PENSI - AFA/EN/EFOMM

MATEMÁTICA - CICLO 2 - SIMULADO AFA

Prof Victor Milaré e Prof Daniel Santanelli

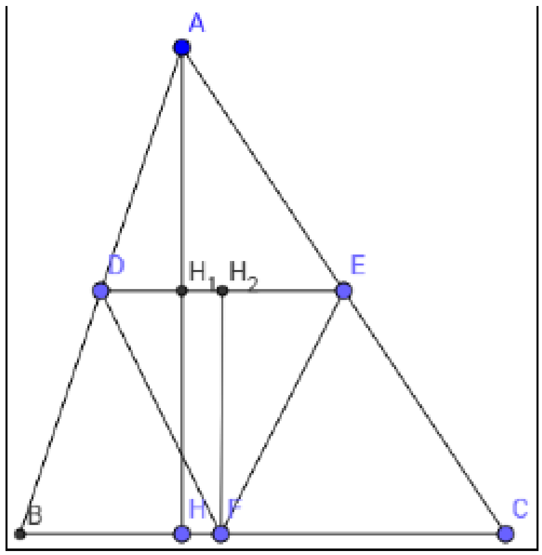
15 de Abril de 2017

Sumário

Q u e s t ã o 1 No triângulo ABC, tem-se BC=a e a altura AH=h. O lado do triângulo equilátero DEF inscrito em ABC, tal que DE é paralelo a BC é dado pela expressão:

(A) $\dfrac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$ (B) $\dfrac{ah}{a\sqrt{3}+h}$ (C) $\dfrac{2h}{h\sqrt{3}+a}$ (D) $\dfrac{2a}{a\sqrt{3}+h}$

S o l u ç ã o



Como DE // BC, os triângulos ADE e ABC são semelhantes. Logo, a razão de suas cevianas é igual à razão de semelhança, de onde vem:

$\dfrac{AH_1}{AH} = \dfrac{DE}{BC}$

Sabemos que:

$AH_1 = h - \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$, já que corresponde à altura de ABC menos a altura do triângulo equilátero inscrito.

Substituindo:

$$\frac{h - \frac{l\sqrt{3}}{2}}{h} = \frac{l}{a}$$

$$ah - \frac{al\sqrt{3}}{2} = hl => l(h + \frac{a\sqrt{3}}{2}) = ah$$

$$l(2h + a\sqrt{3}) = 2ah =>=> l = \frac{2ah}{2h + a\sqrt{3}}$$

Q u e s t ã o 2 Considere uma progressão geométrica crescente formada por 3 termos tais que sua soma seja $\frac{21}{8}$ e a soma dos seus quadrados seja $\frac{189}{64}$. A razão dessa P.G. vale:

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (**D**) 2

S o l u ç ã o

Sejam os termos consecutivos: ($\frac{a}{q}$,a,aq). Somando os termos e colocando o a em evidência, teremos:

$$\text{a}(\frac{1}{q}+1+\text{q})=\frac{21}{8} \qquad \text{(i)}$$

Somando os termos ao quadrado e colocando a^2 em evidência:

$$a^2(\frac{1}{q^2}+1+q^2)=\frac{189}{64} \qquad \text{(ii)}$$

Elevando (i) ao quadrado:

$$a^2(\frac{1}{q^2}+3+q^2+\frac{2}{q}+2\text{q})=\frac{441}{64} \qquad (i)^2$$

Podemos separar isso como:

$$a^2(\frac{1}{q^2}+1+q^2)+2\text{a.a}(\frac{1}{q}+1+\text{q})=\frac{441}{64} \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (i) e (ii) em $(i)^2$:

$$\frac{189}{64}+2\text{a.}\frac{21}{8}=\frac{441}{64}$$

Isolando o valor de a:

$$\text{a}=\frac{3}{4}$$

Substituindo em (i) e multiplicando cruzado:

$$2(q^2+q+1) = 7\text{q} => 2q^2-5q+2=0$$

Dessa forma achamos as soluções:

$$\text{q}=\frac{1}{2} \text{ ou q}=2$$

Como a P.G. é crescente então q=2.

Q u e s t ã o 3 Resolvendo a equação $sen^3x + sen^3 2x + sen^3 3x = (senx + sen2x + sen3x)^3$, encontramos como possível solução para x:

(A) $\frac{2\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

Solução

Sejam $a = senx, b = sen2x, c = sen3x$, então temos:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$$

Abrindo o lado direito, realizando os cortes e fatorando:

$$3(a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + bc^2 + 2abc) = 0$$

Fatorando mais ainda:

$$(b + a)(c + a)(b + c) = 0$$

Isto é:

$$b = -c \text{ (i) ou } c = -a \text{ (ii) ou } b = -a \text{ (iii)}$$

De (i):

$$sen2x = -sen3x = sen(2\pi - 3x)$$

$$2x = 2\pi - 3x => x = \frac{2\pi}{5}$$

Poderíamos resolver o caso (ii) e (iii), porém esta resposta já se encontra no gabarito.

Questão 4 Considere 10 pessoas, todas de alturas diferentes, as quais devem ficar em fila de tal modo que, a partir da pessoa mais alta, as alturas devem decrescer para ambos os lados da fila (se a pessoa mais alta for a primeira ou a última da fila, todas as pessoas a partir dela devem estar em ordem decrescente de altura). Obedecendo essas condições, de quantos modos essas pessoas podem ficar em fila?

(A) 256 (B) 768 (C) 1260 **(D)** 512

Solução

Vamos analisar a posição da pessoa mais alta e a partir dela determinar as possibilidade de ordenação das outras pessoas. Chamaremos a pessoa mais alta de A:

Caso 1: A está na primeira posição.

A _ _ _ _ _ _ _ _ _

Como A se encontra na primeira posição, não precisamos escolher ninguém para ficar a esquerda de A, portanto este caso já está definido, é uma ordenação decrescente.

$N_1 = C_{9,0}$

Caso 2: A está na segunda posição.

_ A _ _ _ _ _ _ _ _

Dentre as 9 pessoas restantes, precisamos apenas definir qual vai estar a esquerda de A. Após fazermos isto, o lado direito deve estar obrigatoriamente em ordem crescente e, como o lado esquerdo só possui uma pessoa, também vai estar ordenado.

$N_2 = C_{9,1}$

Caso 3: A está na terceira posição.

_ _ A _ _ _ _ _ _ _

Dentre as 9 pessoas restantes, precisamos escolher duas quaisquer para ocupar os espaços a esquerda de A. Ao fazermos isso, a ordenação de todas as pessoas já estará definida, isto é, o maior entre os dois vai ficar imediatamente a esquerda de A enquanto o outro irá ficar mais a esquerda. Analogamente, o lado direito estará ordenado com as outras 7 pessoas.

$N_3 = C_{9,2}$

Perceba que o processo necessário para determinar as possibilidades nos outros casos é análogo, isto é, precisamos apenas escolher entre as 9 pessoas as que irão ficar a esquerda de A. Após definirmos quem estará a esquerda, automaticamente definimos quem estará a direita. A ordenação das pessoas a esquerda e a direita é fixa, em ordem decrescente. Portanto:

$$N_T = C_{9,0} + C_{9,1} + C_{9,2} + C_{9,3} + C_{9,4} + C_{9,5} + C_{9,6} + C_{9,7} + C_{9,8} + C_{9,9} = 2^9 = 512$$

(soma da décima linha do triângulo de Pascal)

Q u e s t ã o 5 Se $x^2+x+1=0$, o valor numérico de:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2+...+\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)^2$$

é:

(A) 4030 (B) 4031 (C) 4032 **(D)** 4033

S o l u ç ã o

Veja que podemos reescrever a primeira equação como:

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

Perceba que para qualquer valor inteiro de m, vale:

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}$$

Substituindo $x+\frac{1}{x}$ por -1 e fazendo uma troca de variáveis:

$$-\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)=x^{m+1}+\frac{1}{x^{m+1}}+x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}$$

$$-Y_m=Y_{m+1}+Y_{m-1}$$

$$Y_{m+1}=-(Y_m+Y_{m-1})$$

Podemos calcular alguns Y para ficarmos mais confortåveis:

$Y_0=x^0+\frac{1}{x^0}=1+\frac{1}{1}=2$

$Y_1=x^1+\frac{1}{x^1}=-1$

$Y_2=x^2+\frac{1}{x^2}=-(Y_1+Y_0)=-(2-1)=-1$

$Y_3=x^3+\frac{1}{x^3}=-(Y_2+Y_1)=-(-1-1)=2$

$Y_4=x^4+\frac{1}{x^4}=-(Y_3+Y_2)=-(2-1)=-1$

$Y_5=x^5+\frac{1}{x^5}=-(Y_4+Y_3)=-(-1+2)=-1$

Podemos perceber que há um padrão (2, -1, -1, 2, -1, -1, 2,...). É fácil provar que esse padrão existe por meio de uma indução finita, deixo isto como exercício.

A questão nos pede:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + ... + Y_{2017}^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + ... + (-1)^2$$

Percebemos que Y_i só é igual a 2 quando i é um múltiplo de 3. Entre 1 e 2017 temos 672 múltiplos de 3, isto é, o $(2)^2$ aparece 672 vezes e o $(-1)^2$ aparece as outras 1345 vezes. Portanto:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + ... + Y_{2017}^2 = 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + ... + 4 + 1 = 4.(672) + 1345 = 4033$$

Q u e s t ã o 6 Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x + yi)^2 = (x + y)i$. Então:

(A) x e y são números irracionais (B) x<0 e y=x **(C)** $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$

(D) $x^2 + xy + y^2 = 0,5$

S o l u ç ã o

Elevando o lado esquerdo ao quadrado:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = (x + y)i$$

Igualando as partes reais e imaginárias:

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$2xy = x + y \qquad \text{(ii)}$$

De (i):

$$y = x \text{ ou } y = -x$$

Porém, se y=-x, então em (ii):

$$-2x^2 = 0 \Rightarrow \text{x=0}$$

Como $x \neq 0$, então y=x. Substituindo em (ii):

$$2x^2 = 2x \Rightarrow x = 1 \qquad (x \neq 0)$$

Se x=1, então:

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 1 + 3 + 2 - 6 = 0$$

Q u e s t ã o 7 Sejam A,B e C subconjuntos de R não vazios.São dadas as igualdades:

I. $(A - B) \times C = A \times C - B \times C$

II. $(A - B) \times C = A \times B - B \times C$

III. $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$

IV. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

V. $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$

Estão corretas, apenas:

(A) I, III e IV (B) I e V (C) II e III **(D)** I e IV

S o l u ç ã o

Analisando as alternativas:

I. VERDADEIRA.

II. FALSA. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

III. FALSA. Os dois lados são iguais ao conjunto vazio.

IV. VERDADEIRA.

V. FALSA. Repare que $A - B$ não possui elementos de B e $B - C$ SÓ possui elementos de B. Assim, a intersecção é vazia. O segundo lado é igual a $A - (B \cup C)$.

Q u e s t ã o 8 Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a>0. Sabendo que a equação $|f(x)| = 12$ possui raízes iguais a -2,1,2,5, qual é o valor de c?

(A) -4 (B) -6 **(C)** -8 (D) -10

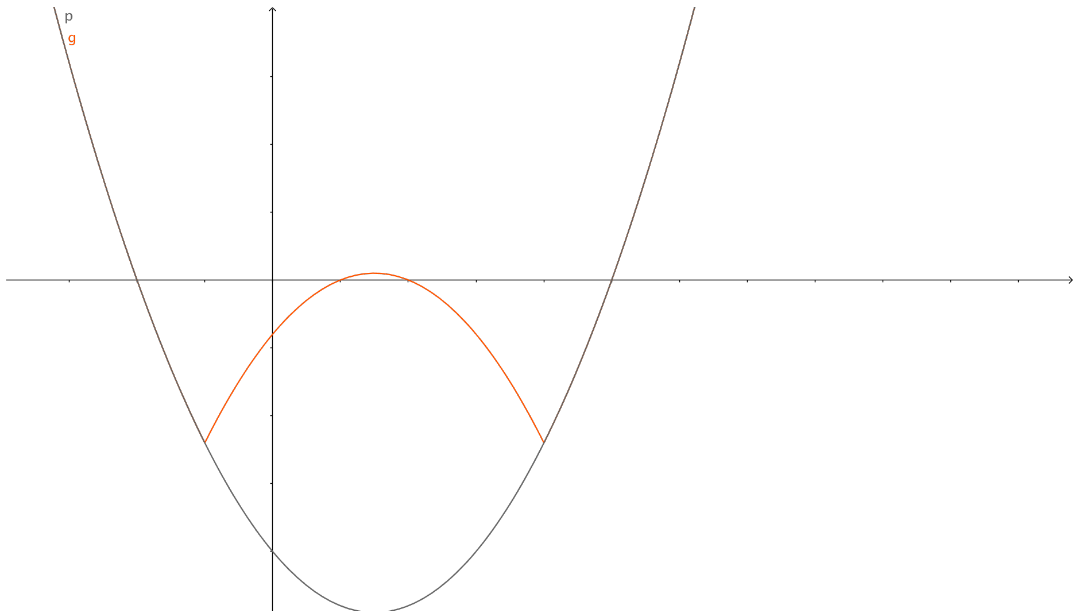
S o l u ç ã o

Sejam as funções:

$$g(x) = |f(x)| - 12$$

$$p(x) = f(x) - 12$$

É fácil perceber que as raízes mais externas de g(x) também são raízes de p(x) (vide gráfico abaixo).



O enunciado nos diz que as raízes mais externas de g(x) são -2 e 5 pois, $|f(-2)| = 12$ e $|f(5)| = 12$. Dessa forma, p(x) é uma função de segundo grau, pois f(x) é de segundo grau, e possui raízes -2 e 5. Podemos fatorar g(x) da seguinte forma:

$$g(x) = f(x) - 12 = a(x+2)(x-5)$$

$$f(x) = ax^2 - 3ax - 10a + 12$$

$$f(1) = a - 3a - 10a + 12 = 12(1-a)$$

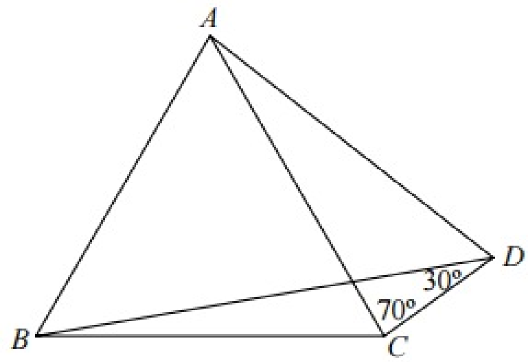
Porém, o enunciado nos disse que $|f(1)| = 12$:

$$|12(1-a)| = 12 => |1-a| = 1$$

Como a>0, então:

$$a = 2 => c = -10a + 12 = -10.2 + 12 = -8$$

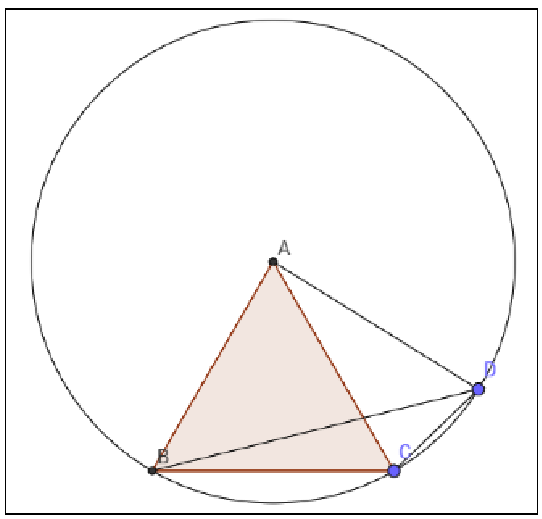
Q u e s t ã o 9 Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero, o ângulo BDC mede 30° e o ângulo ACD mede 70°. Quanto é, em graus, a medida do ângulo BAD?



(A) 20° (B) 30° **(C)** 40° (D) 50°

S o l u ç ã o

Se o ângulo CDB vale 30°, o ponto D está no arco capaz de enxergar o lado BC segundo um ângulo



de 30°. Note que o centro dessa circunferência é a intersecção do arco capaz de 60° em relação a BC e da mediatriz de BC. Assim, o centro é o ponto A. Daí, AB = AC = AD = r, onde r é o raio da circunferência. Com isso, é fácil ver que o triângulo CAD é isósceles e $ADC = 70°$, o que nos leva a $CAD = 40°$.

Q u e s t ã o 10 Resolvendo a equação $sen\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2sen\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$ com $x\in[0,2\pi]$, encontramos quantas soluções?

(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3

S o l u ç ã o

Do lado direito temos $2sen\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$, o que nos recorda o seno do arco dobro. Para aparecer o seno do arco dobro porém, precisamos fazer com que apareça o termo cosseno também. Dessa forma, multiplicando ambos os lados da equação por $cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)cos\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=sen\left(\frac{3\pi}{5}-x\right)$$

No lado esquerdo, podemos abrir como uma semi-soma de senos:

$$\frac{sen\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)+sen\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)}{2}=sen\left(\frac{3\pi}{5}-x\right)$$

Entretanto, $\frac{3\pi}{5}-x=\pi-\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)$, o que implica em:

$$sen\left(\frac{3\pi}{5}-x\right)=sen\left(\pi-\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)\right)=sen\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)$$

Substituindo, teremos:

$$\frac{sen\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)+sen\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)}{2}=sen\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)$$

$$sen\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=sen\left(\frac{2\pi}{5}+x\right)$$

$$2x-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}+x \text{ ou } \pi-\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{2\pi}{5}+x$$

Isso nos dá duas soluções distintas:

$$x = \frac{3\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{15}$$

Q u e s t ã o 11 Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão dessa P.A é:

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\sqrt{6}$

S o l u ç ã o

Sejam os termos consecutivos: (a-r, a, a+r). Dessa forma, teremos:

$$S_1 = 3a \text{ e } S_2 = 3a^2 + 2r^2$$

Utilizando as Relações de Girard no polinômio dado no enunciado, temos:

$$-(-S_1) = a + a + r => 3a = 2a + r => a = r$$

$$S_2 - \frac{1}{2} = a(a+r) = a^2 + ar = a^2 + a.a = 2a^2 => 3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2} = 2a^2 => 5a^2 - \frac{1}{2} = 2a^2$$

$$a = r = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Q u e s t ã o 12 Sejam os números reais distintos a,b,c,d. Sabe-se que a e b são raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e que c e d são raízes de $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Qual é o valor de a+b+c+d?

(A) 48 (B) 72 **(C)** 96 (D) 144

S o l u ç ã o

Por Relações de Girard, temos:

$$3c = a + b$$

$$3a = c + d$$

Subtraindo e somando as duas equações acima:

$$b + d = 2(a + c)$$

$$b - d = 4(c - a)$$

Como a é raiz do primeiro polinômio e c é raiz do segundo polinômio, podemos substitui-los:

$$a^2 - 3ac - 8d = 0$$

$$c^2 - 3ac - 8b = 0$$

Subtraindo novamente:

$$a^2 - c^2 + 8(b - d) = 0$$

$$(a - c)(a + c) = -8(b - d)$$

Substituindo b-d, teremos:

$$(a - c)(a + c) = -8[4(c - a)]$$

$$a + c = 32$$

Substituindo novamente:

$$b + d = 2(a + c) = 2.32 = 64$$

Somando todos os termos:

$$a + b + c + d = (a + c) + (b + d) = 32 + 64 = 96$$

Q u e s t ã o 13 Sejam os reais a, b, c, d não nulos tal que a equação $x^2+(a+bi)x+c+i.d = 0$ admite uma raiz real. Então, o valor de $d^2 + b^2c$ é:

(A) abc **(B)** abd (C) acd (D) bcd

S o l u ç ã o

Seja t a raiz real da equação. Então:

$$t^2 + (a + b.i)t + c + i.d = 0$$

Igualando as partes reais e imaginárias a zero, teremos:

$$t^2 + at + c = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$bt + d = 0 => t = \frac{-d}{b} \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (ii) em (i):

$$\left(\frac{-d}{b}\right)^2 + a.\left(\frac{-d}{b}\right) + c = 0$$

Multiplicando ambos os lados da equação por b^2:

$$d^2 - adb + cb^2 = 0 => d^2 + b^2c = abd$$

Q u e s t ã o 14 Seja $f : R \to R$ a função definida por: f(x)=$\begin{cases} x+2 & x \leqslant -1 \\ x^2 & -1 < x \leqslant 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$

Lembrando que, se $A \subset R$, então $f^{-1}(A) = \{x \in R : f(x) \in A\}$.

Considere as afirmações:

I. f não é injetora e $f^{-1}([3,5]) = \{4\}$

II. f não é sobrejetora e $f^{-1}([3,5) = f^{-1}([2,6])$

III. f é injetora e $f^{-1}([0,4]) = [-2,+\infty)$

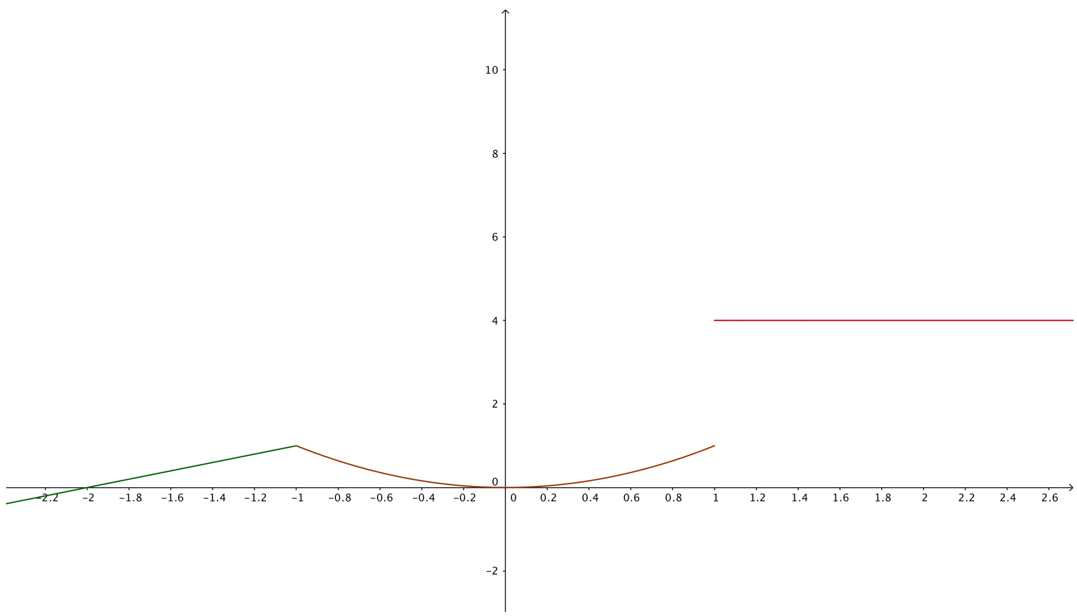
Podemos afirmar que:

(A) apenas as afirmações II e III são falsas (B) as afirmações I e III são verdadeiras

(C) apenas a afirmação II é verdadeira (D) todas as afirmações são verdadeiras

<u>**S o l u ç ã o**</u>

Observe o gráfico da função:



I. FALSA. É fácil ver que f não é injetora pelo intervalo $-2 < x \leqslant 1$. Analisando a segunda afirmação, $f^{-1}([3,5])$ representa os valores de x para os quais f(x) estão no intervalo [3,5]. Pelo gráfico, é mais fácil ver que o único valor de f(x) que está nesse intervalo é f(x) = 4, que ocorre quando x > 1. Logo, $f^{-1}([3,5]) = \{x \in R \ | \ x > 1\}$.

II. VERDADEIRA. A função f, de fato, não é sobrejetora, já que seu valor máximo é 4 e o contradomínio é o conjunto dos reais. Fazendo a mesma análise da afirmativa (I), chegamos a:

$f^{-1}([2,6]) = \{x \in R \ | \ x > 1 \ = f^{-1}([3,5])$

III. FALSA. Como já visto, f não é injetora, o que já tornaria a afirmativa falsa. Para que f(x) esteja no intervalo [0,4], basta que $-2 \leqslant x$. Para que f(x) esteja no intervalo $[-2,\infty)$, $-4 \leqslant x$. Logo, esses dois conjuntos também são diferentes.

Q u e s t ã o 15 Um país tem 8 cidades: $A_1, A_2, ..., A_6, B, C$, ligadas por rodovias de mão dupla que satisfazem as seguintes condições: B e C são ambas ligadas uma a outra; $A_1, A_2, ..., A_6$ são ligadas duas a duas. Qual é o número de maneiras distintas de viajar de carro de B a C sem passar duas vezes por uma mesma cidade?

(A) 1.236 **(B)** 1.956 (C) 2.236 (D) 2.596

S o l u ç ã o

Para calcularmos o número de caminhos distintos, devemos primeiro escolher em quantas cidades queremos passar no caminho entre B e C. Após escolher quantas, devemos escolher quais, importando a ordem de escolha. Portanto temos:

Primeiro caso: escolhemos passar apenas por 1 cidade entre B e C

Neste caso, devemos apenas escolher quem será essa cidade. Para isso, temos 6 opções ($A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$).

$N_1 = 6$

Segundo caso: escolhemos passar por 2 cidades entre B e C

Neste caso devemos escolher quem será a primeira cidade a ser visitada e a segunda. Para a primeira temos 6 opções, enquanto que, para a segunda, temos 5 opções, pois ela não pode passar pela cidade em que ela já está visitando.

$N_2 = 6.5 = 30$

Terceiro caso: escolhemos passar por 3 cidades entre B e C

Devemos escolher quem será a primeira, a segunda e a terceira, lembrando que após escolhermos uma cidade, esta não poderá mais ser escolhida. Portanto:

$N_3 = 6.5.4 = 120$

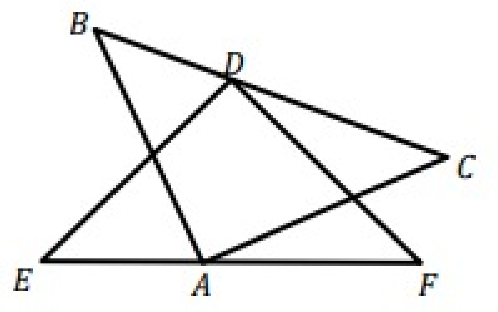
Analogamente para os outros casos, teremos:

$N_4 = 6.5.4.3 = 360 \quad N_5 = 6.5.4.3.2 = 720 \quad N_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$

Somando todos os casos, teremos:

$$N_T = \sum_{n=1}^{6} \frac{6!}{(6-n)!} = 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1.956$$

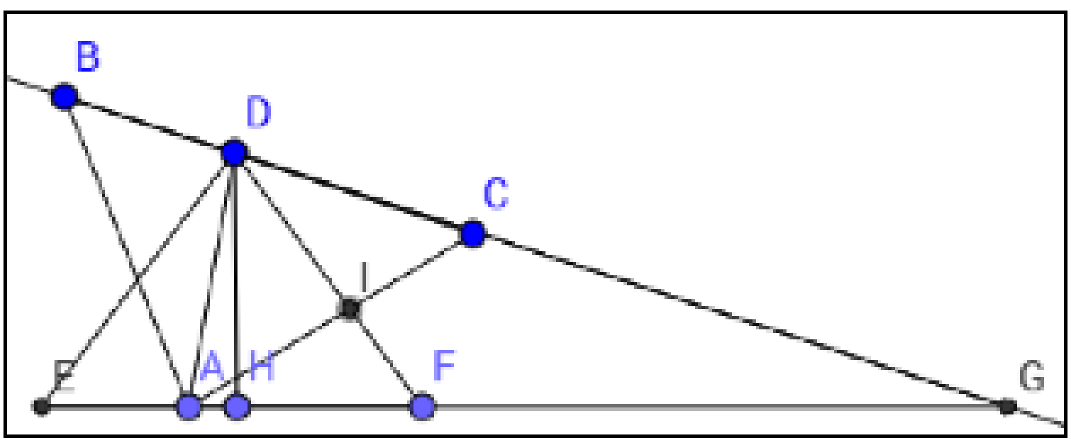
Q u e s t ã o 16 Na figura, ABC e DEF são triângulos retângulos isósceles com hipotenusas BC e EF medindo 15. D está sobre a reta BC e A está sobre a reta EF. O ângulo agudo entre as retas BC e EF é 30°.



O segmento AD mede:

(A) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$ (C) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{15}{2}$

S o l u ç ã o



A idéia aqui é descobrir o ângulo DAH, já que DH é a altura relativa à hipotenusa EF do triângulo DEF e vale metade da hipotenusa; ou seja, $\frac{15}{2}$. Logo, $AD.sen(DAH) = DH =>$ $AD = \frac{15}{2.sen(DAH)}$ (i). Repare que $GD = GA$, já que $GD.sen30^\circ = GA.sen30^\circ = h$, altura dos triângulos retângulos de hipotenusa 15. Então, do triângulo ADG, $DAG = ADG = 75^\circ$.

De (i):

$$AD = \frac{15}{2.sen75^\circ} = \frac{15}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} => AD = \frac{15.(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$