} - \underline{p}_1)}_{\text{Polstellen}}} \quad (3.4)$$

Wenn $\underline{P}(\underline{s})$ und $\underline{Q}(\underline{s})$ jetzt gemeinsame Nullstellen haben, also mindestens eine Kombination i, j existiert, sodass $\underline{z}_i = \underline{p}_j$, dann kann das entsprechende Paar aus der Übertragungsfunktion entfernt werden (*das ist dann eine Polynomdivision*). Dieser Schritt des Entferns gleicher Nullstellen ist unbedingt notwendig, da sonst keine Aussagen über das Systems anhand der Struktur der Übertragungsfunktion – also der Beschaffenheit von Zähler- und Nennerpolynom – getroffen werden kann! Im Falle der Teilerfremdheit (*keine gemeinsamen Nullstellen*) von Nenner und Zähler sind die Nullstellen des Nenners \underline{p}_i die Polstellen der Übertragungsfunktion und die Nullstellen des Zählers \underline{z}_i die Nullstellen der Übertragungsfunktion:

$$\left| \underline{H}(\underline{s}) \right|_{\underline{s}=\underline{p}_i} \longrightarrow \infty \quad \text{und} \quad \left. \underline{H}(\underline{s}) \right|_{\underline{s}=\underline{z}_i} = 0 \quad (3.5)$$

3.2.5 POL- UND NULLSTELLEN IN DER KOMPLEXEN EBENE

Oft wird die Übertragungsfunktion auch graphisch in der komplexen \underline{s} -Ebene dargestellt. Dabei werden die Polstellen \underline{p}_i nach Realteil und Imaginärteil als Kreuz und die Nullstellen \underline{z}_i als Kreis dargestellt. Dabei handelt es sich um eine verbreitete Konvention. Im Falle der Teilerfremdheit hat eine Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ bezüglich ihrer Pol- und Nullstellen die folgende allgemeine Struktur:

$$\underline{H}(\underline{s}) = h_0 \cdot \frac{\overbrace{(\underline{s} - \alpha_z) \cdots (\underline{s} - (\alpha_z + j\omega_z)) (\underline{s} - (\alpha_z - j\omega_z)) \cdots (\underline{s} - j\omega_z) (\underline{s} + j\omega_z)}^{\text{komplexes NST-Paar}}}{\underbrace{(\underline{s} - \alpha_p) \cdots (\underline{s} - (\alpha_p + j\omega_p)) (\underline{s} - (\alpha_p - j\omega_p)) \cdots (\underline{s} - j\omega_p) (\underline{s} + j\omega_p)}_{\text{komplexes Polpaar}}} \quad (3.6)$$

reeller NST
imaginäres NST-Paar
reeller Pol
imaginäres Polpaar

Die meisten Darstellungen der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene beschränken sich auf die Lage der Pol- und Nullstellen in Form von Kreuzen und Kreisen. Sie charakterisieren die normierte Übertragungsfunktion (*ohne die Konstante h_0*) komplett und sind daher hinreichend für die Analyse.

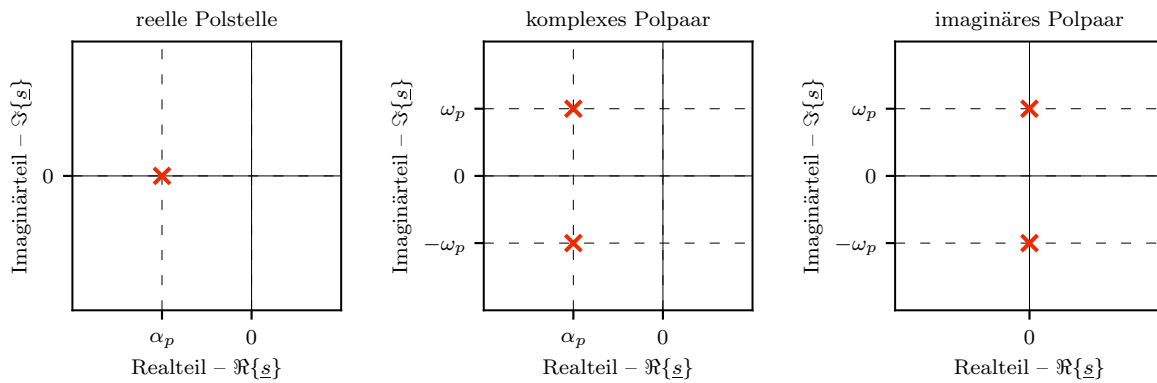


Abbildung 3.3: Visualisierung der Polstellen der Übertragungsfunktion in der komplexen \underline{s} -Ebene durch Kreuze

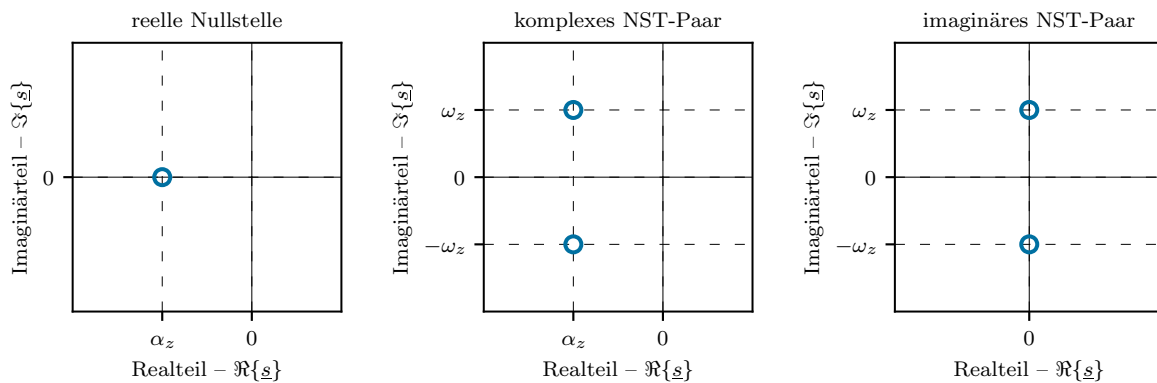


Abbildung 3.4: Visualisierung der Nullstellen der Übertragungsfunktion in der komplexen \underline{s} -Ebene durch Kreise (*manchmal auch durch Punkte*)

Besonders die Frage, in welchem Quadranten der komplexen Ebene die Pol- und Nullstellen liegen und in welchem Verhältnis sie zueinander liegen lässt sich bei dieser Form der Darstellung gut erkennen. Außerdem kann man so relativ leicht eine Einschätzung über das Verhältnis von Real- und Imaginärteil der Pol- und Nullstellen schließen, was ein Maß für die Dämpfung und Schwingfähigkeit darstellt.

3.2.6 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN POLSTELLEN UND EIGENWERTEN

Die Polstellen der Übertragungsfunktion lassen sich, wenn Zähler- und Nennerpolynom teilerfremd sind, über die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen. Diese sind Eigenwerte des Systems bzw. Eigenwerte des Zustandsraummodells:

$$\underline{Q}(\underline{s}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{s} = \underline{\lambda}_i = \underline{p}_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

Das Nennerpolynom ist ein Teilpolynom der charakteristischen Gleichung des Zustandsraummodells (1.10). Im Allgemeinen gilt daher, dass der Grad des Nennerpolynoms eine untere Schranke für die Ordnung des Systems ist, da dann:

$$\dim\{\mathbf{A}\} = \text{grad}\{\underline{\Delta}(\underline{s})\} \geq \text{grad}\{\underline{Q}(\underline{s})\} \quad (3.7)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass nicht unbedingt das gesamte System – also alle Zustandsgrößen – auch einen Einfluss auf den Ausgang haben müssen. Dies ist insbesondere bei Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen (*MIMO*) und bei großen Systemen, die beispielsweise unabhängige Teilkomponenten enthalten oft der Fall (*auf die Beispiele in diesem Skript trifft das zwar nicht zu, das sollte man aber trotzdem im Hinterkopf behalten*).

3.2.7 ÜBERTRAGUNGSFUNKTION IN POL-RESIDUUM-FORM

Ein wichtiger Zwischenschritt der Überführung des Systems vom Laplacebereich zurück in den Zeitbereich ist die Partialbruchzerlegung. Da die Übertragungsfunktion eine rationale Funktion mit Zähler- und Nennerpolynom ist, können die Polstellen auch als Partialbrüche mit jeweiligem Residuum (*Koeffizient in der PBZ*) angegeben werden. Für den allgemeinen Fall gehen wir nun davon aus, dass Zähler- und Nennerpolynom teilerfremd sind und das mehrfache Eigenwerte $\underline{\lambda}_i$ (*also die Polstellen*) über die jeweilige Vielfachheit μ_i angegeben werden. Dann ist n_μ die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte und die Übertragungsfunktion besitzt die Darstellung:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\prod_{i=1}^{n_\mu} (\underline{s} - \underline{\lambda}_i)^{\mu_i}} \quad \text{mit} \quad n = \sum_{i=1}^{n_\mu} \mu_i \quad (3.8)$$

Wenn der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad ist, also $m \geq n$ erfüllt ist, muss vor der Partialbruchzerlegung der Grad des Zählerpolynoms durch eine Polynomdivision abgebaut werden. Mit Berücksichtigung der Vielfachheiten in der PBZ ergibt sich dann die Übertragungsfunktion in Pol-Residuum-Form:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-n} c_k \cdot \underline{s}^k}_{\text{nur wenn } m \geq n} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} r_{i,k} \cdot \frac{1}{(\underline{s} - \underline{\lambda}_i)^k} \right)}_{\substack{\text{Summe über Vielfachheiten} \\ \text{Summe über verschiedene Polstellen}}} \quad (3.9)$$

Diese allgemeine Form der Übertragungsfunktion ist die nützlichste, da in ihr deutlich ist, welchen Anteil am Systemausgang – repräsentiert durch die Residuen $r_{i,k}$ – die entsprechenden Eigenwerte / Zustandsgrößen haben. Außerdem lässt sich die Übertragungsfunktion in dieser Form direkt über die Korrespondenzen zu den Partialbrüchen in den Zeitbereich überführen.

3.2.8 ANMERKUNG ZUR PARTIALBRUCHZERLEGUNG

Um die Übertragungsfunktion in die Pol-Residuum-Form zu bringen können die folgenden Methoden angewandt werden: Polynomdivision, Residuensatz (Zuhaltemethode) und Koeffizientenvergleich

3.2.9 SYMMETRIERELATION DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Die Übertragungsfunktion lässt sich (*unter anderem*) in der folgenden allgemeinen Polynomform darstellen:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} = \frac{b_m \underline{s}^m + \dots + b_2 \underline{s}^2 + b_1 \underline{s} + b_0}{a_n \underline{s}^n + \dots + a_2 \underline{s}^2 + a_1 \underline{s} + a_0} \quad (3.10)$$

Dabei sind die Koeffizienten b_i und a_i konstant und reell. $\underline{P}(\underline{s})$ ist das Zählerpolynom und $\underline{Q}(\underline{s})$ das Nennerpolynom. Für beide Polynome (*hier exemplarisch das Zählerpolynom*) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\underline{s}^*) &= b_m (\underline{s}^*)^m + \dots + b_2 (\underline{s}^*)^2 + b_1 \underline{s}^* + b_0 \\ &| \quad \text{Summenform des Polynoms} \\ &= \sum_{i=0}^m b_i (\underline{s}^*)^i \\ &| \quad \text{Für komplexe Zahlen gilt } (\underline{z} \cdot \underline{w})^* = \underline{z}^* \cdot \underline{w}^* \\ &= \sum_{i=0}^m b_i (\underline{s}^i)^* \\ &| \quad \text{komplexe Konjugation ist } \mathbb{R}\text{-Linear} \\ &= \left(\sum_{i=0}^m b_i \underline{s}^i \right)^* \\ &| \quad \text{Polynom einsetzen} \\ &= \underline{P}^*(\underline{s}) \end{aligned}$$

Diese Symmetrierelation für Polynome ist manchmal nützlich und gilt allgemein für lineare Systeme mit konstanten und reellen Systemparametern. Daraus folgt, dass diese Symmetrierelation für die Übertragungsfunktion als Quotient von zwei Polynomen mit reellen Koeffizienten ebenfalls erfüllt ist:

$$\underline{H}(\underline{s}^*) = \frac{\underline{P}(\underline{s}^*)}{\underline{Q}(\underline{s}^*)} = \frac{\underline{P}^*(\underline{s})}{\underline{Q}^*(\underline{s})} = \left(\frac{\underline{P}(\underline{s})}{\underline{Q}(\underline{s})} \right)^* = \underline{H}^*(\underline{s}) \quad (3.11)$$

3.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG (SISO) IM LAPLACEBEREICH

Wir haben bereits die Beschreibung des Systems mit einem Eingang und einem Ausgang (*SISO*) im Zeitbereich über eine Zustandsraumdarstellung motiviert, bei der die Zustandsgrößen \vec{x} des Systems vom Eingang $y(t)$ angeregt werden und der Ausgang $u(t)$ eine Linearkombination dieser ist:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{x}(t) &= \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b} \cdot y(t) \\ u(t) &= \vec{c}^T \cdot \vec{x}(t) + d \cdot y(t)\end{aligned}$$

3.3.1 ÜBERGANG IN DEN LAPLACEBEREICH

Die Transformation des Gleichungssystems in den Laplacebereich unter Verwendung des Ableitungssatzes (2.5) zusammen mit der Linearität der Laplacetransformation ergibt:

$$\underline{s} \cdot \underline{\vec{X}}(\underline{s}) - \vec{x}_0 = \mathbf{A} \cdot \underline{\vec{X}}(\underline{s}) + \vec{b} \cdot \underline{Y}(\underline{s}) \quad (3.12)$$

$$\underline{U}(\underline{s}) = \vec{c}^T \cdot \underline{\vec{X}}(\underline{s}) + d \cdot \underline{Y}(\underline{s}) \quad (3.13)$$

Das Differentialgleichungssystem der Zustandsraumdarstellung ist im Laplacebereich also ein rein algebraisches Gleichungssystem. Eine Umformung der ersten Gleichung nach den Zustandsgrößen liefert:

$$\underline{\vec{X}}(\underline{s}) = \underbrace{\left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \vec{x}_0}_{\text{homogene Lösung im Laplacebereich}} + \underbrace{\left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \vec{b} \cdot \underline{Y}(\underline{s})}_{\text{inhomogene Lösung im Laplacebereich}} \quad (3.14)$$

Daraus kann jetzt durch Einsetzen in die zweite Gleichung des Zustandsraummodells im Laplacebereich ein Zusammenhang von Eingang und Ausgang hergestellt werden:

$$\underline{U}(\underline{s}) = \underbrace{\vec{c}^T \left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \vec{x}_0}_{\text{homogener Anteil}} + \underbrace{\left(\vec{c}^T \left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \vec{b} + d\right) \cdot \underline{Y}(\underline{s})}_{\underline{H}(\underline{s}) \text{ Übertragungsfunktion}} \quad (3.15)$$

3.3.2 FORMULIERUNG EINER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Anhand dieser Darstellung ergibt sich jetzt bei Vernachlässigung der Anfangswerte $\vec{x}_0 = 0$ in direkter Zusammenhang zwischen Eingang $\underline{Y}(\underline{s})$ und Ausgang $\underline{U}(\underline{s})$ im Laplacebereich. Diese Verknüpfung ist die Übertragungsfunktion des Systems:

$$\underline{H}(\underline{s}) := \vec{c}^T \left(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \vec{b} + d \quad (3.16)$$

Das dynamische Verhalten wird in dieser Darstellung der Übertragungsfunktion alleine durch das Matrixbüschel $(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$ bestimmt. Die Inverse dieses Matrixbüschels existiert (*regulär*) jedoch nur, wenn die Determinante nicht verschwindet. Wenn der Vektor \vec{c} Nulleinträge hat, werden nicht alle Zustandsgrößen des Systems auf den Ausgang abgebildet. Dann sind nicht alle Eigenwerte des Systems in den Polstellen enthalten.

3.3.3 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN EIGENWERTEN UND POLSTELLEN

Aus der Übertragungsfunktion in Gleichung (3.16) wird klar, dass die Polstellen in dem Matrixbüschel $(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})$, genauer gesagt in dessen Inverse enthalten sein müssen. Die Inverse kann symbolisch mit der Cramerschen Regel angegeben werden:

$$(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (3.17)$$

Damit wird klar, dass in der Inversen einer Matrix immer die Determinante der Matrix selbst im Nenner enthalten ist. Die Matrix ist also nur dann invertierbar (*regulär, nicht singulär*), wenn die Determinante ungleich Null ist bzw. singulär, wenn:

$$\underline{\Delta}(\underline{s}) = \det(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.18)$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\underline{\Delta}(\underline{s})$ sind gleichzeitig die Eigenwerte der Zustandsmatrix \mathbf{A} des Zustandsraummodells und die Singularitäten der Übertragungsfunktion. Da anschaulich gesprochen der Nenner in den Singularitäten Null und somit die Übertragungsfunktion betragsmäßig gegen Unendlich geht, sind die Singularitäten auch die Polstellen der Übertragungsfunktion.

3.4 SYSTEMEBENE UND BLOCKSCHALTBILDER

Die Darstellung des Systems im Laplacebereich ist dabei besonders charmant, da besonders große oder komplexe Systeme aus vielen miteinander verknüpften Teilsystemen dadurch in ihrem Verhalten auf ihre jeweiligen Übertragungsfunktionen reduziert werden können. Die Wechselwirkung der Teilsysteme kann dann durch eine Verknüpfung der Übertragungsfunktionen dargestellt werden. Auf Systemebene werden für die Visualisierung dieser Verknüpfungen in einem Signalflussplan häufig Blockschaltbilder verwendet, die miteinander verschaltet die Verknüpfungen der Teilsysteme repräsentieren. Die wichtigsten Verknüpfungen sind im Folgenden dargestellt. Aus diesen Fällen lassen sich alle möglichen Verknüpfungen linearer zeitinvarianter Teilsysteme miteinander konstruieren.

3.4.1 KASKADIERUNG

Bei einer Kaskadierung (*auch Reihenschaltung oder Kettenschaltung*) zweier oder mehrerer Systeme bildet der Ausgang des ersten Systems den Eingang des zweiten Systems.

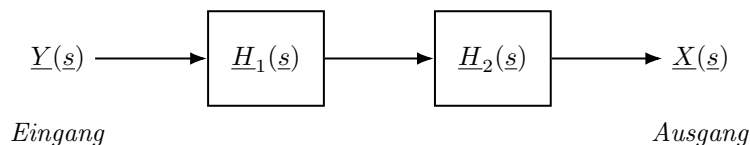


Abbildung 3.5: Blockschaltbild einer Kaskadierung / Reihenschaltung von zwei Teilsystemen, die durch die Übertragungsfunktionen $\underline{H}_1(\underline{s})$ und $\underline{H}_2(\underline{s})$ charakterisiert werden.

Durch den multiplikativen Zusammenhang zwischen Eingang und Übertragungsfunktion mit dem Ausgang im Laplacebereich gilt für die Gesamtübertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \underline{H}_1(\underline{s}) \cdot \underline{H}_2(\underline{s}) \quad (3.19)$$

3.4.2 PARALLELSCHALTUNG

Bei einer Parallelschaltung von zwei oder mehr Teilsystemen wirkt die Eingangsgröße an allen Eingängen der Teilsysteme gleichermaßen. Deren Ausgänge werden zu einem gemeinsamen Ausgang überlagert.

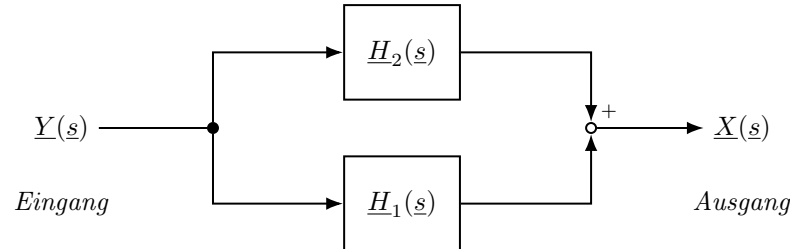


Abbildung 3.6: Blockschaltbild einer Parallelschaltung von zwei Teilsystemen, die durch die Übertragungsfunktionen $\underline{H}_1(s)$ und $\underline{H}_2(s)$ charakterisiert werden.

Die lineare Überlagerung der Teilausgänge zu einem gemeinsamen Ausgang durch eine Summation entspricht der Anwendung des Superpositionsprinzips, dessen Gültigkeit eine direkte Folge der Linearität des Systems ist. Die Gesamtübertragungsfunktion ist dementsprechend:

$$\underline{H}(s) = \underline{H}_1(s) + \underline{H}_2(s) \quad (3.20)$$

3.4.3 RÜCKKOPPLUNG

Rückkopplungen sind für viele Technische Systeme von hoher Relevanz (*insbesondere in der Regelungstechnik*). Dabei wird das Signal vom Systemausgang auf den Eingang zurückgeführt. Dadurch kann es zu Selbstverstärkung und Instabilität kommen. Auch wenn alle Teilsysteme asymptotisch stabil sind, kann das Gesamtsystem durch die Rückkopplung trotzdem instabil sein.

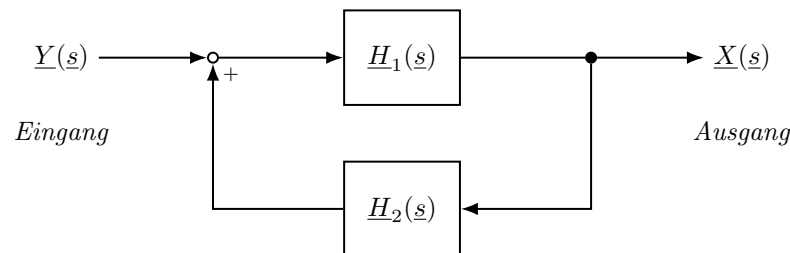


Abbildung 3.7: Blockschaltbild einer Rückkopplungsschleife bestehend aus zwei Teilsystemen, die durch die Übertragungsfunktionen $\underline{H}_1(s)$ und $\underline{H}_2(s)$ charakterisiert werden.

Durch die Rückkopplung ist die Gesamtübertragungsfunktion etwas schwieriger aufzustellen. Die folgende Gleichung repräsentiert als Zwischenschritt die Ausgangsgröße in Abhängigkeit der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße selbst (*durch die Rückkopplung*):

$$\underline{X}(s) = \underline{H}_1(s) \cdot \underline{Y}(s) + \underline{H}_1(s) \cdot \underline{H}_2(s) \cdot \underline{X}(s) \quad \Rightarrow \quad \underline{X}(s) = \underbrace{\frac{\underline{H}_1(s)}{1 - \underline{H}_1(s) \cdot \underline{H}_2(s)}}_{\underline{H}(s)} \cdot \underline{Y}(s) \quad (3.21)$$

3.4.4 ZUSAMMENGESETZTES SYSTEM AM BEISPIEL DER STREUPARAMETER

Oft werden komplizierte Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen durch eine Verknüpfung mehrere Teilsysteme modelliert. Ein prominentes Beispiel aus der Elektrotechnik dafür ist die Tordarstellung. Dabei passiert die Interaktion mit dem System (*beispielsweise eine Leitung oder ein Verstärker*) durch Tore mit je einem Eingang und einem Ausgang. Diese Darstellung ermöglicht die Kopplung und Rückkopplung mehrerer miteinander verschalteter Systeme durch die beiden Torgrößen (*oft Strom und Spannung, oder hinlaufende und rücklaufende Welle*).

Die hier dargestellten Streuparameter eignen sich besonders gut für die Modellierung von Systemen in hochfrequenten Anwendungen, bei denen die elektrischen Signale gut als sich ausbreitende Wellen beschrieben werden können (*das gilt auch für optische Systeme, wie Linsen*). Die Teilsysteme charakterisieren dabei jeweils Interaktion zwischen den Einfallenden und ausfallenden Wellen. $\underline{S}_{11}(\underline{s})$ und $\underline{S}_{22}(\underline{s})$ können beispielsweise als Reflexionsübertragungsfunktionen und $\underline{S}_{12}(\underline{s})$ und $\underline{S}_{21}(\underline{s})$ als Transmissionsübertragungsfunktionen interpretiert werden.

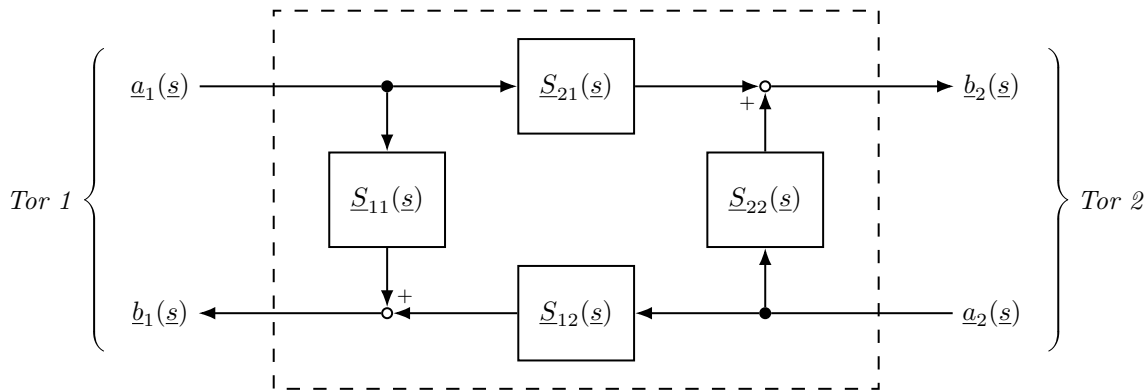


Abbildung 3.8: Blockschaltbild der Teilsysteme eines Zweitores in **S**-Parameter Darstellung. Verknüpfung der Teilsysteme zu einem Gesamtsystem mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen.

Die lineare Überlagerung der Ausgänge der Teilnetzwerke zu den Ausgängen des gesamten Systems ergibt ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei (*bei Vorgabe der Eingangsgrößen zu berechnenden*) Ausgangsgrößen. Das Gleichungssystem kann in Matrixschreibweise angegeben werden, wobei die Matrixeinträge die Übertragungsfunktionen der Teilsysteme sind. Das Gesamtsystem kann also über eine Übertragungsmatrix charakterisiert werden, was eine wesentlich kompaktere Schreibweise erlaubt:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1(\underline{s}) \\ \underline{b}_2(\underline{s}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{S}_{11}(\underline{s}) & \underline{S}_{12}(\underline{s}) \\ \underline{S}_{21}(\underline{s}) & \underline{S}_{22}(\underline{s}) \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{S}}(\underline{s})} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1(\underline{s}) \\ \underline{a}_2(\underline{s}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

KAPITEL 4

TRANSIENTENANALYSE

Eine Transiente ist ein Einschwingvorgang oder ein Abschnitt in einem Signal, der von einem instationären Vorgang kündigt. Der Begriff Transient stammt aus dem Lateinischen und bedeutet Übergang. Das transiente Verhalten des Systems ist also das Einschwingverhalten bzw. das Systemverhalten beim Übergang von einem Systemzustand zu einem anderen. Unter die Transientenanalyse fällt das Systemverhalten nahe am Entstehenszeitpunkt bzw. dem Betrachtungsbeginn $t = 0$ des Systems. Für die Analyse des transienten Verhaltens sind also insbesondere die homogene Lösung – also das Abklingen der Anfangswerte bei stabilen Systemen – und das Systemverhalten bei sich ändernder Erregung – wie die Stoß- und Sprungantwort – interessant.

Auch allgemeine Systemeigenschaften wie die Stabilität werden in diesem Kapitel anhand des transienten Verhaltens (*hier anhand der Stoßantwort*) motiviert. Zusätzlich wird der eingeschwungene Zustand (*oft auch stationäres Verhalten oder steady-state*) als Konsequenz eines Einschwingvorgangs stabiler Systeme eingeführt, welcher nach einer Einschwingzeit $t \gg \tau_{max}$ eine vereinfachte Lösungsdarstellung erlaubt.

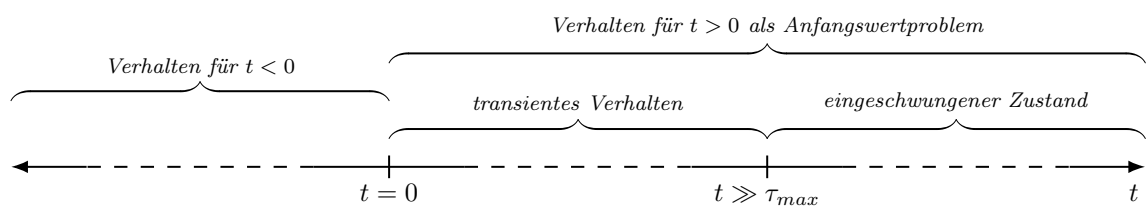


Abbildung 4.1: Visualisierung und Gliederung der relevanten Zeitabschnitte bei der Transientenanalyse anhand eines Zeitstrahls.

4.1 DIE STOßANTWORT

Die Stoßantwort spielt in der Systemtheorie eine besonders wichtige Rolle. Sie ist ausschließlich von den Systemparametern – insbesondere den Eigenwerten – abhängig (*... und nicht von deren Eingängen*) und ist daher charakteristisch zum System. Außerdem ist sie ein Bestandteil der homogenen Lösung. Im Zeitbereich kann das dynamische Verhalten des Systems daher über die Stoßantwort charakterisiert werden.

4.1.1 MOTIVATION DER STOßANTWORT IM LAPLACEBEREICH

Um die Bedeutung der Stoßantwort weiter herauszustellen wird im Folgenden ein allgemeines System angenommen, dass im Laplacebereich (*dazu sollte vorher das Kapitel über die Analyse im Laplacebereich gelesen werden*) durch die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ beschrieben wird. Sei nun die Erregung des Systems im Zeitbereich als Diracstoß gegeben und für die Laplacetransformierte (2.24) gilt:

$$y(t) = \delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{Y}(s) = 1 \quad (4.1)$$

Entsprechend ist die Antwort / der Ausgang im Laplacebereich mit der Übertragungsfunktion gegeben über:

$$x(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{X}(s) = \underline{H}(s) \cdot \underline{Y}(s) = \underline{H}(s) \cdot 1 = \underline{H}(s) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(t)$$

Im Zeitbereich folgt wegen der Multiplikation zweier Funktionen durch den Faltungssatz (2.8) und der Auswertung des Faltungsintegrals durch den Diracstoß die Beziehung:

$$x(t) = \left(h(\tau) * \delta(\tau) \right)(t) = h(t) \quad (4.2)$$

Wird das System durch einen Diracstoß erregt, ist der Ausgang also über die Übertragungsfunktion ausschließlich von den Systemparametern selbst abhängig. Dies erlaubt eine Charakterisierung des Systems über die Stoßantwort im Zeitbereich und ist Teil der zu Beginn dieses Dokuments eingeführten Transformation \mathcal{H} .

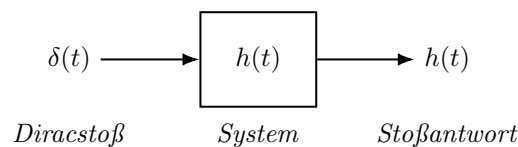


Abbildung 4.2: Darstellung des Systems als Blockschaltbild im Zeitbereich. Erregung des Systems durch einen Diracstoß am Eingang liefert die Stoßantwort am Ausgang.

4.1.2 DEFINITION DER STOßANTWORT

Die Erregung des Systems durch einen Diracstoß $\delta(t)$ entspricht also im Laplacebereich einer Multiplikation mit 1. Die Antwort des Systems im Zeitbereich auf einen Diracstoß – also die Stoßantwort – ist daher genau die inverse Laplacetransformation der Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(s) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(t) \quad (4.3)$$

4.1.3 SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DIE STOßANTWORT

Aus dem Zusammenhang von Übertragungsfunktion und Stoßantwort (4.3) wird also klar, dass wenn die Übertragungsfunktion das Systemverhalten im Laplacebereich komplett (*komplett bezüglich einer Erregung*) beschreibt, selbiges für die Stoßantwort im Zeitbereich gilt. Das System mit der Eingangsfunktion $y(t)$ und der Ausgangsfunktion $x(t)$ wird dabei durch die Stoßantwort $h(t)$ charakterisiert. Diese Darstellung im Zeitbereich führt zu einer Verknüpfung von Ein- und Ausgangsgröße über das Faltungsintegral. Die Allgemeine Systemantwort im Zeitbereich ist daher analog zu den Beobachtungen im Kapitel zur Systembeschreibung im Zeitbereich.

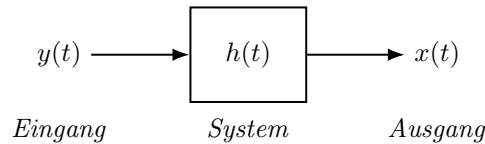


Abbildung 4.3: Charakterisierung des Systems im Zeitbereich über die Stoßantwort $h(t)$. Darstellung als Blockschaltbild im Zeitbereich.

4.1.4 ALLGEMEINE FORM DER STOßANTWORT

Mit der allgemeinen Übertragungsfunktion in Pol-/ Residuum-Form in Gleichung (3.9) kann eine allgemeine Form der Stoßantwort abgeleitet werden. Der Ausgangspunkt ist dabei die vollständig partialbruchzerlegte Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \sum_{k=0}^{m-n} c_k \cdot \underline{s}^k + \sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} r_{i,k} \cdot \frac{1}{(\underline{s} - \underline{\lambda}_i)^k} \right)$$

Dazu werden die einzelnen Partialbrüche zurück in den Zeitbereich überführt. Insbesondere werden dafür die Korrespondenz zur Ableitung des Diracstoßes (2.25) für die Polynomterme (*nur für den Fall, dass der Zählergrad größer als der Nennergrad ist*) und die Korrespondenz zum Polnomglied (2.16) in Kombination mit dem Dämpfungssatz (2.12) verwendet:

$$c_k \cdot \underline{s}^k \quad \bullet \text{---} \circ \quad c_k \cdot \delta^{(k)}(t)$$

$$r_{i,k} \cdot \frac{1}{(\underline{s} - \underline{\lambda}_i)^k} \quad \bullet \text{---} \circ \quad r_{i,k} \cdot \theta(t) \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\underline{\lambda}_i t}$$

Damit folgt (*nutze die Linearität der Laplacetransformation aus*) für die allgemeine Form der Stoßantwort:

$$\underline{H}(\underline{s}) \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(t) = \sum_{k=0}^{m-n} c_k \cdot \delta^{(k)}(t) + \theta(t) \sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} r_{i,k} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} \right) \quad (4.4)$$

4.1.5 PROMINENTER SPEZIALFALL DER ALLGEMEINEN STOßANTWORT

Ein häufiger Spezialfall ergibt sich, wenn das System nicht differenzierend ist und die Erregung nicht direkt im Ausgang des Systems enthalten ist (*Zählergrad kleiner Nennergrad, also $m < n$*) und außerdem alle Eigenwerte – also die Polstellen – einfach sind mit $\mu_i = 1$ für alle i . Dann verschwindet der erste Term komplett und mit $n_\mu = n$ vereinfacht sich der zweite Summenterm zu einer einzelnen Summe. Unter diesen Bedingungen vereinfacht sich die allgemeine Stoßantwort (4.4) zu einer Summe von Exponentialtermen mit den Eigenwerten $\underline{\lambda}_i$ und den zugehörigen Residuen \underline{h}_i zu:

$$h(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^n \underline{h}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} \quad (4.5)$$

Die Residuen \underline{h}_i können hier auch als Gewichtungen der Eigenwerte bzw. deren Anteil am dynamischen Verhalten des Systems interpretiert werden. Diese vereinfachte Form der Stoßantwort kann oft angetroffen werden (*beispielsweise beim gedämpften harmonischen Oszillator*). Mit der Kenntnis, dass die komplexen Eigenwerte $\underline{\lambda}_i$ immer paarweise komplex konjugiert auftreten, kann der Ausdruck für die Stoßantwort noch in rein reelle Terme aufgeschlüsselt werden. Die Anzahl der reellen Eigenwerte λ_i sei nun mit n_r und die Anzahl der komplexen Paare $\underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i$ und $\underline{\lambda}_i^* = \alpha_i - j\omega_i$ mit n_k angegeben. Die Gesamtzahl der Eigenwerte ist dann $n = n_r + 2n_k$ und eine entsprechende Aufspaltung der Summe in (4.5) liefert:

$$\begin{aligned} h(t) &= \underbrace{\theta(t) \sum_{i=1}^{n_r} h_i \cdot e^{\lambda_i t}}_{\text{reelle Eigenwerte}} + \underbrace{\theta(t) \sum_{i=1}^{n_k} \left(\underline{h}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} + \underline{h}_i^* \cdot e^{\underline{\lambda}_i^* t} \right)}_{\text{komplexe Eigenwert-Paare}} \\ &| \quad \text{komplexe Eigenwerte } \underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i \text{ einsetzen und umformen} \\ &= \theta(t) \sum_{i=1}^{n_r} h_i \cdot e^{\lambda_i t} + \theta(t) \sum_{i=1}^{n_k} e^{\alpha_i t} \left(\underline{h}_i \cdot e^{j\omega_i t} + \underline{h}_i^* \cdot e^{-j\omega_i t} \right) \\ &| \quad \text{weiter mit } \underline{z} + \underline{z}^* = 2 \cdot \Re\{\underline{z}\} \text{ umformen} \\ &= \theta(t) \sum_{i=1}^{n_r} h_i \cdot e^{\lambda_i t} + \theta(t) \sum_{i=1}^{n_k} 2 \cdot e^{\alpha_i t} \cdot \Re\left\{ \underline{h}_i \cdot e^{j\omega_i t} \right\} \\ &| \quad \text{rechten Summanden mit der Eulerformel ausschreiben} \\ &= \theta(t) \sum_{i=1}^{n_r} h_i \cdot e^{\lambda_i t} + \theta(t) \sum_{i=1}^{n_k} 2 \cdot e^{\alpha_i t} \underbrace{\left(\Re\{\underline{h}_i\} \cdot \cos(\omega_i t) - \Im\{\underline{h}_i\} \cdot \sin(\omega_i t) \right)}_{\text{Schwingterme}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es ist klar zu erkennen, dass die Imaginärteile $\omega_i = \Im\{\underline{\lambda}_i\}$ der komplexen Eigenwertpaare zu Sinus- und Kosinus-Schwingtermen mit der entsprechenden Kreisfrequenz ω_i in der Stoßantwort führen. Die Realteile $\alpha_i = \Re\{\underline{\lambda}_i\}$ und die reellen Eigenwerte λ_i stehen in den Exponenten von Exponentialfunktionen und können je nach Vorzeichen als Dämpfung interpretiert werden.

4.2 DIE SPRUNGANTWORT

Die Sprungantwort ist im Gegensatz zur Stoßantwort die Antwort des Systems bei Erregung durch einen Einheitssprung / eine Sprungfunktion. In vielen technischen Anwendungen können reale Signale (... bzw. *idealisierte reale Signals*), wie Rechteckfunktionen, Signalfanken oder (*instantane*) Einschaltvorgänge durch Sprungfunktionen modelliert werden. Die Sprungantwort ist daher oft Teil der Lösung bei der Erregung des Systems mit solchen Funktionen und hat daher eine hohe technische Relevanz.

4.2.1 DIE SPRUNGFUNKTION

Die Sprungfunktion Funktion (*auch Heaviside-Funktion, θ -Funktion oder σ -Funktion*) findet zahlreiche Anwendungen, etwa in der Nachrichtentechnik, der Systemtheorie und der Regelungstechnik.

Im Zeitbereich ist die Sprungfunktion durch eine Fallunterscheidung folgendermaßen definiert:

$$\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

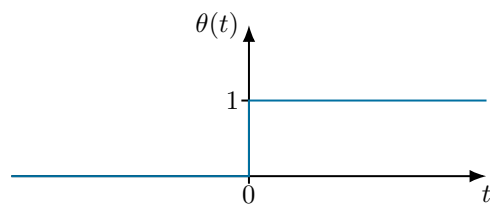


Abbildung 4.4: Sprungfunktion im Zeitbereich.

4.2.2 ABSCHNEIDEN BELIEBIGER FUNKTIONEN MIT DER SPRUNGFUNKTION

Besonders als mathematischer Filter (*als idealer Filter in der Realität oft nicht realisierbar, dennoch praktisch*) wird die Sprungfunktion oft verwendet. Multipliziert man punktweise jeden Wert einer beliebigen stetigen Funktion $f(t)$ mit dem entsprechenden Wert der Sprungfunktion, ergibt sich eine Funktion, die links von $t = 0$ den Wert Null hat, rechts davon aber mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt. Diese Eigenschaft erlaubt ein Abschneiden beliebiger Funktionen für negative Zeiten $t < 0$.

Diese Filtereigenschaft und einige nützliche Eigenschaften für die Definition des Filters sind in den folgenden Abbildungen exemplarisch anhand einer beliebigen stetigen Funktion $f(t)$ dargestellt:

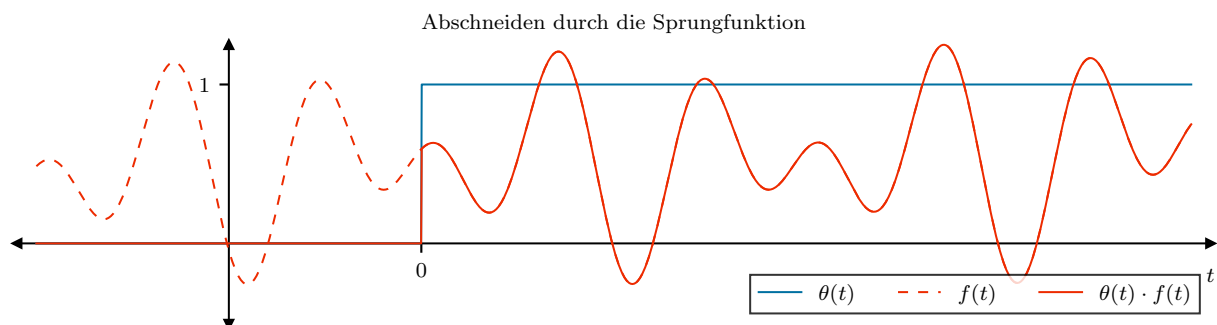


Abbildung 4.5: Visualisierung der Filtereigenschaft der Sprungfunktion. Die beliebige Funktion $f(t)$ wird so für negative Zeiten $t < 0$ abgeschnitten bzw. zu Null gesetzt.

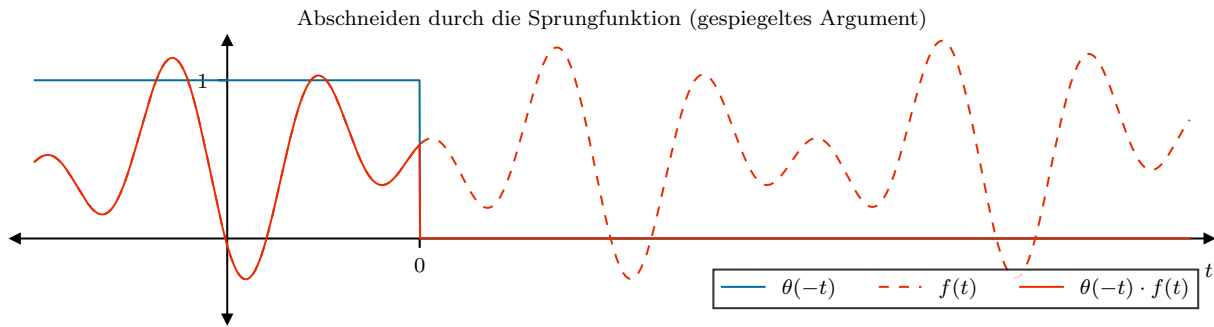


Abbildung 4.6: Visualisierung der Filtereigenschaft der Sprungfunktion mit invertiertem Argument. Die beliebige Funktion $f(t)$ wird so für positive Zeiten $t > 0$ abgeschnitten bzw. zu Null gesetzt.

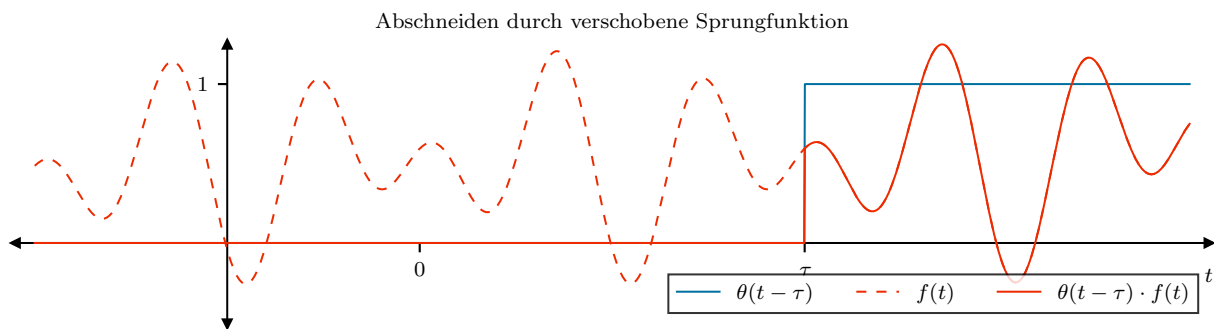


Abbildung 4.7: Visualisierung der Filtereigenschaft der Sprungfunktion mit Verschiebung um τ . Die beliebige Funktion $f(t)$ wird so für Zeiten $t < \tau$ abgeschnitten bzw. zu Null gesetzt.

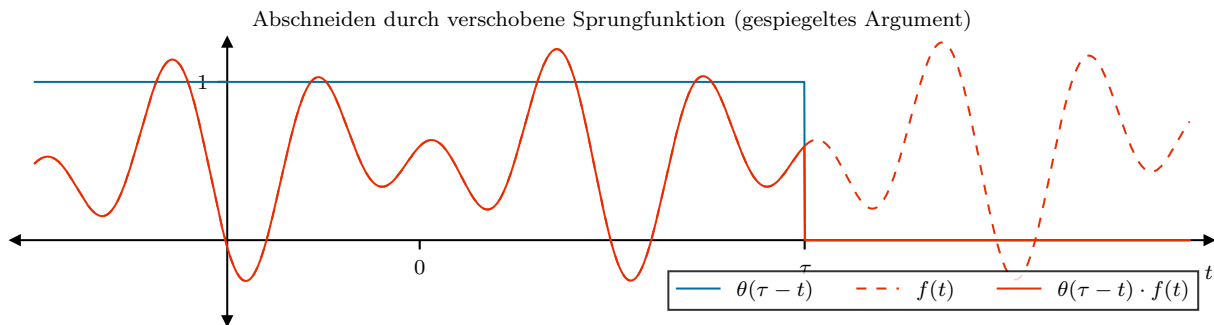


Abbildung 4.8: Visualisierung der Filtereigenschaft der Sprungfunktion mit Verschiebung um τ und invertiertem Argument. Die beliebige Funktion $f(t)$ wird so für Zeiten $t > \tau$ abgeschnitten bzw. zu Null gesetzt.

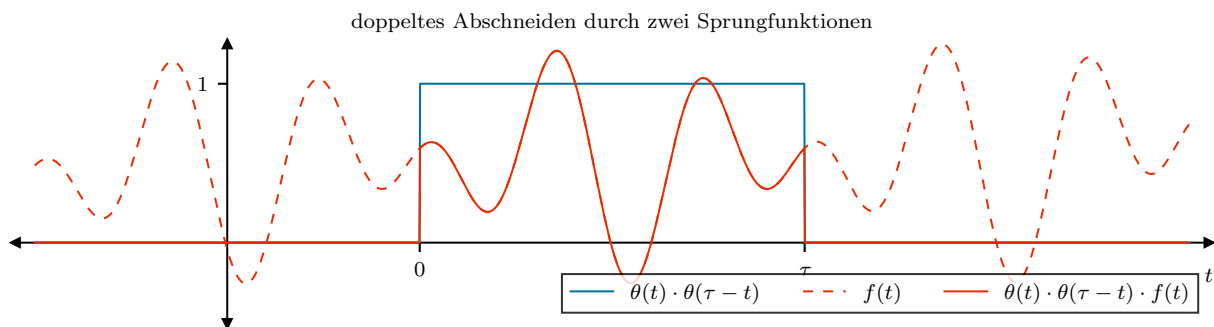


Abbildung 4.9: Visualisierung der Filtereigenschaft der Sprungfunktion. Die beliebige Funktion $f(t)$ wird durch zwei Sprungfunktionen für Zeiten $t < 0$ und $t > \tau$ zu Null gesetzt.

4.2.3 DEFINITION DER SPRUNGANTWORT

Die Sprungantwort ist die Antwort des Systems auf einen Einheitssprung. Also der Systemausgang unter Vernachlässigung der Anfangswerte bei der Erregung des Systems durch eine Sprungfunktion.

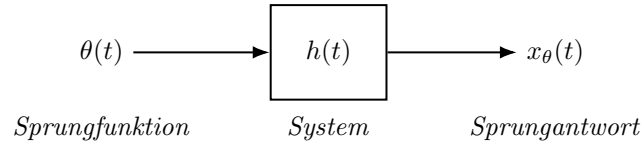


Abbildung 4.10: Schematische Darstellung der Sprungantwort im Blockschaltbild des Systems. Erregung mit einem Einheitssprung gibt die Sprungantwort.

Die Sprungantwort wird im Folgenden mit $x_\theta(t)$ notiert und kann auf mehreren Wegen gewonnen werden. Im Zeitbereich ergibt sich die Sprungantwort über das Faltungsintegral:

$$x_\theta(t) = \left(h(\tau) * \theta(\tau) \right)(t) = \int_0^t h(t - \tau) d\tau \quad (4.8)$$

Die Sprungantwort entspricht also im Prinzip der Integration der Stoßantwort. Im Laplacebereich gilt mit der Korrespondenz der Sprungfunktion für die Laplacetransformierte der Sprungantwort entsprechend:

$$\theta(t) \circ \bullet \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad x_\theta(t) \circ \bullet \underline{H(s)} \cdot \frac{1}{s} \quad (4.9)$$

Besonders hervorzuheben ist außerdem, dass die Partikuläre Lösung, bei der die Sprungfunktion die Inhomogenität ist immer ein Teil der Sprungantwort ist. Die Anfangsbedingungen \vec{x}_0 des Systems sind darin nicht enthalten (*und folglich auch nicht die homogene Lösung*), sondern ausschließlich die Antwort des Systems auf eine Sprungfunktion.

4.2.4 ABLEITUNG DER SPRUNGANTWORT (WIP)

Eine weitere interessante Eigenschaft der Sprungantwort ist, dass daraus direkt die Stoßantwort zurückgewonnen werden kann. Und zwar hat die Sprungfunktion (4.7) an der Stelle $t = 0$ eine Unstetigkeitsstelle und deren Ableitung an dieser Stelle kann nicht durch eine gewöhnliche Funktion angegeben werden. Stattdessen liefert ein Diracstoß als Distribution bzw. verallgemeinerte Funktion das korrekte Verhalten:

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t) \quad (4.10)$$

Die Ableitung der Sprungantwort liefert also wieder die Stoßantwort selbst.

4.3 STABILITÄT

Die Stabilität linearer dynamischer Systeme ist in vielen Anwendungsbereichen eine sehr wichtige Information. Sie ist dabei eine Charakteristik des Systems und gibt Aufschluss über das dynamische Verhalten bzw. den zeitlichen Verlauf der Systemgrößen. Ist ein System instabil, klingen die Anfangswerte nicht ab und es kann folglich keinen eingeschwungenen Zustand geben. Instabilität führt außerdem dazu, dass das System bei Erregung immer weiter aufschwingt und somit durch Überschreitung von Toleranzen zu einer irreversiblen Beschädigung führen kann.

Eine Aussage über die Stabilität eines Systems ist über die Analyse der Eigenwerte möglich, die sich direkt in der Stoßantwort wiederfinden lassen (*mit Eigenwerten sind hier die Eigenwerte der Zustandsmatrix \mathbf{A} des Zustandsraummodells des Systems gemeint, auch bekannt als die natürlichen Frequenzen*).

4.3.1 MOTIVATION ANHAND DER STOSSANTWORT UND DER EIGENWERTE

Der Zusammenhang zwischen der Stabilität und den Eigenwerten des Systems wird klar, wenn die allgemeine Form der Stoßantwort betrachtet wird. Diese hat oft die folgende Form (4.5) für nicht differenzierende Systeme mit der Ordnung n und nur einfachen Eigenwerten $\underline{\lambda}_i$:

$$h(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^n h_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} \quad (4.11)$$

Die Eigenwerte sind im allgemeinen komplex und haben daher einen Real- und einen Imaginärteil mit $\underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i$. Rein reelle $\lambda_i = \alpha_i$ mit $\omega_i = 0$ und rein imaginäre $\underline{\lambda}_i = j\omega_i$ mit $\alpha_i = 0$ Eigenwerte sind dabei mit inbegriffen. Komplexe Eigenwerte sind immer paarweise als komplex-konjugiertes Paar enthalten. Allgemein gilt jedoch:

$$h(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^n h_i \cdot e^{(\alpha_i + j\omega_i) t} \quad (4.12)$$

Wenn man jetzt wissen möchte, wie groß und in welchen Bereich sich die Stoßantwort bewegt, kann der Betrag eine Einschätzung liefern. Mit der Dreiecksungleichung und für $t > 0$ folgt:

$$|h(t)| \leq \sum_{i=1}^n \left| h_i \cdot e^{(\alpha_i + j\omega_i) t} \right| \quad (4.13)$$

Für die Anteile des Imaginärteils der Eigenwerte gilt $|e^{j\omega_i t}| = 1$ und die zeitliche Entwicklung des Betrags lässt sich komplett auf den Realteil der Eigenwerte zurückführen:

$$|h(t)| \leq \sum_{i=1}^n |h_i \cdot e^{\alpha_i t}| \quad (4.14)$$

Um jetzt einschätzen zu können, wie sich die Einzelnen Eigenwerte auswirken, wird einer der Eigenwerte – also einer der Summanden – mit Realteil α_k der Stoßantwort gegenüber gestellt. Es folgt für alle $t > 0$:

$$|h_k \cdot e^{\alpha_k t}| \leq |h(t)| \leq \sum_{i=1}^n |h_i \cdot e^{\alpha_i t}| \quad (4.15)$$

Mit der Überlegung in (4.15) kann der Betrag der Stoßantwort über mehrere Grenzwertbildungen eingegrenzt werden. Jeder Summand k in der Stoßantwort kann eine untere Schranke für die Stoßantwort selbst bilden:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| \geq \lim_{t \rightarrow \infty} |h_k \cdot e^{\alpha_k t}| = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_k < 0 \\ \infty & \text{für } \alpha_k > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Die Stoßantwort divergiert also immer, wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil $\Re\{\underline{\lambda}_k\} = \alpha_k > 0$ hat. Dabei ist die Existenz eines solchen Eigenwerts ausreichend. Unter Berücksichtigung der Erkenntnisse aus (4.16) liefert die Abschätzung des Betrags der Stoßantwort nach oben:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |h_i \cdot e^{\alpha_i t}| = \begin{cases} 0 & \text{für alle } \alpha_i < 0 \\ \infty & \text{für mindestens ein } \alpha_i > 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Die Stoßantwort konvergiert also immer, wenn alle Eigenwerte einen echt negativen Realteil haben. Also $\Re\{\underline{\lambda}_i\} = \alpha_i < 0$ für $i = 1, \dots, n$ erfüllt ist. Anhand dieser Überlegungen ist klar, dass der Realteil der Eigenwerte entscheidet, ob die Stoßantwort verschwindet (*abklingt*), oder divergiert (*aufschwingt*). Dieses Grenzverhalten überträgt sich durch das Faltungsintegral auf die allgemeine Systemantwort, wenn die Erregung beschränkt und von Null verschieden ist. Daraus resultieren zwei gängige Stabilitätsdefinitionen.

4.3.2 ASYMPTOTISCHE STABILITÄT

Das System der Ordnung n heißt asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte $\underline{\lambda}_i$ gilt:

$$\Re\{\underline{\lambda}_i\} < 0 \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

Alle Eigenwerte müssen einen echt negativen Realteil haben. Äquivalent dazu ist die Forderung, dass die Stoßantwort asymptotisch zur Zeitachse konvergiert bzw. verschwindet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \quad (4.19)$$

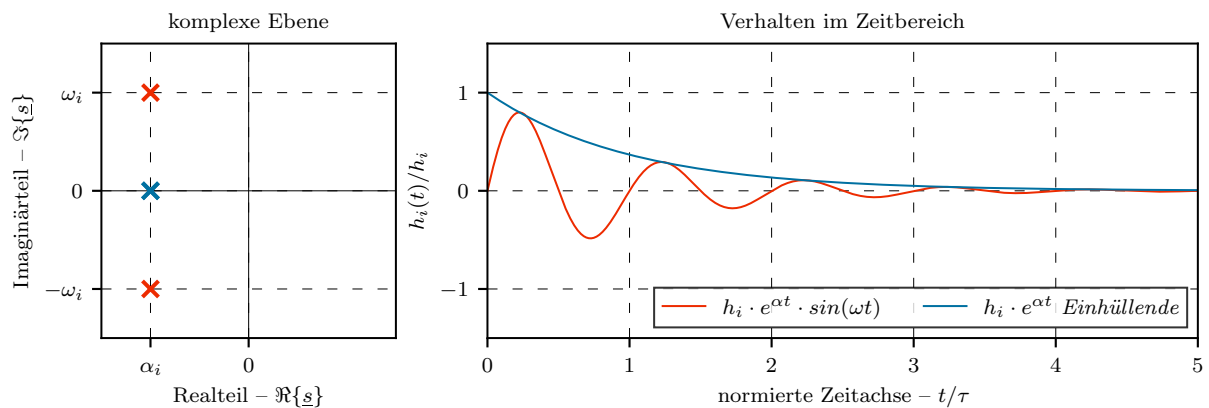


Abbildung 4.11: Visualisierung asymptotisch stabilen Verhaltens. Dargestellt ist ein Summand der Stoßantwort mit negativem Realteil $\alpha_i < 0$. Die Funktion konvergiert asymptotisch zur Zeitachse

4.3.3 GRENZSTABILITÄT

Das System der Ordnung n heißt grenzstabil, wenn für alle Eigenwerte $\underline{\lambda}_i$ gilt:

$$\Re\{\underline{\lambda}_i\} \leq 0 \quad \text{für alle} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

Alle Eigenwerte müssen einen negativen Realteil haben. Eigenwerte auf der imaginären Achse sind zugelassen, müssen aber einfach sein mit Vielfachheit $\mu_i = 1$. Äquivalent dazu ist die Forderung, dass der Grenzwert der Stoßantwort beschränkt ist und somit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| \leq h_\infty \quad (4.21)$$

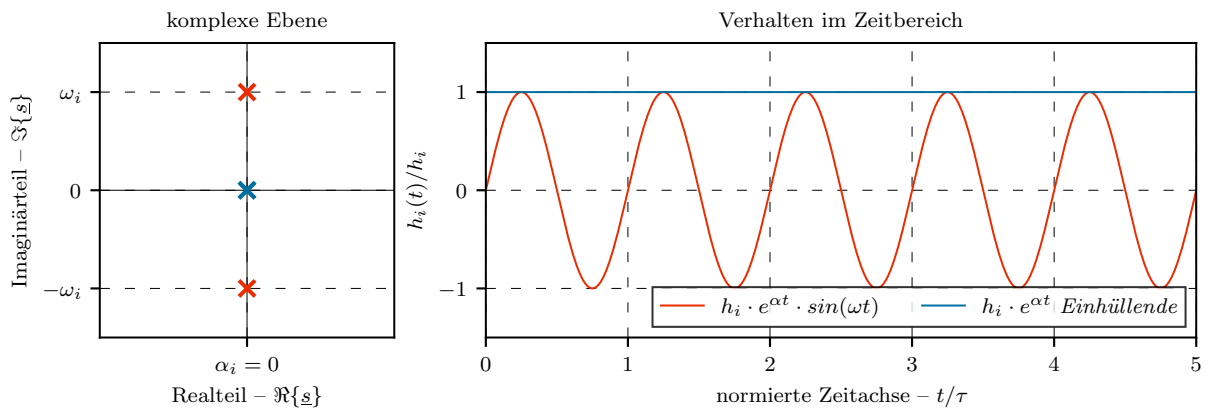


Abbildung 4.12: Visualisierung grenzstabilen Verhaltens. Dargestellt ist ein Summand der Stoßantwort mit Eigenwert auf der imaginären Achse und somit $\alpha = 0$

4.3.4 INSTABILITÄT

Wenn das System nicht asymptotisch stabil und auch nicht grenzstabil ist, ist es instabil. Dafür reicht es, dass ein Eigenwert einen positiven Realteil hat. Außerdem divergiert dann die Stoßantwort. Instabile Systeme sind grundsätzlich unerwünscht. Eines der Ziele in der Regelungstechnik ist es beispielsweise instabile Systeme durch Regler zu stabilisieren.

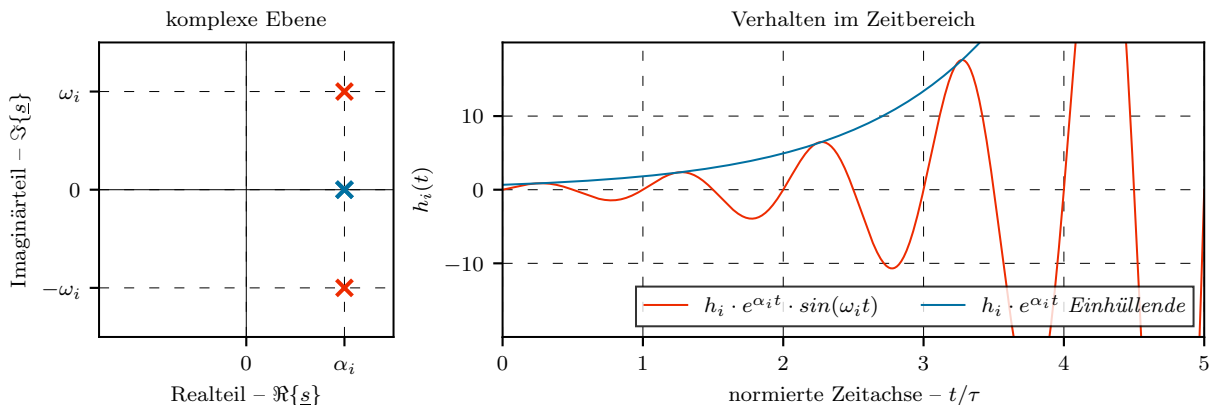


Abbildung 4.13: Visualisierung instabilen Verhaltens. Dargestellt ist ein Summand der Stoßantwort mit Eigenwert in der rechten Halbebene und somit $\alpha > 0$. Die Divergenz der Funktion ist klar erkennbar.

4.4 STABILITÄTSKRITERIEN

Um lineare zeitinvariante Systeme auf ihre Stabilität hin zu prüfen genügt es die Eigenwerte der Zustandsmatrix \mathbf{A} , also die natürlichen Frequenzen des Systems zu untersuchen, da ihre Realteile das Konvergenzverhalten der Systemantwort bestimmen. Für Systeme großer Ordnung $n = \dim \{\mathbf{A}\}$ ist es oft nicht praktikabel die Eigenwerte direkt auszurechnen und zu untersuchen. Um trotzdem eine Aussage über die Stabilität des Systems treffen zu können werden hier einige Stabilitätskriterien vorgestellt, die vorwiegend das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ des Systems untersuchen. Die Analyse des Nennerpolynoms ist dabei hinreichen, da seine Nullstellen die Polstellen der Übertragungsfunktion und diese die Eigenwerte des Systems sind.

4.4.1 HURWITZ-POLYNOME

Ein Hurwitzpolynom (*nach Adolf Hurwitz*) ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen alle einen echt negativen Realteil haben. Ein Polynom:

$$\underline{Q}(\underline{s}) = a_n \underline{s}^n + a_{n-1} \underline{s}^{n-1} + \dots + a_1 \underline{s} + a_0 \quad (4.22)$$

Heißt also Hurwitzpolynom, genau dann wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\underline{Q}(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Re\{\lambda_i\} < 0 \quad (4.23)$$

Asymptotisch stabile Systeme haben also Übertragungsfunktionen, deren Nennerpolynome Hurwitzpolynome sind. Für den Fall, dass das Polynom vom Grad 1 oder 2 ist und nur Koeffizienten gleichen Vorzeichens hat, ist es automatisch ein Hurwitzpolynom und die Untersuchung ist abgeschlossen. Für Polynome höheren Grades gilt das nicht ohne weiteres. Die Vorzeichengleichheit der Koeffizienten ist aber immer eine notwendige Bedingung.

4.4.2 HURWITZ-DETERMINANTEN-KRITERIUM

Die wohl bekannteste Methode, ein Polynom höheren Grades auf seine Hurwitz-Eigenschaft zu testen ist die Hurwitzmatrix. Diese wird nach folgendem Schema aus den Koeffizienten des Polynoms aufgebaut:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & & \vdots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Das zugrundeliegende Polynom ist dann ein Hurwitzpolynom, wenn die Hurwitzmatrix \mathbf{H} positiv definit ist. Dafür müssen die Determinanten aller Hauptminoren positiv sein:

$$\left| \begin{array}{c} a_{n-1} \end{array} \right| > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{array} \right| > 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{array} \right| > 0, \quad \dots \quad (4.25)$$

4.4.3 HURWITZ-KETTENBRUCH-KRITERIUM

Eine weitere Methode, ein Polynom auf seine Hurwitz-Eigenschaft zu untersuchen ist die Kettenbruchentwicklung. Dabei wird das Polynom zunächst in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegt:

$$\underline{Q}(\underline{s}) = \underbrace{a_0 + a_2 \underline{s}^2 + a_4 \underline{s}^4 + \dots}_{\underline{G}_Q(\underline{s}) \text{ gerader Anteil}} + \underbrace{a_1 \underline{s} + a_3 \underline{s}^3 + a_5 \underline{s}^5 + \dots}_{\underline{U}_Q(\underline{s}) \text{ ungerader Anteil}} \quad (4.26)$$

Die Untersuchung stützt sich auf die Entwicklung des Quotienten aus geradem und ungeradem Anteil als Kettenbruch. Dabei muss das Polynom mit dem größeren Grad den Zähler bilden. Das Entwicklungsverfahren besteht aus abwechselnder Abspaltung eines \underline{s} im Zähler durch Polynomdivision und anschließendem Flippen des Restterms in den Nenner:

$$\frac{\underline{G}_Q(\underline{s})}{\underline{U}_Q(\underline{s})} = b_1 \underline{s} + \frac{1}{b_2 \underline{s} + \frac{1}{b_3 \underline{s} + \frac{1}{b_4 \underline{s} + \frac{1}{\dots}}}} \quad (4.27)$$

Wenn die Koeffizienten des Kettenbruchs alle positiv sind $b_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, ist das zugrundeliegende Polynom ein Hurwitzpolynom.

4.5 DER EINGESCHWUNGENE ZUSTAND

Die Analyse des Systems in einem eingeschwungenen Zustand (*auch steady-state analysis*) ist eine gängige Methode in den Ingenieurwissenschaften. Oft wird jedoch unterschlagen, dass die Existenz eines eingeschwungenen Zustands an strenge Voraussetzungen geknüpft ist. Letzten Endes handelt es sich bei der Beschreibung des Systems im eingeschwungenen Zustand um eine vereinfachte Darstellung der Systemlösung, die nur unter diesen Bedingungen tatsächlich das Systemverhalten korrekt beschreibt.

4.5.1 GRUNDVORAUSSETZUNGEN

Das Grundprinzip der Analyse im eingeschwungenen Zustand ist die Annahme, dass das System bei beschränkter Erregung – also $|y(t)| < Y$ – nach einer gewissen Zeit eine Proportionalität zur Erregung selbst aufweist. Das ermöglicht dann die Beschreibung des Systemverhaltens über Betrags- und Phasendifferenzen. Damit ein eingeschwungener Zustand überhaupt existieren kann, muss die Stoßantwort asymptotisch konvergieren. Dies führt dazu, dass bei beschränkter Erregung auch der Systemausgang beschränkt ist. Das System muss somit asymptotisch stabil sein und es gelte:

$$\Re\{\underline{\lambda}_i\} < 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

Wenn das System asymptotisch stabil und die Erregung $|y(t)| < Y$ beschränkt ist, geht das System nach dem Einschwingvorgang und einer gewissen Einschwingzeit – also nach der Transiente, und wenn alle Anfangswerte abgeklungen sind – in einen eingeschwungenen Zustand über. Dieser Zustand erlaubt eine vereinfachte Darstellung der Lösung. Die Validität dieser Behauptung ergibt sich in den folgenden Unterpunkten.

4.5.2 HOMOGENE LÖSUNG IM EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND (WIP)

Der Einschwingvorgang beinhaltet auch das Abklingen der Wirkung der Anfangswerte bzw. der homogenen Lösung. Die allgemeine homogene Lösung ist in (1.58) gegeben. Für Eigenwerte mit echt negativem Realteil und im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ verhält sie sich folgendermaßen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}_h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} \cdot \vec{x}_0 \quad (4.29)$$

Nun stellt sich die Frage nach der Konvergenz der Matrixexponentialfunktion. Diese hängt an den Eigenwerten der Matrix \mathbf{A} . Diese sei vorerst als diagonalisierbar angenommen, dann besitzt sie die Darstellung:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{\lambda}_n \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Für die Matrixexponentialfunktion gilt dann (*dieser Schritt folgt direkt aus der Reihendarstellung (1.53)*):

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{V} \cdot e^{\underline{\mathbf{A}}t} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \begin{bmatrix} e^{\underline{\lambda}_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\underline{\lambda}_n t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^{-1} \quad (4.31)$$

Für jeden der Matrixeinträge i der Diagonalmatrix in (4.31) gilt nun mit $\underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\underline{\lambda}_i t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha_i t} \cdot e^{j\omega_i t} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_i < 0 \\ \text{divergent} & \text{für } \alpha_i \geq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Die homogene Lösung konvergiert bzw. verschwindet also nur für den Fall, dass das System asymptotisch stabil ist. Dann aber:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}_h(t) = \vec{0} \quad (4.33)$$

4.5.3 MOTIVATION EINER PRAKTIKABLEN EINSCHWINGZEIT

In der Realität ist die unendliche Wartezeit natürlich nicht praktikabel. Daher begeben wir uns jetzt auf die Suche nach einem Kriterium anhand dessen festgestellt werden kann, wenn ein eingeschwungener Zustand angenommen wird. oft eine Schwelle definiert, ab der die Anfangswerte – also die homogene Lösung – weit genug abgeklungen sind.

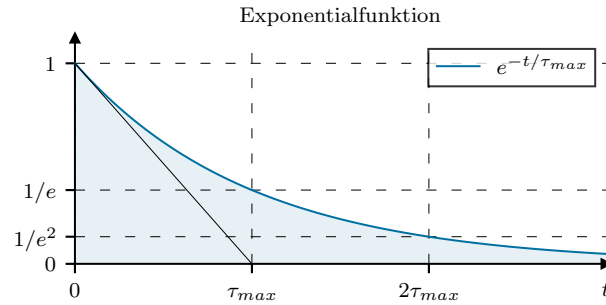


Abbildung 4.14: Einhüllende Kurve gegeben durch die größte Zeitkonstante τ_{max} im asymptotisch stabilen System

Da das Abklingverhalten der homogenen Lösung von den Realteilen α_i der Eigenwerte $\underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i$ abhängt, wird die Einschwingzeit durch den kleinsten Realteil – also die niedrigste natürliche Frequenz und somit die größte Zeitkonstante – bestimmt. Das liegt daran, dass für große Zeiten $t \gg 1$ die kleinsten Eigenwerte die homogene Lösung dominieren, da alle anderen Anteile dann bereits abgeklungen sind. Mit den Zeitkonstanten $\tau_i = |\frac{1}{\alpha_i}|$ gilt also für die größte Zeitkonstante:

$$\tau_{max} = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \tau_i \right\} = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{|\Re\{\underline{\lambda}_i\}|} \right\} \quad (4.34)$$

Für die homogene Lösung kann so eine obere Schranke angegeben werden. Speziell gilt mit der Annahme der Diagonalisierbarkeit der Zustandsmatrix \mathbf{A} :

$$\vec{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \vec{x}_0 < e^{-t/\tau_{max}} \cdot \vec{x}_0 \quad (4.35)$$

Mit dieser Überlegung kann man folgern, dass das System ab $t \gg \tau_{max}$ einen eingeschwungenen Zustand einnimmt. In der Praxis oft bereits ab etwa $t \approx 10\tau_{max}$ gewährleistet, was dem exponentiellen Charakter der Systemantworten zu verdanken ist.

4.5.4 BESCHRÄNKTHEIT DER ANTWORT IM EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND

Die vereinfachte Lösungsdarstellung von Systemen in einem eingeschwungenen Zustand ergibt sich unter der Annahme einer beschränkten Erregung. Sei also:

$$|y(t)| \leq Y \quad \text{für alle } t > 0 \quad \Rightarrow \quad |\underline{Y}(\underline{s})| \leq \left| Y \cdot \frac{1}{\underline{s}} \right| \quad (4.36)$$

Wenn die Erregung also betragsmäßig nach oben durch die Konstante Y beschränkt ist, dann folgt für die Systemantwort $x(t)$ in einem eingeschwungenen Zustand:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| x_h(t) + \left(h(\tau) * y(\tau) \right)(t) \right| \\ &\quad | \quad \text{homogener Anteil verschwindet für asymptotisch stabile Systeme} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \left(h(\tau) * y(\tau) \right)(t) \right| \\ &\quad | \quad \text{Faltungsintegral einsetzen und Grenzen anpassen} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \int_0^t h(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \right| \\ &\quad | \quad \text{Abschätzung nach oben, stetiger Integralkern (Stoßantwort)} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |h(\tau)| \cdot |y(t - \tau)| d\tau \\ &\quad | \quad \text{Abschätzung nach oben durch beschränkte Erregung} \\ &\leq Y \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |h(\tau)| d\tau \\ &\quad | \quad \text{Grenzwert bilden, obere Grenze anpassen} \\ &= Y \cdot \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau \\ &\quad | \quad \text{Integral konvergiert für asymptotisch stabile Systeme} \\ &\quad \quad \text{und kann durch eine Konstante } H \text{ abgeschätzt werden} \\ &\leq Y \cdot H < \infty \end{aligned}$$

Aus dieser Überlegung geht hervor, dass wenn die Erregung eines asymptotisch stabilen Systems beschränkt ist, dies auch für die Systemantwort im eingeschwungenen Zustand gilt. Diese Beschränktheit des Ausgangs kann nun ausgenutzt werden, um eine vereinfachte Darstellung der Lösung im eingeschwungenen Zustand abzuleiten. Diese beschreibt dann das Systemverhalten nach einer gewissen Einschwingzeit für $t \gg \tau_{max}$.

4.5.5 ANMERKUNG ZUR KONVERGENZ UND DER STOßANTWORT

In den folgenden Abschnitten wird häufig mit den Bedingungen der Integrierbarkeit der Stoßantwort $h(t)$ argumentiert. Diese Eigenschaft ist fundamental für die Diskussion des eingeschwungenen Zustands.

Aber warum genau konvergiert das Integral über die Stoßantwort nur für asymptotisch stabile Systeme? Um das zu ergründen betrachten wir die allgemeine Form der Stoßantwort in Gleichung (4.4), welche die folgende Form hat:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{m-n} c_k \cdot \delta^{(k)}(t) + \theta(t) \sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{r_{i,k}}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{\lambda_i t} \right)$$

Integriert über die gesamte positive Zeitachse für $t \in [0, \infty)$ ergibt wegen der Linearität des Integrals:

$$\int_0^\infty h(t) dt = \sum_{k=0}^{m-n} c_k \underbrace{\int_0^\infty \delta^{(k)}(t) dt}_{\text{zu lösen}} + \sum_{i=1}^{n_\mu} \left(\sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{r_{i,k}}{(k-1)!} \underbrace{\int_0^\infty t^{k-1} \cdot e^{\lambda_i t} dt}_{\text{zu lösen}} \right) \quad (4.37)$$

Die Summanden der Stoßantwort können also einzeln integriert werden. Die beiden zu integrierenden Funktionen sind dabei für einen beliebigen Index m allgemein bis auf eine Skalierung mit komplexen Konstanten angebar:

$$\int_0^\infty \delta^{(m)}(t) dt = \begin{cases} \delta^{(m-1)}(t) & \text{für } m \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^m \cdot e^{\lambda_i t} dt &= \left[\frac{1}{\lambda_i} \cdot t^m \cdot e^{\lambda_i t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty m \cdot t^{m-1} \cdot e^{\lambda_i t} dt \\ &| \text{ partielle Integration bis } t^m \text{ vollst. abgebaut} \\ &= \sum_{j=0}^m \left[(-1)^j \cdot \frac{j!}{\lambda_i^{j+1}} \cdot t^{m-j} \cdot e^{\lambda_i t} \right]_0^\infty \\ &| \text{ Auswertung der Stammfunktion} \\ &= (-1)^{m+1} \cdot \frac{m!}{\lambda_i^{m+1}} + \begin{cases} 0 & \text{für } \Re\{\lambda_i\} < 0 \\ \pm\infty & \text{für } \Re\{\lambda_i\} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aus der Fallunterscheidung bei der Auswertung der Stammfunktion geht hervor, dass die asymptotische Stabilität des Systems eine Voraussetzung für die Konvergenz bei der oberen Integrationsgrenze ist. Es sollte zusätzlich noch einmal betont werden, dass selbst Grenzstabilität, was oft synonym mit Stabilität verwendet wird, nicht hinreichend für die Konvergenz des Integrals ist.

4.5.6 DER ZEITUNABHÄNGIGE EINGESCHWUNGENE ZUSTAND

Ein ganz besonderer Fall für den eingeschwungenen Zustand (*auch stationärer Zustand, oder DC-Verhalten*) ergibt sich, wenn die Erregung für große t eine konstante – also zeitunabhängige – Funktion ist. Sei also:

$$y(t) = \theta(t) \cdot y_0 = \text{konst. für } t > 0$$

Unter diesen Voraussetzungen nimmt das asymptotisch stabile System für $t \gg \tau_{max}$ einen konstanten Endwert – auch stationärer Endwert – an und geht somit in einen zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand über. Dieser Endwert ist gegeben durch:

$$x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad (4.40)$$

Dieser Endwert lässt sich im Zeitbereich durch Grenzwertbildung über das Faltungsintegral berechnen:

$$\begin{aligned} x_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Systemantwort über Faltungsintegral beschreibbar,} \\ \text{da Anfangswerte bereits abgeklungen} \end{array} \right. \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (h(\tau) * y(\tau))(t) \\ &\quad \left| \text{konstante Erregung einsetzen und umformen} \right. \\ &= y_0 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (h(\tau) * \theta(\tau))(t) \\ &\quad \left| \text{Faltungsintegral ausschreiben und untere Grenze anpassen} \right. \\ &= y_0 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty h(\tau) \cdot \theta(t - \tau) d\tau \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Integrand ist auf } [0, \infty) \text{ Riemann integrierbar, wenn} \\ \text{Stoßantwort asymptotisch stabiles System beschreibt} \end{array} \right. \\ &= y_0 \cdot \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} (h(\tau) \cdot \theta(t - \tau)) d\tau \\ &\quad \left| \text{Grenzwert bilden und umformulieren} \right. \\ &= y_0 \cdot \int_0^\infty h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die Stoßantwort muss für die Konvergenz des Integrals ein asymptotisch stabiles System beschreiben. Hier ist also wieder klar erkennbar, dass ein zeitunabhängiger eingeschwungener Zustand nur für asymptotisch stabile Systeme existieren kann. Die aus dieser Grenzwertbildung hervorgehende Konstante x_∞ beschreibt nun unter der Voraussetzung, dass das System asymptotisch stabil und sich bei konstanter Erregung in einem eingeschwungenen Zustand befindet das Systemverhalten komplett. Dieses Systemverhalten kann in der Praxis – beispielsweise bei Erregung durch eine Sprungfunktion und nach Abklingen der Transienten – oft beobachtet werden.

4.5.7 DER HARMONISCHE EINGESCHWUNGENE ZUSTAND

Eine weitere technisch extrem relevante Lösungsformulierung ist die Darstellung im harmonischen eingeschwungenen Zustand (*auch sinusoidal steady state*). Er bildet die Grundlage für die Analyse im Frequenzbereich und die Systembeschreibung durch einen Frequenzgang.

Es gelten dabei wieder die Voraussetzungen für die Existenz eines eingeschwungenen Zustands, also asymptotische Stabilität und das Verschwinden des transienten Anteils ab einer Einschwingzeit $t \gg \tau_{max}$. Zusätzlich sei die Erregung als eine harmonische Schwingung angenommen, die ab dem Entstehungszeitpunkt $t = 0$ (*allgemein* $t = t_0$) in das System eingeprägt wird und über den Phasor $\underline{Y} \in \mathbb{C}$ (*charakterisiert Amplitude und Phase des Signals, entsprechen Fourierkoeffizienten zur entsprechenden Frequenz eines periodischen Signals*) und eine Erregerfrequenz ω beschrieben werden kann:

$$y(t) = \theta(t) \cdot \Re\{\underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\} = \theta(t) \cdot |\underline{Y}| \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (4.41)$$

Die Antwort des Systems basierend auf der partikulären Lösung (*also der für $t \gg \tau_{max}$ relevante Teil der Lösung, der homogene Anteil wird hier bereits vernachlässigt, da er für asymptotisch stabile Systeme abklingt*) ergibt sich für $t > 0$ allgemein aus dem Faltungsintegral und der Stoßantwort $h(t)$ zu:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(h(\tau) * y(\tau) \right)(t) \\ &\quad | \quad \text{harmonische Erregung einsetzen} \\ &= \left(h(\tau) * \theta(\tau) \cdot \Re\{\underline{Y} \cdot e^{j\omega\tau}\} \right)(t) \\ &\quad | \quad \begin{array}{l} \text{umformulieren der Faltung ist wegen} \\ \text{der Linearität des Systems zugelassen} \end{array} \\ &= \Re\left\{ \underline{Y} \cdot \left(h(\tau) * \theta(\tau) \cdot e^{j\omega\tau} \right)(t) \right\} \\ &\quad | \quad \begin{array}{l} \text{Faltung ausschreiben und} \\ \text{Integrationsgrenzen anpassen} \end{array} \\ &= \Re\left\{ \underline{Y} \cdot \int_0^t h(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right\} \\ &\quad | \quad \text{umformen nach Integrationsvariable} \\ &= \Re\left\{ \underline{Y} \cdot \int_0^t h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Hier ist bereits zu erkennen, dass die Grundschiwingung des Systems durch den Term $e^{j\omega t}$ zumindest als eine Hüllkurve / Hüllschwingung auch in der Systemantwort erhalten bleibt. Wie man gleich sehen wird, ist die Erhaltung der Erregerfrequenz ω in der Systemantwort einer der Gründe, warum die Darstellung im harmonischen eingeschwungenen Zustand so stark abgekürzt werden kann.

Um nun die Systemantwort nach dem Abklingen der Transienten – also im eingeschwungenen Zustand – zu erhalten, wird das Integral in zwei Intervalle $[0, T]$ und $[T, t]$ aufgeteilt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re \left\{ \underline{Y} \cdot \left(\int_0^T h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_T^t h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \right) \cdot e^{j\omega t} \right\} \\
 &\quad | \quad \text{bilde den Grenzwert } T \rightarrow \infty \text{ und vertausche Integrationsgrenzen} \\
 &= \underbrace{\Re \left\{ \underline{Y} \cdot \int_0^\infty h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t} \right\}}_{x_{ez}(t) \text{ eingeschwungener Zustand}} - \underbrace{\Re \left\{ \underline{Y} \cdot \int_t^\infty h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot e^{j\omega t} \right\}}_{\text{Transiente} \rightarrow 0 \text{ f\"ur } t \rightarrow \infty}
 \end{aligned}$$

Für das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ verschwindet das rechte Integral. Die Darstellung im eingeschwungenen Zustand wird also ausschließlich vom linken Integral dominiert:

$$\begin{aligned}
 x_{ez}(t) &= \Re \left\{ \underline{Y} \cdot \underbrace{\int_0^\infty h(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}_{(\text{einseitiges}) \text{ Fourierintegral}} \cdot e^{j\omega t} \right\} \\
 &\quad | \quad \begin{array}{l} \text{das Fourierintegral konvergiert, da die Stoßantwort} \\ h(\tau) \text{ ein asymptotisch stabiles System beschreibt} \end{array} \\
 &= \Re \left\{ \underline{Y} \cdot \underline{H}(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}
 \end{aligned}$$

Das Integral wird auch als einseitige Fouriertransformation bezeichnet. Für die Konvergenz des Fourierintegrals gelten wesentlich strengere Bedingungen als für das Laplaceintegral. Die asymptotische Konvergenz der Stoßantwort $h(t)$ ist hier eine notwendige Bedingung und nur für asymptotisch stabile Systeme erfüllt (siehe den Abschnitt zur Stabilität). Die Antwort des Systems im harmonischen eingeschwungenen Zustand ergibt sich dann zu:

$$x(t) = x_{ez}(t) = \Re \left\{ \underline{Y} \cdot \underline{H}(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{für } t \gg \tau_{max} \quad (4.42)$$

Noch einmal hervorzuheben ist, dass die Amplitude des Ausgangssignals im harmonischen eingeschwungenen Zustand direkt proportional zum Betrag der Funktion $\underline{H}(j\omega)$ und somit abhängig von der erregenden Frequenz ω ist.

Die Beschreibung des Systemverhaltens in einem harmonischen eingeschwungenen Zustand erfüllt somit die Grundannahmen bei der Analyse im Frequenzbereich, in dem alle Systemgrößen als komplexe Zeiger und deren Betrags- und Phasendifferenzen beschrieben werden können. Dies wird besonders deutlich, wenn Amplitude und Phase der Antwort ebenfalls über einen entsprechenden Phasor \underline{X} (mehr zu Phasoren in Abschnitt 5.1.4) ausgedrückt werden:

$$x_{ez}(t) = \Re \left\{ \underline{X} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{mit} \quad \underline{X} = \underline{Y} \cdot \underline{H}(j\omega)$$

Unter diesen Voraussetzungen hat $\underline{H}(j\omega)$ die Struktur der Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ mit der Ersetzung $s \rightarrow j\omega$ und wird in der Regel als Frequenzgang bezeichnet. Die vereinfachte Beschreibung des Systemverhaltens über Frequenzgänge hat ihren Ursprung bzw. ihre Rechtfertigung in der Annahme eines harmonischen eingeschwungenen Zustands. Dieser bildet also die Grundlage für die Analyse des Systems im Frequenzbereich im folgenden Kapitel.

KAPITEL 5

SYSTEMANALYSE IM FREQUENZBEREICH

Neben der Analyse des Systems im Laplacebereich ist in der Praxis oft eine Analyse im Frequenzbereich zielführend. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Aspekte der Systemanalyse im Frequenzbereich auf Basis von Frequenzgängen geliefert und die dazu notwendige Theorie (*als ein Teilgebiet der Fourieranalysis*) vermittelt.

5.1 PERIODISCHE SIGNALE

Generell werden bei der Analyse im Frequenzbereich alle Systemgrößen (*inklusive Eingang und Ausgang*) als periodisch angenommen.

5.1.1 PERIODIZITÄT

Eine Funktion $f(t)$ heißt periodisch mit der Periode T (*auch T -Periodisch*), wenn für alle t gilt:

$$f(t) = f(t + T) \quad (5.1)$$

Die Funktionswerte periodischer Funktionen wiederholen sich in regelmäßigen Abständen (*der Periode*). Auch ganzzahlige Vielfache der Periode T sind wieder eine Periode der Funktion.

5.1.2 FOURIERREIHE

Als Fourierreihe (*nach Joseph Fourier*) bezeichnet man die Reihenentwicklung einer periodischen, abschnittsweise stetigen Funktion in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen mit verschiedenen Frequenzen, die jeweils in aufsteigender Weise Vielfache einer Grundfrequenz sind. Jede stetig differenzierbare Funktion $f(t)$, die auf dem Intervall $t \in [0, T]$ definiert ist, lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln. Diese hat in komplexer Schreibweise die allgemeine Form:

$$f(t) = \frac{2}{T} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Re \left\{ \underline{E}_k \cdot e^{j\omega_k t} \right\} \quad (5.2)$$

Dabei sind \underline{E}_k die komplexen Fourierkoeffizienten zur jeweiligen Kreisfrequenz ω_k , welche ein Vielfaches der Grundfrequenz $\frac{2\pi}{T}$ des Zeitintervalls ist.

$$\underline{E}_k = \int_0^T f(t) \cdot e^{-j\omega_k t} dt \quad \text{und} \quad \omega_k = \frac{2\pi}{T} \cdot k \quad (5.3)$$

5.1.3 FOURIERSYNTHESE UND APPROXIMATION

Obwohl die Reihenentwicklung (5.2) das periodische Signal exakt repräsentiert, ist die Aufsummation unendlich vieler Sinus- und Kosinusfunktionen in der Realität natürlich nicht praktikabel.

Stattdessen wird die Reihenentwicklung ab einem bestimmten, vorher durch die Anforderungen an die Berechnung festgelegten $k = k_{max}$ abgebrochen und das Signal dadurch approximiert.

Die höchsten in der Approximation enthaltenen Frequenzanteile sind dann durch die Frequenz $\omega_{max} = \frac{2\pi}{T} \cdot k_{max}$ gegeben.

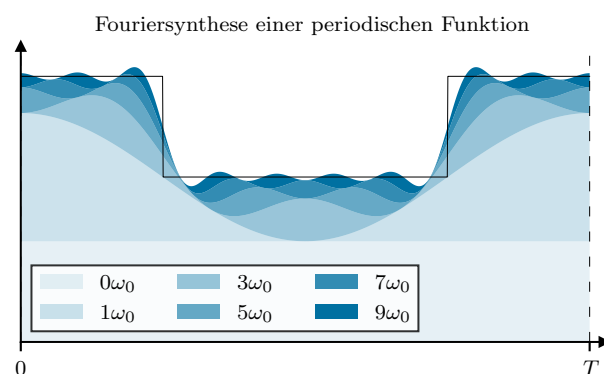


Abbildung 5.1: Überlagerung (*Superposition*) harmonischer Schwingungen zur Annäherung einer periodischen Funktion

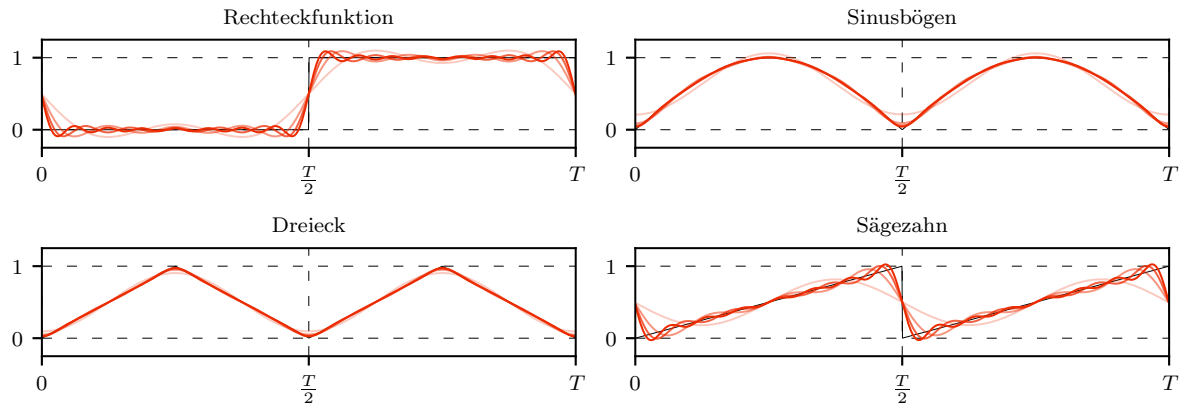


Abbildung 5.2: Beispielhafte Fourierapproximation von T -Periodischen Funktionen. Abgebildet sind Rechteck-, Sinusbogen-, Dreieck- und Sägezahnfunktionen für verschiedene Approximationsstufen k_{max} .

5.1.4 KOMPLEXE ZEIGER UND PHASOREN

Das Zeigermodell ist ein populäres Konzept in der Physik. Es stellt periodische Vorgänge als Rotation eines Zeigers in der komplexen Ebene dar und findet vor allem in der Schwingungslehre, der komplexen Wechselstromrechnung, der Wellenoptik und der Quantenmechanik Anwendung. Generell eignet sich die Zeigerdarstellung besonders gut zur Beschreibung harmonischer Vorgänge, da Amplitude, Phase und Frequenz der Signale intuitiv geometrisch interpretiert werden können. Periodische Signale werden dabei durch eine Cosinusfunktion mit einer (*im allgemeinen reellen frequenzabhängigen*) Amplitude $Z(\omega) = |\underline{Z}(j\omega)|$ und Phase $\varphi(\omega)$ beschrieben.

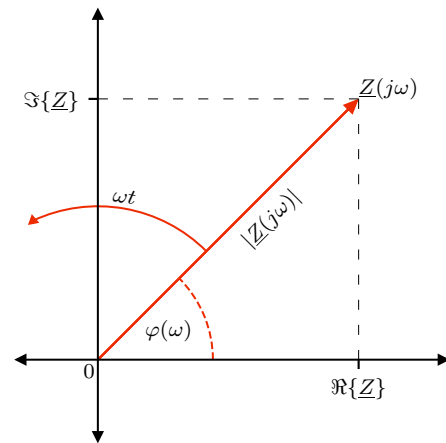


Abbildung 5.3: Geometrische Darstellung eines frequenzabhängigen Phasors $\underline{Z}(j\omega)$ in der komplexen Ebene.

Sämtliche Betrags- und Phaseninformationen der Schwingung werden so durch den Phasor $\underline{Z}(j\omega)$ repräsentiert. Die Zeigerdarstellung der Schwingung ist dann:

$$z(t) = \underbrace{|\underline{Z}(j\omega)|}_{\text{Amplitude}} \cdot \cos(\omega t + \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{Phase}}) = \Re \left\{ \overbrace{\underline{Z}(j\omega) \cdot e^{j\omega t}}^{\text{Zeiger}} \right\} \quad (5.4)$$

Ausgenutzt wird bei dieser Darstellung die Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen zur komplexen Exponentialfunktion über die Eulerformel. Der Phasor $\underline{Z}(j\omega)$ hat insbesondere den Vorteil, dass die (*sinusförmige*) Zeitabhängigkeit bei ihm nicht auftaucht. Er ist nur von der Kreisfrequenz ω abhängig und somit für feste Frequenzen $\omega = \omega_0$ eine konstante komplexe Zahl. Der Zeiger hingegen berücksichtigt die Zeitabhängigkeit und beschreibt mit der Frequenz ω eine Kreisbahn in der komplexen Ebene, deren Radius und Phase durch den Phasor festgelegt werden. In dieser Schreibweise lassen sich die Beziehungen zwischen Schwingungen und Signalen auf die Beziehungen zwischen den Zeigern (*bzw. bei festen Frequenzen auf die Phasoren*) reduzieren.

5.2 DER FREQUENZGANG

Der Frequenzgang eines Systems ist oft das Kernstück der Analyse im Frequenzbereich und wird daher nun etwas detaillierter behandelt. Zuerst aber einige wichtige Grundlagen.

5.2.1 GRUNDANNAHMEN UND DEFINITION DES FREQUENZGANGS

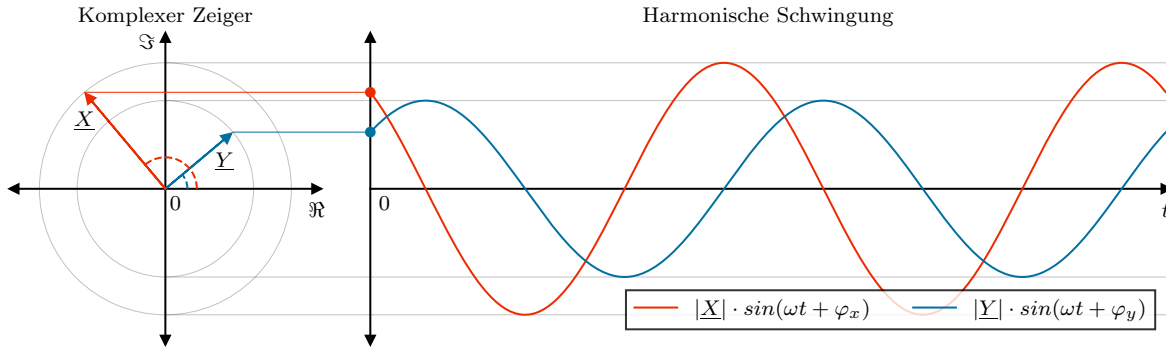


Abbildung 5.4: Visualisierung der Betragsverhältnisse und Phasendifferenzen der Phasoren \underline{Y} und \underline{X} im Zeigerdiagramm. Projektion des Imaginärteils auf harmonische Schwingungen.

Für lineare zeitinvariante asymptotisch stabile Systeme in einem eingeschwungenen Zustand mit harmonischer Erregung der Frequenz ω gilt, dass allen Systemgrößen – also auch der Ausgangsgröße – die selbe Schwingung mit der selben Frequenz ω zugrunde liegt (*siehe harmonisch eingeschwungener Zustand*). Alle Systemgrößen und somit auch alle Eingänge:

$$y(t) = \Re\{\underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\} = |\underline{Y}| \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (5.5)$$

Und Systemausgänge:

$$x(t) = \Re\{\underline{X} \cdot e^{j\omega t}\} = |\underline{X}| \cdot \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (5.6)$$

Können dann durch komplexe Zeiger gleicher Frequenz dargestellt werden. Eingangs- und Ausgangssignal lassen sich dann auf die Phasoren \underline{Y} und \underline{X} reduzieren. Das Superpositionsprinzip gilt hier ebenfalls und jede Frequenz kann ganz im Sinne einer Fourierreihenentwicklung durch einen Phasor (*Fourierkoeffizient*) beschrieben und separat behandelt werden. Der Phasen- und Betragsunterschied der komplexen Zeiger lässt sich direkt auf die Phasoren zurückführen und ist im Allgemeinen abhängig von der erregenden Frequenz ω . Das frequenzabhängige Verhältnis der Phasoren \underline{Y} und \underline{X} im Zeigermodell wird als Frequenzgang bezeichnet:

$$\underline{H}(j\omega) := \frac{\underline{X}}{\underline{Y}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{Y} = \underline{X} \quad (5.7)$$

Insbesondere gibt es einen wichtigen Zusammenhang zur bereits eingeführten Stoßantwort $h(t)$. Der Frequenzgang kann bei bekannter Stoßantwort direkt über die Fouriertransformation \mathcal{F} berechnet werden (*siehe: harmonischer eingeschwungener Zustand in Abschnitt 4.5.7*):

$$\underline{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}(j\omega) = \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (5.8)$$

Bei der Integraltransformation \mathcal{F} handelt es sich hier um die einseitige Fouriertransformation. Die Auswertung des Integranden und damit der Stoßantwort geschieht dabei nur für positive $t > 0$, was eine Folge von und ebenso eine Bedingung für die Kausalität des Systems ist. Außerdem konvergiert das Integral (*insbesondere die obere Integrationsgrenze*) nur, wenn die Stoßantwort ein asymptotisch stabiles System beschreibt. Da die Betrags- und Phasendifferenz in der Regel abhängig von der erregenden Frequenz ω in $y(t)$ ist, sind sowohl der Betrag, als auch die Phase des Frequenzgangs frequenzabhängig. Es gilt also:

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \angle\{\underline{H}(j\omega)\} \quad (5.9)$$

5.2.2 ANMERKUNG ZUR EXISTENZ EINES FREQUENZGANGS

Die Stoßantwort linearer zeitvarianter Systeme hat oft die folgende Form (*siehe dazu dem Abschnitt zur allgemeinen Stoßantwort*), wobei $\underline{\lambda}_i$ die natürlichen Frequenzen bzw. die Eigenwerte des Zustandsraummodells sind:

$$h(t) = \theta(t) \sum_{i=1}^n \underline{h}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t}$$

Die Berechnung des Frequenzgangs kann, wie im Abschnitt zum harmonisch eingeschwungenen Zustand motiviert, über die einseitige Fouriertransformation der Stoßantwort erfolgen. Setze daher:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{h(t)\}(j\omega) &= \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &| \quad \text{Stoßantwort einsetzen} \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \underline{h}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &| \quad \text{Integral und Summe vertauschen (Linearität)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^\infty \underline{h}_i \cdot e^{\underline{\lambda}_i t} \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \end{aligned}$$

Für jeden Summanden der Stoßantwort gilt nun folgendes, wobei der komplexe Eigenwert mit $\underline{\lambda}_i = \alpha_i + j\omega_i$ in Real- und Imaginärteil aufgespalten und die Exponenten zusammengefasst wurden:

$$\int_0^\infty \underline{h}_i \cdot e^{\alpha_i t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t} dt = \left[\frac{\underline{h}_i \cdot e^{\alpha_i t} \cdot e^{j(\omega_i - \omega)t}}{\alpha_i + j(\omega_i - \omega)} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \begin{cases} \text{divergent} & \text{für } \alpha_i \geq 0 \\ \frac{\underline{h}_i}{\alpha_i + j(\omega_i - \omega)} & \text{für } \alpha_i < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Es ist also klar, dass nur für negative Realteile $\Re\{\underline{\lambda}_i\} = \alpha_i$ der Eigenwerte das Fourierintegral konvergiert und nur dann ein eindeutiger Frequenzgang existieren kann. Maßgeblich ist dabei die notwendige asymptotische Konvergenz der Stoßantwort für $t \rightarrow \infty$ zur Zeitachse. Die asymptotische Stabilität des Systems ist also wieder als Grundvoraussetzung für die Existenz eines Frequenzgangs klar zu erkennen. Dies gilt allgemein, da wegen $|e^{j\omega t}| = 1$ die Konvergenz ausschließlich von der Stoßantwort abhängt. Diese wurde in Abschnitt 4.5.5 für die allgemeine Stoßantwort gezeigt. Grenzstabilität reicht nicht, da dann neben der Erregenden Frequenz auch immer Signalanteile der Eigenfrequenzen in der Systemantwort enthalten sind, welche nicht abklingen, was wiederum die Grundannahme der Analyse im Frequenzbereich verletzt.

5.2.3 SYSTEMBESCHREIBUNG ÜBER DEN FREQUENZGANG

Die Beschreibung des Systems über den Frequenzgang gibt an, wie sich bei einer Erregung durch ein harmonisches Signal (*beispielsweise einen reellen Kosinus*) am Eingang, die Amplitude und Phase am Ausgang verhalten. Beide sind dabei im Allgemeinen abhängig von der Frequenz ω des erregenden Signals. Im Frequenzbereich gilt für die Phasoren von Ein- und Ausgang der Zusammenhang:

$$\underline{X} = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{Y} \quad (5.11)$$

Die Systemantwort als Antwort im harmonischen eingeschwungenen Zustand im Zeitbereich kann dadurch direkt über den Frequenzgang angegeben werden. Dann:

$$x(t) = \Re\{\underline{H}(j\omega) \cdot \underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\} = |\underline{H}(j\omega)| \cdot |\underline{Y}| \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_y) \quad (5.12)$$

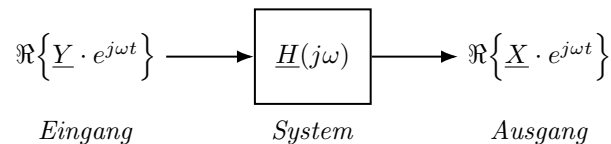


Abbildung 5.5: System im Frequenzbereich als Blockschaltbild. Charakterisiert durch den Frequenzgang $\underline{H}(j\omega)$.

5.2.4 MESSUNG DES FREQUENZGANGS

Bei der Erregung durch eine harmonische Schwingung (*Sinus oder Kosinus*) mit dem Phasor bzw. der Amplitude $\underline{Y} = 1$ folgt die Antwort im Frequenzbereich und dann für die reale physikalische Größe gilt dann die Antwort auf das Signal im Zeitbereich:

$$\underline{X} = \underline{H}(j\omega) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \Re\{\underline{H}(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\} = |\underline{H}(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (5.13)$$

Der Betrag des Frequenzgangs lässt sich unter diesen Bedingungen als Amplitude direkt am Ausgang des Systems messen. Dies geschieht oft über die Messung der Amplitude für ein gewünschtes Frequenzintervall (*auch Sinus-Sweep*). Also stellt der Betrag des Frequenzgangs die frequenzabhängige Amplitude des Ausgangs dar. Daher kann eine Analyse des Betrags eine erste Einschätzung über die Größe des Signals oder der Schwingung geben. Vektorielle Messsysteme (*in der Elektrotechnik Vektorielle Netzwerkanalysatoren VNA*) ermöglichen neben der Betragsmessung auch die Messung der Phasendifferenz zum Referenzsignal. Dann kann der Frequenzgang (*zumindest für bestimmte diskrete Frequenzen*) sogar vollständig bestimmt werden.

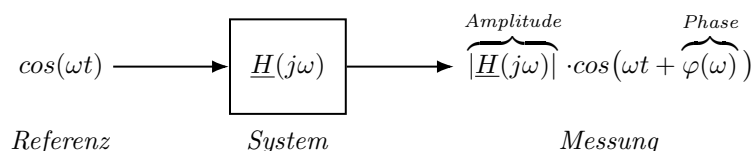


Abbildung 5.6: Erregung des Systems mit der Amplitude 1 und der Phase Null zur direktem Messung des Frequenzgangs als Amplitude am Ausgang des Systems.

5.2.5 FREQUENZGANG UND ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Der Frequenzgang (5.7) beschreibt wie die Übertragungsfunktion das Verhältnis von Eingang und Ausgang eines Systems. Für die Ersetzung des Arguments $\underline{s} \rightarrow j\omega$ kann der Frequenzgang aus der Übertragungsfunktion gewonnen werden. Dies entspricht einer Auswertung der Übertragungsfunktion entlang der Imaginären Achse:

$$\underline{H}(\underline{s}) \xrightarrow{\text{ersetze } \underline{s} \rightarrow j\omega} \underline{H}(j\omega) \quad (5.14)$$

Die Übertragungsfunktion kann – solange die Systemgrößen Laplacetransformierbar sind – immer aufgestellt werden und beschreibt das komplette Verhalten des Systems bezüglich einer beliebigen Erregung für alle Zeiten $t > 0$ (*also auch das Einschwingen / Aufschwingen*). Ein Frequenzgang kann hingegen nur für stabile Systeme, die sich bei harmonischer Erregung in einem eingeschwungenen Zustand befinden sinnvolle Ergebnisse liefern. Nur dann ist die Beschreibung ausschließlich über die Betrags- und Phasendifferenzen zulässig. Der Frequenzgang entspricht mit dem Übergang (5.14) quasi einer Auswertung der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse und beschreibt daher nicht das komplette Verhalten.

Die Ähnlichkeit von Laplaceintegral und der einseitigen Fouriertransformation führt dazu, dass Frequenzgang und Übertragungsfunktion generell die selbe Struktur haben. Beides sind rationale Funktionen mit einem Zähler- und einem Nennerpolynom.

Tabelle 5.1: Unterschiede zwischen Übertragungsfunktion und Frequenzgang

Übertragungsfunktion	Frequenzgang
Laplace-Transformation der Stoßantwort $h(t)$:	Einseitige Fouriertransformation der Stoßantwort:
$\underline{H}(\underline{s}) = \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-\underline{s}t} dt$	$\underline{H}(j\omega) = \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$
Existiert für beliebige lineare zeitinvariante Systeme, Konvergenz des Integrals kann durch Realteil von \underline{s} gewährleistet werden.	Konvergenz des Integrals hängt ausschließlich von $h(t)$ ab, da $ e^{j\omega t} = 1$. Existiert nur für asymptotisch stabile Systeme.
Die Zeitableitung wird in der Übertragungsfunktion (<i>darin sind die Anfangswerte nicht enthalten!</i>) zu einer Multiplikation mit \underline{s} :	Die Zeitableitung wird in der Struktur des Frequenzgangs zu einer Multiplikation mit der rein imaginären Variable $j\omega$:
$\frac{d}{dt}f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{s} \cdot \underline{F}(\underline{s})$	$\frac{d}{dt}f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \underline{F}$
Die Systemantwort im Laplacebereich ergibt sich als Multiplikation von Eingang und Übertragungsfunktion, wobei $\underline{X}(\underline{s})$ und $\underline{Y}(\underline{s})$ die Laplacetransformierten der Zeigereichsgrößen sind:	Die Systemantwort im Frequenzbereich bezüglich der Erregung mit einer Frequenz ω ergibt sich als Multiplikation der komplexen Eingangsamplitude (<i>Phasor</i>) mit dem Frequenzgang:
$\underline{X}(\underline{s}) = \underline{H}(\underline{s}) \cdot \underline{Y}(\underline{s})$	$\underline{X} = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{Y}$

5.2.6 FREQUENZGANG IN POLARDARSTELLUNG

Der Frequenzgang als komplexwertige Funktion lässt sich wie jede komplexe Größe auch in Polarform darstellen. Dies geschieht in eine Zerlegung in Betrag und Phase. Wie die Übertragungsfunktion, so besitzt auch der Frequenzgang ein Zähler- und ein Nennerpolynom:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{P}(j\omega)}{\underline{Q}(j\omega)}$$

Damit folgt für die Polardarstellung:

$$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{|\underline{P}(j\omega)|}{|\underline{Q}(j\omega)|} \cdot e^{j\varphi_P(\omega)} \cdot e^{-j\varphi_Q(\omega)} \quad (5.15)$$

Sowohl der Betrag $|\underline{H}(j\omega)|$, als auch die Phase $\varphi(\omega) = \varphi_P(\omega) - \varphi_Q(\omega)$ sind nach wie vor frequenzabhängig.

5.2.7 BETRAG DES FREQUENZGANGS

Da $\underline{P}(j\omega)$ und $\underline{Q}(j\omega)$ im Allgemeinen Polynome sind, können Realteil und Imaginärteil meistens recht einfach bestimmt werden. Der Betrag des Frequenzgangs berechnet sich folgendermaßen:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{\Re\{\underline{H}(j\omega)\}^2 + \Im\{\underline{H}(j\omega)\}^2} = \sqrt{\frac{\Re\{\underline{P}(j\omega)\}^2 + \Im\{\underline{P}(j\omega)\}^2}{\Re\{\underline{Q}(j\omega)\}^2 + \Im\{\underline{Q}(j\omega)\}^2}} \quad (5.16)$$

5.2.8 ANMERKUNG ZU KOMPLEXEN POLYNOMFUNKTIONEN

Speziell haben die Polynome $\underline{P}(j\omega)$ und $\underline{Q}(j\omega)$ im Zähler und Nenner des Frequenzgangs die folgende allgemeine Form (*Polynomform*):

$$\underline{F}(j\omega) = b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + (j\omega)^3 b_3 + (j\omega)^4 b_4 + (j\omega)^5 b_5 + \dots$$

In Summenschreibweise und nach Aufspaltung von geraden und ungeraden Anteilen kann das Polynom folgendermaßen dargestellt werden:

$$\underline{F}(j\omega) = \sum_{k=0} (j\omega)^k b_k = \underbrace{\sum_{k=0} (j\omega)^{2k} b_{2k}}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\sum_{k=0} (j\omega)^{2k+1} b_{2k+1}}_{\text{ungerader Anteil}}$$

Der Realteil entspricht den geraden Termen mit $(j\omega)^{2k} = (-1)^k \cdot \omega^{2k}$, da dann die imaginäre Einheit j verschwindet. Der Imaginärteil entspricht den ungeraden Termen mit $(j\omega)^{2k+1} = j \cdot (-1)^k \cdot \omega^{2k+1}$, da dann die imaginäre Einheit immer enthalten ist. Also gilt für Real- und Imaginärteil der Polynome:

$$\Re\{\underline{F}(j\omega)\} = b_0 - \omega^2 b_2 + \omega^4 b_4 + \dots \quad \text{und} \quad \Im\{\underline{F}(j\omega)\} = \omega b_1 - \omega^3 b_3 + \omega^5 b_5 + \dots$$

Die Behandlung der Polynome $\underline{P}(j\omega)$ und $\underline{Q}(j\omega)$ erfolgt völlig analog zu diesem allgemeinen Fall.

5.2.9 FALLUNTERSCHIEDUNG FÜR DIE BERECHNUNG DER PHASE

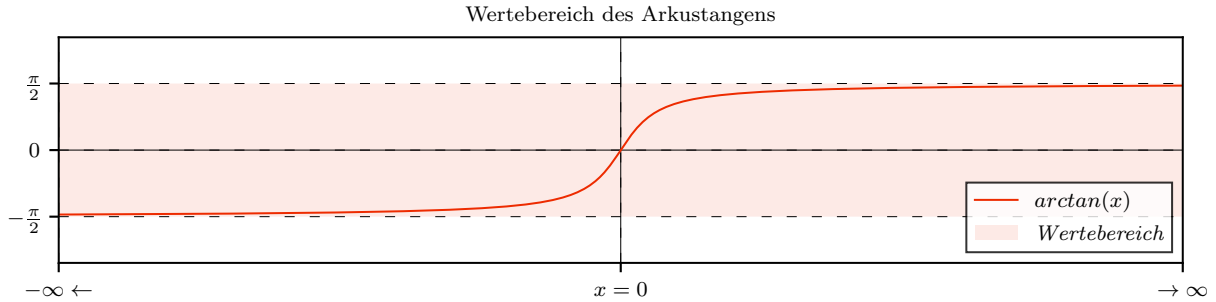


Abbildung 5.7: Visualisierung des Wertebereichs des Arkustangens

Für jedes der komplexwertigen Polynome – hier $\underline{P}(j\omega)$ exemplarisch – des Frequenzgangs kann die Phase φ der resultierenden komplexen Zahl über den Arkustangens bestimmt werden.

Da der Arkustangens selbst nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann, können damit nur Phasenwinkel in der rechten komplexen Halbebene repräsentiert werden. Das Vorzeichen des Arguments der Arkustangensfunktion ist invariant unter Vertauschung der Vorzeichen von Zähler und Nenner, somit ist die Bestimmung der Phase über den Arkustangens nicht eindeutig.

Außerdem werden die Phasenwinkel $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ nur im Grenzwert des Arkustangens erreicht. Phasenwinkel von Werten auf der imaginären Achse müssen also ebenfalls gesondert behandelt werden. Für die eindeutige Bestimmung des Phasenwinkels muss daher eine Fallunterscheidung erfolgen, die berücksichtigt in welchem Quadranten die komplexe Zahl liegt:

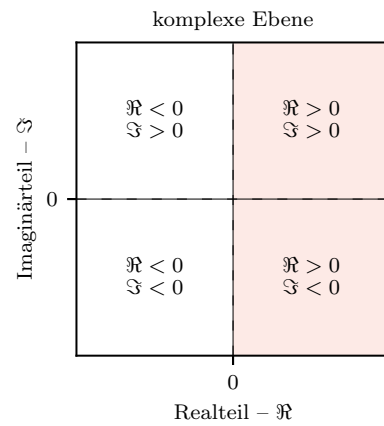


Abbildung 5.8: Komplexe Ebene mit den vier Quadranten. In der rechten Halbebene kann die Phase eindeutig durch den Arkustangens beschrieben werden.

$$\varphi_P(\omega) = \angle\{\underline{P}(j\omega)\} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{falls } \Re = 0 \text{ und } \Im < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } \Re = 0 \text{ und } \Im > 0 \\ \arctan\left(\frac{\Im\{\underline{P}(j\omega)\}}{\Re\{\underline{P}(j\omega)\}}\right) \pm \pi & \text{falls } \Re < 0 \\ \arctan\left(\frac{\Im\{\underline{P}(j\omega)\}}{\Re\{\underline{P}(j\omega)\}}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.17)$$

Da die Polynome – und somit auch Realteil und Imaginärteil – frequenzabhängig sind, muss die Fallunterscheidung je nach betrachteter Frequenz ω durchgeführt werden.

5.2.10 KAUSALITÄTSRELATION LINEARER SYSTEME

Neben der Symmetrierelation – die nicht nur für die Übertragungsfunktion, sondern natürlich auch für Frequenzgänge gilt – gibt es noch eine weitere, weniger bekannte, aber in der Optik und Festkörperphysik oft verwendete Relation für den Frequenzgang. Die Kramers-Kronig-Relation ist eine Kausalitätsrelation und verknüpft Realteil und Imaginärteil gebrochener rationaler Funktionen miteinander.

Für die Herleitung erinnern wir uns daran, dass die Stoßantwort $h(t)$ aufgrund der Kausalität (*Aktion vor Reaktion*) nur für positive Zeiten definiert ist und es deshalb keinen Unterschied macht, ob wir diese zusätzlich noch mit einer Sprungfunktion $\theta(t)$ abschneiden. Daher gilt ohne Einschränkungen:

$$h(t) = h(t) \cdot \theta(t) \quad \text{für } t > 0$$

Mit dem Faltungssatz für eine Multiplikation im Zeitbereich¹ ergibt sich eine Faltung im Frequenzbereich (die Stoßantwort muss dafür ein asymptotisch stabiles System beschreiben):

$$\underline{H}(j\omega) = \left(\underline{H}(j\omega_0) * \frac{1}{j\omega_0} \right)(j\omega)$$

Dieser Ansatz kann nun ausgenutzt werden um eine Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs abzuleiten:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \left(\underline{H}(j\omega_0) * \frac{1}{j\omega_0} \right)(j\omega) \\ &| \quad \text{Faltungsintegral ausschreiben und } j \text{ umformen} \\ &= -j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{H}(j\omega_0)}{\omega - \omega_0} d\omega_0 \\ &| \quad \text{Nenner intelligent erweitern} \\ &= -j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\ &| \quad \text{Integral anhand der Grenzen aufspalten und Grenzen vertauschen} \\ &= -j \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 + j \cdot \int_0^{-\infty} \frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\ &| \quad \text{rechte obere Integrationsgrenze umkehren (Substitution)} \\ &= -j \cdot \int_0^{\infty} \frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 + j \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\omega \underline{H}(-j\omega_0) - \omega_0 \underline{H}(-j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹ja ich weiß, der Faltungssatz für eine Multiplikation im Zeitbereich ist noch nicht im Skript enthalten, kommt aber bestimmt noch irgendwann

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& | \quad \text{Integrale wieder zusammenführen} \\
& = j \cdot \int_0^\infty -\frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega \underline{H}(-j\omega_0) - \omega_0 \underline{H}(-j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\
& | \quad \text{Symmetrierelation } \underline{H}(-j\omega) = \underline{H}^*(j\omega) \text{ ansetzen} \\
& = j \cdot \int_0^\infty -\frac{\omega \underline{H}(j\omega_0) + \omega_0 \underline{H}(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega \underline{H}^*(j\omega_0) - \omega_0 \underline{H}^*(j\omega_0)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\
& | \quad \text{Brüche zusammenfassen und nach } \omega, \omega_0 \text{ sortieren} \\
& = j \cdot \int_0^\infty \frac{-\omega(\underline{H}(j\omega_0) + \underline{H}^*(j\omega_0)) + \omega_0(\underline{H}(j\omega_0) - \underline{H}^*(j\omega_0))}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\
& | \quad \text{nutze } \underline{z} + \underline{z}^* = 2\Re\{\underline{z}\} \text{ und } \underline{z} - \underline{z}^* = j2\Im\{\underline{z}\} \text{ für den Frequenzgang} \\
& = j \cdot \int_0^\infty \frac{-\omega 2\Re\{\underline{H}(j\omega_0)\} + j\omega_0 2\Im\{\underline{H}(j\omega_0)\}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \\
& | \quad \text{umformen nach Real- und Imaginärteil liefert} \\
& = \int_0^\infty -j \cdot \frac{\omega 2\Re\{\underline{H}(j\omega_0)\}}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega_0 2\Im\{\underline{H}(j\omega_0)\}}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0
\end{aligned}$$

Dem Integrand können in dieser Form nun Realteil und Imaginärteil des Frequenzgangs zugeordnet werden und es ergeben sich die zwei Gleichungen der Kramers-Kronig-Relation:

$$\Re\{\underline{H}(j\omega)\} = \int_0^\infty \Im\{\underline{H}(j\omega_0)\} \cdot \frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \quad (5.18)$$

$$\Im\{\underline{H}(j\omega)\} = -\int_0^\infty \Re\{\underline{H}(j\omega_0)\} \cdot \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega_0 \quad (5.19)$$

Diese Kausalitätsrelation (*Erfüllung der Kausalität durch vorheriges Abschneiden der Stoßantwort mit einer Sprungfunktion*) erhält man alternativ auch durch Anwendung der Hilberttransformation auf einen beliebigen Frequenzgang.

5.3 DAS BODEDIAGRAMM

Im Bodediagramm werden Betrag und Phase separat über die erregende Frequenz ω aufgetragen. Üblich ist dabei eine logarithmische Auftragung der Phase und eine doppelt logarithmische Auftragung für den Betrag über die Frequenz. Das Bodediagramm ermöglicht eine schnelle visuelle Analyse des Systemverhaltens bezüglich der Erregung harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen. Insbesondere das asymptotische Verhalten für niedrige und hohe Frequenzen lässt sich so leicht ablesen. Auch eventuelle Resonanzfrequenzen des Systems können als Extrema im Bodediagramm identifiziert werden.

5.3.1 BETRAG DES FREQUENZGANGS IM BODEDIAGRAMM

Insbesondere für die händische Analyse des Frequenzgangs mit einem Bodediagramm werden die Pol- und Nullstellen benötigt. Der Betrag ist dann:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{(j\omega - z_m) \cdots (j\omega - z_1)}{(j\omega - p_n) \cdots (j\omega - p_1)} \right| = \frac{\prod_{k=1}^m |j\omega - z_k|}{\prod_{k=1}^n |j\omega - p_k|} \quad (5.20)$$

Dabei ergibt sich für eine logarithmische Auftragung des Betrags in Dezibel:

$$\begin{aligned} |\underline{H}(j\omega)| &= 20 \cdot \log_{10}(|\underline{H}(j\omega)|) \text{ dB} \\ &| \quad \text{Einsetzen der Pol- / Nullstellenform} \\ &= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\prod_{k=1}^m |j\omega - z_k|}{\prod_{k=1}^n |j\omega - p_k|} \right) \text{ dB} \\ &| \quad \text{durch Logarithmus wird Produkt zu Summe} \\ &= \underbrace{20 \cdot \sum_{k=1}^m \log_{10}(|j\omega - z_k|)}_{\text{Nullstellen}} \text{ dB} - \underbrace{20 \cdot \sum_{k=1}^n \log_{10}(|j\omega - p_k|)}_{\text{Polstellen}} \text{ dB} \end{aligned}$$

Nullstellen gehen also positiv in den Betrag ein und Polstellen negativ. Um eine bessere Einschätzung zu bekommen, wie genau Pol- und Nullstellen den Betrag beeinflussen, wird nun das asymptotische Verhalten der einzelnen Elemente bezüglich der Frequenz analysiert.

5.3.2 PHASE DES FREQUENZGANGS IM BODEDIAGRAMM

Die Phase des Frequenzgangs hingegen ergibt sich dann über die Summe der Phasenbeiträge:

$$\varphi(\omega) = \underbrace{\sum_{k=1}^m \angle \{j\omega - z_k\}}_{\text{Nullstellen}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \angle \{j\omega - p_k\}}_{\text{Polstellen}} \quad (5.21)$$

Auch bei der Phase unterscheidet sich der Einfluss der Pol- und Nullstellen nur durch das Vorzeichen. Die Phase wird im Bodediagramm nur einfach-logarithmisch über die Frequenz aufgetragen.

5.3.3 BEITRAG REELLER POLSTELLEN ZUM BETRAG IM BODEDIAGRAMM

Der Teilfrequenzgang – ein Faktor des Frequenzgangs – einer allgemeinen reellen Polstelle $\underline{p} = \alpha < 0$ ist gegeben über:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \underline{p}} = \frac{1}{j\omega - \alpha} \quad (5.22)$$

Der Betrag des Teilfrequenzgangs in Dezibel ergibt sich daher als:

$$\begin{aligned} |\underline{T}(j\omega)| &= 20 \cdot \log_{10} \left(\left| \frac{1}{j\omega - \alpha} \right| \right) \text{ dB} \\ &\quad \left| \quad \text{nutze die Beziehung: } \log \left(\frac{a}{b} \right) = \log(a) - \log(b) \right. \\ &= -20 \cdot \log_{10}(|j\omega - \alpha|) \text{ dB} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Für kleine Frequenzen und somit $\omega \ll |\alpha|$ gilt das asymptotische Verhalten:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} \approx -20 \cdot \log_{10}(|\alpha|) \text{ dB} = T_0 \quad (5.24)$$

Ein besonders interessantes Ergebnis erhält man, wenn die Frequenz nahe am Betrag der Polstelle mit $\omega = |\alpha|$ liegt:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega=|\alpha|} = -20 \cdot \log_{10}(|\alpha|) \text{ dB} - \underbrace{20 \cdot \log_{10}(\sqrt{2})}_{\approx 3 \text{ dB}} \text{ dB} \quad (5.25)$$

Wenn die Frequenz $\omega = |\alpha|$ erreicht, ist der Betrag gegenüber des Nullwertes also um etwa 3dB abgeklungen. Für große Frequenzen $\omega \gg |\alpha|$ gilt das asymptotische Verhalten:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \approx -20 \cdot \log_{10}(\omega) \text{ dB} \quad (5.26)$$

Für große Frequenzen $\omega \gg |\alpha|$ ist der Betragsverlauf also nur noch von ω abhängig. Dies führt zu einem Abfall von -20 dB pro Dekade in der Frequenz. Die beiden aus diesen Überlegungen hervorgehenden Asymptoten können im Bodediagramm des Betrags identifiziert werden. Die berühmte 3dB Grenzfrequenz $\omega_{3\text{dB}} \approx |\alpha|$ ist also direkt abhängig von den Eigenwerten des Systems. Sie folgt in der Regel (*bei guter Polseparation*) dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert. Man redet dann auch vom dominanten Pol des Systems, da dieser das Verhalten bei kleinen Frequenzen dominiert.

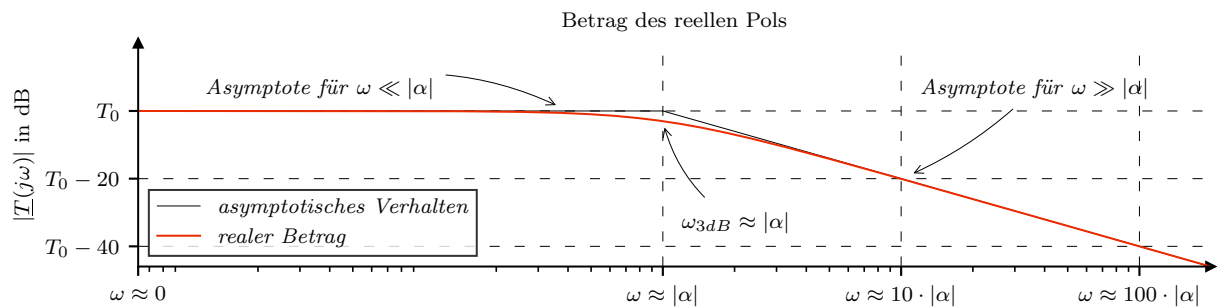


Abbildung 5.9: Doppeltlogarithmische Auftragung des Beitrags einer reellen Polstelle zum Betrag des Frequenzgangs. Außerdem das asymptotische Verhalten für kleine und große Frequenzen.

5.3.4 BEITRAG REELLER POLSTELLEN ZUR PHASE IM BODEDIAGRAMM

Der Phasenbeitrag des Teilfrequenzgangs einer allgemeinen reellen Polstelle $\underline{p} = \alpha < 0$ ergibt sich dann über:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \alpha} \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = -\angle\{j\omega - \alpha\} \quad (5.27)$$

Die Berechnung des frequenzabhängigen Phasenwinkels erfolgt über den Hauptwert des Arkustangens und mit der entsprechenden Fallunterscheidung. Um das asymptotische Phasenverhalten herauszuarbeiten, wird zunächst die Phase für niedrige Frequenzen $\omega \ll |\alpha|$ betrachtet:

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega \ll |\alpha|} \approx -\arctan\left(\frac{0}{-\alpha}\right) = 0 \quad (5.28)$$

Für Frequenzen nahe am Betrag der Polstelle $\omega = |\alpha|$ und $\alpha < 0$ gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) \Big|_{\omega=|\alpha|} &= -\angle\{j|\alpha| - \alpha\} \\ &| \quad \text{Phasenberechnung über Arkustangens} \\ &= -\arctan\left(\frac{|\alpha|}{-\alpha}\right) \\ &| \quad \text{es folgt} \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Für hohe Frequenzen $\omega \gg |\alpha|$ folgt dann:

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega \gg |\alpha|} \approx -\angle\{j\omega\} = -\frac{\pi}{2} \quad (5.30)$$

Dieses asymptotische Verhalten der Phase für niedrige und hohe Frequenzen lässt sich auch im Bodediagramm des Phasenanteils wiederfinden. Um die Phase händisch zu zeichnen, wird der Übergang zwischen den Asymptoten oft als eine Gerade durch den Wendepunkt bei $\omega = |\alpha|$ mit der Steigung $-\frac{\pi}{4}$ pro Dekade in der Frequenz angenommen.

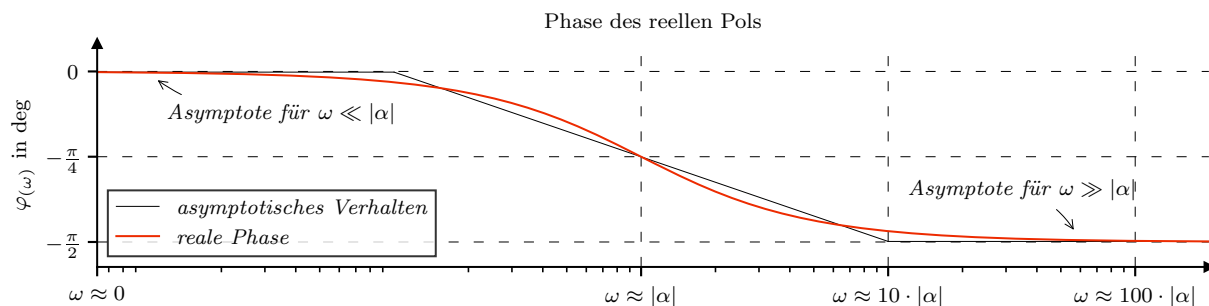


Abbildung 5.10: Logarithmische Auftragung des Beitrags einer reellen Polstelle zur Phase des Frequenzgangs. Außerdem eingezeichnet ist das asymptotische Verhalten für kleine und große Frequenzen.

5.3.5 BEITRAG KOMPLEXER POLSTELLEN ZUM BETRAG IM BODEDIAGRAMM

Der Teilfrequenzgang – ein Faktor des Frequenzgangs – eines allgemeinen komplexen Polstellenpaares $\underline{p} = \alpha_k + j\omega_k$ und $\underline{p}^* = \alpha_k - j\omega_k$ mit $\alpha_k < 0$ ist gegeben über:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - \underline{p})(j\omega - \underline{p}^*)} = \frac{1}{|\underline{p}|^2 - \omega^2 - j\omega 2\alpha_k} \quad (5.31)$$

Der Betrag des Teilfrequenzgangs in Dezibel ergibt sich daher als:

$$|\underline{T}(j\omega)| = -20 \cdot \log_{10} \left(\left| |\underline{p}|^2 - \omega^2 - j\omega 2\alpha_k \right| \right) \text{ dB}$$

Für kleine Frequenzen und somit $\omega \ll |\underline{p}|$ gilt das asymptotische Verhalten:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega \ll |\underline{p}|} \approx -40 \cdot \log_{10}(|\underline{p}|) \text{ dB} = T_0 \quad (5.32)$$

Für Frequenzen nahe am Betrag der Polstelle also $\omega = |\underline{p}|$ gilt entsprechend:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega=|\underline{p}|} = -20 \cdot \log_{10}(|\underline{p}|) \text{ dB} - 20 \cdot \log_{10}(2\alpha_k) \text{ dB} \quad (5.33)$$

Für den speziellen Fall $|\underline{p}| = 2|\alpha_k|$ geht dies in das asymptotische Verhalten für kleine Frequenzen über. Für $|\underline{p}| > 2|\alpha_k|$ und äquivalent $\omega_k > \sqrt{3}\alpha_k$ kommt es zu einer Erhöhung des Betrages gegenüber des Nullwertes um die Frequenz $\omega = |\underline{p}|$ herum (*Das entspricht einem Peak bzw. der bekannten Resonanzspitze*).

Für große Frequenzen $\omega \gg |\underline{p}|$ gilt das asymptotische Verhalten:

$$|\underline{T}(j\omega)|_{\omega \gg |\underline{p}|} \approx -40 \cdot \log_{10}(\omega) \text{ dB} \quad (5.34)$$

Der Betrag des Frequenzgangs fällt also für große Frequenzen (*nach dem Peak*) mit $-40 \text{ dB pro Dekade}$ in der Frequenz ab. Für $\omega_k = 0$ entspricht das zwei gleichen reellen Polstellen. Das die asymptotische Darstellung des Bodediagramms lässt sich auf das Verhalten des reellen Pols im vorherigen Abschnitt zurückführen. Wenn der Imaginärteil des Pols den Realteil Anteilig mit $\omega_k > \sqrt{3}\alpha_k$ überschreitet, kommt es zu einer Anhebung des Betrages um $\omega = |\underline{p}|$ herum.

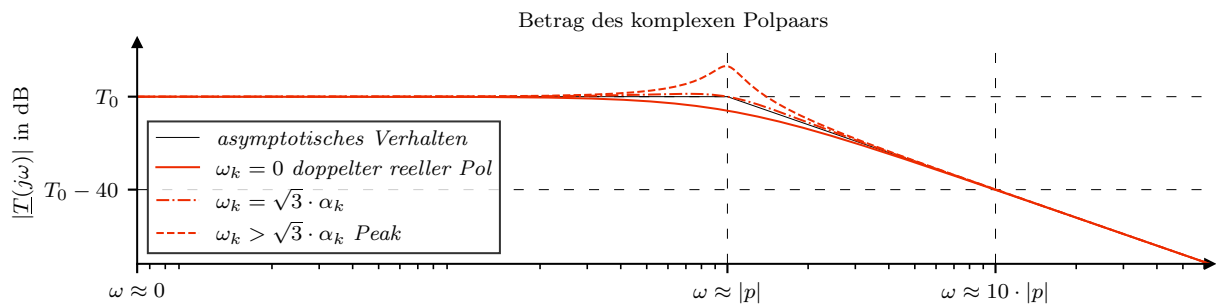


Abbildung 5.11: Doppeltlogarithmische Auftragung des Beitrags eines komplex-konjugierten Polpaars zum Betrag des Frequenzgangs für verschiedene Verhältnisse von Real- und Imaginärteil. Außerdem eingezeichnet ist das asymptotische Verhalten für kleine und große Frequenzen.

5.3.6 BEITRAG KOMPLEXER POLSTELLEN ZUR PHASE IM BODEDIAGRAMM

Der Phasenanteil des Teilfrequenzgangs eines allgemeinen komplexen Polstellenpaares $\underline{p} = \alpha_k + j\omega_k$ und $\underline{p}^* = \alpha_k - j\omega_k$ mit $\alpha_k < 0$ ergibt sich dann über:

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{|\underline{p}|^2 - \omega^2 - j\omega 2\alpha_k} \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = -\angle\left\{|\underline{p}|^2 - \omega^2 - j\omega 2\alpha_k\right\} \quad (5.35)$$

Die Berechnung des frequenzabhängigen Phasenwinkels für das komplexe Polpaar erfolgt wieder über den Hauptwert des Arkustangens und mit der entsprechenden Fallunterscheidung. Um das asymptotische Phasenverhalten herauszuarbeiten, wird zunächst die Phase für niedrige Frequenzen $\omega \ll |\underline{p}|$ betrachtet:

$$\varphi(\omega)\Big|_{\omega \ll |\underline{p}|} \approx -\arctan\left(\frac{-2\alpha_k \cdot 0}{|\underline{p}|^2}\right) = 0 \quad (5.36)$$

Für Frequenzen nahe am Betrag der Polstelle $\omega = |\underline{p}|$ gilt mit $\alpha_k < 0$ entsprechend:

$$\varphi(\omega)\Big|_{\omega = |\underline{p}|} = -\angle\left\{-j|\underline{p}| 2\alpha_k\right\} = -\frac{\pi}{2} \quad (5.37)$$

Für hohe Frequenzen $\omega \gg |\underline{p}|$ folgt dann mit der Fallunterscheidung für einen negativen Realteil $|\underline{p}|^2 - \omega^2 < 0$ und im Grenzwert entsprechend:

$$\varphi(\omega)\Big|_{\omega \gg |\underline{p}|} \approx \underbrace{\lim_{\omega \rightarrow \infty} -\arctan\left(\frac{-\omega 2\alpha_k}{|\underline{p}|^2 - \omega^2}\right)}_0 - \pi = -\pi \quad (5.38)$$

Wie beim reellen Pol, lässt sich auch hier beim komplexen Polpaar das asymptotische Verhalten für niedrige und hohe Frequenzen gut im Bodediagramm erkennen. Das Verhältnis von Realteil α_k und Imaginärteil ω_k beeinflusst jetzt allerdings, wie scharf der Phasenübergang um die Wendestelle $\omega = |\underline{p}|$ herum geschieht.

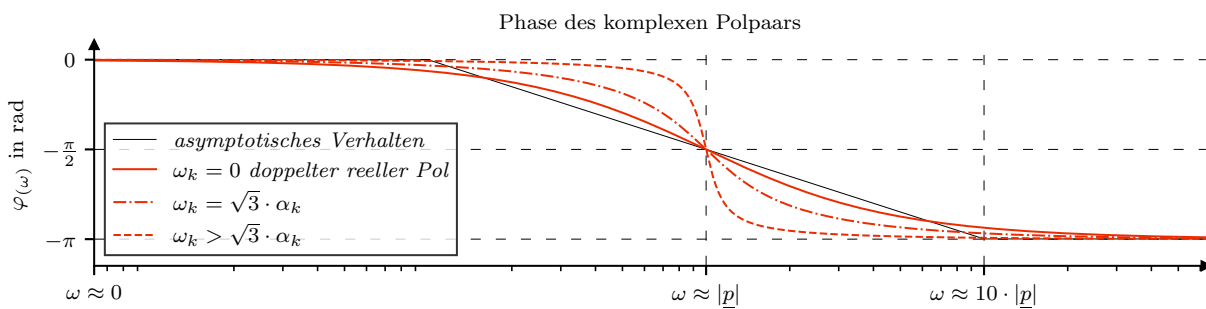


Abbildung 5.12: Logarithmische Auftragung des Beitrags eines komplex-konjugierten Polpaars zur Phase des Frequenzgangs für verschiedene Verhältnisse von Real- und Imaginärteil. Außerdem eingezeichnet ist das asymptotische Verhalten für kleine und große Frequenzen.

5.4 DIE ORTSKURVE

Unter einer Ortskurve versteht man in der Systemtheorie die graphische Darstellung einer von einem reellen Parameter (*meistens der reellen Kreisfrequenz* ω) abhängigen komplexen Systemgröße, wie dem Frequenzgang oder einem entsprechenden Ausgangssignal des Systems im Frequenzbereich. Dabei handelt es sich neben dem Bodediagramm um eine weitere Methode zur grafischen Darstellung des Frequenzgangs, die insbesondere in der Regelungstechnik und dort insbesondere für rückgekoppelte Systeme eingesetzt wird.

5.4.1 DEFINITION

Die von einem parameterabhängigen komplexen Zeiger $\underline{Z}(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene beschriebene Bahn wird als Ortskurve bezeichnet:

$$\underline{Z}(\omega) = \Re\{\underline{Z}(\omega)\} + j \cdot \Im\{\underline{Z}(\omega)\} \quad (5.39)$$

5.4.2 NYQUIST-DIAGRAMM

Die grafische Darstellung der Ortskurve wird oft als Nyquist-Diagramm, Nyquist-Graph oder Nyquist-Plot bezeichnet. Darin sind Realteil und Imaginärteil des komplexen Zeigers in der komplexen Ebene als kartesisches Koordinatensystem gegeneinander aufgetragen und über einen weiten Parameterbereich ausgewertet.

Meistens wird für der Parameter auf dem Intervall $\omega \in [0, \infty)$ ausgewertet, wobei in praktischer Hinsicht die obere Intervallgrenze natürlich endlich gewählt werden muss und die Auswertung auch nur für diskrete Parameterwerte aus diesem Intervall erfolgen kann.

Abhängig vom System muss das Intervall groß genug gewählt werden, um auch das Asymptotische Verhalten für hohe Frequenzen gut zu erfassen. Die Verbindung der Auswertungspunkte durch eine Linie ergibt die grafische Darstellung der Ortskurve und damit das Nyquist-Diagramm. Die Ortskurve entspricht also der Linie, die die Spitze des komplexen Phasors im Zeigermodell bei laufender Frequenz beschreibt.

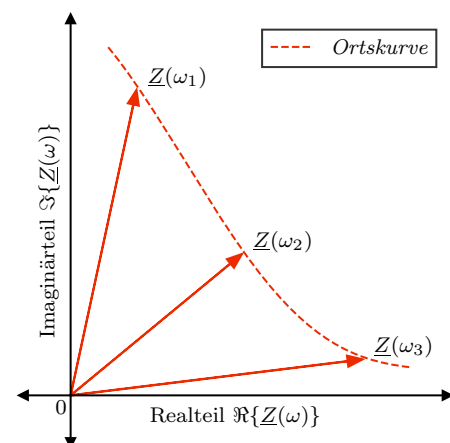


Abbildung 5.13: Allgemeine Ortskurve einer komplexen Funktion $\underline{Z}(\omega)$ in der komplexen Ebene. Phasoren für ω_1 , ω_2 und ω_3 exemplarisch eingezeichnet.

5.5 RESONANZ

Resonanz (*von lateinisch resonare \Leftrightarrow widerhallen*) ist in Physik und Technik das verstärkte (*i.A. auch das abgeschwächte bzw. extreme*) Mitschwingen eines schwingfähigen Systems, wenn es einer zeitlich veränderlichen Einwirkung unterliegt. Dabei kann das System um ein Vielfaches stärker ausschlagen als beim konstanten Einwirken mit der Erregungsfrequenz $\omega = 0$. Resonanzen werden in der Technik oft ausgenutzt, um eine bestimmte Frequenz herauszufiltern, zu verstärken oder generell die Eigenschaften eines Bauteils auszunutzen. Wo eine Verstärkung nicht gewünscht ist und beispielsweise das Bauteil beschädigen würde, müssen unerwünschte Resonanzen jedoch vermieden werden.

5.5.1 RESONANZ UND HARMONISCH EINGESCHWUNGENER ZUSTAND

Ein asymptotisch stabiles System kann bei harmonischer in einem eingeschwungenen Zustand durch einen Frequenzgang $\underline{H}(j\omega)$ beschrieben werden. Dieser charakterisiert Betrag und Phase des Ausgangssignals in Abhängigkeit der jeweiligen Erregungsfrequenz ω . Im harmonisch eingeschwungenen Zustand (*siehe Abschnitt 4.5.7*) ist das Ausgangssignal direkt proportional zum Betrag des Frequenzgangs des Systems:

$$x(t) \sim |\underline{H}(j\omega)| \quad (5.40)$$

Da der Frequenzgang (*wie der Name schon sagt*) frequenzabhängig ist, kann es in einigen Fällen zu Extrema – sowohl Maxima, also auch Minima – im Betragsverlauf kommen, die sich direkt in der Amplitude des Ausgangssignals widerspiegeln. Wird ein System mit der entsprechenden Frequenz angeregt, befindet es sich in Resonanz.

5.5.2 RESONANZFREQUENZEN

Die Frequenzen, an denen diese Extrema im Betragsverlauf des Frequenzgangs auftreten werden im Allgemeinen als Resonanzfrequenzen bezeichnet (*nicht zu verwechseln mit den Eigenwerten und Eigenfrequenzen, die ebenfalls die Dimension einer Frequenz, aber eine andere physikalische Bedeutung haben*). Da es bei Systemen höherer Ordnung durchaus auch mehrere solche Maxima gibt, kann es natürlich auch mehrere Stellen geben, an denen Resonanz eintritt. Folglich kann es im Allgemeinen auch mehrere Resonanzfrequenzen geben.

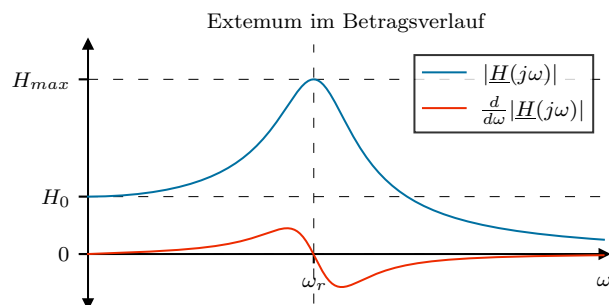


Abbildung 5.14: Extremstelle im Betrag eines generischen Frequenzgangs und Resonanzfrequenz ω_r

Die Resonanzfrequenzen ω_r ergeben sich direkt aus den Extremstellen des Betrags des Frequenzgangs. Also den Stellen, an denen die erste Ableitung verschwindet:

$$\frac{d}{d\omega} |\underline{H}(j\omega)| = 0 \quad \text{und} \quad \omega > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega_r \quad (5.41)$$

Bei den Extrema wird oft zwischen Resonanz (*Maxima, also starke Erhöhung der Amplitude*) und Antiresonanz (*Minima, also starke Abschwächung der Amplitude*) unterschieden.

5.5.3 ANMERKUNG ZU DEN RESONANZFREQUENZEN

Auch in einem System (*von nur*) zweiter Ordnung kann es verschiedene Resonanzfrequenzen geben (*nämlich bis zu zwei*), da sie nach Definition (5.41) die Extremstellen des Frequenzgangs sind und dieser für jede Systemgröße aufgestellt werden kann. Je nachdem welche Systemgröße als Systemausgang angesehen wird, entsteht ein möglicherweise anderer Frequenzgang, der andere Extremstellen haben kann. Die Resonanzfrequenz ist also immer auch von der Wahl von Systemeingang und Ausgang anhängig.

Als prominentes Beispiel kann hier der elektrische RLC-Schwingkreis genannt werden.

5.5.4 ALLGEMEINE BERECHNUNG DER RESONANZFREQUENZEN (WIP)

Wie setzen sich die Resonanzfrequenzen allgemein aus den Systemparametern zusammen? Kann eine Ansatz über die Zustandsraumdarstellung oder die allgemeine Übertragungsfunktion hergeleitet werden?

5.5.5 ZUSAMMENHANG DER RESONANZFREQUENZ ZU DEN EIGENWERTEN

Die Resonanzfrequenzen stehen also im direkten Zusammenhang mit den Extremstellen des Frequenzgangs, ganz ähnlich, wie die Polstellen bei der Übertragungsfunktion bzw. Eigenwerte des Systems. Dennoch gibt es einige entscheidende Unterschiede. Die Polstellen der Übertragungsfunktion sind über die Nullstellen des Nennerpolynoms definiert und im Allgemeinen komplexwertig mit $\underline{s} \in \mathbb{C}$ und $\underline{\lambda} \in \mathbb{C}$, wohingegen der Frequenzgang nur reelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ als Argument aufnehmen und daher nur reelle Resonanzfrequenzen haben kann. Als besonders interessant stellt sich dabei heraus, dass die Resonanzen in etwa beim Betrag der komplexen Pol- und Nullstellen auftreten, wenn der Imaginärteil sehr groß gegenüber dem Realteil ist. Insbesondere bei schwingfähigen Systemen ist diese Näherung oft anwendbar. Die Resonanzfrequenzen können dann angenähert werden als:

$$\omega_{r,i} \approx |\underline{p}_i| \text{ Maxima} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{r,i} \approx |\underline{z}_i| \text{ Minima} \quad (5.42)$$

Die Resonanzfrequenzen können auch exakt mit den Polstellen / Nullstellen der Übertragungsfunktion übereinstimmen, wenn diese auf der imaginären Achse liegen (*keinen Realteil haben*). Allgemein ist das aber nicht der Fall, da diese in der kompletten komplexen Ebene verteilt sind.

ANHANG A

LINEARE FILTER (WIP)

Als Filter werden in den Ingenieurwissenschaften Systeme bezeichnet, die ein Eingangssignal abhängig von der Frequenz in der Amplitude und in der Phasenlage verändern. Ziel dabei ist die Unterdrückung oder Abschwächung unerwünschter Signalanteile bzw. Frequenzanteile.

Die Filtertheorie ist ein Teilgebiet (*oder vielmehr ein Anwendungsbereich*) der linearen Systemtheorie, welche Gegenstand dieses Dokuments ist. Da Filter in vielen Bereichen wie u.a. der Signalverarbeitung und der Nachrichtentechnik extrem wichtig sind, widmet sich dieses Kapitel der Filtertheorie.

A.1 FILTER ALS LINEARE ZEITINVARIANTE SYSTEME

Lineare Filter verarbeiten zeitveränderliche Eingangssignale, um Ausgangssignale zu erzeugen, die der Einschränkung der Linearität unterliegen. In den meisten Fällen sind diese linearen Filter auch zeitinvariant und können mit der Theorie linearer zeitinvarianter Systeme durch Frequenzgänge und Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Da lineare zeitinvariante Filter vollständig durch ihre Reaktion auf Sinuskurven unterschiedlicher Frequenzen (*Frequenzgang*) charakterisiert werden können, werden sie manchmal als Frequenzfilter bezeichnet.

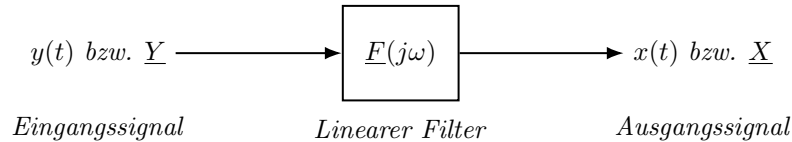


Abbildung A.1: Filter für zeitharmonische Signale als lineares zeitinvariantes System im Frequenzbereich.

Sei ein zeitharmonisches Eingangssignal mit mehreren Frequenzanteilen ω_i und ihren zugehörigen Amplituden y_i (*komplexe Amplitude als Phasor \underline{Y}_i , auch Fourierkoeffizienten*) gegeben:

$$y(t) = \sum_i y_i \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_i \Re\{\underline{Y}_i \cdot e^{j\omega_i t}\} \quad (\text{A.1})$$

Das System (*Filter*) wirkt nun in abschwächender Weise und je nach Frequenz unterschiedlich als Gewichtung auf die Eingangsamplituden. Die Ausgangsamplituden x_i der einzelnen Frequenzanteile werden also jeweils unterschiedlich durch den Frequenzgang des Filters beeinflusst

$$x(t) = \sum_i \Re\{\underline{Y}_i \cdot \underline{F}(j\omega_i) \cdot e^{j\omega_i t}\} \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \cdot |\underline{F}(j\omega_i)| \quad (\text{A.2})$$

A.2 IDEALE FILTER

Warum ideal und nicht real? Was muss für eine Realisierung gelten?

A.2.1 IDEALER TIEFPASSFILTER

Als Tiefpass bezeichnet man solche Filter, die Signalanteile mit Frequenzen unterhalb ihrer Grenzfrequenz ω_0 annähernd ungeschwächt passieren lassen, Anteile mit höheren Frequenzen dagegen dämpfen.

$$\underline{F}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{für } \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

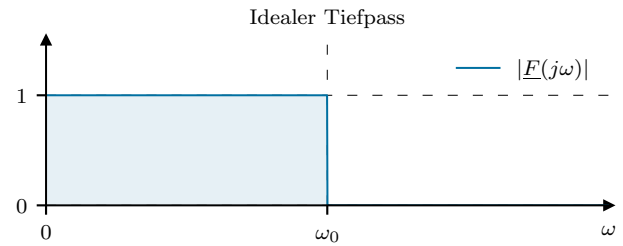


Abbildung A.2: Frequenzverlauf der Amplitude eines idealen Tiefpassfilters.

A.2.2 IDEALER HOCHPASSFILTER

Als Hochpass (auch Tiefensperre, englisch low-cut filter, high-pass filter) bezeichnet man Filter, die Frequenzen oberhalb ihrer Grenzfrequenz ω_0 annähernd ungeschwächt passieren lassen und tiefere Frequenzen dämpfen.

$$\underline{F}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \geq \omega_0 \\ 0 & \text{für } \omega < \omega_0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

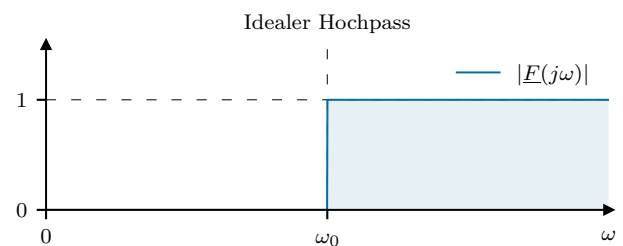


Abbildung A.3: Frequenzverlauf der Amplitude eines idealen Hochpassfilters.

A.2.3 IDEALER BANDPASSFILTER

Als Bandpass wird ein Filter bezeichnet, das nur Signale eines Frequenzbands passieren lässt. Die Frequenzbereiche unterhalb und oberhalb des Durchlassbereiches werden dabei gesperrt oder deutlich abgeschwächt. Ein Bandpass stellt das Gegenstück zur Bandsperre dar.

$$\underline{F}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

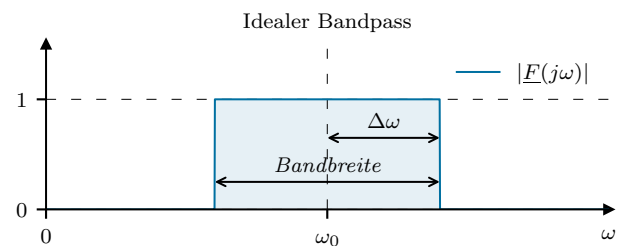


Abbildung A.4: Frequenzverlauf der Amplitude eines idealen Bandpassfilters.

A.2.4 IDEALER BANDSTOPPFILTER

Als Bandstopp wird ein Filter bezeichnet, das nur Signale außerhalb eines Frequenzbands passieren lässt. Die Frequenzbereiche innerhalb des Bandes werden dabei gesperrt oder deutlich abgeschwächt. Ein Bandstopp stellt das Gegenstück zum Bandpass dar.

$$\underline{F}(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

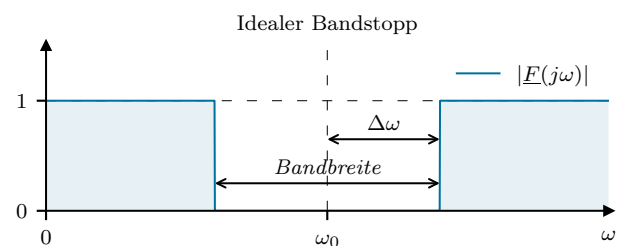


Abbildung A.5: Frequenzverlauf der Amplitude eines idealen Bandstoppfilters.

A.3 BUTTERWORTH-FILTER

Butterworth-Filter sind so ausgelegt, dass der Frequenzgang für einen Tiefpass unterhalb der Grenzfrequenz ω_0 möglichst lange horizontal verläuft (für einen Hochpass gilt umgekehrt dasselbe). Ein Butterworth-Tiefpassfilter n -ter Ordnung hat die Übertragungsfunktion:

$$\underline{F}_n(\omega) = \frac{1}{1 + j\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^n} \quad (\text{A.7})$$

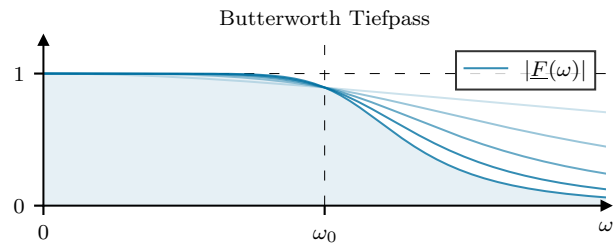


Abbildung A.6: Amplitude des Frequenzgangs eines Butterworth Tiefpasses der Ordnung $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A.4 TSCHEBYSCHOW-FILTER

Tschebyschow-Filter (*nach Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow*) sind kontinuierliche Frequenzfilter, die auf ein möglichst scharfes Abknicken des Frequenzgangs bei der Grenzfrequenz ausgelegt sind.

A.4.1 TSCHEBYSCHOW-POLYNOME ERSTER ART

Tschebyschow-Polynome erster Art $T_n(x)$ und zweiter Art $U_n(x)$ sind Folgen orthogonaler Polynome, die bedeutende Anwendungen in der Polynominterpolation, in der Filtertechnik und in anderen Gebieten der Mathematik haben. Tschebyschow-Polynome erster Art sind Lösungen der Tschebyschow-Differentialgleichung:

$$(1 - x^2) y^{(2)}(x) - x \cdot y^{(1)}(x) + n^2 \cdot y(x) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Die Lösungen, bzw. Tschebyschow-Polynome erster Art können durch folgende Rekursionsformel berechnet werden:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{mit} \quad T_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad T_1(x) = x \quad (\text{A.9})$$

Tschebyschow-Polynome erster Art haben die besondere Eigenschaft, dass sie in dem Intervall $[-1, 1]$ auch in ihrem Wertebereich auf Werte zwischen -1 und 1 beschränkt sind. Außerhalb dieses Intervalls steigen sie mit höherer Ordnung n immer steiler an bzw. fallen ab. Polynome gerader Ordnung sind dabei symmetrisch und ungerader Ordnung unsymmetrisch. Diese Eigenschaft machen Tschebyschow-Polynome erster Art zu einer attraktiven Wahl für Filterfunktionen.

A.4.2 TSCHEBYSCHOW-POLYNOME ZWEITER ART

Tschebyschow-Polynome zweiter Art sind Lösungen von der Differentialgleichung:

$$(1 - x^2) y^{(2)}(x) - 3 \cdot x \cdot y^{(1)}(x) + n(n+2) \cdot y(x) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Die Lösungen, bzw. Tschebyschow-Polynome zweiter Art können durch eine Rekursionsformel berechnet werden:

$$U_{n+1}(x) = 2x U_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \text{mit} \quad U_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad U_1(x) = 2x \quad (\text{A.11})$$

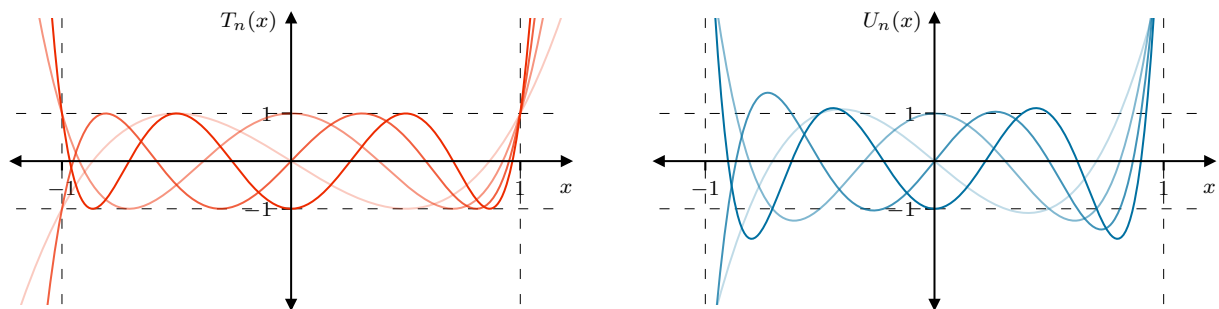


Abbildung A.7: Tschebyschow-Polynome erster Art $T_n(x)$ bis zur Ordnung $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ und zweiter Art $U_n(x)$ bis zur Ordnung $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

A.4.3 TSCHEBYSCHOW-TIEFPASSFILTER TYP I

Es wird zwischen Tschebyscheff-Filtern vom Typ I und vom Typ II unterschieden. Tschebyscheff-Filter vom Typ I besitzen im Durchlassbereich einen oszillierenden Verlauf der Amplitude des Frequenzgangs.

$$\underline{F}_n(\omega) = \frac{1}{1 + j \alpha T_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (\text{A.12})$$

Die Welligkeit im Durchlassbereich kann durch die Konstante α eingestellt werden. Die Amplitude der Welligkeit nimmt mit kleinerem α ab, dafür werden die Flanken weniger steil. Die Wahl der Konstante α und der Ordnung n des Filters sind die entscheidenden Parameter bei der Auslegung des Filters.

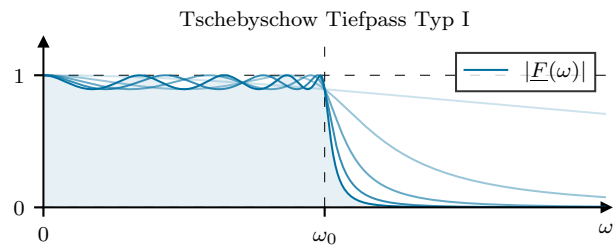


Abbildung A.8: Frequenzverlauf der Amplitude eines Typ I Tschebyschow-Tiefpassfilters der Ordnung $n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

A.4.4 TSCHEBYSCHOW-TIEFPASSFILTER TYP II

Tschebyscheff-Filter vom Typ II (*auch inverser Tschebyschow-Filter*) besitzen die Welligkeit der Übertragungsfunktion im Sperrbereich und werden in der Fachliteratur auch als inverse Tschebyscheff-Filter bezeichnet.

$$\underline{F}_n(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{1}{\alpha T_n\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}} \quad (\text{A.13})$$

Die Welligkeit im Sperrbereich kann durch die Konstante α eingestellt werden. Die Amplitude der Welligkeit nimmt mit kleinerem α ab, dafür werden die Flanken weniger steil. Die Wahl der Konstante α und der Ordnung n des Filters sind die entscheidenden Parameter bei der Auslegung des Filters.

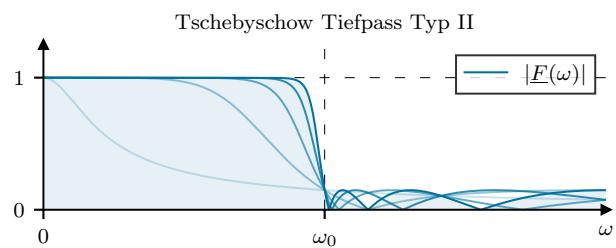


Abbildung A.9: Frequenzverlauf der Amplitude eines Typ II Tschebyschow-Tiefpassfilters der Ordnung $n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

A.5 FILTER-TRANSFORMATIONEN (WIP)

A.5.1 ALLGEMEINE VARIABLENTRANSFORMATION

Um die Filterfunktion zu dimensionieren bzw. auf den gewünschten Frequenz und Wertebereich einzustellen kann eine Transformation der Koordinaten durchgeführt werden.

$$f(x) \longrightarrow \alpha \cdot f\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right) + f_0 \quad (\text{A.14})$$

Gleichung (A.14) zeigt die verwendete Transformationsvorschrift. Sie setzt sich aus einer Verschiebung bzw. Translation um x_0 und f_0 , einer Skalierung um α und einer Stauchung um β zusammen. Insbesondere für die Dimensionierung der Filterfunktion werden Skalierung und Stauchung relevant.

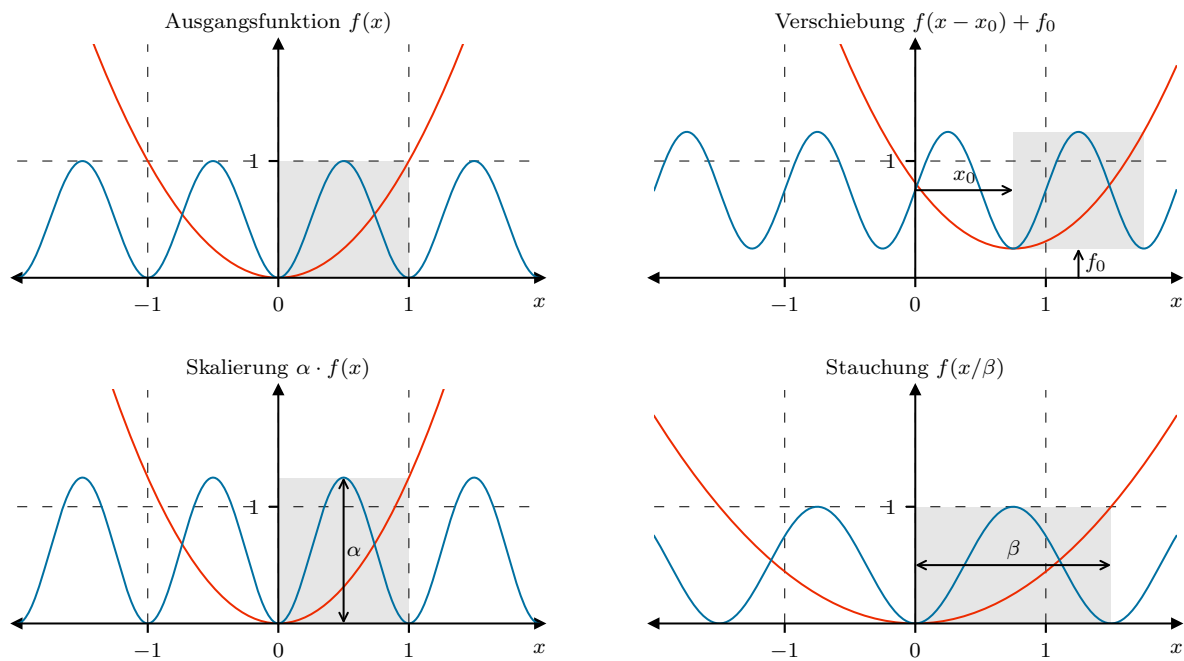


Abbildung A.10: Visualisierung der Variablentransformationen: Verschiebung / Translation, Skalierung und Stauchung am Beispiel einer Parabel und einer periodischen Funktion

A.5.2 HOCHPASS-TIEFPASS-TRANSFORMATION

A.5.3 BANDPASS-TRANSFORMATION

ANHANG B

ELEKTRISCHES RC-NETZWERK

Viele physikalische Effekte, wie die Entladung eines Kondensators, Wachstum, Zerfall und eindimensionale Wärmeausbreitung können durch ein System erster Ordnung bereits gut beschrieben werden. Im Folgenden werden die vorgestellten Methoden anhand eines linearen zeitinvarianten dynamischen Systems erster Ordnung demonstriert, nämlich an einem elektrischen RC-Netzwerkmodell. Die generelle Struktur der Ergebnisse aus diesem Kapitel lässt sich größtenteils direkt auf Systeme höherer Ordnung übertragen.

B.1 MODELLBESCHREIBUNG IM ZEITBEREICH

Das hier behandelte RC-Netzwerkmodell besteht aus einer linearen zeitinvarianten Kapazität $C > 0$, einem linearen zeitinvarianten Widerstand $R > 0$ und einer zeitabhängigen Spannungsquelle $v(t)$. Die Netzwerkelemente sind in einer Reihenschaltung miteinander Verknüpft. Netzwerkmodelle dieser Form modellieren beispielsweise den Lade- und Entladevorgang eines realen Kondensators. RC-Netzwerke werden oft als einfachstes Modell für Relaxationsvorgänge oder Sättigungsverhalten in der Elektrotechnik und Physik angesetzt.

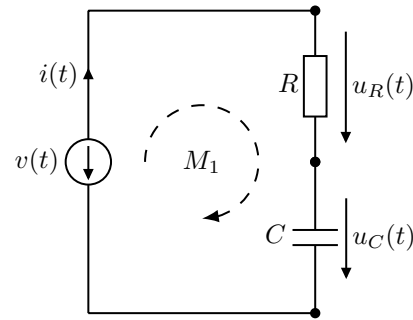


Abbildung B.1: RC-Netzwerkmodell im Zeitbereich. Eingezeichnet ist die Masche M_1 .

B.1.1 NETZWERKGLEICHUNGEN DES RC-NETZWERKS

Die Zweiggleichungen verknüpfen den Zweigstrom und die Zweigspannung eines Zweiges. Die Zweiggleichungen der linearer Kapazitäten und des Widerstände sind:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad \text{und} \quad i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) \quad (\text{B.1})$$

Die Zweiggleichungen sind über Maschen- und Schnittmengengleichungen (*auch bekannt als Kirchhoffsche Gleichungen*) miteinander verknüpft. Diese haben den Charakter von Gleichgewichtsgleichungen. In diesem Beispiel sind alle Zweigströme als Folge der Kontinuität gleich:

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t) \quad (\text{B.2})$$

Die Verknüpfung der Zweigströme geschieht über den Maschenumlauf von Masche M_1 . Die Maschengleichung ist dann:

$$u_R(t) + u_C(t) - v(t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

B.1.2 FORMULIERUNG EINER DIFFERENTIALGLEICHUNG

Die Netzwerkgleichungen können nun verwendet werden, um eine Beschreibungsgleichung für das Verhalten des Modells zu gewinnen. Beginne dafür mit der Maschengleichung und ersetze die Spannung über den Widerstand $u_R(t)$ durch die Zweiggleichung:

$$R \cdot i_R(t) + u_C(t) - v(t) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ersetze unter Verwendung der Äquivalenz der Ströme $i_R(t) = i_C(t)$ (*Knotengleichung*) den Strom durch die Zweiggleichung der Kapazität. Eine Umformulierung liefert eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, bei der die Kapazitätsspannung $u_C(t)$ die Zustandsgröße ist:

$$\frac{d}{dt} u_C(t) = -\frac{1}{RC} \cdot u_C(t) + \frac{1}{RC} \cdot v(t) \quad (\text{B.5})$$

B.2 ÜBERGANG ZUM ALLGEMEINEN FALL

Um jetzt zur Analyse von einem allgemeinen System erster Ordnung über zu gehen, werden den Bestandteilen der Systembeschreibung des RC-Netzwerks die allgemeinen Symbole aus Kapitel 1 zugeordnet.

$$\frac{d}{dt} \overbrace{u_C(t)}^{x(t)} = - \underbrace{\frac{1}{RC}}_{\lambda} \cdot \overbrace{u_C(t)}^{x(t)} + \underbrace{\frac{1}{RC} \cdot v(t)}_{y(t)} \quad (\text{B.6})$$

B.2.1 BESTANDTEILE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

Die Bestandteile der Differentialgleichung (B.6) sind dabei die differenzierte Variable $x(t)$, welche auch Zustandsgröße genannt wird. Die Ordnung eines Systems gibt die Anzahl der Zustandsgrößen – also die Anzahl der zum System charakteristischen inneren Variablen – an. In dem System, welches von Gleichung (B.6) beschrieben wird, gibt es genau eine Zustandsgröße. Jeder der Zustandsgrößen wird dabei ein ebenfalls zum System charakteristischer Eigenwert – hier $\lambda = -\frac{1}{RC}$ – zugeordnet. Für LTI Systeme ist dieser Parameter konstant. Die Funktion $y(t) = \frac{1}{RC} \cdot v(t)$ wird auch als Inhomogenität bezeichnet. Dabei handelt es sich um eine von außen auf das System einwirkende Größe (*hier die Spannungsquelle*).

B.3 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM LAPLACEBEREICH

Exemplarisch wird hier das bereits im Zeitbereich diskutierte System erster Ordnung im Laplacebereich behandelt. Ausgangspunkt dafür bildet die Differentialgleichung des Systems (*... entspricht einer Zustandsraumdarstellung mit der Dimension 1, die Zustandsmatrix ist dann quasi direkt der Eigenwert*)

B.3.1 LAPLACETRANSFORMATION DES SYSTEMS

Die lin. gew. Differentialgleichung erster Ordnung ist:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda \cdot x(t) + y(t) \quad (\text{B.7})$$

Wende die Laplacetransformation auf die linke und rechte Seite der Differentialgleichung an. Verwende dazu den Ableitungssatz (2.5) und die Linearität:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &\circ\!\!\!\bullet \quad \underline{s} \cdot \underline{X}(\underline{s}) - x_0 \\ \lambda \cdot x(t) + y(t) &\circ\!\!\!\bullet \quad \lambda \cdot \underline{X}(\underline{s}) + \underline{Y}(\underline{s}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Laplacetransformierte der Differentialgleichung:

$$\underline{s} \cdot \underline{X}(\underline{s}) - x_0 = \lambda \cdot \underline{X}(\underline{s}) + \underline{Y}(\underline{s}) \quad (\text{B.8})$$

B.3.2 LÖSUNG IM LAPLACEBEREICH

Um die Gleichung zu lösen, kann nun einfach nach der gewünschten Größe umgeformt werden (*rein algebraische Umformungen*). Dies liefert die Lösung $\underline{X}(\underline{s})$ im Laplacebereich:

$$\underline{X}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} - \lambda} \cdot x_0 + \frac{1}{\underline{s} - \lambda} \cdot \underline{Y}(\underline{s}) \quad (\text{B.9})$$

B.3.3 LÖSUNG IM ZEITBEREICH

Um die Lösung im Zeitbereich zu erhalten, können nun die einzelnen Bestandteile der Lösung im Laplacebereich in den Zeitbereich überführt werden. Nutze dazu die Korrespondenz zur Exponentialfunktion (2.18) und den Faltungssatz (2.8):

$$\begin{aligned} \underline{X}(\underline{s}) &\bullet\!\!\!\circ \quad x(t) \\ \frac{1}{\underline{s} - \lambda} \cdot x_0 &\bullet\!\!\!\circ \quad \theta(t) e^{\lambda t} \cdot x_0 \\ \frac{1}{\underline{s} - \lambda} \cdot \underline{Y}(\underline{s}) &\bullet\!\!\!\circ \quad \left(\theta(\tau) e^{\lambda \tau} * y(\tau) \right)(t) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Lösung im Zeitbereich:

$$x(t) = \underbrace{\theta(t) \cdot e^{\lambda t} \cdot x_0}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\left(\theta(\tau) \cdot e^{\lambda \tau} * y(\tau) \right)(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (\text{B.10})$$

B.3.4 ÜBERTRAGUNGSFUNKTION DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Das System erster Ordnung, welches im vorherigen Abschnitt mit der Laplacetransformation gelöst wurde, kann im Laplacebereich – unter der Vernachlässigung des Anfangswertes $x_0 = 0$ – durch die Laplace-transformierte beschrieben werden:

$$\underline{X}(s) = \frac{1}{s - \lambda} \cdot \underline{Y}(s) \quad (\text{B.11})$$

Der Term $\frac{1}{s - \lambda}$ ist offenbar charakteristisch zum System und liefert durch eine Multiplikation mit der Erregung $\underline{Y}(s)$ die Systemantwort $\underline{X}(s)$ im Laplacebereich.

Die Wirkung der Eingangsgröße auf die Ausgangsgröße kann im Laplacebereich explizit angegeben werden und hat die Form einer rationalen Funktion ... der Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{X}(s)}{\underline{Y}(s)} = \frac{1}{s - \lambda} \quad (\text{B.12})$$

B.3.5 STRUKTUR DER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Einige Eigenschaften des Systems lassen sich nun direkt an der Übertragungsfunktion ablesen. Da der Zählergrad 0 ist, hat die Übertragungsfunktion keine Nullstellen und die Polynome sind auf jeden Fall teilerfremd. Der Nennergrad ist 1 und die Übertragungsfunktion hat somit genau eine Polstelle. Diese lässt sich hier auch ganz einfach bestimmen:

$$\underline{Q}(\underline{p}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{p} = \lambda$$

Die Polstelle \underline{p} ist also genau der Eigenwert λ des Systems und charakterisiert somit das dynamische Verhalten.

B.4 TRANSIENTENANALYSE DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Das System erster Ordnung wird charakterisiert durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda \cdot x(t) + y(t) \quad (\text{B.13})$$

Es wurden nun schon mehrere Methoden (*genauer gesagt zwei: Lösung im Zeitbereich und die Laplace-transformaion*) zur Berechnung der Lösung $x(t)$ für beliebige Erregungen $y(t)$ vorgestellt. Dabei wurde jeweils eine allgemeine Lösungsvorschrift im Zeitbereich formuliert:

$$x(t) = \underbrace{\theta(t) \cdot x_0 \cdot e^{\lambda t}}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\left(\theta(\tau) \cdot e^{\lambda \tau} * y(\tau) \right)(t)}_{\text{partikuläre Lösung}} \quad (\text{B.14})$$

Diese Lösungsvorschrift wird im Folgenden etwas genauer analysiert und dabei das transiente Verhalten des Systems herausgearbeitet.

B.4.1 HOMOGENE LÖSUNG DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Die homogene Lösung ist ausschließlich vom Anfangswert abhängig und repräsentiert damit die Auswirkungen des Systemverhalten von $t < 0$ auf das Verhalten ab dem Betrachtungszeitpunkt $t > 0$. Der Anfangswert $x_0 = x(0)$ wird also vom System vor dem Betrachtungszeitpunkt an das System nach dem Betrachtungszeitpunkt übergeben (*wird manchmal auch als Gedächtnis des Systems bezeichnet*). Die homogene Lösung des Systems erster Ordnung ist:

$$x_h(t) = \theta(t) \cdot x_0 \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{B.15})$$

In Abbildung B.2 ist die homogene Lösung des Systems für den Fall $\lambda > 0$ (*instabil*) und für die Fälle $\lambda = 0$ (*grenzstabil*) und $\lambda < 0$ (*asymptotisch stabil*) dargestellt. Die das System dominierende Zeitkonstante ist durch den Eigenwert gegeben $\tau = |\frac{1}{\lambda}|$. Für $t < 0$ wurde das Systemverhalten in diesem Fall als konstant $x(t) = x_0$ angenommen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die homogene Lösung im instabilen Fall divergiert. Im asymptotisch stabilen Fall konvergiert sie hingegen und der Einfluss des Anfangswerts klingt mit der Zeit ab.

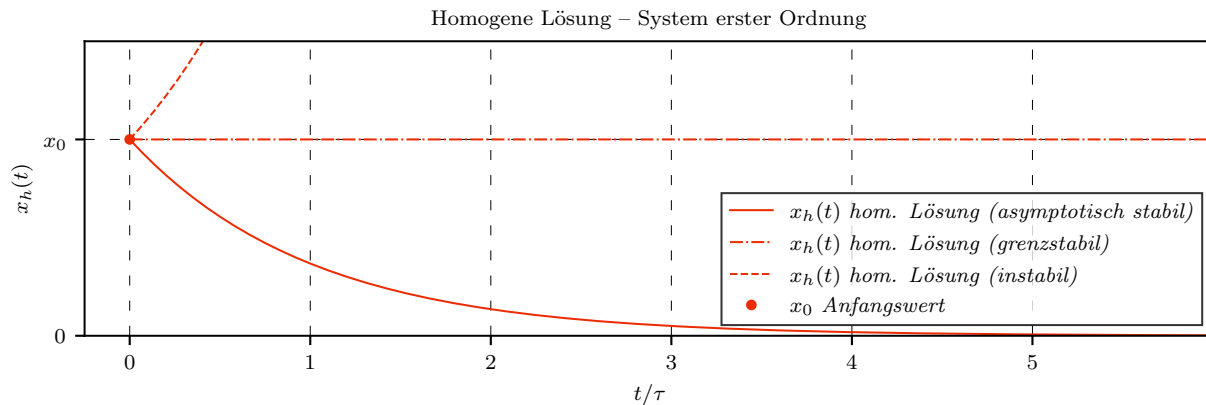


Abbildung B.2: Homogene Lösung des dynamischen Systems erster Ordnung für die Vorgabe eines beliebigen (*hier positiven*) Anfangswerts x_0 . Aufgetragen sind die drei möglichen Fälle für instabiles, grenzstabiles und asymptotisch stabiles Verhalten.

B.4.2 STABILITÄT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Das System erster Ordnung $n = 1$ hat genau einen reellen Eigenwert. Dieser lässt sich direkt aus der Differentialgleichung (*eindimensionale Zustandsraumdarstellung*) ablesen. Es gibt die drei möglichen Konfigurationen:

$$\lambda \begin{cases} < 0 & \text{asymptotisch stabil} \\ = 0 & \text{grenzstabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases}$$

Im Folgenden wird hauptsächlich der asymptotisch stabile Fall behandelt, aber es werden auch hinweise auf das Verhalten im instabilen Fall gegeben.

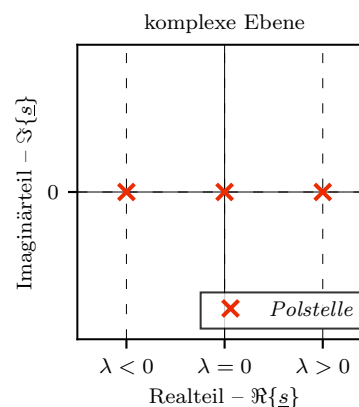


Abbildung B.3: Darstellung der reellen Polstelle λ in der komplexen Ebene für die drei möglichen Stabilitätsfälle.

B.4.3 STOSSANTWORT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Die Stoßantwort des Systems erster Ordnung ergibt sich direkt aus der bereits aufgestellten Übertragungsfunktion. Die inverse Laplacetransformation lässt sich mit der Korrespondenz der Exponentialfunktion sofort bestimmen und liefert die Stoßantwort:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} - \lambda} \quad \bullet \text{---} \circ \quad h(t) = \theta(t) \cdot e^{\lambda t} \quad (\text{B.16})$$

Dargestellt ist die Stoßantwort $h(t)$ des Systems erster Ordnung für den Fall $\lambda > 0$ (*instabil*) und für die Fälle $\lambda = 0$ (*grenzstabil*) und $\lambda < 0$ (*asymptotisch stabil*). τ ist die dominante Zeitkonstante des Systems und über $\tau = |\frac{1}{\lambda}|$ gegeben (*man redet auch vom dominanten Pol des Systems, also dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert*). Es ist gut zu erkennen, dass die Stoßantwort gemäß der Überlegungen zur Stabilität für einen positiven Eigenwert divergiert und für einen negativen Eigenwert verschwindet.

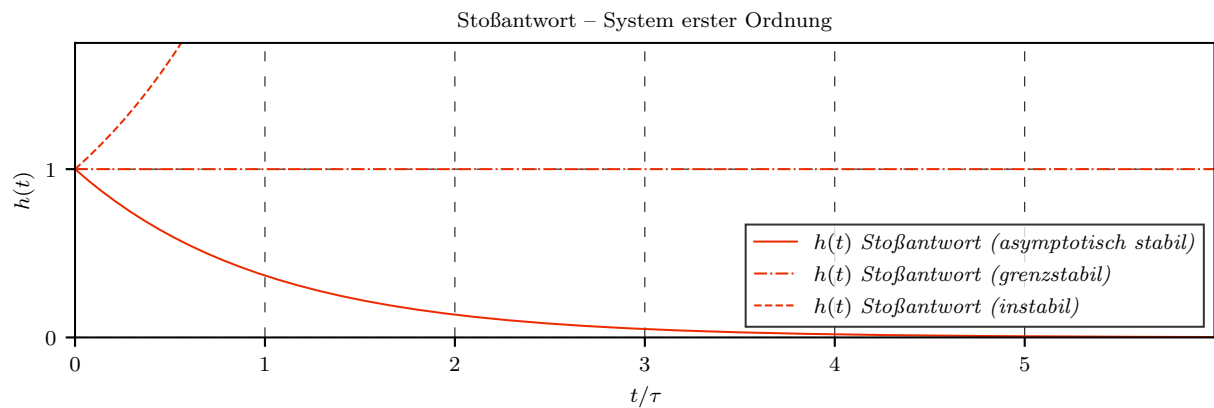


Abbildung B.4: Stoßantwort des dynamischen Systems erster Ordnung. Aufgetragen sind die drei möglichen Fälle für instabiles, grenzstabiles und asymptotisch stabiles Verhalten.

B.4.4 SPRUNGANTWORT DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Aus der Lösungsvorschrift für die partikuläre Lösung kann nun bei Erregung durch einen Einheitssprung $y(t) = \theta(t)$ die Sprungantwort des Systems erster Ordnung berechnet werden. Es folgt demnach über die Faltung mit der Stoßantwort:

$$\begin{aligned}
 x_\theta(t) &= \left(\theta(\tau) \cdot e^{\lambda\tau} * \theta(\tau) \right)(t) \\
 &| \quad \text{Faltungsintegral einsetzen} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t - \tau) \cdot e^{\lambda(t-\tau)} \cdot \theta(\tau) d\tau \\
 &| \quad \text{Integrationsgrenzen anpassen} \\
 &= \theta(t) \cdot \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau \\
 &| \quad \text{Stammfunktion bilden} \\
 &= \theta(t) \cdot \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda(t-\tau)} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
 &| \quad \text{Stammfunktion auswerten} \\
 &= \theta(t) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda t} - 1)
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Dargestellt ist die Sprungantwort für die Fälle $\lambda > 0$ (*instabil*) und $\lambda < 0$ (*asymptotisch stabil*). Da der Eigenwert λ die Einheit einer Frequenz hat, wurde die Amplitude (bzw. der Endwert) der Sprungantwort durch $x_\infty = \tau = |\frac{1}{\lambda}|$ abgekürzt. Die Sprungantwort des Systems erster Ordnung ist im asymptotisch stabilen Fall also eine auf den Wert $x_\infty = \tau$ einwirkende Exponentialfunktion. Sie erreicht also den zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand mit einem stationären Endwert. Im instabilen Fall divergiert die Sprungantwort (*gestrichelte rote Linie*).

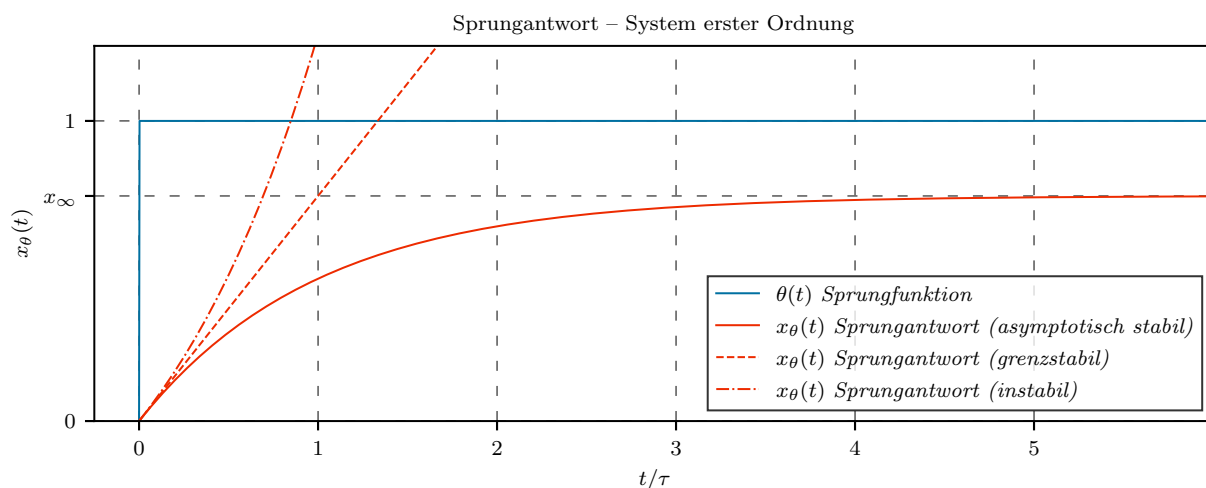


Abbildung B.5: Sprungantwort des dynamischen Systems erster Ordnung, hier aufgetragen für die beiden Fälle instabilen und asymptotisch stabilen Verhaltens.

B.4.5 TRANSIENTES VERHALTEN DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Das gesamte transiente Verhalten des Systems erster Ordnung bei Erregung durch einen Sprung ergibt sich jetzt durch die Überlagerung der homogenen Lösung mit der Sprungantwort:

$$x(t) = \underbrace{\theta(t) \cdot x_0 \cdot e^{\lambda t}}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\theta(t) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda t} - 1)}_{\text{Sprungantwort}} \quad (\text{B.18})$$

Für ein asymptotisch stabiles System mit $\lambda < 0$ kann die Lösungsdarstellung über die bereits eingeführte dominante Zeitkonstante $\tau = |\frac{1}{\lambda}| = -\frac{1}{\lambda}$ umformuliert werden und es folgt:

$$x(t) = \theta(t) \cdot x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta(t) \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (\text{B.19})$$

Es ist klar zu erkennen, dass das System nahe am Betrachtungsbeginn $t = 0$ vom Verhalten, welches vom Anfangswert x_0 dominiert wird übergeht zu einem Verhalten, welches von der Erregung dominiert wird. Da das System asymptotisch stabil ist schwingt die Antwort auf den neuen Endwert, welcher durch den Endwert der Sprungantwort $x_\theta(t)$ bestimmt wird ein. Ebenfalls zu erkennen ist, dass die Systemantwort nach einer gewissen Wartezeit $t \gg \tau$ (*hier bereits ab etwa $t > 5\tau$*) einen konstanten Wert annimmt. Das asymptotisch stabile System erster Ordnung nimmt also nach dem Einschwingvorgang – also der Transiente – einen stationären Endwert x_∞ an und geht in einen zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand über.

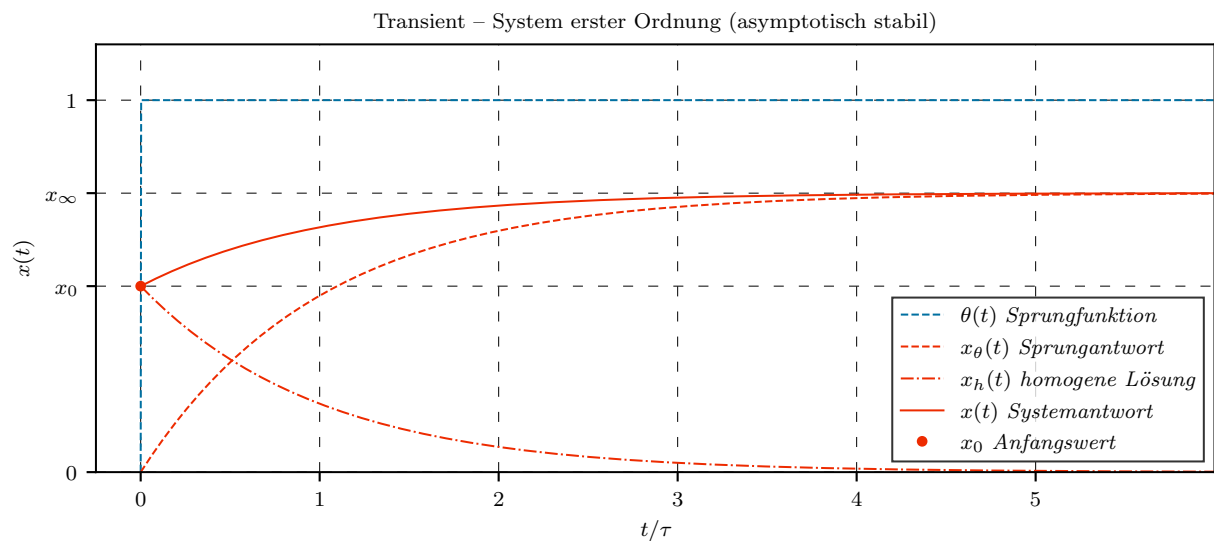


Abbildung B.6: Vollständiges transientes Verhalten des dynamischen Systems erster Ordnung bei Erregung mit einem Einheitssprung. Außerdem aufgetragen sind die Beiträge, die zur vollständigen Systemantwort überlagert werden.

B.4.6 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM ZEITUNABH. EINGESCHW. ZUSTAND

Für den Fall, dass das System erster Ordnung mit $\lambda < 0$ asymptotisch stabil und die Erregung $y(t)$ beschränkt ist, geht das Systemverhalten für $t \rightarrow \infty$ in einen eingeschwungenen Zustand über:

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

In der Praxis ist eine unendliche Wartezeit nicht realisierbar, daher wird der Beginn des eingeschwungenen Zustands angenommen, wenn die homogene Lösung weit genug abgeklungen ist. Dies kann für $t \gg \tau_{max}$ – mit τ_{max} der größten Zeitkonstante des Systems – angenommen werden. Da die homogene Lösung bereits ab $t > 5\tau_{max}$ auf unter 1% abgeklungen ist, kann man dann schon einigermaßen davon ausgehen, dass sich das System in einem eingeschwungenen Zustand befindet. Hier in diesem Beispiel bei Erregung durch einen Einheitssprung nimmt das asymptotisch stabile System einen zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand ein. Der Grenzwert (*Endwert der Sprungantwort*) kann über den Endwertsatz der Laplacetransformation (2.10) berechnet werden und für $t \gg \tau_{max}$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
 x_\infty &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(\underline{s} \cdot \underline{X}(\underline{s}) \right) \\
 &\quad | \quad \text{Laplacetransformierte einsetzen} \\
 &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(\underline{s} \cdot \underline{H}(\underline{s}) \cdot \frac{1}{\underline{s}} \right) \\
 &\quad | \quad \text{kürzen} \\
 &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \underline{H}(\underline{s}) \\
 &\quad | \quad \text{Übertragungsfunktion einsetzen} \\
 &= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\underline{s} - \lambda} \right) \\
 &\quad | \quad \text{Auswertung der Übertragungsfunktion ergibt} \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \\
 &\quad | \quad \text{mit } \lambda < 0 \text{ entspricht das der dominanten Zeitkonstante} \\
 &= \tau
 \end{aligned}$$

Der stationäre Endwert, den das asymptotisch stabile System bei Erregung durch einen Einheitssprung im eingeschwungenen Zustand annimmt ist also $x_\infty = \tau$.

B.5 SYSTEM ERSTER ORDNUNG IM FREQUENZBEREICH

Nachdem der Frequenzgang und das Bodediagramm zur Analyse des Systems motiviert wurde, sehen wir uns nun beides am Beispiel des Systems erster Ordnung genauer an. Für dieses Beispiel wird das System als asymptotisch stabil mit $\lambda < 0$ angenommen, da nur dann eine Systembeschreibung über den Frequenzgang zulässig ist.

B.5.1 FREQUENZGANG DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Da die Übertragungsfunktion für das System erster Ordnung bereits aufgestellt wurde, kann der Frequenzgang durch eine einfache Ersetzung des Arguments gewonnen werden:

$$\underline{H}(s) = \frac{1}{s - \lambda} \xrightarrow{\text{Ersetze } s \rightarrow j\omega} \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \lambda} \quad (\text{B.20})$$

Der Betrag des Frequenzgangs ergibt sich in diesem Beispiel (*zum Glück*) relativ einfach als:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \quad (\text{B.21})$$

Da die Phase des Zählers konstant 0 ist, wird die Phase des Frequenzgangs komplett durch den Nenner bestimmt. Dieser hat wegen $\lambda < 0$ (*asymptotisch stabil*) einen positiven Realteil. Die Phase des Frequenzgangs kann also über den Arkustangens eindeutig bestimmt werden (*keine Fallunterscheidung notwendig*) und es gilt:

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{-\lambda}\right) \quad (\text{B.22})$$

B.5.2 ANTWORT IM HARMONISCHEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND

Die Darstellung des Systems über einem Frequenzgang begründet sich darin, dass sich das System in einem harmonischen eingeschwungenen Zustand befindet. Der Systemeingang wird dabei als harmonisches Signal angenommen:

$$y(t) = Y \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) \quad \text{für } t \gg \tau \quad (\text{B.23})$$

Der Systemausgang (*im eingeschwungenen Zustand*) kann dann direkt mithilfe des Frequenzgangs angegeben werden, da dieser die Betrags und Phasenbeziehungen zwischen Eingangs- und Ausgangssignal beschreibt:

$$x(t) = Y \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}}}_{|\underline{H}(j\omega)|} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_y \underbrace{-\arctan\left(\frac{\omega}{-\lambda}\right)}_{\varphi(\omega)}\right) \quad (\text{B.24})$$

B.5.3 BODEDIAGRAMM DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

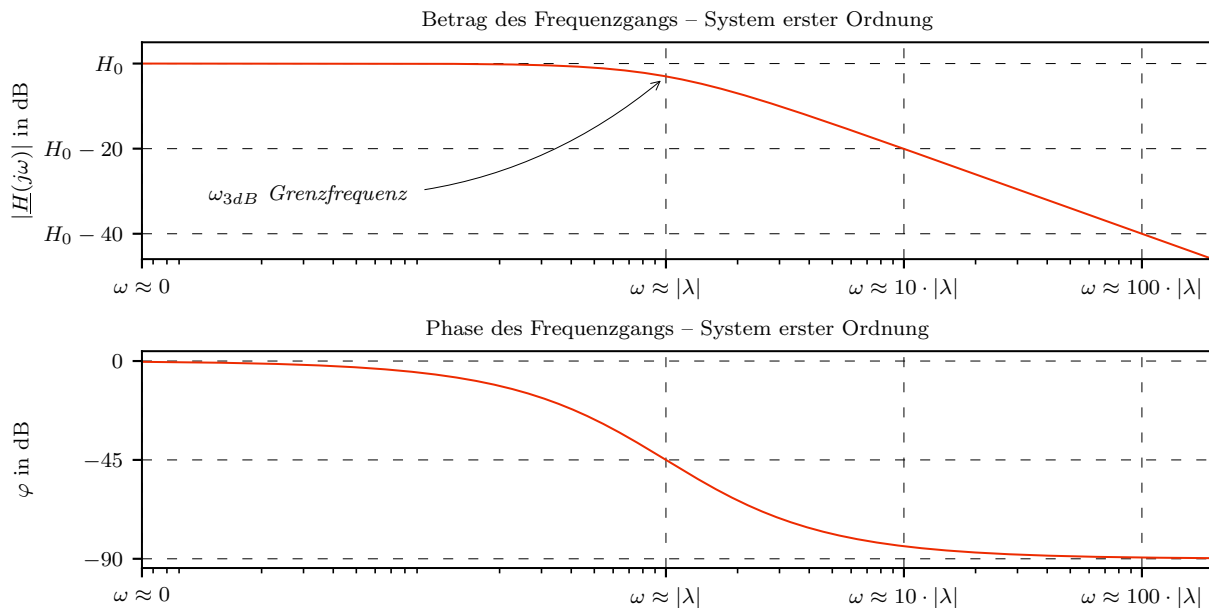


Abbildung B.7: Bodediagramm des Frequenzgangs des dynamischen (*asymptotisch stabilen*) Systems erster Ordnung. Betrag / Amplitude und Phase sind dabei getrennt voneinander über die Kreisfrequenz ω aufgetragen.

B.5.4 ORTSKURVE DES SYSTEMS ERSTER ORDNUNG

Neben dem Bodediagramm kann der Frequenzgang auch seine Ortskurve in der komplexen Ebene (*Nyquist-Diagramm*) visualisiert werden. Dabei wird der Frequenzgang für $\omega \in [0, \infty)$ ausgewertet und die jeweiligen Auswertungspunkte in der komplexen Ebene aufgetragen. Für das kontinuierliche Intervall ergibt sich dann eine Kurve in der komplexen Ebene.

Der Zusammenhang zum Bodediagramm lässt sich ebenfalls erkennen. So kann jedem Punkt direkt ein Betrag und eine Phase in Polardarstellung zugeordnet werden.

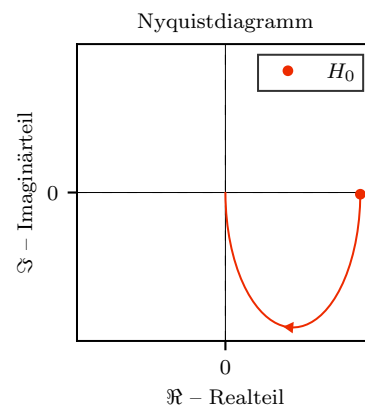


Abbildung B.8: Darstellung der Ortskurve des Frequenzgangs des Systems erster Ordnung in der komplexen Ebene. Eingetragen ist außerdem der Startpunkt H_0 für $\omega = 0$.

ANHANG C

DER GEDÄMPFTE HARMONISCHE OZILLATOR

Ein harmonischer Oszillator ist ein schwingungsfähiges System, das sich durch eine lineare Rückstellgröße auszeichnet. Für ein mechanisches System bedeutet dies, dass es eine Kraft gibt, die einer zunehmenden Auslenkung mit proportional anwachsender Stärke entgegenwirkt. Nach einem Anstoß von außen schwingt ein harmonischer Oszillator sinusförmig (*bzw. harmonisch*) um seine Ruhelage, wobei die Schwingungsdauer unabhängig von der Größe der Auslenkung ist. Beispiele für harmonische Oszillatoren sind Federpendel, elektrische Schwingkreise und Stimmgabeln.

Der harmonische Oszillator ist ein wichtiges Modellsystem der Physik. Viele komplexere Systeme verhalten sich bei kleinen Auslenkungen (*Linearisierung im Arbeitspunkt*) näherungsweise wie harmonische Oszillatoren *z.B. das Fadenpendel*.

Die Bezeichnung harmonischer Oszillator wird auch für gedämpfte harmonische Oszillatoren verwendet, auch wenn diese streng genommen keine harmonische Schwingung vollziehen, sondern eine gedämpfte Schwingung.¹

Die bisher beschriebenen Methoden werden nun anhand des gedämpften harmonischen Oszillators demonstriert.

¹Wikipedia liefert hier eine sehr schöne Einleitung

C.1 MODELLBESCHREIBUNG DES MECHANISCHEN SYSTEMS

In der klassischen Mechanik wird der harmonische Oszillator durch ein eindimensionales Feder-Pendel mit der Masse m und der Federkonstante D dargestellt. Dieses System ist in idealisierter Form verlustlos und wird daher oft durch einen Dämpfer mit der Dämpfungskonstante k erweitert.

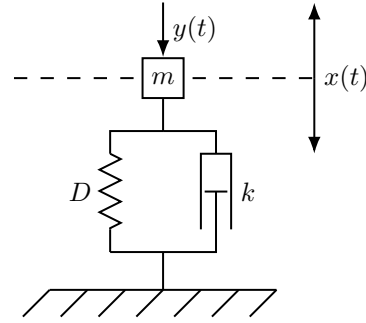


Abbildung C.1: Idealisierte Darstellung des eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillators.

Die zeitabhängige Eingangsgröße $y(t)$ wirkt als Kraft auf die Masse m . Die Ausgangsgröße $x(t)$ ist hier die Position bzw. die Auslenkung der Masse aus der Ruheposition. Dabei handelt es sich um den Arbeitspunkt des Systems / der Feder, der unter anderem den Einfluss der Gravitationskraft bereits berücksichtigt. Das entspricht dem Weglassen des konstanten Terms der Taylorentwicklung (*üblich bei der Kleinsignalanalyse*).

C.1.1 KRÄFTEGLEICHGEWICHT

Für das eindimensionale mechanische System sind alle zeitabhängigen Kräfte $F_i(t)$ skalare Größen und für das Kräftegleichgewicht gilt zu jedem Zeitpunkt:

$$\sum_i F_i(t) = 0$$

Die hier wirkenden Kräfte sind die Rückstellkraft der Feder, welche sich nach dem Hookschen Gesetz für kleine Auslenkungen näherungsweise linear zur Auslenkung $x(t)$ verhält (*hier wieder Kleinsignalnäherung ... das ist jetzt der lineare Term der Taylorentwicklung*):

$$F_f(t) = -D \cdot x(t) \quad (\text{C.1})$$

Und die Reibungskraft, welche durch den Dämpfer wirkt. Die Reibungskraft wirkt immer entgegen der Bewegungsrichtung und ist – wieder linear – abhängig von der Geschwindigkeit (*für positives k wirkt also eine positive Kraft entgegen der Bewegungsrichtung und bremst die Masse ... was passiert bei negativem k ... hier kann man schon erahnen, was mit der Stabilität passiert*):

$$F_d(t) = -k \cdot v(t) = -k \cdot \frac{d}{dt} x(t) \quad (\text{C.2})$$

Außerdem hat das System einen Eingang $y(t)$, welcher ebenfalls als Kraft auf die Masse wirkt. Hier kommt es für das Vorzeichen darauf an, wie die Bewegungsrichtung orientiert ist.

$$F_y(t) = y(t) \quad (\text{C.3})$$

Dies resultiert in einer Gesamtkraft, die letzten Endes auf die Masse wirkt und zu einer Beschleunigung führt. Diese ist als Summe der anderen Kräfte in der Gleichgewichtsgleichung entgegen orientiert:

$$F_{ges}(t) = -m \cdot a(t) = -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (\text{C.4})$$

Das Kräftegleichgewicht im Arbeitspunkt der Feder ergibt sich über die Gleichgewichtsgleichung zu:

$$F_{ges}(t) + F_d(t) + F_f(t) + F_y(t) = 0$$

Setze jetzt die Ausdrücke für die zeitabhängigen Kräfte ein, um eine Differentialgleichung zu erhalten:

$$-m \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) - k \cdot \frac{d}{dt}x(t) - D \cdot x(t) + y(t) = 0 \quad (\text{C.5})$$

C.1.2 BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG

Eine kurze Umformung liefert die Bewegungsdifferentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators, welche eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2}x(t) + k \cdot \frac{d}{dt}x(t) + D \cdot x(t) = y(t) \quad (\text{C.6})$$

Damit haben wir nun das mechanische System des gedämpften harmonischen Oszillators als lineares System mit der Eingangsgröße $y(t)$ und der Ausgangsgröße $x(t)$ beschrieben. Diese Modellbeschreibung dient jetzt als Grundlage für die Analyse des Systems.

C.1.3 ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG

Die Bewegungsdifferentialgleichung kann über die Frobenius-Begleitmatrix in ein Zustandsraummodell überführt werden. Die Zustandsgrößen sind dabei die Auslenkung $x(t)$ und die Geschwindigkeit als erste Ableitung der Auslenkung $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ im Vektor $\vec{x}(t)$ zusammengefasst:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot y(t) \quad (\text{C.7})$$

Die Eigenwerte der Zustandsmatrix \mathbf{A} sind die Eigenwerte des Systems. Sie sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung:

$$\underline{\Delta}(\underline{s}) = \det(\underline{s} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} \underline{s} & -1 \\ \frac{D}{m} & \underline{s} + \frac{k}{m} \end{bmatrix}\right) = \underline{s}^2 + \underline{s} \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m} \quad (\text{C.8})$$

Die Form dieses charakteristischen Polynoms kann man jetzt mal im Hinterkopf behalten und später mit der Struktur des Problems im Laplacebereich vergleichen.

C.2 MODELLBESCHREIBUNG IM LAPLACEBEREICH

Es wurde nun das – zugegeben idealisierte – reale mechanische System mathematisch durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Für die Systemanalyse und schließlich die Lösung erfolgt die Überführung des Systems in den Laplacebereich.

C.2.1 TRANSFORMATION DER BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG

Die einzelnen Terme in (C.6) lassen sich aufgrund der Linearität einzeln transformieren. Verwende dazu den Ableitungssatz für höhere Ableitungen (2.6):

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) &\circ\!\!\!\bullet m \cdot \left(\underline{s}^2 \cdot \underline{X}(\underline{s}) - \underline{s} \cdot x_0 - x_0^{(1)} \right) \\ k \cdot \frac{d}{dt} x(t) &\circ\!\!\!\bullet k \cdot \left(\underline{s} \cdot \underline{X}(\underline{s}) - x_0 \right) \\ D \cdot x(t) &\circ\!\!\!\bullet D \cdot \underline{X}(\underline{s}) \\ y(t) &\circ\!\!\!\bullet \underline{Y}(\underline{s}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Laplacetransformierte der Bewegungsdifferentialgleichung nach kurzer Umformung der Anfangswerte:

$$\underbrace{m \cdot \underline{s}^2 \cdot \underline{X}(\underline{s}) + k \cdot \underline{s} \cdot \underline{X}(\underline{s}) + D \cdot \underline{X}(\underline{s})}_{\text{System}} = \underbrace{\underline{Y}(\underline{s})}_{\text{Eingang}} + \underbrace{(m \cdot \underline{s} + k) \cdot x_0 + m \cdot x_0^{(1)}}_{\text{Anfangswerte, Energie im System}} \quad (\text{C.9})$$

C.2.2 LÖSUNG IM LAPLACEBEREICH

Die Gleichung (C.9) lässt sich nun nach der Ausgangsgröße $\underline{X}(\underline{s})$ umformen (*nur algebraische Umformungen*) und liefert die Lösung im Laplacebereich:

$$\underline{X}(\underline{s}) = \underbrace{\frac{(m \cdot \underline{s} + k)}{m \cdot \underline{s}^2 + k \cdot \underline{s} + D} \cdot x_0}_{\text{Anteil der Anfangsauslenkung}} + \underbrace{\frac{m}{m \cdot \underline{s}^2 + k \cdot \underline{s} + D} \cdot x_0^{(1)}}_{\text{Anteil der Anfangsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\frac{1}{m \cdot \underline{s}^2 + k \cdot \underline{s} + D} \cdot \underline{Y}(\underline{s})}_{\substack{\text{Übertragungsfunktion} \\ \text{partikulärer Anteil}}} \quad (\text{C.10})$$

homogener Anteil

In der Lösungsdarstellung (C.10) können nun die homogene Lösung und die partikuläre Lösung identifiziert werden. Um die Lösung im Laplacebereich in den Zeitbereich zu überführen, muss die Laplacetransformierte zuerst in eine passende Form gebracht werden.

C.2.3 ÜBERTRAGUNGSFUNKTION DES HARMONISCHEN OSZILLATORS

Die Übertragungsfunktion des gedämpften harmonischen Oszillators ergibt sich jetzt direkt aus der Beziehung (C.10) von Eingang und Ausgang. Ratsam ist dabei die Normierung des Nennerpolynoms:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{X}(\underline{s})}{\underline{Y}(\underline{s})} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\underline{s}^2 + \underline{s} \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m}} \quad (\text{C.11})$$

C.2.4 EIGENWERTE DES SYSTEMS ZWEITER ORDNUNG

Die Polstellen der Übertragungsfunktion (C.11) sind Eigenwerte des Systems. Da das Zählerpolynom vom Grad Null ist, ergeben sich die Polstellen direkt aus den Nullstellen des Nennerpolynoms (... *entspricht hier der charakteristischen Gleichung der Zustandsmatrix*):

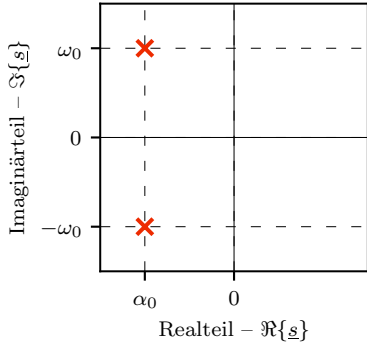
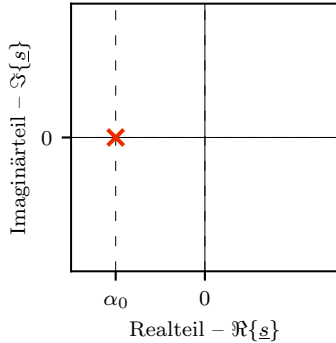
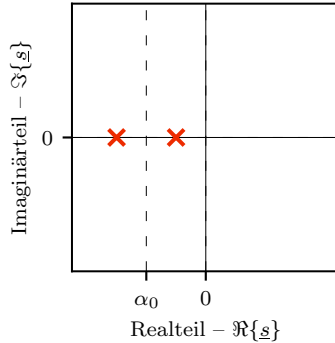
$$\underline{Q}(\underline{s}) = \underline{s}^2 + \underline{s} \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m} \quad (\text{C.12})$$

Dabei handelt es sich um ein Polynom zweiten Grades, dessen Nullstellen sich mit quadratischer Ergänzung – oder der alt bekannten pq-Formel – bestimmen lassen:

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}} \quad (\text{C.13})$$

Für verschiedene Konfigurationen der Systemparameter m, k, D ergeben sich für die beiden Eigenwerte $\underline{\lambda}_1$ und $\underline{\lambda}_2$ mehrere charakteristische Fälle:

Tabelle C.1: Gegenüberstellung der möglichen Polkonfigurationen von asymptotisch stabilen Systemen zweiter Ordnung

komplex konjugiertes Paar	doppelter reeller Eigenwert	zwei reelle Eigenwerte
Für den Fall einer geringen Dämpfung	Der Term unter der Wurzel verschwindet für	Bei einem stark gedämpften System mit
$k^2 < 4 \cdot D \cdot m$	$k^2 = 4 \cdot D \cdot m$	$k^2 > 4 \cdot D \cdot m$
wird die Wurzel negativ und die Eigenwerte sind paarweise komplex konjugiert:	und es ergibt sich ein doppelter Eigenwert mit der Vielfachheit $\mu = 2$ zu:	ergeben sich bei positiver Wurzel zwei verschiedene reelle Eigenwerte:
$\underline{\lambda}_{1,2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{\alpha_0} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}_{\omega_0}$	$\underline{\lambda}_{1,2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{\alpha_0}$	$\underline{\lambda}_{1,2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{\alpha_0} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}}_{\beta_0}$
In der komplexen Ebene ist das komplex konjugierte Eigenwertpaar darstellbar:	Der doppelte reelle Pol kann in der komplexen Ebene dargestellt werden:	In der komplexen Ebene verteilen sich die reellen Eigenwerte auf der \Re -Achse:
		

C.2.5 ANMERKUNG ZUR STABILITÄT

Die Realteile der Eigenwerte sind bei dieser Wahl der Systemparameter bestimmt durch:

$$\Re\{\lambda_{1,2}\} = \alpha_0 = -\frac{k}{2m} < 0$$

Alle Eigenwerte des Systems haben also einen echt negativen Realteil. Also ist das System asymptotisch stabil. Die Eigenwerte des Systems bestimmen den zeitlichen Verlauf der Systemantwort. Insbesondere gilt für die homogene Lösung (*siehe Gleichung (1.44)*) die Proportionalität:

$$x_h(t) \sim e^{\alpha_0 t} \quad (\text{C.14})$$

Die Amplitude der homogenen Lösung konvergiert also gemäß dieser Proportionalität für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch zur Zeitachse. Die folgenden Untersuchungen basieren jetzt auf der Annahme dieser charakteristischen Parameterkonfiguration. Die Plots sind in der Zeit normiert auf die dominante Zeitkonstante (*also die betragsmäßig kleinste Polstelle*) $\tau = \left| \frac{1}{\alpha_0} \right| = \frac{2m}{k}$ dargestellt.

C.2.6 ANMERKUNG ZU SCHWINGFÄHIGKEIT UND EIGENFREQUENZ

Für dieses Beispiel wird hier die erste und auch gängigste Parameterkonfiguration betrachtet. Die Wahl positiver Systemparameter unter der Bedingung $k^2 < 4 \cdot D \cdot m$ führt zu einem komplex konjugierten Eigenwert- / Polpaar:

$$\lambda_{1,2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{\alpha_0} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}_{\omega_0} \quad \text{also} \quad \lambda_1 = \lambda_2^* \quad (\text{C.15})$$

Die Eigenwerte des Systems bestimmen den zeitlichen Verlauf der Systemantwort. Sie stehen in den Exponenten von Exponentialfunktionen und im Falle des Systems zweiter Ordnung gilt für die homogene Lösung (*siehe Gleichung (1.44)*) die Proportionalität:

$$x_h(t) \sim e^{\pm j\omega_0 t} \quad (\text{C.16})$$

Der Imaginärteil ω_0 der Eigenwerte gibt also die Periodizität der Systemantwort im unerregten Fall vor. Diese Frequenz wird als Eigenfrequenz (*die Frequenz der Eigenschwingung*) des Systems bezeichnet.

Solche paarweise komplex konjugierten Eigenwerte sind insbesondere in schwingfähigen Systemen anzutreffen. Diese zeichnet aus genug gedämpft zu sein, um asymptotisch stabil zu sein, aber dennoch einen Schwingterm zu enthalten. Gerade auf mechanische (*und auch elektrische*) Oszillatoren trifft diese Parameterkonfiguration in der Realität oft zu.

C.3 TRANSIENTES VERHALTEN

Jetzt wird das Einschwingverhalten des gedämpften harmonischen Oszillators näher analysiert. Exemplarisch wird das System wieder als asymptotisch stabil mit der bereits besprochenen Eigenwertkonfiguration angenommen.

C.3.1 HOMOGENE LÖSUNG

Der homogene Anteil repräsentiert die zum Zeitpunkt $t = 0$ im System gespeicherte Energie. Diese teilt sich dabei auf in die in der Bewegung über die Anfangsgeschwindigkeit $x_0^{(1)} = v_0$ gespeicherte kinetische Energie und die in der Feder durch die Anfangsauslenkung x_0 gespeicherte potentielle Energie. Die homogene Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ergibt sich über die inverse Laplacetransformation für den Fall $\underline{Y}(s) = 0$:

$$\underline{X}_h(s) = \underbrace{\frac{(m \cdot s + k)}{m \cdot s^2 + k \cdot s + D} \cdot x_0}_{\text{Anteil der Anfangsauslenkung}} + \underbrace{\frac{m}{m \cdot s^2 + k \cdot s + D} \cdot x_0^{(1)}}_{\text{Anteil der Anfangsgeschwindigkeit}} \quad (\text{C.17})$$

Eine Umformulierung in Pol- / Nullstellenform mit den berechneten Eigenwerten λ_1 und λ_2 liefert:

$$\underline{X}_h(s) = \frac{\left(s + \frac{k}{m}\right)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \cdot x_0 + \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \cdot x_0^{(1)} \quad (\text{C.18})$$

Eine Partialbruchzerlegung (*beispielsweise mit der Zuhaltmethode, oder per Koeffizientenvergleich ... nur für $\lambda_1 \neq \lambda_2$!!!*) beider Anteile ergibt:

$$\begin{aligned} \underline{X}_h(s) = & \left(\frac{\left(\lambda_1 + \frac{k}{m}\right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{1}{s - \lambda_1} + \frac{\left(\lambda_2 + \frac{k}{m}\right)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \frac{1}{s - \lambda_2} \right) \cdot x_0 \\ & + \left(\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{1}{s - \lambda_1} + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \frac{1}{s - \lambda_2} \right) \cdot x_0^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Um die weiteren Schritte etwas übersichtlicher zu halten, wird nun ein weiterer Umformschritt nach den Partialbrüchen durchgeführt:

$$\underline{X}_h(s) = \left(\frac{\left(\lambda_1 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \cdot \frac{1}{s - \lambda_1} + \left(\frac{\left(\lambda_2 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \cdot \frac{1}{s - \lambda_2} \quad (\text{C.20})$$

Den Partialbrüchen können nun über die Korrespondenz zur komplexen Exponentialfunktion (2.18) Funktionen im Zeitbereich zugeordnet werden. Die homogene Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators ist also:

$$\begin{aligned} x_h(t) &= \left(\frac{\left(\lambda_1 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) \cdot \theta(t) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \left(\frac{\left(\lambda_2 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \cdot \theta(t) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \\ &| \text{ weiter zusammenfassen mit } \lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha_0 + j\omega_0 \\ &= \theta(t) \cdot e^{\alpha_0 t} \left(\frac{\left(\lambda_1 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + \frac{\left(\lambda_2 + \frac{k}{m}\right) \cdot x_0 + x_0^{(1)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Die homogene Lösung bezüglich der Anfangsauslenkung x_0 entspricht einer Auslenkung der Masse nach oben für $t < 0$ und Loslassen ab $t > 0$. Die homogene Lösung bezüglich der negativen Anfangsgeschwindigkeit $x_0^{(1)}$ entspricht einer Bewegung der Masse nach unten.

Für den asymptotisch stabilen Fall nimmt das unerrege System (*also nur die homogene Lösung ohne von außen wirkende Kräfte*) einen stationären Endwert – nämlich die Ruhelage $x(t) = 0$ – ein.

Die Auftragung der beiden Zustandsgrößen Ort / Auslenkung $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ beim harmonischen Oszillator gegeneinander über die Zeit wird auch als Phasendiagramm bezeichnet. Anschaulich beschreibt der Zustandsvektor im zeitlichen Verlauf Bahnen (sog. *Trajektorien*) im Zustandsraum. Diese sind im asymptotisch stabilen Fall kleiner werdende Spiralen (*Abnahme der Amplitude, Abklingen der Anfangsbedingungen mit der Zeit*), im Grenzstabilen Fall sind es geschlossene Bahnen, da keine Energie vom System abgegeben wird. Im instabilen Fall werden die Spiralen größer, da dann auch die Amplituden anwachsen bzw. das System aufschwingt.

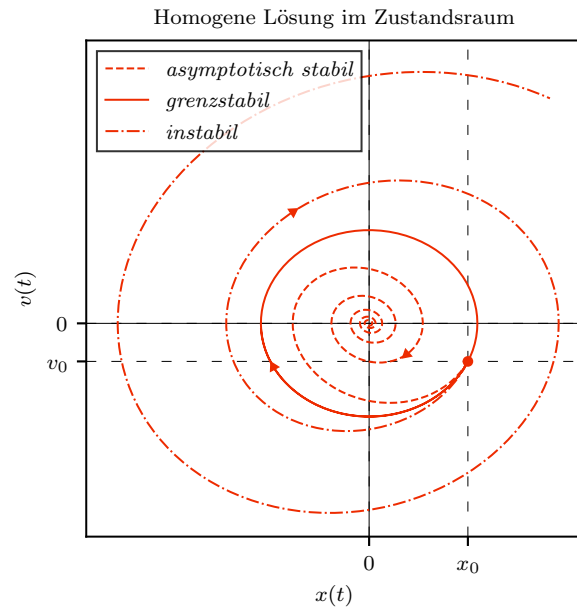


Abbildung C.2: Auftragung der Trajektorie der homogenen Lösung von \vec{x} des Zustandsraummodells (C.7) als Phasendiagramm. Jeweils $x(t)$ (Auslenkung) und $v(t)$ (Geschwindigkeit) für die drei möglichen Stabilitätsfälle.

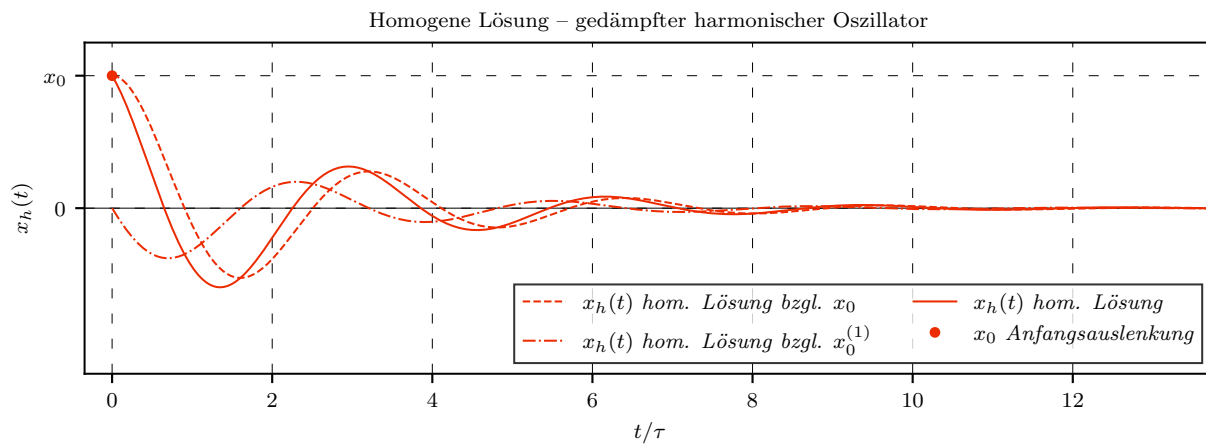


Abbildung C.3: Homogene Lösung (*asymptotisch stabiler Fall*) des gedämpften harmonischen Oszillators für die Vorgabe einer beliebigen (*hier positiven*) Anfangsauslenkung x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Aufgetragen sind zusätzlich die einzelnen Beiträge der Anfangsbedingungen.

C.3.2 HOMOGENE LÖSUNG UND ENERGIE

Die Anfangsauslenkung x_0 repräsentiert die potentielle Energie $E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2$, welche zum Betrachtungsbeginn $t = 0$ in der Feder gespeichert ist. Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \dot{x}_0^{(1)}$ repräsentiert die kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$, welche zum Betrachtungsbeginn $t = 0$ in der Bewegung der Masse gespeichert ist.

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 \quad (\text{C.22})$$

Die zum Zeitpunkt $t = 0$ im System gespeicherte Energie E_0 wird aufgrund der asymptotischen Stabilität während dem Einschwingvorgang verbraucht bzw. physikalisch gesehen in Wärme umgesetzt.

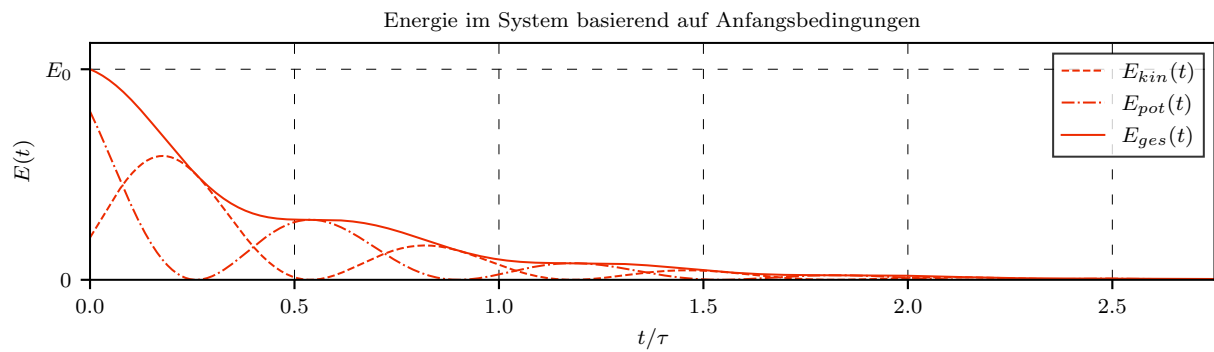


Abbildung C.4: Energie, die durch die Anfangsbedingungen bereits im System gespeichert ist. Übergeben wird E_0 als Summe aus Potentieller und kinetischer Energie

C.3.3 STOSSANTWORT

Für die Rücktransformation der Übertragungsfunktion in den Zeitbereich über die Korrespondenzen, muss die Übertragungsfunktion in eine Pol- / Nullstellenform (*dafür werden die Polstellen / Eigenwerte benötigt*) umgeformt werden. Dies ermöglicht die Zuordnung der Korrespondenzen im Zeitbereich.

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(\underline{s} - \underline{\lambda}_1)(\underline{s} - \underline{\lambda}_2)} \quad (\text{C.23})$$

Eine Partialbruchzerlegung (*beispielsweise mit der Zuhaltmethode, oder per Koeffizientenvergleich*) ergibt:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{1}{m \cdot (\underline{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_2)} \cdot \frac{1}{\underline{s} - \underline{\lambda}_1} + \frac{1}{m \cdot (\underline{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_2)} \cdot \frac{1}{\underline{s} - \underline{\lambda}_2} \quad (\text{C.24})$$

Den Partialbrüchen können nun über die Korrespondenz zur komplexen Exponentialfunktion (2.18) Funktionen im Zeitbereich zugeordnet werden. Damit ergibt sich die Stoßantwort als inverse Laplacetransformation der Übertragungsfunktion:

$$h(t) = \frac{1}{m \cdot (\underline{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_2)} \cdot \theta(t) \cdot e^{\underline{\lambda}_1 \cdot t} + \frac{1}{m \cdot (\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_1)} \cdot \theta(t) \cdot e^{\underline{\lambda}_2 \cdot t} \quad (\text{C.25})$$

Die Koeffizienten und Exponenten der Exponentialfunktionen in der Stoßantwort (C.25) können je nach Beschaffenheit der Eigenwerte $\underline{\lambda}_1$ und $\underline{\lambda}_2$ reell, oder komplex sein und so ein unterschiedliches Verhalten des Systems suggerieren. In Abbildung C.5 dargestellt ist der spezielle Fall für die Konfiguration der Eigenwerte $\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2^*$ und mit Realteil $\Re\{\underline{\lambda}_{1,2}\} < 0$.

Das System ist also asymptotisch stabil und besitzt zwei komplex-konjugierte Eigenwerte. Besonders gut zu erkennen ist, dass die Stoßantwort des asymptotisch stabilen Systems konvergiert. Die Schwingung entsteht dabei durch die Imaginärteile der Eigenwerte in den Exponenten der Exponentialfunktionen der Stoßantwort (C.25).

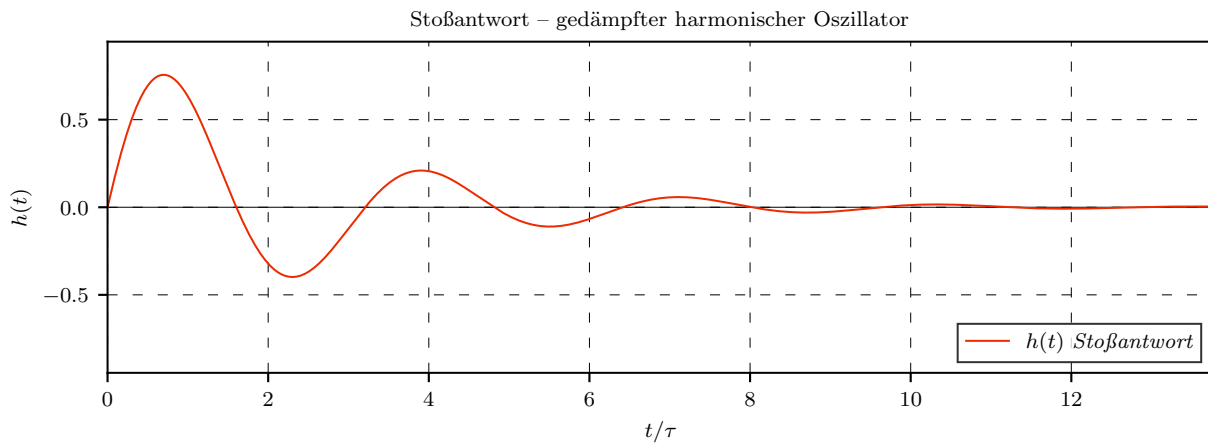


Abbildung C.5: Stoßantwort (*der Auslenkung auf eine externe Kraft*) des gedämpften harmonischen Oszillators für den asymptotisch stabilen Fall.

C.3.4 ALLGEMEINE SYSTEMANTWORT UND DUHAMEL-INTEGRAL

Die Lösung des Systems für beliebige Erregungen ergibt sich aus der homogenen Lösung und der Faltung der Stoßantwort mit der Erregung als partikuläre Lösung:

$$x(t) = x_h(t) + \underbrace{\left(h(\tau) * y(\tau)\right)(t)}_{x_p(t)} \quad \text{für} \quad t > 0 \quad (\text{C.26})$$

Die homogene Lösung $x_h(t)$ und die Stoßantwort $h(t)$ sind bereits bekannt. Wenn man nun eine Erregungsfunktion gegeben hat, muss noch das Faltungsintegral gelöst werden, um die Systemantwort zu bestimmen. Die Lösungsformel für die partikuläre Lösung für beliebige Eingangssignale $y(t)$ und für $t > 0$ ist dann:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \left(h(\tau) * y(\tau)\right)(t) \\ &| \quad \text{Faltungsintegral ausschreiben} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad \text{Stoßantwort (C.25) einsetzen} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{m \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \theta(t - \tau) \cdot e^{\lambda_1 \cdot (t - \tau)} + \frac{1}{m \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot \theta(t - \tau) \cdot e^{\lambda_2 \cdot (t - \tau)} \right) \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad \text{Für die Eigenwerte gilt } \lambda_1 = \lambda_2^* \text{ und daher } \lambda_1 - \lambda_2 = j2\Im\{\lambda_1\} = j2\omega_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m \cdot j2\omega_0} \cdot \theta(t - \tau) \cdot \left(e^{\lambda_1 \cdot (t - \tau)} - e^{\lambda_1^* \cdot (t - \tau)} \right) \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad \text{Exponentialfunktionen zusammenfassen mit } \lambda_1 = \alpha_0 + j\omega_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m \cdot j2\omega_0} \cdot \theta(t - \tau) \cdot e^{\alpha_0 \cdot (t - \tau)} \left(e^{j\omega_0 \cdot (t - \tau)} - e^{-j\omega_0 \cdot (t - \tau)} \right) \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad \text{Integrationsgrenzen anpassen (Kausalität)} \\ &= \int_0^t \frac{1}{m \cdot j2\omega_0} \cdot e^{\alpha_0 \cdot (t - \tau)} \left(e^{j\omega_0 \cdot (t - \tau)} - e^{-j\omega_0 \cdot (t - \tau)} \right) \cdot y(\tau) d\tau \\ &| \quad \text{Beziehung zum Sinus einsetzen: } \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ &= \int_0^t \frac{1}{m \cdot \omega_0} \cdot e^{\alpha_0 \cdot (t - \tau)} \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t - \tau)) \cdot y(\tau) d\tau \quad (\text{C.27}) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösungsformel (C.27) für den gedämpften, schwingfähigen harmonischen Oszillator wird hin und wieder auch als Duhamel-Integral oder Lösungsformel nach Duhamel bezeichnet.

Alternativ dazu kann der Weg auch über die Laplacetransformation für die partikuläre Lösung eingeschlagen werden. Dazu muss die Erregung laplacetransformiert, mit der Übertragungsfunktion multipliziert, anschließend partialbruchzerlegt und wieder in den Zeitbereich zurück transformiert werden (*hier werden wir diesen Weg verfolgen, da die spezielle Berechnung der Stoßantwort über das Faltungsintegral im Zeitbereich bereits für das Beispiel erster Ordnung demonstriert wurde*).

C.3.5 SPRUNGANTWORT

Die Sprungantwort des gedämpften harmonischen Oszillators kann im Laplacebereich berechnet werden. Mit der Korrespondenz des Einheitssprungs (2.14) und der Übertragungsfunktion (C.11) folgt:

$$x_\theta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{X}_\theta(s) = \underline{H}(s) \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{C.28})$$

Um die Laplacetransformierte der Sprungantwort in den Zeitbereich überführen zu können, muss zuerst eine Partialbruchzerlegung (*hier wird wieder $\lambda_1 \neq \lambda_2$ angenommen, was die Verwendung der Zuhaltmethode bzw. des Residuensatzes erlaubt*) durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \underline{X}_\theta(s) &= \underline{H}(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &| \quad \text{Übertragungsfunktion einsetzen} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(\underline{s} - \lambda_1)(\underline{s} - \lambda_2) \underline{s}} \\ &| \quad \text{PBZ und Residuen über Zuhaltmethode bestimmen} \\ &= \frac{1}{m \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \frac{1}{\underline{s}} + \frac{1}{m \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \lambda_1} \cdot \frac{1}{\underline{s} - \lambda_1} + \frac{1}{m \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \lambda_2} \cdot \frac{1}{\underline{s} - \lambda_2} \end{aligned}$$

Mit den Korrespondenzen der Sprungfunktion (2.14) und der komplexen Exponentialfunktion (2.18) kann die Sprungantwort im Zeitbereich formuliert werden:

$$x_\theta(t) = \underbrace{\frac{1}{m \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}}_{x_\infty} \cdot \theta(t) + \frac{1}{m \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \lambda_1} \cdot \theta(t) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \frac{1}{m \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \lambda_2} \cdot \theta(t) \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad (\text{C.29})$$

In Abbildung C.6 ist deutlich zu erkennen, dass die Sprungantwort nach einer Einschwingzeit von etwa 5τ einen stationären Endwert x_∞ annimmt. Dieses Verhalten lässt sich auch direkt aus dem Grenzwert der Sprungantwort (C.29) ablesen. Für $t \rightarrow \infty$ verschwinden die Exponentialterme und es bleibt nur noch der konstante Term übrig. Das System geht in einen zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand (*steady state*) über.

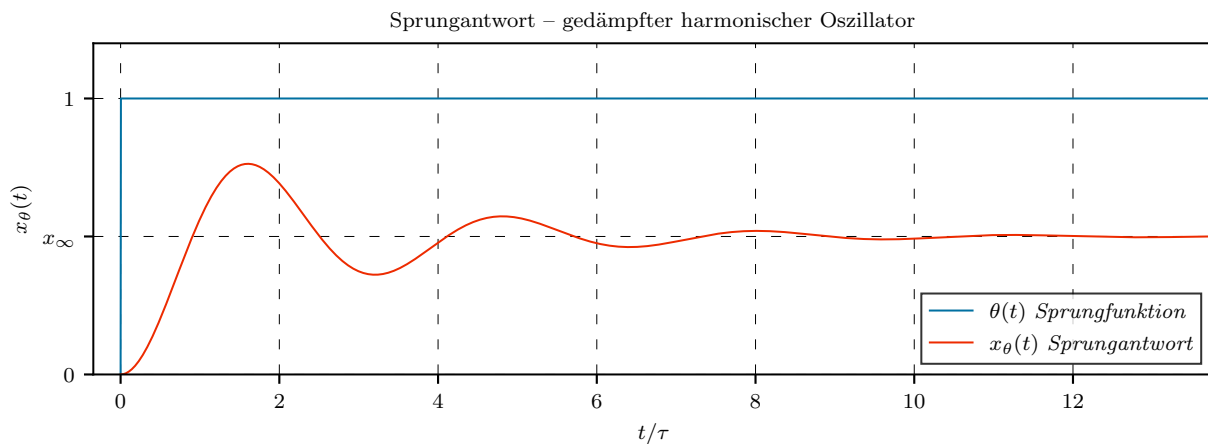


Abbildung C.6: Sprungantwort (*Antwort der Auslenkung auf eine konstante externe Kraft*) des gedämpften harmonischen Oszillators mit zwei komplex konjugierten Eigenwerten / Polstellen für den asymptotisch stabilen Fall.

C.3.6 SPRUNGANTWORT UND ENERGIE

Durch den erregenden Einheitssprung wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ Energie in das System eingespeist, indem die Masse mit einer konstanten Kraft gegen die Feder ausgelenkt wird. Der Zeitliche Verlauf dieser Energie ist in Abbildung C.7 aufgetragen.

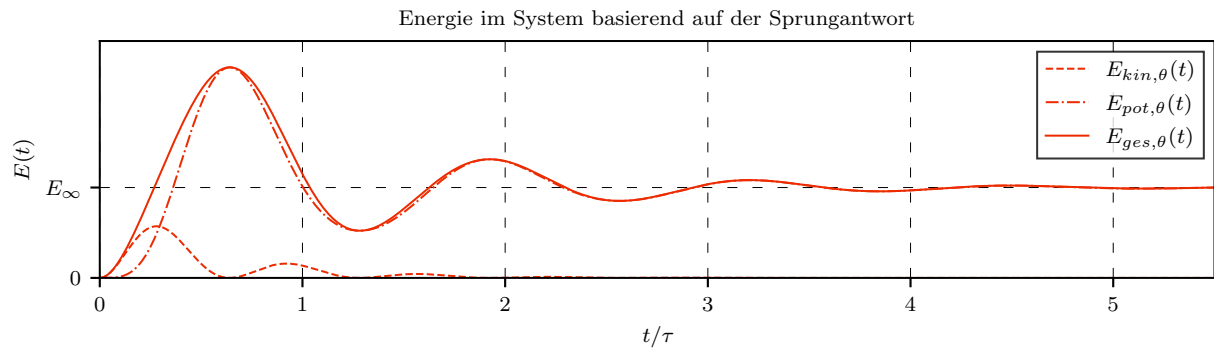


Abbildung C.7: In das System durch die Erregung mit einem Einheitssprung eingeprägte Energie. Im Grenzwert ist eine Grundenergie $E_\infty = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_\infty^2$ erkennbar als potentielle Energie aufgrund einer konstanten Auslenkung gegen die Feder.

C.3.7 VOLLSTÄNDIGES TRANSIENTES VERHALTEN

Das vollständige transiente Verhalten des gedämpften harmonischen Oszillators bei der Erregung durch einen Einheitssprung ergibt sich jetzt durch die Überlagerung (*Superposition*) der homogenen Lösung und der Sprungantwort und entspricht der roten durchgezogenen Linie in der folgenden Abbildung:

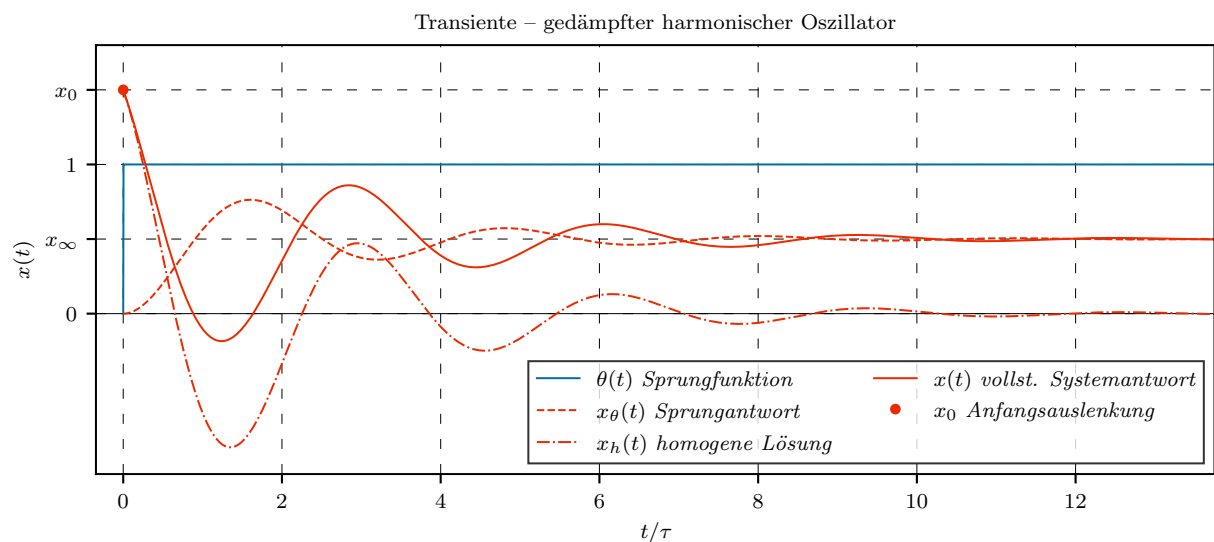


Abbildung C.8: Vollständiges transientes Verhalten (*der Auslenkung*) des gedämpften harmonischen Oszillators bei Erregung mit einem Einheitssprung (*plötzliche konstante normierte Kraftwirkung*). Außerdem aufgetragen sind die einzelnen Beiträge zum Systemverhalten, die zur vollständigen Systemantwort überlagert werden.

C.3.8 GESAMTENERGIE IM SYSTEM

Die Gesamtenergie in dem mechanischen System setzt sich zusammen aus potentieller und kinetischer Energie. Die Gesamte Energie zu jedem Zeitpunkt setzt sich außerdem aus der bereits im System gespeicherten (*Anfangsbedingungen*) und der in das System eingeprägten (*Erregung durch Einheitssprung*) Energie zusammen. Ebenso wie für die Auslenkung gibt es auch für die im System enthaltene Energie einen Anfangswert bzw. eine Anfangsenergie E_0 und einen Endwert E_∞ . Dieser Sachverhalt ist in Abbildung C.10 dargestellt.

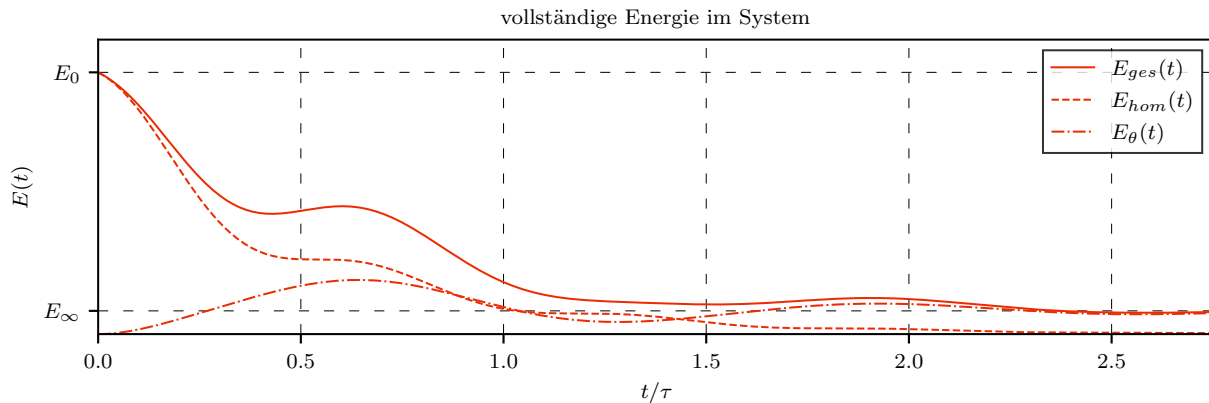


Abbildung C.9: Gesamtenergie im System unterteilt in die Energie durch die Anfangsbedingungen (*homogene Lösung*) und der eingeprägten Energie (*Sprungantwort*)

C.3.9 TRAJEKTORIEN IM ZUSTANDSRAUM

Der zeitliche Verlauf der Zustandsgrößen $x(t)$ und $v(t) = \dot{x}(t)$ bestimmen die Dynamik im System zu jedem Zeitpunkt vollständig. Der Zustandsvektor beschreibt mit der Zeit Bahnen im Zustandsraum (*Trajektorien*), die den Systemzustand zu jedem Zeitpunkt repräsentieren. Die Superposition (*Addition*) der Zustandsvektoren der Einzellösungen liefert die Gesamtlösung des Systems.

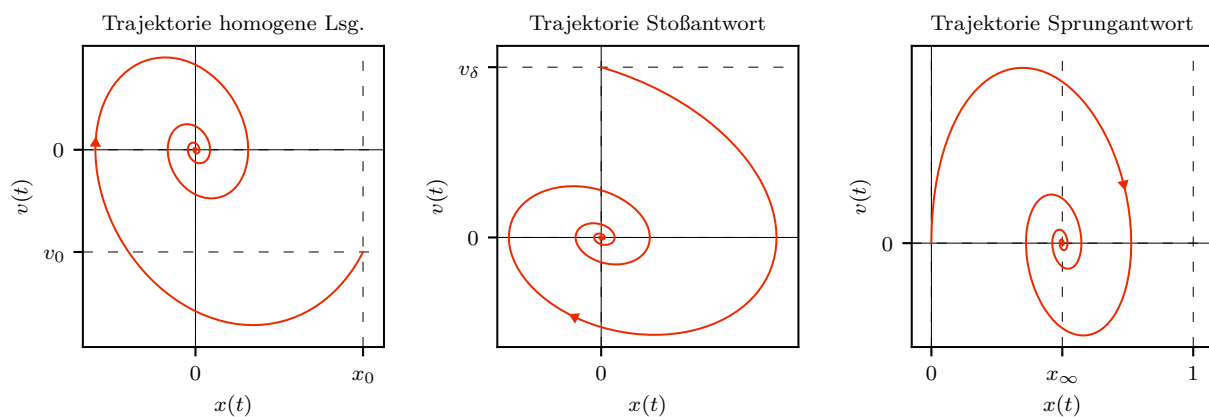


Abbildung C.10: Trajektorien der homogenen Lösung (*links*), der Stoßantwort (*mitte*) und der Sprungantwort (*rechts*) im Zustandsraum jeweils aufgetragen für den asymptotisch stabilen Fall. Lösungen als Linearkombinationen der Zustandsgrößen $x(t)$ (Ort) und $v(t)$ (Geschwindigkeit).

C.4 VERHALTEN IM FREQUENZBEREICH

Nachdem das transiente Verhalten des gedämpften harmonischen Oszillators anhand einer stabilen Parameterkonstellation untersucht wurde, erfolgt jetzt die weitere Analyse im Frequenzbereich. Mit $\Re\{\underline{\lambda}_{1,2}\} = \alpha_0 < 0$ ist das System asymptotisch stabil und geht für $t \gg \tau = \frac{1}{|\alpha_0|}$ bei harmonischer Erregung in einen harmonischen eingeschwungenen Zustand über. In diesem Fall kann bei einer Erregung der Form ...

$$y(t) = \Re\{\underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\} \quad \text{mit} \quad \omega \geq 0 \quad (\text{C.30})$$

... das Systemverhalten durch einen Frequenzgang vollständig beschrieben werden. Die Auswertung der Amplitude des Ausgangs über mehrere Frequenzen ω (oft auch *Sinus-Sweep* oder *AC-Analyse*) liefert für $\underline{Y} = 1$ den Frequenzgang des Systems und hat daher und der Praxis eine hohe Relevanz.

C.4.1 FREQUENZGANG

Da die Übertragungsfunktion (C.11) bereits aufgestellt wurde, kann der Frequenzgang durch eine Ersetzung des Arguments gewonnen werden. Das liefert den Übergang:

$$\underline{H}(\underline{s}) \xrightarrow{\text{ersetze } \underline{s} \rightarrow j\omega} \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m}} \quad (\text{C.31})$$

Alternativ kann der Frequenzgang natürlich wie die Übertragungsfunktion über die Polstellen der Übertragungsfunktion angegeben werden. Dabei sollte man aber im Hinterkopf behalten, dass dies dann nicht mehr unbedingt Polstellen des Frequenzgangs sind, da dieser nur rein imaginäre Argumente (*also $j\omega$ als Funktionsargument*) zulässt. Dennoch gilt:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(j\omega - \underline{\lambda}_1)(j\omega - \underline{\lambda}_2)} \quad (\text{C.32})$$

C.4.2 BETRAG DES FREQUENZGANGS

Der Betrag des Frequenzgangs entspricht der frequenzabhängigen Proportionalität in der Amplitude des Ausgangssignals. Berechnung erfolgt hier direkt über die Polynomform:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega \cdot \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{D}{m} - \omega^2\right)^2}} \quad (\text{C.33})$$

Der Betrag kann alternativ auch über die Polstellen angegeben werden. Sei dabei $\underline{\lambda}_1 = \alpha_0 + j\omega_0$ ausgeschrieben:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha_0^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4 + 2\alpha_0^2\omega_0^2 + \alpha_0^4}} \quad (\text{C.34})$$

C.4.3 PHASE DES FREQUENZGANGS

Die Phase des Frequenzgangs entspricht der zeitlichen Verzögerung realer physischer Systeme zwischen Eingang und Ausgang (*auch Kausalität, begründet durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Informationen im Universum*). Sei für diesen Fall $\omega^2 < \frac{D}{m}$ um die Fallunterscheidung einfach zu halten, dann:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \angle \{ \underline{H}(j\omega) \} \\ &| \quad \text{Frequenzgang einsetzen, nur Nenner relevant} \\ &= -\angle \left\{ (j\omega)^2 + j\omega \cdot \frac{k}{m} + \frac{D}{m} \right\} \\ &| \quad \text{Phasenwinkel über Arkustangens} \\ &= -\arctan \left(\frac{\omega \cdot \frac{k}{m}}{\frac{D}{m} - \omega^2} \right)\end{aligned}$$

C.4.4 ANTWORT IM HARMONISCHEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND

Das asymptotisch stabile System geht nach einer Einschwingzeit $t \gg \tau$ bei harmonischer Erregung in einen harmonischen eingeschwungenen Zustand über. Dies ermöglicht die vereinfachte Darstellung des Systemverhaltens:

$$x(t) = \Re \left\{ \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{Y} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{für} \quad t \gg \tau \quad (\text{C.35})$$

Die Darstellung kann weiter umgeformt werden und lässt sich mit dem frequenzabhängigen Betrag $|\underline{H}(j\omega)|$ und der frequenzabhängigen Phase $\varphi(\omega)$ des Frequenzgangs (*bereits berechnet*) als reelle Cosinusfunktion schreiben:

$$x(t) = \underbrace{|\underline{H}(j\omega)| \cdot |\underline{Y}|}_{\text{Gesamtamplitude}} \cdot \cos \left(\omega t + \underbrace{\varphi_y + \varphi(\omega)}_{\text{Gesamtphase}} \right) \quad \text{für} \quad t \gg \tau \quad (\text{C.36})$$

C.4.5 ANTWORT IM ZEITUNABHÄNGIGEN EINGESCHWUNGENEN ZUSTAND

Technisch relevant ist häufig auch das asymptotische Verhalten für niedrige Frequenzen nahe am Ursprung $\omega \approx 0$. Für $\omega = 0$ wird der Cosinus in der Erregung zur Konstante $\cos(0) = 1$ und das System befindet sich dann in einem zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand mit einem stationären Endwert x_∞ . Der Beitrag des Systems zu diesem Endwert ist wieder aus dem Frequenzgang zu gewinnen: Dieser Gleichanteil ergibt sich hier also zu:

$$H_0 := |\underline{H}(0)| = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(0 \cdot \frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{D}{m} - 0^2\right)^2}} = \frac{1}{D}$$

Dementsprechend ist der Ausgang im zeitunabhängigen eingeschwungenen Zustand durch eine ebenfalls zeitunabhängige Funktion (*also eine Konstante*) bestimmt:

$$x(t) = H_0 \cdot |\underline{Y}| \cdot \cos(\varphi_y) = x_\infty \quad (\text{C.37})$$

C.4.6 BODEDIAGRAMM

Die doppelt-logarithmische Auftragung von Betrag und Phase geschieht in Abbildung C.11 als Bodediagramm. Klar zu erkennen ist die Anhebung der Amplitude des Ausgangs bzw. der Betragserhöhung um die Frequenz $\omega \approx |\lambda_{1,2}|$ herum. Dieses Maximum im Betragsverlauf wird oft als Resonanz bezeichnet und ist typisch für Systeme zweiter Ordnung, die genug gedämpft sind um asymptotisch stabil zu sein, aber dennoch schwingfähig sind.

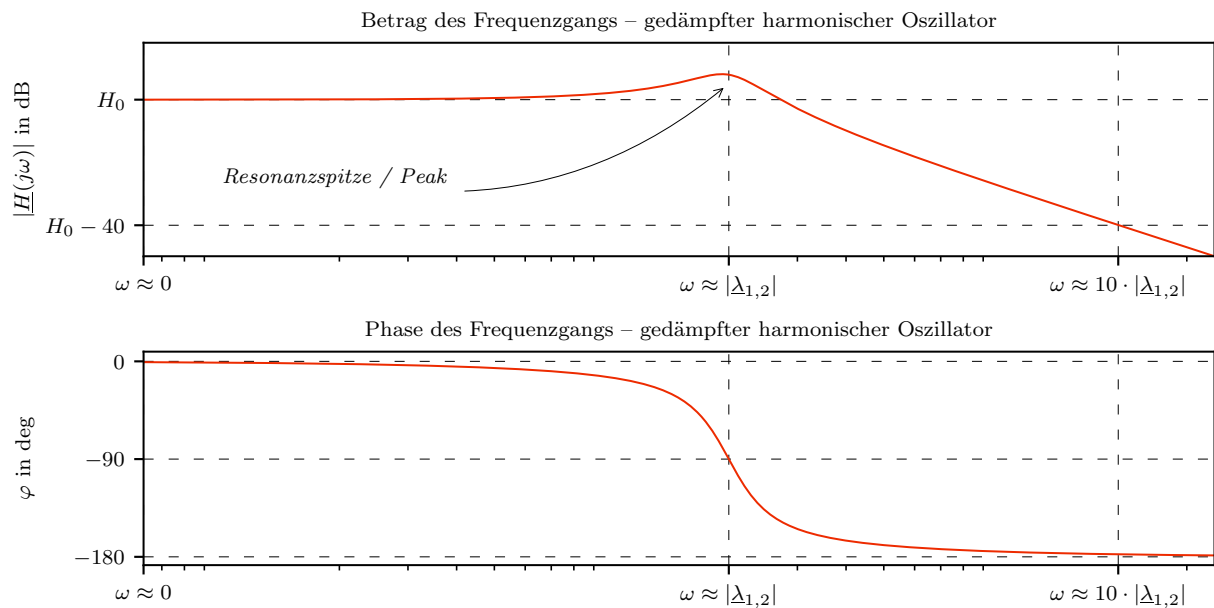


Abbildung C.11: Bodediagramm des Frequenzgangs des harmonischen Oszillators. Betrag und Phase sind dabei getrennt voneinander über die Kreisfrequenz ω aufgetragen.

C.4.7 NYQUIST-DIAGRAMM

Neben dem Bodediagramm kann der Frequenzgang auch durch seine Ortskurve in der komplexen Ebene (*Nyquist-Diagramm*) visualisiert werden.

Dabei wird der Frequenzgang für $\omega \in [0, \infty)$ ausgewertet und die jeweiligen Auswertungspunkte in der komplexen Ebene aufgetragen. Für das kontinuierliche Intervall ergibt sich dann eine Kurve in der komplexen Ebene.

Der Zusammenhang zum Bodediagramm lässt sich ebenfalls erkennen. So kann jedem Punkt direkt ein Betrag und eine Phase in Polardarstellung zugeordnet werden. Im Falle des harmonischen Oszillators ist die Anhebung des Betrags bei der Resonanzfrequenz als Beule auch im Nyquist-Diagramm zu erkennen. Außerdem zeigt sich die Phasendrehung um π für hohe Frequenzen.

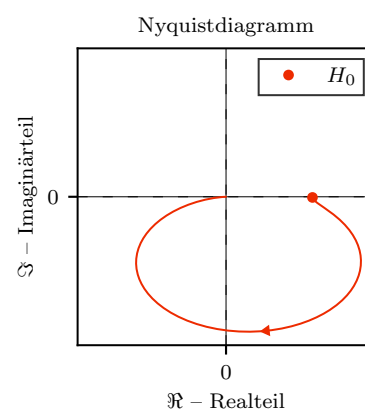


Abbildung C.12: Ortskurve des Frequenzgangs in der komplexen Ebene mit Startpunkt $H_0 = \underline{H}(0)$.

C.4.8 RESONANZFREQUENZ

Die Frequenz, bei der die Resonanz auftritt ist die Resonanzfrequenz ω_{res} (... es kann bei Systemen höherer Ordnung natürlich auch mehrere Extrema und somit auch mehrere Resonanzfrequenzen geben). Diese ergibt sich aus den Extremstellen des Betrags des Frequenzgangs (C.33). Bilde dafür die Ableitung des Betrags nach der Frequenz ω :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\omega} |\underline{H}(j\omega)| &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{|(j\omega - \underline{\lambda}_1)(j\omega - \underline{\lambda}_2)|} \right) \\
 &| \quad \text{Real- und Imaginärteil der Eigenwerte einsetzen und umformen} \\
 &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{m} \cdot (((\omega - \omega_0)^2 + \alpha_0^2) \cdot ((\omega + \omega_0)^2 + \alpha_0^2))^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &| \quad \text{ausmultiplizieren} \\
 &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{m} \cdot (\omega^4 + 2\omega^2(\alpha_0^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4 + 2\alpha_0^2\omega_0^2 + \alpha_0^4)^{-\frac{1}{2}} \right) \\
 &| \quad \text{Kettenregel anwenden} \\
 &= -\frac{1}{m} \cdot \frac{2\omega(\omega^2 + (\alpha_0^2 - \omega_0^2))}{(\omega^4 + 2\omega^2(\alpha_0^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4 + 2\alpha_0^2\omega_0^2 + \alpha_0^4)^{\frac{3}{2}}} \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

Die Resonanzfrequenz ist die Extremstelle und somit eine Nullstelle der Ableitung. Die Berechnung der Nullstellen erfolgt über den Zähler:

$$\frac{d}{d\omega} |\underline{H}(j\omega)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(\omega^2 + (\alpha_0^2 - \omega_0^2)) = 0 \tag{C.39}$$

Daraus ist zu erkennen, dass nur eine Frequenz eine physikalisch sinnvolle Resonanzfrequenz sein kann. Die Resonanzfrequenz ergibt sich daher aus dem Imaginärteil ω_0 und Realteil α_0 der Eigenwerte. Es handelt sich bei der Resonanzfrequenz nicht um den Betrag der Eigenwerte, dieser kann aber dennoch eine sinnvolle erste Einschätzung über die Lage der Resonanzfrequenz geben:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_0^2} \quad \approx \quad |\underline{\lambda}_{1,2}| \quad \text{wenn } \alpha_0 \ll \omega_0 \tag{C.40}$$

Je nach Verhältnis von Real- und Imaginärteil der Eigenwerte ist die Resonanzspitze unterschiedlich scharf. Die Resonanzspitze wird immer extremer, je größer der Imaginärteil gegenüber dem Realteil ist. Außerdem verschwindet die Spitze ganz, wenn der Realteil anteilig entsprechend groß ist, also das System genügend gedämpft ist.

Die Bedingung, unter welcher Resonanz im System eintreten kann, ist hier ebenfalls direkt zu erkennen. So muss $\omega_0^2 > \alpha_0^2$ gelten, damit die Wurzel positiv bleibt und eine reelle Resonanzfrequenz liefert. Andernfalls besitzt die Ableitung an dieser Stelle keine Nullstelle und es gibt dort auch keine Extremstelle, also keine Resonanz.

C.4.9 VERHALTEN BEI RESONANZ (WIP)

In Resonanz bei der Erregungsfrequenz $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_0^2}$ kann die Amplitude des Ausgangssignals im harmonischen eingeschwungenen Zustand gemäß Gleichung (C.36) und (C.34) folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 |\underline{X}| &= |\underline{H}(j\omega_{res})| \cdot |\underline{Y}| \\
 &| \quad \text{Betrag des Frequenzgangs ausschreiben} \\
 &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_{res}^4 + 2\omega_{res}^2(\alpha_0^2 - \omega_0^2) + \omega_0^4 + 2\alpha_0^2\omega_0^2 + \alpha_0^4}} \cdot |\underline{Y}| \\
 &| \quad \text{Resonanzfrequenz einsetzen mit } \omega_{res}^2 = \omega_0^2 - \alpha_0^2 \\
 &\quad \text{und } \omega_{res}^4 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\alpha_0^2 + \alpha_0^4 \\
 &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\alpha_0^2 + \alpha_0^4 + 2(\omega_0^2 - \alpha_0^2)^2 + \omega_0^4 + 2\alpha_0^2\omega_0^2 + \alpha_0^4}} \cdot |\underline{Y}| \\
 &| \quad \text{kürzen} \\
 &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^4 + \alpha_0^4 - \omega_0^2\alpha_0^2}} \cdot |\underline{Y}| \tag{C.41}
 \end{aligned}$$

Die Umformung zu Gleichung (C.41) zeigt die Abhängigkeit der Amplitude im Resonanzfall von Realteil α_0 und Imaginärteil ω_0 der Eigenwerte / Polstellen des Systems. Abbildung C.13 visualisiert diesen Sachverhalte für verschiedene Verhältnisse von Real- und Imaginärteil. Da dem Realteil α_0 die Dämpfung des Systems (*im Sinne gedämpfter harmonischer Schwingungen*) zugeordnet wird, ist erkennbar, dass die Amplitude in Resonanz (*Resonanzspitze*) bei kleinerer Dämpfung höher ausfällt.

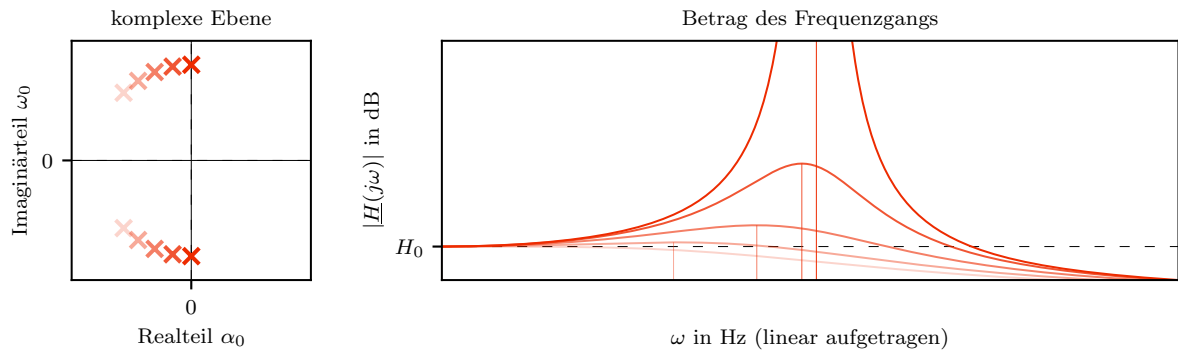


Abbildung C.13: Verschiebung der Resonanzfrequenz (*vertikale Striche*) bei unterschiedlicher Lage der Polstellen bzw. Verhältnis von Real- und Imaginärteil.