SEQUÊNCIAS E SOMATÓRIOS

MATEMÁTICA - SOLUCIONÁRIO

Prof. Victor Milaré

30 de Abril de 2016

Questão 1 Seja X_n o número de percursos diferentes que começam em A e terminam em A após n viagens. Para que isso aconteça, não podemos chegar em A na penúltima viagem, caso contrário, a última viagem nos tiraria da cidade A. Em virtude disso, podemos escrever X_n como o número de percursos que não terminam em A após $n-1$ (penúltima) viagens. Para isso, vamos calcular primeiramente o número total de percursos com $n-1$ viagens.

Para cada viagem, temos 3 opções de percurso, portanto:

$$T = total\ de\ percursos\ com\ (n-1)\ viagens = 3^{n-1}$$

Só nos resta agora, excluir os casos em que após $n-1$ viagens, chegamos a cidade A, o que é exatamente a definição de X_{n-1}. Portanto, podemos escrever:

$$X_n = 3^{n-1} - X_{n-1}$$

Escrevendo a recorrência verticalmente e multiplicando pelos coeficientes convenientes para a soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned}
X_n &= 3^{n-1} - X_{n-1} \qquad \cdot(-\mathbf{1})^{\mathbf{n-(n)}} \\
X_{n-1} &= 3^{n-2} - X_{n-2} \qquad \cdot(-\mathbf{1})^{\mathbf{n-(n-1)}} \\
&\vdots \\
X_2 &= 3^1 - X_1 \qquad \cdot(-\mathbf{1})^{\mathbf{n-(2)}}
\end{aligned}$$

$$X_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - ... + (-1)^{n-2} \cdot 3^1 = S_{P.G.}$$

$$S_{PG} = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q-1} = (-1)^n \cdot 3 \frac{[(-3)^{n-1} - 1]}{-4} = \frac{3}{4} \cdot (3^{n-1} + (-1)^n)$$

Obs: $(-1)^{n-2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n$

Q u e s t ã o 2 Seja:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})}$$
$$2S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1} \cdot 3^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})}.$$

Podemos dividir o numerador e o denominador por $2^{k+1} \cdot 3^k$ de forma que no denominador, dividimos o primeiro parêntesis por 3^k e o segundo parêntesis por 2^{k+1}. Ficamos então com:

$$2S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{2^k}{3^k})(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} - 1)}.$$

Tomamos então:

$$X_k = \frac{2^k}{3^k}$$

$$2S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - X_k)} \frac{1}{(\frac{1}{X_{k+1}} - 1)}$$

$$X_{k+1} = \frac{2}{3} X_k$$

Entao, temos:

$$2S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - X_k)} \frac{1}{(\frac{1}{X_{k+1}} - 1)} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{X_{k+1} - 1} - \frac{1}{X_k - 1}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_{k+1} - 1} - \frac{1}{X_k - 1}$$

Resolvendo a telescópica:

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{X_{n+1} - 1} - \frac{1}{X_1 - 1}$$

Como $X_1 = \dfrac{2}{3}$ e $\lim\limits_{n \to \infty} X_{n+1} = 0$:

$$S = \frac{1}{0 - 1} - \frac{1}{\frac{2}{3} - 1} = 2$$

Q u e s t ã o 3 Seja a sequência $b_1, b_2, b_3, ..., b_{100}$ de números reais tais que:

$$b_1 = a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geq 0$$
$$b_2 = a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geq 0$$
$$..........................$$
$$b_{98} = a_{98} - 4a_{99} + 3a_{100} \geq 0$$
$$b_{99} = a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geq 0$$
$$b_{100} = a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geq 0$$

Ao somarmos $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{100}$ encontramos $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{100} = 0$. Como $b_1, b_2, ..., b_{100}$ são números reais maiores ou iguais a 0, para a soma deles dar 0, todos devem ser iguais a 0, portanto:

$$b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{100} = 0$$

O que implica em:

$$a_1 - a_2 = 3(a_2 - a_3) \qquad \text{Eq. 1}$$
$$a_2 - a_3 = 3(a_3 - a_4) \qquad \text{Eq. 2}$$
$$a_3 - a_4 = 3(a_4 - a_5) \qquad \text{Eq. 3}$$
$$\vdots$$
$$a_{99} - a_{100} = 3(a_{100} - a_1) \qquad \text{Eq. 99}$$
$$a_{100} - a_1 = 3(a_1 - a_2) \qquad \text{Eq. 100}$$

Substituindo a Eq. 100 na Eq. 99 na Eq. 98 e assim por diante, temos:

$$a_1 - a_2 = 3^{100}(a_1 - a_2)$$

O que implica em: $a_1 = a_2$

Substituindo em todas as outras equações:

$$a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_{99} = a_{100} = 1$$

Q u e s t ã o 4 Fazendo a distributiva na equação dada, temos:

$$3a_n - 6a_{n+1} - a_n \cdot a_{n+1} = 0$$

Dividindo a equação inteira por $a_n \cdot a_{n+1}$:

$$\frac{3}{a_{n+1}} - \frac{6}{a_n} - 1 = 0$$

Definimos $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. Portanto, temos:

$$b_{n+1} - 2b_n = \frac{1}{3}$$

Escrevendo a recorrência verticalmente e multiplicando pelos coeficientes convenientes para a soma telescópica, temos:

$$\begin{array}{rl}
b_{n+1} - 2b_n = \frac{1}{3} & 2^{[n+1-(n+1)]} \\
b_n - 2b_{n-1} = \frac{1}{3} & 2^{[n+1-(n)]} \\
b_{n-1} - 2b_{n-2} = \frac{1}{3} & 2^{[n+1-(n-1)]} \\
\vdots & \\
b_1 - 2b_0 = \frac{1}{3} & 2^{[n+1-(1)]} \\
\hline
\end{array}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n) + 2^{n+1} \cdot b_0$$

Sabendo que $b_0 = \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{1}{3}$ e resolvendo a soma da P.G.:

$$b_{n+1} = \frac{2^{n+2} - 1}{3} => b_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

Queremos $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i = \frac{2}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n} 2^n - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3} = S$:

$$S = \sum_{i=0}^{n} b_i = \frac{2}{3} \cdot (2^{n+1} - 1) - \frac{(n+1)}{3}$$

$$S = \frac{2^{n+2} - n - 3}{3}$$

Q u e s t ã o 5 Da equação $x_{k+1} = {x_k}^2 + x_k$, podemos concluir:

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k \cdot (x_k + 1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k + 1}$$

$$\frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$$

Escrevendo o que a questão pede em forma de somatório e substituindo:

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_{100}} - \frac{1}{x_{101}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}} = 2 - \frac{1}{x_{101}}$$

Podemos perceber que a sequência x_n é positiva e crescente para $x \geq 1$. É fácil perceber também, a partir dos valores e da equação que $x_3 = \dfrac{21}{16} > 1 => x_{101} > 1$. Invertendo a última desigualdade:

$$0 < \frac{1}{x_{101}} < 1$$

$$S = 2 - \frac{1}{x_{101}} => \frac{1}{x_{101}} = 2 - S$$

$$0 < 2 - S < 1 => 1 < S < 2$$

Se a soma S está entre 1 e 2,sua parte inteira será 1.

E x t r a Primeiramente, vamos definir os valores de $min\{m,n\}$ para cada intervalo de n.

$$\begin{aligned} min\{m,n\} &= n \qquad \text{se } 0 \leq n \leq m \\ min\{m,n\} &= m \qquad \text{se } m < n \end{aligned}$$

Podemos então definir o somatório "interno" como a soma de dois somatórios bem definidos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{min\{m,n\}}{3^{m+n}} = \frac{1}{3^m} \cdot \sum_{n=0}^{m} \frac{n}{3^n} + \frac{m}{3^m} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Definimos então:

$$s_1 = \sum_{n=0}^{m} \frac{n}{3^n}$$

$$s_2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{min\{m,n\}}{3^{m+n}} = \frac{1}{3^m}(s_1 + m \cdot s_2)$$

Primeiramente, vamos resolver s_2 por ser uma soma de P.G. infinita simples. Portanto:

$$S_{P.G.\infty} = \frac{a_1}{1-q} = s_2 = \frac{\frac{1}{3^{m+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^m}$$

Partimos agora para a resolução de s_1, que não e tão complexa, por ser uma soma bem conhecida:

$$s_1 = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{m-1}{3^{m-1}} + \frac{m}{3^m}$$

$$\frac{s_1}{3} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{m-1}{3^m} + \frac{m}{3^{m+1}} \qquad \cdot(-1)$$

$$\frac{2s_1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^m} - \frac{m}{3^{m+1}}$$

A primeira parte, podemos resolver como uma P.G. simples:

$$\frac{2s_1}{3} = \frac{\frac{1}{3}((\frac{1}{3})^m - 1)}{\frac{1}{3} - 1} - \frac{m}{3^{m+1}} = \frac{3^m - 1}{2 \cdot 3^m} - \frac{m}{3^{m+1}}$$

$$s_1 = \frac{3^{m+1} - 2m - 3}{4 \cdot 3^m}$$

Portanto, temos que:

$$s = \frac{1}{3^m}(s_1 + m \cdot s_2) = \frac{1}{3^m}(\frac{3^{m+1} - 2m - 3}{4 \cdot 3^m} + \frac{m}{2 \cdot 3^m}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(3^m - 1)}{3^{2m}}$$

Queremos:

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{min\{m,n\}}{3^{m+n}} = \sum_{m=0}^{\infty} s = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3}{4} \cdot \frac{(3^m - 1)}{3^{2m}} = \frac{3}{4}(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2m}})$$

Os dois somatórios são somas de P.G. infinitas simples:

$$S = \frac{3}{4} \cdot [\frac{\frac{1}{3^0}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3^0}}{1 - \frac{1}{3^2}}] = \frac{9}{32}$$