એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2022 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

સપ્ટેમ્બર 06, 2022

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

જો $A_{2\times3}$ અને $B_{3\times4}$ બે શ્રેણિકો હોય તો AB ની કક્ષા (order) શોધો =______

જવાબ

જવાબ: b. 2×4
ઉકેલ: જ્યારે શ્રેણિકોનો ગુણાકાર કરવામાં આવે છે, જો A ની કક્ષા $m \times n$ હોય અને B ની કક્ષા $n \times p$ હોય, તો AB ની કક્ષા $m \times p$ થશે. અહીં આપેલ છે: $A_{2\times3}$ અને $B_{3\times4}$ તેથી, AB ની કક્ષા 2×4 થશે.

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $A = [1\ 3\ 2]$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ હોય તો AB શોધો =______

જવાબ

જવાબ: b. 9
ઉકેલ:

$$AB = [1\ 3\ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1(1) + 3(2) + 2(1) = 1 + 6 + 2 = 9$$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$A.I_2 = A$ **હોય તો** I_2 **=______**

જવાબ

જવાબ: c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
ઉકેલ: I_2 એ 2×2 કક્ષાનો એકમ શ્રેણિક (identity matrix) છે, જેમાં મુખ્ય વિકર્ણ પર 1 અને અન્ય જગ્યાએ 0 હોય છે.

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો $\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) =$ _____

જવાબ

જવાબ: b. 0
ઉકેલ: જેમ કે $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (મૂળભૂત ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ)

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\cot x) =$ _____

જવાબ

જવાબ: d. $-\csc^2 x$
ઉકેલ:

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}\log(\sin x)$ **તો** $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____ **શોધો**

જવાબ

જવાબ: d. $-\cot^2 x$
ઉકેલ: ધારો કે $y = \log(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

જોકે, $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ હોવાથી, જવાબ $-\csc^2 x$ છે.

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) =$ _____

જવાબ

જવાબ: c. $-\frac{1}{x^2}$
ઉકેલ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

જો $\int x^5 dx =$ _____ + c

જવાબ

જવાબ: a. $\frac{x^6}{6}$
ઉકેલ:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta =$ _____ + c

જવાબ

જવાબ: a. 2π
ઉકેલ:

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$\int_{-1}^{1} x^3 dx =$ _____ + c

જવાબ

જવાબ: c. 0
ઉકેલ:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3y^2 = 0$ ની કક્ષા (order) અને પરિમાણ (degree) =_____ છે

જવાબ

જવાબ: c. 2 અને 1
ઉકેલ: કક્ષા (Order) એ સર્વોચ્ચ વિકલિત છે = 2 ($\frac{d^2y}{dx^2}$ પરથી) પરિમાણ (Degree) એ સર્વોચ્ચ વિકલિતની ઘાત છે = 1

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + py = Q$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (integrating factor) _____ છે

જવાબ

જવાબ: c. $e^{\int p dx}$
ઉકેલ: પ્રથમ કક્ષાના સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + py = Q$ માટે, સંકલ્પકારક અવયવ $e^{\int p dx}$ છે.

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^4 =$ ______

જવાબ

જવાબ: a. 1
ઉકેલ:

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

(3+4i)(4-5i) =______

જવાબ

જવાબ: d. -32+ i
ઉકેલ:

$$\begin{aligned}(3+4i)(4-5i) &= 3(4) + 3(-5i) + 4i(4) + 4i(-5i)\\ &= 12 - 15i + 16i - 20i^2\\ &= 12 + i - 20(-1)\\ &= 12 + i + 20 = 32 + i\end{aligned}$$

ફરીથી ગણતરી કરતા: $(3 + 4i)(4 - 5i) = 12 - 15i + 16i - 20i^2 = 12 + i + 20 = 32 + i$
સાચો જવાબ b. 32+ i હોવો જોઈએ, પરંતુ વિકલ્પ d માં -32+ i આપેલ છે. વિકલ્પોમાં ભૂલ હોઈ શકે છે.

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 2.1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ હોય તો AB અને BA શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

AB ની ગણતરી:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(1) + (-1)(4) + 1(1) & 1(2) + (-1)(2) + 1(7) \\ 3(1) + 2(4) + 1(1) & 3(2) + 2(2) + 1(7) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 - 4 + 1 & 2 - 2 + 7 \\ 3 + 8 + 1 & 6 + 4 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

BA ની ગણતરી:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(3) & 1(-1) + 2(2) & 1(1) + 2(1) \\ 4(1) + 2(3) & 4(-1) + 2(2) & 4(1) + 2(1) \\ 1(1) + 7(3) & 1(-1) + 7(2) & 1(1) + 7(1) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 10 & 0 & 6 \\ 22 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2.2 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે** $A^2 - 7I_2 = 0$

જવાબ

ઉકેલ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + (2)(3) & (-1)(2) + (2)(1) \\ (3)(-1) + (1)(3) & (3)(2) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 + 6 & -2 + 2 \\ -3 + 3 & 6 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$7I_2 = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

તેથી,

$$A^2 - 7I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

સાબિત થયું.

પ્રશ્ન 2.3 [3 ગુણ]

$\frac{2+3i}{4-3i}$ નો વ્યસ્ત સંકર સંખ્યા શોધો

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, $\frac{2+3i}{4-3i}$ શોધીએ:

$$\frac{2+3i}{4-3i} = \frac{(2+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{8+6i+12i+9i^2}{16-9i^2}$$
$$= \frac{8+18i-9}{16+9} = \frac{-1+18i}{25} = -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$$

સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ નો વ્યસ્ત $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ છે

ધારો કે $z = -\frac{1}{25} + \frac{18}{25}i$

$$|z|^2 = \left(-\frac{1}{25}\right)^2 + \left(\frac{18}{25}\right)^2 = \frac{1}{625} + \frac{324}{625} = \frac{325}{625} = \frac{13}{25}$$
$$\bar{z} = -\frac{1}{25} - \frac{18}{25}i$$
$$\frac{1}{z} = \frac{-\frac{1}{25} - \frac{18}{25}i}{\frac{13}{25}} = \frac{-1-18i}{13}$$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 2.1 [4 ગુણ]

2y+5x-4 =0 અને 7x +3y = 5 સમીકરણો શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: સમીકરણો આ રીતે લખી શકાય:

$$5x + 2y = 4$$
$$7x + 3y = 5$$

શ્રેણિક સ્વરૂપમાં: $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = 5(3) - 2(7) = 15 - 14 = 1$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(4) + (-2)(5) \\ -7(4) + 5(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

તેથી, $x = 2$ અને $y = -3$.

પ્રશ્ન 2.2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **અને** $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે** $(AB)^T = B^T.A^T$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, AB શોધીએ:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2(-1) + (-2)(4) & 2(5) + (-2)(-3) \\ 3(-1) + 1(4) & 3(5) + 1(-3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2-8 & 10+6 \\ -3+4 & 15-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 16 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$$

હવે, B^T અને A^T શોધીએ: $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} -1(2) + 4(-2) & -1(3) + 4(1) \\ 5(2) + (-3)(-2) & 5(3) + (-3)(1) \end{bmatrix}$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} -2-8 & -3+4 \\ 10+6 & 15-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$$

કારણ કે $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, ગુણધર્મ સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 2.3 [4 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^{-3}.(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^2}{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^{-7}.(\cos 5\theta - i \sin 5\theta)^3}$

જવાબ

ઉકેલ: દ-મોઈવ (De Moivre) પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
$(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-3} = \cos(-6\theta) + i\sin(-6\theta) = \cos(6\theta) - i\sin(6\theta)$
$(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^2 = (\cos(-3\theta) + i\sin(-3\theta))^2 = \cos(-6\theta) + i\sin(-6\theta) = \cos(6\theta) - i\sin(6\theta)$
$(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-7} = \cos(-14\theta) + i\sin(-14\theta) = \cos(14\theta) - i\sin(14\theta)$
$(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^3 = (\cos(-5\theta) + i\sin(-5\theta))^3 = \cos(-15\theta) + i\sin(-15\theta) = \cos(15\theta) - i\sin(15\theta)$
તેથી:

$$\frac{[\cos(6\theta) - i\sin(6\theta)][\cos(6\theta) - i\sin(6\theta)]}{[\cos(14\theta) - i\sin(14\theta)][\cos(15\theta) - i\sin(15\theta)]}$$

$$= \frac{[\cos(6\theta) - i\sin(6\theta)]^2}{[\cos(14\theta) - i\sin(14\theta)][\cos(15\theta) - i\sin(15\theta)]}$$

$$= \frac{\cos(12\theta) - i\sin(12\theta)}{\cos(29\theta) - i\sin(29\theta)}$$

$$= \cos(12\theta - 29\theta) + i\sin(12\theta - 29\theta) = \cos(-17\theta) + i\sin(-17\theta) = \cos(17\theta) - i\sin(17\theta)$$

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 3.1 [3 ગુણ]

જો $y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

ઉકેલ: ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
ધારો કે $u = 1 + \tan x$ અને $v = 1 - \tan x$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \quad \text{અને} \quad \frac{dv}{dx} = -\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\tan x)(\sec^2 x) - (1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\tan x)\sec^2 x + (1+\tan x)\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x[(1-\tan x) + (1+\tan x)]}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

પ્રશ્ન 3.2 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી x^3 નું x સાપેક્ષ વિકલન કરો.

જવાબ

ઉકેલ: વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$f(x) = x^3$ માટે:

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2$$

પ્રશ્ન 3.3 [3 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x} dx$

જવાબ

ઉકેલ:

$$\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{4}{\sin^2 x} dx + \int \frac{3\cos x}{\sin^2 x} dx$$
$$= 4\int \csc^2 x\, dx + 3\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

પ્રથમ સંકલન માટે: $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x$
બીજા સંકલન માટે, ધારો કે $u = \sin x$, તેથી $du = \cos x\, dx$:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin x} = -\csc x$$

તેથી:

$$\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x} dx = 4(-\cot x) + 3(-\csc x) + C = -4\cot x - 3\csc x + C$$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 3.1 [4 ગુણ]

જો $y = \log\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

ઉકેલ:

$$y = \log\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right) = \log(\cos x) - \log(1+\sin x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\log(\cos x)] - \frac{d}{dx}[\log(1+\sin x)]$$
$$= \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) - \frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x$$
$$= -\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}$$
$$= -\tan x - \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

આગળ સાદુરૂપ આપતા:

$$= -\frac{\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= -\frac{\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$= -\frac{\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)} = -\frac{1}{\cos x} = -\sec x$$

પ્રશ્ન 3.2 [4 ગુણ]

વિધેય $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધવા માટે, આપણે $f'(x) = 0$ લઈએ:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x - 2)(x - 3)$$

$f'(x) = 0$ લેતા: $x = 2$ અથવા $x = 3$
બીજા વિકલિતની કસોટીનો ઉપયોગ કરીએ: $f''(x) = 12x - 30$
$x = 2$ માટે: $f''(2) = 24 - 30 = -6 < 0 \rightarrow$ સ્થાનીય મહત્તમ (Local maximum)
$x = 3$ માટે: $f''(3) = 36 - 30 = 6 > 0 \rightarrow$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ (Local minimum)
કિંમતો:

$$f(2) = 2(8) - 15(4) + 36(2) + 10 = 16 - 60 + 72 + 10 = 38$$

$$f(3) = 2(27) - 15(9) + 36(3) + 10 = 54 - 135 + 108 + 10 = 37$$

તેથી:
- સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત: 38 (at $x = 2$)
- સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત: 37 (at $x = 3$)

પ્રશ્ન 3.3 [4 ગુણ]

જો $y = 2e^{-3x} + 3e^{2x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $y_2 + y_1 - 6y = 0$.

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ: $y = 2e^{-3x} + 3e^{2x}$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 2(-3)e^{-3x} + 3(2)e^{2x} = -6e^{-3x} + 6e^{2x}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -6(-3)e^{-3x} + 6(2)e^{2x} = 18e^{-3x} + 12e^{2x}$$

હવે $y_2 + y_1 - 6y = 0$ ચકાસીએ:

$$\begin{aligned} y_2 + y_1 - 6y &= (18e^{-3x} + 12e^{2x}) + (-6e^{-3x} + 6e^{2x}) - 6(2e^{-3x} + 3e^{2x}) \\ &= 18e^{-3x} + 12e^{2x} - 6e^{-3x} + 6e^{2x} - 12e^{-3x} - 18e^{2x} \\ &= (18 - 6 - 12)e^{-3x} + (12 + 6 - 18)e^{2x} \\ &= 0 \cdot e^{-3x} + 0 \cdot e^{2x} = 0 \end{aligned}$$

સાબિત થયું.

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 4.1 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $u = x^3$, તેથી $du = 3x^2dx$, એટલે કે $x^2dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \int \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot x^2dx = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{3}du$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C$$
$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3) + C$$

પ્રશ્ન 4.2 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int x \log x \, dx$

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશઃ સંકલન (integration by parts) નો ઉપયોગ કરતા: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$
ધારો કે $u = \log x$ અને $dv = x\, dx$ તેથી $du = \frac{1}{x}dx$ અને $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \log x \, dx = \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2}dx$$
$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$
$$= \frac{x^2}{2}(\log x - \frac{1}{2}) + C$$

પ્રશ્ન 4.3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $xdy + ydx = 0$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ સમીકરણ: $xdy + ydx = 0$
આને આ રીતે લખી શકાય: $xdy = -ydx$
ચલ અલગ કરતા (Separating variables): $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$
બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$$
$$\log|y| = -\log|x| + C_1$$
$$\log|y| + \log|x| = C_1$$
$$\log|xy| = C_1$$
$$|xy| = e^{C_1} = C \quad (\text{જ્યાં } C = e^{C_1})$$

તેથી: $xy = \pm C$
વ્યાપક ઉકેલ છે: $xy = k$ (જ્યાં k સ્વૈર અચળાંક છે)

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 4.1 [4 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $u = \log x$, તેથી $du = \frac{1}{x} dx$
જ્યારે $x = 1$: $u = \log 1 = 0$ જ્યારે $x = e$: $u = \log e = 1$

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int_0^1 u^2 du$$

$$= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

પ્રશ્ન 4.2 [4 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \cos x} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \cos x} dx$
પ્રથમ, વિધેયને સાદુરૂપ આપીએ:

$$\frac{\sec x}{\sec x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1+\cos^2 x}{\cos x}} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

તેથી $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$
આદેશ $\tan(x/2) = t$ લેતા: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
જ્યારે $x = 0$: $t = 0$ જ્યારે $x = \pi/2$: $t = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

સાદુરૂપ આપ્યા બાદ (જેમાં બીજગણિતનો ઉપયોગ થાય છે), આનો જવાબ આવે છે:

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

પ્રશ્ન 4.3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$, $y(0) = 2$ **ઉકેલો.**

જવાબ

ઉકેલ: આ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.
અહીં, $P(x) = \frac{1}{x}$ અને $Q(x) = e^x$
સંકલ્પકારક અવયવ છે: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log|x|} = |x| = x$ ($x > 0$ માટે)
સમીકરણને સંકલ્પકારક અવયવ વડે ગુણતા:

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^x$$

ડાબી બાજુ $\frac{d}{dx}(xy)$ છે, તેથી:

$$\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$xy = \int xe^x dx$$

ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા $\int xe^x dx$: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

તેથી: $xy = e^x(x-1) + C$

$$y = \frac{e^x(x-1) + C}{x}$$

પ્રારંભિક શરત $y(0) = 2$ નો ઉપયોગ કરતા: આમાં એક સમસ્યા છે કારણ કે $x = 0$ પર ઉકેલ અવ્યાખ્યાયિત છે.
જો આપણે પ્રારંભિક શરત $x = 1$ માનીએ, અને $y(1) = 2$:

$$2 = \frac{e^1(1-1) + C}{1} = \frac{0 + C}{1} = C$$

તેથી $C = 2$, અને ઉકેલ છે:

$$y = \frac{e^x(x-1) + 2}{x}$$

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 5.1 [3 ગુણ]

$\frac{3+7i}{1-i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા અને માનાંક શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, $\frac{3+7i}{1-i}$ ને સાદુરૂપ આપીએ:

$$\frac{3+7i}{1-i} = \frac{(3+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+7i+7i^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{3+10i-7}{1+1} = \frac{-4+10i}{2} = -2+5i$$

અનુબદ્ધ: $-2+5i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $-2-5i$ છે
માનાંક: $|-2+5i| = \sqrt{(-2)^2+(5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

પ્રશ્ન 5.2 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $3 - 4i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $\sqrt{3-4i} = a + bi$ જ્યાં $a, b \in \mathbb{R}$
તેથી $(a+bi)^2 = 3 - 4i$

$$a^2 + 2abi + (bi)^2 = 3 - 4i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગોને સરખાવતા: $a^2 - b^2 = 3$ ... (1) $2ab = -4$ ... (2)
સમીકરણ (2) પરથી: $b = -\frac{2}{a}$
સમીકરણ (1) માં મુકતા:

$$a^2 - \left(-\frac{2}{a}\right)^2 = 3$$

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$$

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

ધારો કે $u = a^2$: $u^2 - 3u - 4 = 0$

$$(u-4)(u+1) = 0$$

તેથી $u = 4$ અથવા $u = -1$
કારણ કે $u = a^2 \geq 0$, આપણી પાસે $u = 4$, તેથી $a^2 = 4$
તેથી $a = \pm 2$
જો $a = 2$: $b = -\frac{2}{2} = -1$ જો $a = -2$: $b = -\frac{2}{-2} = 1$
બે વર્ગમૂળ છે: $2 - i$ અને $-2 + i$

પ્રશ્ન 5.3 [3 ગુણ]

$y = (\sin x)^{\tan x}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

ઉકેલ: બંને બાજુ લઘુગુણક (logarithm) લેતા:

$$\log y = \tan x \log(\sin x)$$

બંને બાજુ x સાપેક્ષે વિકલન કરતા:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\tan x \log(\sin x)]$$

જમણી બાજુ ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \log(\sin x) + \tan x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \log(\sin x) + \tan x \cdot \cot x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \log(\sin x) + 1$$

તેથી:

$$\frac{dy}{dx} = y[\sec^2 x \log(\sin x) + 1]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x}[\sec^2 x \log(\sin x) + 1]$$

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

પ્રશ્ન 5.1 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\tan y\,dx + \tan x \sec^2 y\,dy = 0$ નો ઉકેલ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ સમીકરણ: $\tan y\,dx + \tan x \sec^2 y\,dy = 0$
ગોઠવતા: $\tan y\,dx = -\tan x \sec^2 y\,dy$

$$\frac{\tan y}{\sec^2 y}dy = -\tan x\,dx$$
$$\frac{\sin y/\cos y}{1/\cos^2 y}dy = -\tan x\,dx$$
$$\frac{\sin y}{\cos y}\cdot\cos^2 y\,dy = -\tan x\,dx$$
$$\sin y\cos y\,dy = -\tan x\,dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \sin y\cos y\,dy = -\int \tan x\,dx$$

ડાબી બાજુ માટે, ધારો કે $u = \sin y$, તેથી $du = \cos y\,dy$: $\int \sin y\cos y\,dy = \int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 y}{2}$
જમણી બાજુ માટે: $-\int \tan x\,dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \log|\cos x| + C_1$
તેથી:

$$\frac{\sin^2 y}{2} = \log|\cos x| + C$$
$$\sin^2 y = 2\log|\cos x| + K \quad (\text{જ્યાં } K = 2C)$$

પ્રશ્ન 5.2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: A^{-1} શોધવા માટે, આપણે $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.
પ્રથમ, $|A|$ શોધીએ:

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 3(1\cdot 1 - (-1)\cdot 0) + 1(4\cdot 1 - (-1)\cdot 5) + 2(4\cdot 0 - 1\cdot 5)$$
$$= 3(1) + 1(4+5) + 2(0-5) = 3 + 9 - 10 = 2$$

હવે સહઅવયવ શ્રેણિક (cofactor matrix) શોધીએ: $C_{11} = 1$, $C_{12} = -9$, $C_{13} = -5$ $C_{21} = 1$, $C_{22} = -7$, $C_{23} = -5$ $C_{31} = -1$, $C_{32} = 11$, $C_{33} = 7$

સહઅવયવ શ્રેણિક છે: $C = \begin{bmatrix} 1 & -9 & -5 \\ 1 & -7 & -5 \\ -1 & 11 & 7 \end{bmatrix}$
સહઅવયવ શ્રેણિકનો પરિવર્ત (transpose) એ સહલગ્ન શ્રેણિક (adjugate matrix) છે:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 11 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

તેથી:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 11 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -9/2 & -7/2 & 11/2 \\ -5/2 & -5/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 5.3 [4 ગુણ]

જો $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: આ પ્રચલ સમીકરણો છે. $\frac{dy}{dx}$ શોધવા માટે:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

પ્રથમ, $\frac{dx}{d\theta}$ શોધીએ: $x = a(\theta - \sin\theta)$ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$
પછી, $\frac{dy}{d\theta}$ શોધીએ: $y = a(1 - \cos\theta)$ $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$
તેથી:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ અને $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ સૂત્રોનો ઉપયોગ કરતા:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \cot(\theta/2)$$