ANÁLISE COMBINATÓRIA E TEORIA DA PROBABILIDADE

MATÉMÁTICA - SOLUCIONÁRIO

Prof Victor Milaré

16 de Abril de 2016

Questão 1 Seja k o número de elementos de um conjunto A e n o número de elementos de um conjunto B. A partir disso, definimos uma função $f : A \to B$. Vamos calcular o número de funções sobrejetoras de $A \to B$. Seja C_i = conjunto de funções em que o elemento $b_i \in B$ não está ligado a nenhum elemento de A. Temos que:

$$\text{Total de funções} = n^k$$

(cada elemento do domínio pode se ligar a n elementos do contradomínio)

$$\text{Número de funções não sobrejetoras} = n(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$$

(união de todos os conjuntos C_i)

Número de funções sobrejetoras = Total de funções - Número de funções não sobrejetoras

$$\text{Número de funções sobrejetoras} = n^k - n(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$$

Vamos calcular agora $n(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$:

$$n(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum C_i - \sum_{i \neq j} n(C_i \cap C_j) + \sum_{i \neq j \neq k} n(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots + (-1)^{(n-1)} n(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots \cap C_n)$$

$$\sum n(C_i) = \binom{n}{1}(n-1)^k$$
$$\sum_{i \neq j} (C_i \cap C_j) = \binom{n}{2}(n-2)^k$$
$$\sum_{i \neq j \neq k} n(C_i \cap C_j \cap C_k) = \binom{n}{3}(n-3)^k$$
$$\vdots$$

Portanto:

$$n(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (n-i)^k$$

$$\text{Número de funções sobrejetoras}=n^k - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (n-i)^k$$

Até agora, a impressão que temos é de estarmos fazendo uma questão completamente diferente da proposta. Porém, se analisarmos o enunciado, percebemos que queremos exatamente o número de funções sobrejetoras que levam as pessoas aos carros, isto é, não podem existir carros vazios e, uma mesma pessoa não pode estar em mais de um carro simultaneamente. Portanto, substituindo $k = 9$ e $n = 4$ na fórmula que deduzimos:

$$R = 4^9 - \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (4-i)^9 = 4^9 - 4 \cdot 3^9 + 6 \cdot 2^9 - 4 \cdot 1^9 = 186.480$$

Q u e s t ã o 2 Sejam as variáveis:

A=número de bolas amarelas retiradas
B=número de bolas brancas retiradas
P=número de bolas pretas retiradas
V=número de bolas vermelhas retiradas

Queremos que a soma das bolas amarelas, vermelhas, pretas e brancas retiradas totalizem 6. Portanto, queremos:

$$A + B + P + V = 6$$

Por soluções inteiras não-negativas:

$$S = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

Porém, devemos tirar os casos em que temos mais de 7 bolas brancas, ou mais de 8 bolas vermelhas, ou mais de 4 bolas amarelas, ou mais de 6 bolas pretas. Como retiramos apenas 6 bolas, o único caso que devemos excluir é aquele em que retiramos mais de 4 amarelas, ou seja:

$$A = \overline{A} + 5$$

$$\overline{A} + B + P + V = 1$$

$$\overline{S} = C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$$S_{total} = S - \overline{S} = 84 - 4 = 80$$

Q u e s t ã o 3 Seja C_i = conjunto de permutações onde o inteiro i permanece na sua posição original. Além disso, sejam as variáveis T=total de permutações dos 9 inteiros, R=total de permutações dos inteiros em que nenhum par se encontra em sua posição original. Queremos então calcular:

$$R = T - n(C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup C_8)$$

$n(C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup C_8) = n(C_2) + n(C_4) + n(C_6) + n(C_8) - n(C_2 \cap C_4) - n(C_2 \cap C_6) - n(C_2 \cap C_8) - n(C_4 \cap C_6) - n(C_4 \cap C_8) - n(C_6 \cap C_8) + n(C_2 \cap C_4 \cap C_6) + n(C_2 \cap C_4 \cap C_8) + n(C_4 \cap C_6 \cap C_8) + n(C_2 \cap C_6 \cap C_8) - n(C_2 \cap C_4 \cap C_6 \cap C_8)$

Para $n(C_i)$, fixamos uma posição e permutamos os outros 8 inteiros:

$$n(C_2) = n(C_4) = n(C_6) = n(C_8) = 8!$$

Para $n(C_i \cap C_j)$, fixamos duas posições e permutamos os outros 7 inteiros:

$$n(C_2 \cap C_4) = n(C_2 \cap C_6) = n(C_2 \cap C_8) = n(C_4 \cap C_6) = n(C_4 \cap C_8) = n(C_6 \cap C_8) = 7!$$

Para $n(C_i \cap C_j \cap C_k)$, fixamos três posições e permutamos os outros 6 inteiros:

$$n(C_2 \cap C_4 \cap C_6) = n(C_2 \cap C_4 \cap C_8) = n(C_2 \cap C_6 \cap C_6) = n(C_4 \cap C_6 \cap C_8) = 6!$$

Para $n(C_2 \cap C_4 \cap C_6 \cap C_8)$, fixamos todos os inteiros pares e permutamos os outros 5 inteiros:

$$n(C_2 \cap C_4 \cap C_6 \cap C_8) = 5!$$

Para T, permutamos os 9 inteiros:

$$T = 9!$$

Portanto:

$$R = 9! - (4 \cdot 8! - 6 \cdot 7! + 4 \cdot 6! - 5!) = 229.080$$

Q u e s t ã o 4 Vamos calcular a probabilidade de um avião de 4 motores continuar operando. Para isso devemos escolher quais motores vão continuar operando, no caso de nenhum motor falhar, ou 1 motor falhar, ou dois motores falharem. Portanto:

$$P_4 = \binom{4}{0}p^4 + \binom{4}{1}(1-p)\cdot p^3 + \binom{4}{2}(1-p)^2\cdot p^2 = 3p^4 - 8p^3 + 6p^2$$

Vamos fazer o mesmo cálculo, porém agora para um avião de 2 motores:

$$P_2 = \binom{2}{0}p^2 + \binom{2}{1}(1-p)\cdot p = -p^2 + 2p$$

Queremos:

$$P_4 \geq P_2 \rightarrow 3p^4 - 8p^3 + 6p^2 \geq -p^2 + 2p$$

$$3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 \geq 0$$

$$3\cdot(p-1)^2\cdot(p-\frac{2}{3}) \geq 0$$

$$p \geq \frac{2}{3}$$

Q u e s t ã o 5 Ao trocar de porta, o espectador perde somente se tiver escolhido a porta com o prêmio atrás. Caso contrário, quando o apresentador abrir a porta com o objeto sem valor, ele troca para a porta com o prêmio. Portanto, os casos em que o espectador perde ao trocar de porta totalizam 1 e o total de casos são 3 (pode escolher qualquer uma das três portas):

$$P_{perder\ ao\ trocar} = \frac{1}{3}$$

$$P_{ganhar\ ao\ trocar} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto, é interessante trocar de porta, uma vez que a probabilidade de ganhar dobra.

Q u e s t ã o 6 Temos duas possibilidades para a retirada de uma bola verde, são elas:
1) Soma dos dados é menor que 4 e retiramos uma bola verde da caixa branca
2) Soma dos dados é maior ou igual a 4 e retiramos uma bola verde da caixa preta
Portanto, para cada um dos casos:

Caso 1:

$$S_{<4} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P_{branca} = \frac{5}{8}$$

Caso 2:

$$S_{\geq 4} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$P_{preta} = \frac{3}{5}$$

$$T = S_{<4} \cdot P_{branca} + S_{\geq 4} \cdot P_{preta} = \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{11}{12} \cdot \frac{3}{5} = \frac{289}{480}$$

E x t r a Vamos, primeiramente, calcular os casos complementares, ou seja, os casos em que todos fazem aniversario em dias diferentes:

$$\overline{p} = 1 \cdot (1 - \frac{1}{365}) \cdot (1 - \frac{2}{365}) \cdot (1 - \frac{3}{365}) \cdots (1 - \frac{49}{365}) = \frac{365!}{365^{50} \cdot 315!}$$

$$p = 1 - \overline{p} = 1 - \frac{365!}{365^{50} \cdot 315!} \approx 0,97037 \approx 97\%$$
