

# Applied Mathematics (4320001) - Winter 2023 Solution

Milav Dabgar

January 30, 2024

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

### પ્રશ્ન 1(1) [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  હોય તો  $4A = \dots$  જવાબ: (b)  $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

### પ્રશ્ન 1(2) [1 ગુણ]

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  શ્રેણિકની કક્ષા \_\_\_\_\_ છે. જવાબ: (a)  $2 \times 3$

જવાબ

શ્રેણિકને 2 હાર અને 3 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા  $2 \times 3$  છે.

### પ્રશ્ન 1(3) [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો  $A^2 = \dots$  જવાબ: (d)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 1(4) [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  હોય તો  $A$  નો સહ-અવયવજ (adjoint) શ્રેણિક = ... જવાબ: (c)  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$\text{શ્રેણિક } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ માટે, } adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 1(5) [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \dots$  જવાબ: (d)  $\sec^2 x$

જવાબ

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

## પ્રશ્ન 1(6) [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\sin 5x) = \dots$  જવાબ: (b)  $5 \cos 5x$

જવાબ

$$\frac{d}{dx}(\sin 5x) = 5 \cos 5x \text{ (ચેઇન રૂલનો ઉપયોગ કરીને)}$$

## પ્રશ્ન 1(7) [1 ગુણ]

જો વિધેય  $y = f(x)$  એ  $x = a$  આગળ મહત્તમ હોય તો  $f'(a) = \dots$  જવાબ: (c) 0

જવાબ

$$\text{મહત્તમ બિંદુએ, પ્રથમ વિકલિત શૂન્ય થાય: } f'(a) = 0$$

## પ્રશ્ન 1(8) [1 ગુણ]

$\int \sin x dx = \dots + C$  જવાબ: (a)  $-\cos x$

જવાબ

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

## પ્રશ્ન 1(9) [1 ગુણ]

$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \dots + C$  જવાબ: (d)  $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

જવાબ

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) + C$$

## પ્રશ્ન 1(10) [1 ગુણ]

$$\int_1^2 x^2 dx = \dots \text{ જવાબ: (a) } 7/3$$

જવાબ

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

## પ્રશ્ન 1(11) [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^4 + \frac{dy}{dx} + 5y = 0 \text{ ની કક્ષા (order) ... છે. જવાબ: (c) 3}$$

જવાબ

કક્ષા એ મહત્તમ વિકલન છે = 3

## પ્રશ્ન 1(12) [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1 \text{ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F) ... છે. જવાબ: (b) } x$$

જવાબ

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

## પ્રશ્ન 1(13) [1 ગુણ]

$$39, 23, 58, 47, 50, 16, 61 \text{ નો મધ્યક ... છે. જવાબ: (b) } 42$$

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{39+23+58+47+50+16+61}{7} = \frac{294}{7} = 42$$

## પ્રશ્ન 1(14) [1 ગુણ]

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક ... છે. જવાબ: (a) } 3$$

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

## પ્રશ્ન 2 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

## પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

## પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  હોય, તો  $3A + 2B - 4C$  શોધો.

જવાબ

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ -3 & 0 & 6 \\ 12 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 12 & 12 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

$$3A + 2B - 4C = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 21 \\ -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $(A + B)^T = A^T + B^T$

જવાબ

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

સાબિત થાય છે:  $(A + B)^T = A^T + B^T$

## પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો:  $xydy = (x+1)(y+1)dx$ 

## જવાબ

ચલને અલગ કરતા (Separating variables):  $\frac{y}{y+1}dy = \frac{x+1}{x}dx$ 

$$\left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:  $y - \ln|y+1| = x + \ln|x| + C$ અંતિમ જવાબ:  $y - x = \ln|y+1| + \ln|x| + C$ 

## પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

## પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

શ્રેણિક  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

## જવાબ

ધારો કે  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(-3 - (-2)) - 1(2 - (-1)) + 2(4 - (-3)) = 3(-1) - 1(3) + 2(7) = -3 - 3 + 14 = 8$$

સહ-અવયવ (Cofactors):

- $C_{11} = -1, C_{12} = -3, C_{13} = 7$
- $C_{21} = 3, C_{22} = 1, C_{23} = -5$
- $C_{31} = 5, C_{32} = 7, C_{33} = -11$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી ઉકેલો:  $3x - 2y = 8, 5x + 4y = 6$ 

## જવાબ

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(4) - (-2)(5) = 12 + 10 = 22$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 44 \\ -22 \end{bmatrix}$$

જવાબ:  $x = 2, y = -1$

### પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  હોય, તો  $A \cdot \text{adj}(A)$  શોધો.

જવાબ

$$|A| = 1(6 - 2) - 2(4 - 1) + 1(4 - 3) = 4 - 6 + 1 = -1$$

કોઈપણ શ્રેણિક A માટે:  $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$

$$A \cdot \text{adj}(A) = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### પ્રશ્ન 3 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

### પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

### પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]

જો  $y = \log\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$  હોય, તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

જવાબ

$$y = \log(\sin x) - \log(1 + \cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

નિત્યસમ  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  નો ઉપયોગ કરતા:

જવાબ:  $\frac{dy}{dx} = \cot x + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

### પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]

જો  $y = \sin(x + y)$  હોય, તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

## જવાબ

બંને બાજુ વિકલન કરતા:  $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} [1 - \cos(x+y)] = \cos(x+y)$$

$$\text{જવાબ: } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)}$$

## પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

મેળવો:  $\int x^2 \log x dx$

## જવાબ

ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા:  $\int u dv = uv - \int v du$

ધારો કે  $u = \log x$ ,  $dv = x^2 dx$  તો  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \log x dx = \log x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\text{જવાબ: } \frac{x^3}{3} (\log x - \frac{1}{3}) + C$$

## પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

## પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]

ગતિ સમીકરણ  $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 7$  છે. જ્યારે પ્રવેગ શૂન્ય હોય ત્યારે  $s$  અને  $t$  શોધો.

## જવાબ

$$s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 7$$

$$\text{વેગ: } v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 6t - 12$$

$$\text{પ્રવેગ: } a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

$$\text{જ્યારે પ્રવેગ} = 0: 12t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{At } t = 1/2: s = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 7 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 7 = \frac{1}{2}$$

$$\text{જવાબ: } t = 1/2, s = 1/2$$

## પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

જો  $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

## જવાબ

$$y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$$

હવે:  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y$   
 $= (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x})$   
 $= 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x}$   
 $= (18 - 6 - 12)e^{3x} + (12 + 6 - 18)e^{-2x} = 0$   
**Hence proved**

### પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

$f(x) = x^3 - 3x + 11$  ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

**જવાબ**

$f(x) = x^3 - 3x + 11$   
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$   
 નિર્ણાયક બિંદુઓ:  $x = 1, x = -1$   
 $f''(x) = 6x$   
 $x = 1$  આગળ:  $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$  સ્થાનિક ન્યૂનતમ  $x = -1$  આગળ:  $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$  સ્થાનિક મહત્તમ  
 $f(1) = 1 - 3 + 11 = 9$  (minimum)  $f(-1) = -1 + 3 + 11 = 13$  (maximum)  
**જવાબ:** Maximum = 13 at  $x = -1$ , Minimum = 9 at  $x = 1$

### પ્રશ્ન 4 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

### પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

### પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

મેળવો:  $\int \sin 5x \sin 6x dx$

**જવાબ**

નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતા:  $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$   
 $\sin 5x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 6x) - \cos(5x + 6x)]$   
 $= \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(11x)] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos(11x)]$   
 $\int \sin 5x \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos(11x)] dx$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \sin x - \frac{\sin(11x)}{11} \right] + C$   
**જવાબ:**  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sin(11x)}{22} + C$

### પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

મેળવો:  $\int \frac{(1+x)e^x}{\cos^2(xe^x)} dx$



## જવાબ

ધારો કે  $u = xe^x$ , તો  $du = (1+x)e^x dx$

The integral becomes:  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = \tan u + C$

પાછું મૂકતા:  $= \tan(xe^x) + C$

જવાબ:  $\tan(xe^x) + C$

## પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

માહિતી: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12 માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

## જવાબ

Data: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12  $n = 8$

મધ્યક =  $\frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$

કોષ્ટક 1. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

x	x-9	(x-9) <sup>2</sup>
6	-3	9
7	-2	4
10	1	1
12	3	9
13	4	16
4	-5	25
8	-1	1
12	3	9

$$\sum (x - 9)^2 = 74$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{74}{8}} = \sqrt{9.25} = 3.04$$

જવાબ:  $\sigma = 3.04$

## પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

## પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

$$\text{મેળવો: } \int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx$$

## જવાબ

આંશિક અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરતા:  $\frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

$$2x + 1 = A(x - 3) + B(x + 1)$$

$$\text{જ્યારે } x = -1: 2(-1) + 1 = A(-4) \Rightarrow -1 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\text{જ્યારે } x = 3: 2(3) + 1 = B(4) \Rightarrow 7 = 4B \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{7}{4} \ln |x-3| + C$$

$$\text{જવાબ: } \frac{1}{4} \ln |x+1| + \frac{7}{4} \ln |x-3| + C$$

### પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

મેળવો:  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$

**જવાબ**

ધારો કે  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$

ગુણધર્મ  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  નો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot(\pi/2-x)}}{\sqrt{\cot(\pi/2-x)} + \sqrt{\tan(\pi/2-x)}} dx$$

Since  $\cot(\pi/2-x) = \tan x$  and  $\tan(\pi/2-x) = \cot x$ :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}} dx$$

બંને પદનો સરવાળો કરતા:  $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$

**જવાબ:**  $I = \frac{\pi}{4}$

### પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન શોધો

**જવાબ**

**કોષ્ટક 2.** વર્ગીકૃત માહિતી

$x_i$	4	8	11	17	20	24	32
$f_i$	3	5	9	5	4	3	1

$$N = \sum f_i = 3 + 5 + 9 + 5 + 4 + 3 + 1 = 30$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3(4) + 5(8) + 9(11) + 5(17) + 4(20) + 3(24) + 1(32)}{30} = \frac{12 + 40 + 99 + 85 + 80 + 72 + 32}{30} = \frac{420}{30} = 14$$

**કોષ્ટક 3.** સરેરાશ વિચલન ગણતરી

$x_i$	$f_i$	$ x_i - 14 $	$f_i  x_i - 14 $
4	3	10	30
8	5	6	30
11	9	3	27
17	5	3	15
20	4	6	24
24	3	10	30
32	1	18	18

$$\sum f_i |x_i - 14| = 174$$

$$\text{Mean deviation} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{174}{30} = 5.8$$

**જવાબ:** Mean deviation = 5.8

### પ્રશ્ન 5 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

## પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

## પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 4. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Freq	3	7	12	15	8	3	2

$$N = 50, \sum f_i x_i = 3100$$

$$\text{મધ્યક} = 3100/50 = 62$$

કોષ્ટક 5. સરેરાશ વિચલન ગણતરી

Class	$x_i$	$f_i$	$ x_i - 62 $	$f_i  x_i - 62 $
30-40	35	3	27	81
40-50	45	7	17	119
50-60	55	12	7	84
60-70	65	15	3	45
70-80	75	8	13	104
80-90	85	3	23	69
90-100	95	2	33	66

$$\text{સરેરાશ વિચલન} = 568/50 = 11.36$$

જવાબ: Mean deviation = 11.36

## પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

આપેલ માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 6. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	60	61	62	63	64	65	66	67	68
Freq	2	1	12	29	25	12	10	4	5

$$N = 100, \text{મધ્યક} = 63.8$$

કોષ્ટક 7. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

$x_i$	$f_i$	$(x_i - 63.8)$	$(x_i - 63.8)^2$	$f_i(x_i - 63.8)^2$
60	2	-3.8	14.44	28.88
61	1	-2.8	7.84	7.84
62	12	-1.8	3.24	38.88
63	29	-0.8	0.64	18.56
64	25	0.2	0.04	1.00
65	12	1.2	1.44	17.28
66	10	2.2	4.84	48.40
67	4	3.2	10.24	40.96
68	5	4.2	17.64	88.20

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 290$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{290/100} = \sqrt{2.9} = 1.70$$

$$\text{જવાબ: } \sigma = 1.70$$

### પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યક શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 8. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
Freq	26	31	35	42	82	71

કોષ્ટક 9. મધ્યક ગણતરી

Class	Mid-value	$f_i$	$f_i x_i$
0-20	10	26	260
20-40	30	31	930
40-60	50	35	1750
60-80	70	42	2940
80-100	90	82	7380
100-120	110	71	7810

$$N = 287, \sum f_i x_i = 21070$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{21070}{287} = 73.42$$

$$\text{જવાબ: Mean} = 73.42$$

### પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

### પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 1$  ઉકેલો

## જવાબ

ધારો કે  $z = x + y + 1$ , તો  $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$  તેથી  $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$   
 કિંમત મૂકતા:  $z^2(\frac{dz}{dx} - 1) = 1$   $z^2 \frac{dz}{dx} - z^2 = 1$   $z^2 \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$   $\frac{z^2}{1+z^2} dz = dx$   
 બંને બાજુ સંકલન કરતા:  $\int \frac{z^2}{1+z^2} dz = \int dx$   
 $\int \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = x + C$   
 $z - \tan^{-1} z = x + C$   
 $z = x + y + 1$  પાછું મૂકતા:  $(x + y + 1) - \tan^{-1}(x + y + 1) = x + C$   
**જવાબ:**  $y + 1 = \tan^{-1}(x + y + 1) + C$

## પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$ ,  $y(0) = 2$

## જવાબ

આ  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.  
 અહીં  $P(x) = \frac{1}{x}$ ,  $Q(x) = e^x$   
 સંકલ્યકારક અવયવ:  $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$  ( $x > 0$  માટે)  
 સમીકરણને  $x$  વડે ગુણતા:  $x \frac{dy}{dx} + y = x e^x$   
 $\frac{d}{dx}(xy) = x e^x$   
 બંને બાજુ સંકલન કરતા:  $xy = \int x e^x dx$   
 $\int x e^x dx$  માટે ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: ધારો કે  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  તો  $du = dx$ ,  $v = e^x$   
 $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1)$   
 So:  $xy = e^x(x - 1) + C$   $y = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$   
 પ્રારંભિક શરત  $y(0) = 2$  નો ઉપયોગ કરતા: જેમ  $x \rightarrow 0$ , આપણે L'Hôpital ના નિયમ કે શ્રેણી વિસ્તરણનો ઉપયોગ કરવો પડે.  
 $x = 0$  આગળ મૂળ સમીકરણ પરથી:  $\frac{dy}{dx} = e^x - \frac{y}{x}$  આ સૂચવે છે કે આપણે પ્રારંભિક શરત સાથે વધુ સાવચેત રહેવું જોઈએ.  
**વૈકલ્પિક અભિગમ:** સમીકરણ  $x = 0$  આગળ અસામાન્ય છે, તેથી આપણે  $x \neq 0$  હોય તેવા વિસ્તારમાં ઉકેલીએ છીએ.  
**જવાબ:**  $y = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$  જ્યાં  $C$  સીમા શરતો દ્વારા નક્કી થાય છે.

## પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$

## જવાબ

$y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$   
 $y \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$   
 $\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+x^2} dx$   
 બંને બાજુ સંકલન કરતા:  $\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \sqrt{1+x^2} dx$   
 ડાબી બાજુ માટે, ધારો કે  $u = 1 + y^2$ , તો  $du = 2y dy$ :  $\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{1+y^2}$   
 જમણી બાજુ માટે:  $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$   
 Therefore: **જવાબ:**  $\sqrt{1+y^2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$

## સૂત્રો

## શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$
- $2 \times 2$  શ્રેણિક  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  માટે:  $\text{adj} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

## વિકલન સૂત્રો

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- સાંકળ નિયમ:  $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## સંકલન સૂત્રો

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

## વિકલ સમીકરણો

- સુરેખ વિકલ સમીકરણ:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
- સંકલ્યકારક અવયવ:  $I.F. = e^{\int P(x)dx}$
- વિયોજનીય ચલ:  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

## આંકડાશાસ્ત્ર

- મધ્યક:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$  (અવર્ગીકૃત),  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$  (વર્ગીકૃત)
- સરેરાશ વિચલન:  $M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$
- પ્રમાણિત વિચલન:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$