એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - શિયાળુ 2022 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

માર્ચ 09, 2022

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

જો A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ હોય તો adj.A = _____.

જવાબ

જવાબ: (d) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ઉકેલ: 2×2 શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે, adj.A = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$adj.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો A એ 2×3 અને B એ 3×4 શ્રેણિકો હોય તો AB એ _____ શ્રેણિક છે.

જવાબ

જવાબ: (b) 2×4

ઉકેલ: શ્રેણિક ગુણાકારનો નિયમ: $(m \times n) \times (n \times p) = (m \times p)$ $(2 \times 3) \times (3 \times 4) = (2 \times 4)$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

જો $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો x = ______

જવાબ

જવાબ: (b) 4

ઉકેલ: અનુરૂપ ઘટકોને સરખાવતા: $x = 4$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો A એ સામાન્ય શ્રેણિક (non-singular matrix) હોય તો ______

જવાબ

જવાબ: (d) $|A| \neq 0$
ઉકેલ: જો નિશ્ચાયક શૂન્ય ન હોય તો શ્રેણિક સામાન્ય શ્રેણિક કહેવાય છે.

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(e^{-\log x}) =$ ______________

જવાબ

જવાબ: (d) x
ઉકેલ: $e^{-\log x} = e^{\log x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો $f(x) = \log \sqrt{x^2+1}$**, તો** $f'(0) =$ ____________

જવાબ

જવાબ: (a) 0
ઉકેલ: $f(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ $f'(0) = \frac{0}{0+1} = 0$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $x = \sec\theta + \tan\theta$ **અને** $y = \sec\theta - \tan\theta$ **હોય તો** $\frac{dy}{dx} =$ ____________

જવાબ

જવાબ: (d) 1
ઉકેલ: $xy = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ વિકલન કરતાં: $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int e^x(\sin x + \cos x)dx =$ _________

જવાબ

જવાબ: (b) $e^x \sin x + c$
ઉકેલ: ખંડશઃ સંકલન અથવા પ્રમાણિત પરિણામનો ઉપયોગ કરતાં: $\int e^x(\sin x + \cos x)dx = e^x \sin x + c$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int_{-1}^{1} x^2 + 1dx =$ ______

જવાબ

જવાબ: (d) $\frac{8}{3}$
ઉકેલ: $\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = [\frac{x^3}{3}+x]_{-1}^{1} = (\frac{1}{3}+1)-(\frac{-1}{3}-1) = \frac{8}{3}$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$\int \cot x dx =$ __________ + c

જવાબ

જવાબ: (a) $\log|\sin x|$
ઉકેલ: $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x| + c$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ ની કક્ષા (Order) અને પરિમાણ (Degree) અનુક્રમે ______ અને ______ છે.

જવાબ

જવાબ: (a) 2, 1
ઉકેલ: કક્ષા = ઉચ્ચતમ કક્ષાનું વિકલિત = 2 પરિમાણ = ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની ઘાત = 1

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (integrating factor) ____ છે.

જવાબ

જવાબ: (b) x
ઉકેલ: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ માટે, જ્યાં $P(x) = \frac{1}{x}$ I.F. = $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i + i^2 + i^3 + i^4 =$ _____

જવાબ

જવાબ: (d) 0
ઉકેલ: $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

arg(-1) = _________

જવાબ

જવાબ: (a) π
ઉકેલ: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, તેથી $\arg(-1) = \pi$

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(a).1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો સમીકરણ 3(X+B) + 5A = 0 પરથી શ્રેણિક X શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $3(X+B) + 5A = 0\ 3X + 3B + 5A = 0\ 3X = -3B - 5A\ X = -B - \frac{5A}{3}$

$5A = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$

$X = -\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ -5 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} -\frac{20}{3} & -\frac{28}{3} \\ 7 & -\frac{19}{3} \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 2(a).2 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A - 5I = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$5I = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

સાબિત થયું.

પ્રશ્ન 2(a).3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $v = x + y$, તો $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$
કિંમત મુકતા: $\frac{dv}{dx} - 1 = v^2$ $\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$ $\frac{dv}{v^2+1} = dx$
સંકલન કરતા: $\int \frac{dv}{v^2+1} = \int dx$ $\tan^{-1} v = x + c$ $\tan^{-1}(x+y) = x + c$ $x + y = \tan(x+c)$ $y = \tan(x+c) - x$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(b).1 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ **હોય તો** A^{-1} **શોધો.**

જવાબ

ઉકેલ: આ 3×2 શ્રેણિક છે, જે ચોરસ શ્રેણિક નથી. ચોરસ શ્રેણિક ન હોય તેવા શ્રેણિકનો વ્યસ્ત અસ્તિત્વ ધરાવતો નથી.

વૈકલ્પિક અર્થઘટન - જો તે $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **હોય:**

સહઅવયવજ શ્રેણિક (adjoint) પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને: $|A| = 3(1-0) + 1(4+5) + 2(0-5) = 3 + 9 - 10 = 2$
સહઅવયવો અને સહઅવયવજ શ્રેણિક ગણતરી કરો, પછી $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times adj(A)$

પ્રશ્ન 2(b).2 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણ 3X-2Y=8 અને 5X+4Y=6 ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$|A| = 3(4) - (-2)(5) = 12 + 10 = 22$

$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 32+12 \\ -40+18 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 44 \\ -22 \end{bmatrix}$

$X = 2, Y = -1$

પ્રશ્ન 2(b).3 [4 ગુણ]

જો $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(MN)^T = N^T M^T$

જવાબ

ઉકેલ: $MN = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$(MN)^T = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

$M^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $N^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$N^T M^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$

તેથી $(MN)^T = N^T M^T$ સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(a).1 [3 ગુણ]

વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને $\sqrt{x}$ નું વિકલન કરો.

જવાબ

ઉકેલ: $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

કરણી લેતા: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

પ્રશ્ન 3(a).2 [3 ગુણ]

જો $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2})$

$\frac{d}{dx}(x + \sqrt{1 + x^2}) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

પ્રશ્ન 3(a).3 [3 ગુણ]

$\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x}dx$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{4}{\sin^2 x}dx + \int \frac{3\cos x}{\sin^2 x}dx$
$= 4\int \csc^2 x dx + 3\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$
$= -4\cot x + 3\int \sin^{-2} x \cos x dx$
બીજા સંકલન માટે, ધારો કે $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ $3\int u^{-2}du = 3(-u^{-1}) = -\frac{3}{\sin x}$
$\int \frac{4+3\cos x}{\sin^2 x}dx = -4\cot x - 3\csc x + c$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(b).1 [4 ગુણ]

જો $y = \log(\sin x)$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $y = \log(\sin x)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
હવે, $\frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = -\csc^2 x + \cot^2 x + 1$
નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતા: $\csc^2 x - \cot^2 x = 1 - \csc^2 x + \cot^2 x + 1 = -(\csc^2 x - \cot^2 x) = -1 + 1 = 0$
સાબિત થયું.

પ્રશ્ન 3(b).2 [4 ગુણ]

જો $x + y = \sin(xy)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $x + y = \sin(xy)$
x પ્રત્યે વિકલન કરતા: $1 + \frac{dy}{dx} = \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy)$
$1 + \frac{dy}{dx} = \cos(xy) \cdot (y + x\frac{dy}{dx})$
$1 + \frac{dy}{dx} = y\cos(xy) + x\cos(xy)\frac{dy}{dx}$
$1 + \frac{dy}{dx} - x\cos(xy)\frac{dy}{dx} = y\cos(xy)$
$\frac{dy}{dx}(1 - x\cos(xy)) = y\cos(xy) - 1$
$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(xy)-1}{1-x\cos(xy)}$

પ્રશ્ન 3(b).3 [4 ગુણ]

એક કણની ગતિ $s = t^3 - 5t^2 + 3t$ છે. જ્યારે કણ સ્થિર થાય ત્યારે પ્રવેગ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ છે: $s = t^3 - 5t^2 + 3t$
વેગ: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 10t + 3$
પ્રવેગ: $a = \frac{dv}{dt} = 6t - 10$
સ્થિર સ્થિતિમાં, $v = 0$: $3t^2 - 10t + 3 = 0$
દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા: $t = \frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6} = \frac{10\pm8}{6}$
$t = 3$ અથવા $t = \frac{1}{3}$
$t = 3$ સમયે: $a = 6(3) - 10 = 8$ $t = \frac{1}{3}$ સમયે: $a = 6(\frac{1}{3}) - 10 = -8$
પ્રવેગ અનુક્રમે 8 અને -8 છે.

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(a).1 [3 ગુણ]

$\int x \sin x dx$

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int u dv = uv - \int v du$
ધારો કે $u = x$, $dv = \sin x dx$ $du = dx$, $v = -\cos x$
$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$

પ્રશ્ન 4(a).2 [3 ગુણ]

$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx$

જવાબ

ઉકેલ: આંશિક અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$
$2x + 1 = A(x - 3) + B(x + 1)$
$x = -1$ લેતા: $-2 + 1 = A(-4) \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $x = 3$ લેતા: $6 + 1 = B(4) \Rightarrow B = \frac{7}{4}$
$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{x-3} dx$
$= \frac{1}{4} \log|x + 1| + \frac{7}{4} \log|x - 3| + c$

પ્રશ્ન 4(a).3 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $z = 7 + 24i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $\sqrt{7+24i} = a + bi$
$(a+bi)^2 = 7+24i$ $a^2 - b^2 + 2abi = 7 + 24i$
સરખાવતા: $a^2 - b^2 = 7$ અને $2ab = 24$ બીજા સમીકરણ પરથી: $b = \frac{12}{a}$
કિંમત મુકતા: $a^2 - \frac{144}{a^2} = 7$ $a^4 - 7a^2 - 144 = 0$
ધારો કે $u = a^2$: $u^2 - 7u - 144 = 0$ $(u-16)(u+9) = 0$ $u = 16$ (ધન કિંમત લેતા) $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ $b = \frac{12}{4} = 3$
તેથી: $\sqrt{7+24i} = 4 + 3i$ અથવા $-(4+3i)$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(b).1 [4 ગુણ]

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$
ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતા: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$
$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}+\sqrt{\cos(\pi/2-x)}} dx$
$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$
બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા: $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$
તેથી: $I = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(b).2 [4 ગુણ]

વક્ર $y = 3x^2$, X અક્ષ અને રેખા $x = 2$ અને $x = 3$ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ક્ષેત્રફળ = $\int_2^3 y dx = \int_2^3 3x^2 dx$
$= 3\int_2^3 x^2 dx = 3[\frac{x^3}{3}]_2^3$
$= [x^3]_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$
ક્ષેત્રફળ = 19 ચોરસ એકમ

પ્રશ્ન 4(b).3 [4 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-3} \cdot (\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^2}{(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^{-7} \cdot (\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^3}$

જવાબ

ઉકેલ: યુલરના સમીકરણનો ઉપયોગ કરતા: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
$(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-3} = e^{-6i\theta}$ $(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^2 = e^{-6i\theta}$ $(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^{-7} = e^{14i\theta}$ $(\cos 5\theta - i\sin 5\theta)^3 = e^{-15i\theta}$
પદાવલિ = $\frac{e^{-6i\theta} \cdot e^{-6i\theta}}{e^{14i\theta} \cdot e^{-15i\theta}} = \frac{e^{-12i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{-11i\theta}$

$= \cos(-11\theta) + i\sin(-11\theta) = \cos(11\theta) - i\sin(11\theta)$

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(a).1 [3 ગુણ]

$\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$ **ને a+ib સ્વરૂપમાં ફેરવો.**

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, છેદનું સાદુરૂપ આપો: $(3+2i)(5-3i) = 15 - 9i + 10i - 6i^2 = 15 + i + 6 = 21 + i$
હવે: $\frac{4+2i}{21+i}$
અનુબદ્ધ કરણી વડે ગુણતા: $\frac{4+2i}{21+i} \cdot \frac{21-i}{21-i}$
$= \frac{(4+2i)(21-i)}{(21+i)(21-i)} = \frac{84-4i+42i-2i^2}{441-i^2}$
$= \frac{84+38i+2}{441+1} = \frac{86+38i}{442} = \frac{43+19i}{221}$

પ્રશ્ન 5(a).2 [3 ગુણ]

$z = 1 - \sqrt{3}i$ **ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.**

જવાબ

ઉકેલ: $z = 1 - \sqrt{3}i$
$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$
$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (કારણ કે z ચોથા ચરણમાં છે)
તેથી: $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 2e^{-i\pi/3}$

પ્રશ્ન 5(a).3 [3 ગુણ]

સાબિત કરો કે $(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n + (1+\cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1}\cos^n(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})$

જવાબ

ઉકેલ: $1 + \cos\theta + i\sin\theta = 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$
નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતા: $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2})$
$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) + 2i\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$
$= 2\cos(\frac{\theta}{2})[\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2})] = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}$
તે જ રીતે: $1 + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\theta/2}$
$(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})e^{in\theta/2}$
$(1+\cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})e^{-in\theta/2}$
સરવાળો = $2^n\cos^n(\frac{\theta}{2})[e^{in\theta/2} + e^{-in\theta/2}] = 2^n\cos^n(\frac{\theta}{2}) \cdot 2\cos(\frac{n\theta}{2})$
$= 2^{n+1}\cos^n(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{n\theta}{2})$
સાબિત થયું.

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(b).1 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \log x^2$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$
$x \log x$ વડે ભાગતા: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = \frac{2}{x}$
આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
જ્યાં $P(x) = \frac{1}{x \log x}$ અને $Q(x) = \frac{2}{x}$
સંકલ્પકારક અવયવ: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x \log x}dx}$
ધારો કે $u = \log x$, તો $du = \frac{1}{x}dx$ $\int \frac{1}{x \log x}dx = \int \frac{1}{u}du = \log u = \log(\log x)$
I.F. = $e^{\log(\log x)} = \log x$
ઉકેલ: $y \cdot \log x = \int \frac{2}{x} \cdot \log x dx$
$= 2 \int \frac{\log x}{x}dx = 2 \cdot \frac{(\log x)^2}{2} = (\log x)^2$
તેથી: $y = \frac{(\log x)^2}{\log x} = \log x$

પ્રશ્ન 5(b).2 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = e^x$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
જ્યાં $P(x) = -\frac{1}{x}$ અને $Q(x) = e^x$
સંકલ્પકારક અવયવ: $e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$
ઉકેલ: $y \cdot \frac{1}{x} = \int e^x \cdot \frac{1}{x}dx$
સંકલન $\int \frac{e^x}{x}dx$ પ્રાથમિક વિધેયોમાં દર્શાવી શકાતું નથી.
વૈકલ્પિક અભિગમ - જો તે $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$ હોય:
I.F. = $e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$
$y \cdot x = \int e^x \cdot x dx$
ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$
તેથી: $xy = e^x(x-1) + c$ $y = \frac{e^x(x-1)+c}{x}$

પ્રશ્ન 5(b).3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$ ઉકેલો, જ્યાં $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

જવાબ

ઉકેલ: $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$
પદો ગોઠવતા: $\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 0$
$\frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x}dx + \frac{\cos y}{\sin y \cos^2 y}dy = 0$

$\frac{1}{\sin x \cos x}dx + \frac{1}{\sin y \cos y}dy = 0$
$\frac{2}{\sin 2x}dx + \frac{2}{\sin 2y}dy = 0$
$\csc(2x)dx + \csc(2y)dy = 0$
સંકલન કરતા: $\int \csc(2x)dx + \int \csc(2y)dy = c$
$-\frac{1}{2}\log|\csc(2x) + \cot(2x)| - \frac{1}{2}\log|\csc(2y) + \cot(2y)| = c$
$\log|\csc(2x) + \cot(2x)| + \log|\csc(2y) + \cot(2y)| = -2c = k$
$|\csc(2x) + \cot(2x)| \cdot |\csc(2y) + \cot(2y)| = e^k$
શરૂઆતની શરત $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ નો ઉપયોગ કરતા: $x = \frac{\pi}{4}$ મુકતા, $y = \frac{\pi}{4}$
$|\csc(\frac{\pi}{2}) + \cot(\frac{\pi}{2})| \cdot |\csc(\frac{\pi}{2}) + \cot(\frac{\pi}{2})| = |1 + 0| \cdot |1 + 0| = 1$
તેથી: $(\csc(2x) + \cot(2x))(\csc(2y) + \cot(2y)) = 1$