

# Applied Mathematics (4320001) - Winter 2024 Solution

Milav Dabgar

January 22, 2025

## પ્રશ્ન Q.1 [14 ગુણ]

આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય પસંદગીનો ઉપયોગ કરીને ખાલી જગ્યાઓ ભરો

## પ્રશ્ન Q1.1 [1 ગુણ]

Order of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  = ..... જવાબ: (a)  $2 \times 3$

### જવાબ

Matrix has 2 rows and 3 columns, so order is  $2 \times 3$ .

## પ્રશ્ન Q1.2 [1 ગુણ]

If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  then  $A^T = \dots$  જવાબ: (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

### જવાબ

પરિવર્ત્ત means rows become columns:  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

## પ્રશ્ન Q1.3 [1 ગુણ]

If  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  then  $adj(A) = \dots$  જવાબ: (d)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

### જવાબ

For  $2 \times 2$  matrix  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $adj = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

## પ્રશ્ન Q1.4 [1 ગુણ]

$$[1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \dots \text{જવાબ: (c) } 11$$

જવાબ

$$1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times (-1) = 4 + 10 - 3 = 11$$

## પ્રશ્ન Q1.5 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 1) = \dots \text{ જવાબ: (a) } 3x^2$$

જવાબ

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 1) = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

### પ્રશ્ન Q1.6 [1 ગુણી]

$$\frac{d}{dx}(\sec^2 x - \tan^2 x) = \dots \text{જવાબ: (b) } 0$$

ଜ୍ଵାବୁ

Since  $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$  (constant), derivative = 0

### પ્રશ્ન Q1.7 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \dots \text{ જવાબ: (c) } \frac{1}{x}$$

ଜ୍ଵାବୁ

Standard derivative:  $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

### પ્રશ્ન Q1.8 [1 ગુણ]

$$\int x^2 dx = \dots + C \text{ જવાબ: (d) } \frac{x^3}{3}$$

ଜୟାମ

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

### પ્રશ્ન Q1.9 [1 ગુણ]

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \, dx = \dots + C \text{ જવાબ: (d) } 2$$

**જવાબ**

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(-\pi/2) = 0 + 0 = 0$  **Note:** The MDX answer says 2, but the calculation shows  $0 (-\cos(\pi/2) - (-\cos(-\pi/2))) = -0 - (-0) = 0$ . Wait, let me re-check the MDX logic. MDX says:  $-\cos(\pi/2) + \cos(-\pi/2) = 0 + 0 = 2$ . Cos(pi/2) is 0. Cos(-pi/2) is 0. So result is 0. MDX likely has an error or I am misinterpreting. Wait,  $\sin x$  is an odd function. Integral of odd function over symmetric interval is 0. So answer should be 0. However, if the MDX says 2, I should check if there is a mistake in my understanding or the MDX. MDX Content: '92:  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) + \cos(-\pi/2) = 0 + 0 = 2$ ' This calculation in MDX '0 + 0 = 2' is definitely wrong mathematically. But fidelity means I should copy it? Or correct it? The prompt says "Strict fidelity... The only exception is diagrams". BUT, usually if there is a blatant math error in the solution text, I should probably correct it or mark it. However, usually I should stick to what is provided unless it's obviously a typo I can safely fix without changing meaning. Here, '0+0=2' is nonsense. Also  $\int \sin x dx = -\cos x$ . Upper limit  $\pi/2$ , lower  $-\pi/2$ .  $[-\cos(\pi/2)] - [-\cos(-\pi/2)] = (-0) - (-0) = 0$ . The question might have been  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$ ? Cos is even.  $2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2(1 - 0) = 2$ . If the answer key says 2, then the function was likely  $\cos x$  or  $|\sin x|$  or something else. Given I must convert the \*provided\* solution: I will transcribe what is there, but potentially add a small editor's note if it's glaring. Actually, let's look at the MDX again. Line 87:  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx = \dots + C$  Answer: (d) 2. This implies the question itself might be typoed in MDX or the answer is wrong. I will copy the MDX as is for now to maintain fidelity, as I am a converter, not a mathematician corrector (unless I was told to fix bugs). Actually, I'll stick to the content. Wait, if I write '0+0=2' in LaTeX it will look silly. ધારો કેંડ just copy it.

**પ્રશ્ન Q1.10 [1 ગુણ]**

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \dots \quad \text{જવાબ: (c) } \log 3$$

**જવાબ**

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3$$

**પ્રશ્ન Q1.11 [1 ગુણ]**

Order and Degree of the વિકલ સમીકરણ  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$  are ..... **જવાબ: (a) 2,3**

**જવાબ**

Order = ઉચ્ચતમ વિકલિત = 2, Degree = power of ઉચ્ચતમ વિકલિત = 3

**પ્રશ્ન Q1.12 [1 ગુણ]**

સંકલ્યકારક અવયવ of the વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + y = 1$  is જવાબ: (b)  $e^x$

**જવાબ**

For  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ , I.F. =  $e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

**પ્રશ્ન Q1.13 [1 ગુણ]**

મધ્યક of 1,3,5,7,9 is જવાબ: (a) 5

**ਜਵਾਬ**

$$\text{ਮਧਕ} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

**ਪ੍ਰਸ਼ Q1.14 [1 ਗੁਣ]**

ਜੇ the ਮਧਕ of 15, 7, 6, a, 3 is 4 ਤੋ a = ..... ਜਵਾਬ: (c) -11

**ਜਵਾਬ**

$$\begin{aligned}\frac{15+7+6+a+3}{5} &= 4 \\ 31 + a &= 20 \\ a &= -11\end{aligned}$$

**ਪ੍ਰਸ਼ Q.2 [14 ਗੁਣ]****ਪ੍ਰਸ਼ Q.2 (A) [6 ਗੁਣ]**

ਕੋਈਪਣਾ ਬੇ ਲਖੋ

**ਪ੍ਰਸ਼ 1 [3 ਗੁਣ]**

ਜੇ  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ , ਤੋ ਸਾਬਿਤ ਕਰੋ ਕਿ  $A^2 - 7A + 14I_2 = 0$ . ਜਵਾਬ:

**ਜਵਾਬ**

$$\text{ਪ੍ਰਥਮ ਗਣਤਰੀ ਕਰੋ } A^2: A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਗਣਤਰੀ ਕਰੋ } 7A: 7A = 7 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 14 \\ -7 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਗਣਤਰੀ ਕਰੋ } 14I_2: 14I_2 = 14 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਫਰੰਦ: } A^2 - 7A + 14I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & 14 \\ -7 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜੇ ਸਾਬਿਤ ਥਾਂਧ ਛੇ.

**ਪ੍ਰਸ਼ 2 [3 ਗੁਣ]**

Using ਸ਼੍ਰੇਣਿਕ, solve the following system:  $3x - y = 1$ ,  $2x + y = 4$ . ਜਵਾਬ:

**જવાબ**

System in શ્રેણીક form:  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Find determinant:  $|A| = 3(1) - (-1)(2) = 3 + 2 = 5$

Find  $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Solution:  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

તેથી:  $x = 1, y = 2$

**પ્રશ્ન 3 [3 ગુણ]**

ઉકેલો:  $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = e^x$  જવાબ:

**જવાબ**

ફરીથી લખતાં:  $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{x^2+1} = \frac{e^x}{x^2+1}$   
આ રેખીય સ્વરૂપ છે જ્યાં  $P = \frac{2x}{x^2+1}, Q = \frac{e^x}{x^2+1}$   
I.F. =  $e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$   
Solution:  $y(x^2 + 1) = \int e^x dx = e^x + C$   
તેથી:  $y = \frac{e^x + C}{x^2 + 1}$

**પ્રશ્ન Q.2 (B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો

**પ્રશ્ન 1 [4 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , તો શોધો  $A^{-1}$ . જવાબ:

**જવાબ**

ગણતરી કરો determinant:  $|A| = 1(-2 - 2) - 2(3 - 4) + 3(6 + 8) = -4 + 2 + 42 = 40$

Find cofactor શ્રેણીક:  $C_{11} = -4, C_{12} = 1, C_{13} = 14, C_{21} = 4, C_{22} = -11, C_{23} = 6, C_{31} = 8, C_{32} = 8, C_{33} = -8$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 1 & -11 & 8 \\ 14 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ 1 & -11 & 8 \\ 14 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 2 [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ , તો સાબિત કરો કે  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . જવાબ:

### જવાબ

$$\text{ગણતરી કરો } AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 0(24) - (-13)(10) = 130$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{130} \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ગણતરી કરો } A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ અને } B^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{130} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{130} \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Hence  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  is proved.

## પ્રશ્ન 3 [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , તો સાબિત કરો કે  $A^3 - 4A^2 - 3A + 11I_3 = 0$ . જવાબ:

### જવાબ

$$\text{ગણતરી કરો } A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{ગણતરી કરો } A^3 = \begin{bmatrix} 36 & 52 & 41 \\ 10 & 19 & 7 \\ 50 & 68 & 64 \end{bmatrix}$$

Compute  $A^3 - 4A^2 - 3A + 11I_3$ : After calculation, this equals the zero શ્રેણીક, hence proved.

## પ્રશ્ન Q.3 [14 ગુણ]

### પ્રશ્ન Q.3 (A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

## પ્રશ્ન 1 [3 ગુણ]

Differentiate  $\frac{e^{\cos x}}{\tan x}$  with respect to  $x$ . જવાબ:

**જવાબ**

ભગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરીને:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{\frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\text{ધારો કે } u = e^{\cos x}, v = \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{e^{\cos x}}{\tan x} \right) = \frac{\tan x \cdot (-e^{\cos x} \sin x) - e^{\cos x} \cdot \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{-e^{\cos x} (\sin x \tan x + \sec^2 x)}{\tan^2 x}$$

**પ્રશ્ન 2 [3 ગુણ]**

જો  $x = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$  અને  $y = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$ , તો શોધો  $\frac{dy}{dx}$ . જવાબ:

**જવાબ**

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$$

**પ્રશ્ન 3 [3 ગુણ]**

Find:  $\int \sin 5x \sin 6x dx$  જવાબ:

**જવાબ**

Using identity:  $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$$\sin 5x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 6x) - \cos(5x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(11x)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos x - \cos(11x)]$$

$$\int \sin 5x \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos(11x)] dx$$

$$= \frac{1}{2}[\sin x - \frac{\sin(11x)}{11}] + C$$

**પ્રશ્ન Q.3 (B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો

**પ્રશ્ન 1 [4 ગુણ]**

જો  $y = \log(\sin x)$ , તો સાબિત કરો કે  $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ . જવાબ:

**જવાબ**

$$y = \log(\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\csc^2 x$$

$$\text{હવે: } \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = -\csc^2 x + \cot^2 x + 1$$

$$= -\csc^2 x + \cot^2 x + 1 = -\csc^2 x + (\csc^2 x - 1) + 1 = 0$$

જે સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 2 [4 ગુણ]

જો the motion of a particle is given by ગતિ સમીકરણ  $S = t^3 - t^2 + 2t + 11$ , તો

- a) વેગ શોધો at  $t = 1$
- b) પ્રવેગ શોધો at  $t = 2$ . જવાબ:

### જવાબ

- a) Velocity =  $\frac{dS}{dt} = 3t^2 - 2t + 2$  At  $t = 1$ :  $v = 3(1)^2 - 2(1) + 2 = 3 - 2 + 2 = 3$  એકમ/સમય
- b) Acceleration =  $\frac{d^2S}{dt^2} = 6t - 2$  At  $t = 2$ :  $a = 6(2) - 2 = 12 - 2 = 10$  એકમ/સમય<sup>2</sup>

## પ્રશ્ન 3 [4 ગુણ]

Find the maximum and minimum value of the function  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ . જવાબ:

### જવાબ

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

નિષાર્થક બિંદુઓ:  $x = 2, x = -1$

$$f''(x) = 12x - 6$$

At  $x = -1$ :  $f''(-1) = -18 < 0$  (maximum) At  $x = 2$ :  $f''(2) = 18 > 0$  (minimum)

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = 12 \text{ (maximum)}$$

$$f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 5 = -15 \text{ (minimum)}$$

મહત્તમ કિંમત: 12, ન્યૂનતમ કિંમત: -15

## પ્રશ્ન Q.4 [14 ગુણ]

### પ્રશ્ન Q.4 (A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

## પ્રશ્ન 1 [3 ગુણ]

Find  $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx$  જવાબ:

### જવાબ

ધારો કે  $u = \sin x$ , તો  $du = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx &= \int \frac{u}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C = \frac{1}{2} \ln(1+\sin^2 x) + C \end{aligned}$$

## પ્રશ્ન 2 [3 ગુણ]

Find  $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx$  જવાબ:

### જવાબ

ધારો કે  $u = \log x$ , તો  $du = \frac{1}{x} dx$   
When  $x = 1$ :  $u = 0$ ; When  $x = e$ :  $u = 1$   
 $\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int_0^1 u^2 du = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

## પ્રશ્ન 3 [3 ગુણ]

Find the મધ્યક of the following data:

| વર્ગ    | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| આવૃત્તિ | 3     | 7     | 12    | 15    | 8     | 3     | 2      |

જવાબ: 62

### જવાબ

| વર્ગ   | મધ્ય કિંમત ( $x_i$ ) | આવૃત્તિ ( $f_i$ ) | $f_i x_i$ |
|--------|----------------------|-------------------|-----------|
| 30-40  | 35                   | 3                 | 105       |
| 40-50  | 45                   | 7                 | 315       |
| 50-60  | 55                   | 12                | 660       |
| 60-70  | 65                   | 15                | 975       |
| 70-80  | 75                   | 8                 | 600       |
| 80-90  | 85                   | 3                 | 255       |
| 90-100 | 95                   | 2                 | 190       |
| Total  |                      | 50                | 3100      |

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{3100}{50} = 62$$

## પ્રશ્ન Q.4 (B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

## પ્રશ્ન 1 [4 ગુણ]

Find  $\int x \sin x dx$  જવાબ:

### જવાબ

ખંડણ: સંકલનનો ઉપયોગ કરીને:  $\int u dv = uv - \int v du$   
ધારો કે  $u = x$ ,  $dv = \sin x dx$  Then  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$   
 $\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

## પ્રશ્ન 2 [4 ગુણ]

Find the area of a circle  $x^2 + y^2 = a^2$  using Integration. જવાબ:

### જવાબ

પરથી  $x^2 + y^2 = a^2$ , we get  $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$   
 પ્રથમ ચરણમાં ક્ષેત્રફળ =  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$   
 આદેશ લેતા  $x = a \sin \theta$ :  $dx = a \cos \theta d\theta$   
 When  $x = 0$ :  $\theta = 0$ ; When  $x = a$ :  $\theta = \pi/2$   
 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$   
 $= \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$   
 $= a^2 \cdot \frac{\pi}{4}$   
 કુલ ક્ષેત્રફળ =  $4 \times \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2$

## પ્રશ્ન 3 [4 ગુણ]

Find the પ્રમાણિત વિચલન of the following Data:

| વર્ગ    | 0-20 | 20-40 | 40-60 | 60-80 | 80-100 |
|---------|------|-------|-------|-------|--------|
| આવૃત્તિ | 12   | 38    | 42    | 23    | 5      |

જવાબ: 18.87

### જવાબ

| વર્ગ   | મધ્ય ક્રિમત ( $x_i$ ) | $f_i$ | $f_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i (x_i - \bar{x})^2$ |
|--------|-----------------------|-------|-----------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 0-20   | 10                    | 12    | 120       | -37             | 1369                | 16428                   |
| 20-40  | 30                    | 38    | 1140      | -17             | 289                 | 10982                   |
| 40-60  | 50                    | 42    | 2100      | 3               | 9                   | 378                     |
| 60-80  | 70                    | 23    | 1610      | 23              | 529                 | 12167                   |
| 80-100 | 90                    | 5     | 450       | 43              | 1849                | 9245                    |
| Total  |                       | 120   | 5420      |                 |                     | 49200                   |

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{5420}{120} = 45.17$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{49200}{120}} = \sqrt{410} = 18.87$$

## પ્રશ્ન Q.5 [14 ગુણ]

### પ્રશ્ન Q.5 (A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

## પ્રશ્ન 1 [3 ગુણ]

જો the મધ્યક of the following data is 100, તો શોધો the value of  $x$ :

|       |    |    |    |    |     |     |     |
|-------|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 92 | 93 | 97 | 98 | 102 | 104 | 109 |
| $f_i$ | 3  | 2  | 3  | 2  | $x$ | 3   | 3   |

જવાબ:  $x = 4$

### જવાબ

$$\sum f_i x_i = 3(92) + 2(93) + 3(97) + 2(98) + x(102) + 3(104) + 3(109) = 276 + 186 + 291 + 196 + 102x + 312 + 327 = 1588 + 102x$$

$$\sum f_i = 3 + 2 + 3 + 2 + x + 3 + 3 = 16 + x$$

$$\text{મદ્યક} = \frac{1588 + 102x}{16 + x} = 100$$

$$1588 + 102x = 100(16 + x) \quad 1588 + 102x = 1600 + 100x \quad 2x = 12 \quad x = 4$$

## પ્રશ્ન 2 [3 ગુણ]

Find the સરેરાશ વિચલન of the following data:

|       |   |   |    |    |    |    |    |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 4 | 8 | 11 | 17 | 20 | 24 | 32 |
| $f_i$ | 3 | 5 | 9  | 5  | 4  | 3  | 1  |

જવાબ: 5.47

### જવાબ

First શોધો mean:  $\bar{x} = \frac{3(4) + 5(8) + 9(11) + 5(17) + 4(20) + 3(24) + 1(32)}{30} = \frac{410}{30} = 13.67$

| $x_i$ | $f_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i  x_i - \bar{x} $ |
|-------|-------|-------------------|-----------------------|
| 4     | 3     | 9.67              | 29.01                 |
| 8     | 5     | 5.67              | 28.35                 |
| 11    | 9     | 2.67              | 24.03                 |
| 17    | 5     | 3.33              | 16.65                 |
| 20    | 4     | 6.33              | 25.32                 |
| 24    | 3     | 10.33             | 30.99                 |
| 32    | 1     | 18.33             | 18.33                 |
| Total | 30    |                   | 172.68                |

$$\text{સરેરાશ વિચલન} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{172.68}{30} = 5.76$$

## પ્રશ્ન 3 [3 ગુણ]

Find the પ્રમાણિત વિચલન of the following data:

120, 132, 148, 136, 142, 140, 165, 153 જવાબ: 13.86

### જવાબ

$$n = 8 \sum x_i = 120 + 132 + 148 + 136 + 142 + 140 + 165 + 153 = 1136$$

$$\text{મદ્યક } \bar{x} = \frac{1136}{8} = 142$$

| $x_i$        | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|--------------|-----------------|---------------------|
| 120          | -22             | 484                 |
| 132          | -10             | 100                 |
| 148          | 6               | 36                  |
| 136          | -6              | 36                  |
| 142          | 0               | 0                   |
| 140          | -2              | 4                   |
| 165          | 23              | 529                 |
| 153          | 11              | 121                 |
| <b>Total</b> |                 | <b>1310</b>         |

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1310}{8}} = \sqrt{163.75} = 12.80$$

## પ્રશ્ન Q.5 (B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો

## પ્રશ્ન 1 [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $xy dx + (1 + x^2)dy = 0$  જવાબ:

### જવાબ

ગોઠવતી:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1+x^2}$

This is a separable વિકલ સમીકરણ:  $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{1+x^2} dx$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2} dx$

$\ln|y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1$

$\ln|y| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = C_1$

$\ln|y\sqrt{1+x^2}| = C_1$

$y\sqrt{1+x^2} = C$  (where  $C = e^{C_1}$ )

અંતિમ જવાબ:  $y\sqrt{1+x^2} = C$

## પ્રશ્ન 2 [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sec x$  જવાબ:

### જવાબ

This is a linear વિકલ સમીકરણ in the form  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

Where  $P = \tan x$  and  $Q = \sec x$

સંકલ્યકરક અવધવ: I.F. =  $e^{\int \tan x dx} = e^{\ln|\sec x|} = \sec x$

સમીકરણને ગુણતા I.F.:  $\sec x \frac{dy}{dx} + y \sec x \tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(y \sec x) = \sec^2 x$

Integrate:  $y \sec x = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$

અંતિમ જવાબ:  $y = \sin x + C \cos x$

### ਪ੍ਰਸ਼ 3 [4 ਗੁਣ]

ਉਕਲੋ:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ ,  $y(2) = 1$  ਜਵਾਬ:

#### ਜਵਾਬ

ਗੋਡਿਤਾ:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

This is separable:  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

ਅਨੇ ਬਾਜੂ ਸੰਕਲਨ ਕਰਤਾ:  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C_1$

$\ln|y| + \ln|x| = C_1$

$\ln|xy| = C_1$

$xy = C$  (where  $C = e^{C_1}$ )

ਪ੍ਰਾਰਥਿਕ ਸ਼ਰਤਨੋ ਉਪਯੋਗ ਕਰੀਨੇ  $y(2) = 1$ :  $2 \times 1 = C$   $C = 2$

ਅੰਤਿਮ ਜਵਾਬ:  $xy = 2$  or  $y = \frac{2}{x}$

## Formula Cheat Sheet

### Matrix Operations

- પરિવર્તન:  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
- નિશ્ચાયક (2×2):  $|A| = ad - bc$  ફરી  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- વ્યસ્ત (2×2):  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- સહઅવયવજ (2×2):  $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

### Differentiation Rules

- Power Rule:**  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- સંકળ નિયમ:**  $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- ગુણકારનો નિયમ:**  $\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$
- ભાગાકારનો નિયમ:**  $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Logarithmic:**  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- Exponential:**  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- Trigonometric:**  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

### Integration Rules

- Power Rule:**  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  (for  $n \neq -1$ )
- Logarithmic:**  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- Exponential:**  $\int e^x dx = e^x + C$
- Trigonometric:**  $\int \sin x dx = -\cos x + C, \int \cos x dx = \sin x + C$
- Integration by Parts:**  $\int u dv = uv - \int v du$

### Differential Equations

- Separable:**  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
- Linear First Order:**  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$
- સંકલ્યકારક અવયવ:**  $I.F. = e^{\int P dx}$
- Solution:**  $y \cdot I.F. = \int Q \cdot I.F. dx$

### Statistics Formulas

- મધ્યક:**  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
- સરેરાશ વિચલન:**  $M.D. = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$
- પ્રમાણિત વિચલન:**  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$
- વિચરણ:**  $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$

### સમસ્યા ઉકેલવાની રણનીતિઓ

#### For Matrix Problems

- Order identification:** Count rows × columns
- પરિવર્તન:** Interchange rows and columns
- નિશ્ચાયક:** Use cofactor expansion for 3×3
- વ્યસ્ત:** Find determinant first, તો adjoint
- System solving:** Use  $X = A^{-1}B$  method

## For Differentiation

- Identify the rule:** Power, product, quotient, or chain
- Parametric:** Use  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$
- Implicit:** Differentiate both sides with respect to x
- Applications:** Velocity =  $\frac{ds}{dt}$ , Acceleration =  $\frac{d^2s}{dt^2}$

## For Integration

- Standard forms:** Memorize basic integrals
- Substitution:** ધારો કે  $u = \text{inner function}$
- By parts:** Use ILATE rule (વ્યસ્ત, Log, Algebraic, Trigonometric, Exponential)
- Definite integrals:** Apply limits after integration

## For Differential Equations

- Identify type:** Separable, linear, exact
- Linear:** Find P and Q, તો calculate I.F.
- Separable:** Separate variables and integrate
- Initial conditions:** Substitute to શોધો constants

## For Statistics

- Grouped data:** Use midpoint as representative value
- મદ્ધક:** Weight frequencies with values
- Deviation measures:** ગણતરી કરો mean first
- Standard deviation:** Square root of variance

## ટાળવા જેવી સામાન્ય ભૂલો

### Matrix Operations

- શ્રેણિક ગુણાકારના ક્રમમાં ભૂલ ન કરો ( $AB \neq BA$ )
- ગુણાકાર પહેલાં શ્રેણિકના પરિમાણ તપાસો
- ચાદ રાખો:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (reverse order)

### Differentiation

- Chain rule: અંદરના વિધયનું વિકલન ભૂલશો નહીં
- Product rule: બંને પદનો સમાવેશ કરો  $u'v + uv'$
- Parametric: સંકળ નિયમનો યોગ્ય રીતે ઉપયોગ કરો

### Integration

- સંકળન અચળાંક (+C) ભૂલશો નહીં
- In definite integrals, સીમાઓ યોગ્ય રીતે લગાડો
- Integration by parts: u અને dv સમજદારીપૂર્વક પસંદ કરો

### Differential Equations

- Separable: ચલનું સંપૂર્ણ અલગીકરણ નક્કી કરો
- સંકલ્યકારક અવયવની સાચી ગણતરી કરો
- પ્રારંભિક શરતોનો ઉપયોગ કરવાનું ભૂલશો નહીં

### Statistics

- વર્ગીકૃત અને અવર્ગીકૃત માહિતી માટે સાચા સૂત્રનો ઉપયોગ કરો
- વિચલન શોધતા પહેલા મદ્ધક ગણો
- પ્રમાણિત વિચલન માટે વિચલનનો વર્ગ કરો

## પરીક્ષા ટિપ્સ

1. સમય વિવરણાનાં: સમય ફાળવો 10-12 minutes per mark
2. પ્રશ્ન પસંદગી: શાણપણથી પસંદ કરો
3. ગણતરી બતાવો: સ્પષ્ટ રીતે લખો
4. એકમો તપાસો: Ensure proper units in word problems
5. ચકાસણી: જથું શક્ય હોય ન્યાં ચકાસણી કરો
6. સ્વરચ્છ રજૂઆત: સ્વરચ્છ અક્ષરો અને યોગ્ય ફોર્મેટિંગ
7. ફોર્મ્યુલા શીટ: મુખ્ય સૂત્રો યાદ રાખો
8. મહાવરો: પાછલા વર્ષના પ્રશ્નપત્રો નિયમિત ઉકેલો