# એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - વિન્ટર 2023 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જાન્યુઆરી 31, 2024

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

**નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.**

## પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

**શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ની કક્ષા (Order) ________ છે.**

**જવાબ**

**જવાબ:** (d) $2 \times 2$
**ઉકેલ:** શ્રેણિકમાં 2 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી તેની કક્ષા $2 \times 2$ છે.

## પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} =$ ________

**જવાબ**

**જવાબ:** (a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$
**ઉકેલ:**

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 3+5 \\ 6+5 & 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

**નીચેનામાંથી કયો ચોરસ શ્રેણિક છે?**

**જવાબ**

**જવાબ:** (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
**ઉકેલ:** ચોરસ શ્રેણિકમાં હાર અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય છે. માત્ર વિકલ્પ (c) માં $2 \times 2$ પરિમાણ છે.

## પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

**જો** $A = [3]$ **અને** $B = [4]$ **હોય તો** $A \cdot B =$ ______

**જવાબ**

**જવાબ:** (b) 12
**ઉકેલ:**

$$A \cdot B = [3] \times [4] = [3 \times 4] = [12] = 12$$

## પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx} \sin x =$ ______

**જવાબ**

**જવાબ:** (d) $\cos x$
**ઉકેલ:** $\sin x$ નું વિકલન $\cos x$ છે.

## પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

**જો** $f(x) = xe^x$ **હોય તો** $f'(0) =$ ______

**જવાબ**

**જવાબ:** (b) 1
**ઉકેલ:** ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$$f'(0) = e^0(1+0) = 1 \times 1 = 1$$

## પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

**જો** $y = x^2$ **હોય તો** $\frac{d^2y}{dx^2} =$ ______

**જવાબ**

**જવાબ:** (b) 2
**ઉકેલ:**

$$y = x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

## પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int \cos x dx =$ ______ $+c$

**જવાબ**

**જવાબ:** (a) $\sin x$
**ઉકેલ:**

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

## પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int_0^1 x dx =$ ________

**જવાબ**

**જવાબ:** (c) $\frac{1}{2}$
**ઉકેલ:**

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

## પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$ ________ $+c$

**જવાબ**

**જવાબ:** (a) $\tan^{-1} x$
**ઉકેલ:**

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

## પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

**વિકલ સમીકરણ $x \sin y + xy = x$ ની કક્ષા (Order) ________ છે**

**જવાબ**

**જવાબ:** (b) 1
**ઉકેલ:** સમીકરણને $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{\sin y}$ તરીકે લખી શકાય. સૌથી મોટું વિકલિત પ્રથમ કક્ષાનું છે.

## પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

**$\frac{dy}{dx} + y = x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.) ________ છે**

**જવાબ**

**જવાબ:** (d) $e^x$
**ઉકેલ:** $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે, સંકલ્પકારક અવયવ $= e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

## પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^2 =$ ________

**જવાબ**

**જવાબ:** (b) -1
**ઉકેલ:** વ્યાખ્યા મુજબ, $i^2 = -1$

## પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$(2+3i)(2-3i) =$ ________

**જવાબ**

**જવાબ:** (c) 13
**ઉકેલ:**

$$(2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$$

## પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

**જો** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$**,** $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ **અને** $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **હોય તો** $2A + 3B - C$ **શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B - C = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 32 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

**જો** $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ **અને** $N = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે** $(M+N)^T = M^T + N^T$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$M+N=\begin{bmatrix}1&4\\3&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&9\\0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&13\\3&12\end{bmatrix}$$

$$(M+N)^T=\begin{bmatrix}7&3\\13&12\end{bmatrix}$$

$$M^T=\begin{bmatrix}1&3\\4&7\end{bmatrix},\quad N^T=\begin{bmatrix}6&0\\9&5\end{bmatrix}$$

$$M^T+N^T=\begin{bmatrix}1&3\\4&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0\\9&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\13&12\end{bmatrix}$$

તેથી, $(M+N)^T=M^T+N^T$ સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

**વિકલ સમીકરણ ઉકેલો:** $x\frac{dy}{dx}+y=xy$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$x\frac{dy}{dx}+y=xy$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=y$$

$$\frac{dy}{dx}=y-\frac{y}{x}=y\left(1-\frac{1}{x}\right)=y\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

ચલ અલગ કરતા (Separating variables):

$$\frac{dy}{y}=\frac{x-1}{x}dx$$

સંકલન કરતા:

$$\ln|y|=\int\frac{x-1}{x}dx=\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=x-\ln|x|+C$$

$$y=Ae^{x-\ln|x|}=A\frac{e^x}{x}$$

## પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

**શ્રેણિક પદ્ધતિથી સમીકરણો** $2x+3y=8$, $3x+4y=11$ **ઉકેલો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** શ્રેણિક સ્વરૂપમાં લખતા: $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$ શોધતા:

$$|A| = 2(4) - 3(3) = 8 - 9 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 + 33 \\ 24 - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

તેથી: $x = 1, y = 2$

## પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

**જો** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **અને** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે** $(AB)^T = B^T A^T$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(AB)^T = B^T A^T$ સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

**જો** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે** $A^2 - 4A + 7I = O$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$7I = 7\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix}1 & 12\\-4 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 12\\-4 & 8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = O$$

સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

**વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી $f(x) = e^x$ નું વિકલિત શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

કારણ કે $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ તેથી: $f'(x) = e^x$

## પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

**જો $y = \log(\sin x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$y = \log(\sin x)$$

સાંકળ નિયમ (Chain rule) નો ઉપયોગ કરતા:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

## પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

**કિંમત શોધો:** $\int \left(4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$\int \left(4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x}\right) dx$$

$$= \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx$$
$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \ln |x| + C$$
$$= x^4 + x^3 + 2 \ln |x| + C$$

## પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

**જો $y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.**

જવાબ

**ઉકેલ:**

$$y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[e^{\tan x}] + \frac{d}{dx}[\log(\sin x)]$$

પ્રથમ પદ માટે: $\frac{d}{dx}[e^{\tan x}] = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$ બીજા પદ માટે: $\frac{d}{dx}[\log(\sin x)] = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$
તેથી: $\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x + \cot x$

## પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

**એક કણની ગતિનું સમીકરણ $s = t^4 + 3t$ છે. તો $t = 2$ સેકન્ડે તેનો વેગ અને પ્રવેગ શોધો.**

જવાબ

**ઉકેલ:** આપેલ છે: $s = t^4 + 3t$
વેગ: $v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 3$ $t = 2$ સમયે: $v = 4(2)^3 + 3 = 4(8) + 3 = 32 + 3 = 35$ એકમ/સેકન્ડ
પ્રવેગ: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2$ $t = 2$ સમયે: $a = 12(2)^2 = 12(4) = 48$ એકમ/સેકન્ડ□

## પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

**વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.**

જવાબ

**ઉકેલ:**

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

નિર્ણાયક બિંદુઓ (Critical points) માટે: $f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ અથવા $x = -1$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$x = -1$ પર: $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$ (મહત્તમ) $x = 2$ પર: $f''(2) = 12(2) - 6 = 18 > 0$ (ન્યૂનતમ)

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$ (મહત્તમ) $f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$ (ન્યૂનતમ)
**મહત્તમ કિંમત:** 12 ($x = -1$ પર) **ન્યૂનતમ કિંમત:** -15 ($x = 2$ પર)

## પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

**કિંમત શોધો:** $\int xe^x dx$

**જવાબ**

**ઉકેલ:** ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int udv = uv - \int vdu$
ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$

$$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

## પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

**કિંમત શોધો:** $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-\frac{4x^2}{9})}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{1-(\frac{2x}{3})^2}}$$

ધારો કે $\frac{2x}{3} = \sin\theta$, તેથી $x = \frac{3\sin\theta}{2}$, $dx = \frac{3\cos\theta}{2}d\theta$

$$= \int \frac{\frac{3\cos\theta}{2}d\theta}{3\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \frac{\frac{3\cos\theta}{2}d\theta}{3\cos\theta} = \int \frac{1}{2}d\theta = \frac{\theta}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

## પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

**$\frac{1-i}{1+i}$ નો અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$-i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\overline{-i} = i$ છે.

## પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

**કિંમત શોધો:** $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$

**જવાબ**

**ઉકેલ:** ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$
ગુણધર્મ: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ નો ઉપયોગ કરતા,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(\pi/2-x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2-x)}+\sqrt{\sin(\pi/2-x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી: $I = \frac{\pi}{4}$

## પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

**વર્તુળ $x^2+y^2=a^2$ નું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** વર્તુળ $x^2+y^2=a^2$ માટે, $y = \pm\sqrt{a^2-x^2}$
વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $4\times$ પ્રથમ ચરણમાં ક્ષેત્રફળ

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

ધારો કે $x = a\sin\theta$, $dx = a\cos\theta d\theta$ જ્યારે $x=0$, $\theta=0$; જ્યારે $x=a$, $\theta=\pi/2$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} \cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$$

## પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

**સાદુરૂપ આપો:** $\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^4\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)^5}{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^3\cdot(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)}$

**જવાબ**

**ઉકેલ:** દ-દમ્વારેના પ્રમેય (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતા: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
અંશ:

$$(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4 \cdot (\cos\theta - i\sin\theta)^5$$
$$= (\cos 12\theta + i\sin 12\theta) \cdot (\cos(-5\theta) + i\sin(-5\theta))$$
$$= \cos(12\theta - 5\theta) + i\sin(12\theta - 5\theta)$$
$$= \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$

છેદ:

$$(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^3 \cdot (\cos 12\theta + i\sin 12\theta)$$
$$= (\cos(-6\theta) + i\sin(-6\theta)) \cdot (\cos 12\theta + i\sin 12\theta)$$
$$= \cos(-6\theta + 12\theta) + i\sin(-6\theta + 12\theta)$$
$$= \cos 6\theta + i\sin 6\theta$$

પરિણામ:

$$\frac{\cos 7\theta + i\sin 7\theta}{\cos 6\theta + i\sin 6\theta} = \cos(7\theta - 6\theta) + i\sin(7\theta - 6\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

## પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

**જો $(3x-7) + 2iy = 5y + (5+x)i$ હોય તો x અને y ની કિંમત શોધો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$(3x-7) + 2iy = 5y + (5+x)i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ: $3x - 7 = 5y$ ... (1) કાલ્પનિક ભાગ: $2y = 5 + x$ ... (2)
સમીકરણ (2) પરથી: $x = 2y - 5$ ... (3)
(1) માં (3) મુકતા:

$$3(2y-5) - 7 = 5y$$
$$6y - 15 - 7 = 5y$$
$$6y - 22 = 5y \Rightarrow y = 22$$

(3) પરથી: $x = 2(22) - 5 = 44 - 5 = 39$
તેથી: $x = 39, y = 22$

## પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

$z = 1 + \sqrt{3}i$ **ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

માનાંક: $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
કોણાંક: $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
ધ્રુવીય સ્વરૂપ: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

## પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

**$\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$ ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** પ્રથમ છેદનું સાદુરૂપ આપીએ:

$$(3+2i)(5-3i) = 15 - 9i + 10i - 6i^2 = 15 + i - 6(-1) = 15 + i + 6 = 21 + i$$

$$\frac{4+2i}{21+i} = \frac{(4+2i)(21-i)}{(21+i)(21-i)} = \frac{84 - 4i + 42i - 2i^2}{21^2 - i^2} = \frac{84 + 38i + 2}{441 + 1} = \frac{86 + 38i}{442}$$
$$= \frac{86}{442} + \frac{38}{442}i = \frac{43}{221} + \frac{19}{221}i$$

## પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

**કોઈપણ બે લખો.**

## પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

**વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.
અહીં: $P = 2$, $Q = 3e^x$
સંકલ્પકારક અવયવ: $\mu = e^{\int P dx} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$
સમીકરણને $\mu$ વડે ગુણતા:

$$e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{2x} \cdot e^x = 3e^{3x}$$

આ આપે છે: $\frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 3e^{3x}$
બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$ye^{2x} = \int 3e^{3x}dx = 3 \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C = e^{3x} + C$$

તેથી: $y = \frac{e^{3x}+C}{e^{2x}} = e^x + Ce^{-2x}$

## પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

**વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$**

**જવાબ**

**ઉકેલ:** ધારો કે $v = x + y$, તેથી $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$
તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$
મૂળ સમીકરણમાં મુકતા:

$$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

ચલ અલગ કરતા:

$$\frac{dv}{v^2 + 1} = dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dv}{v^2 + 1} = \int dx$$

$$\tan^{-1}(v) = x + C$$

$$v = \tan(x + C)$$

પાછું મુકતા: $x + y = \tan(x + C)$ તેથી: $y = \tan(x + C) - x$

## પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

### વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$, $y(0) = 2$

**જવાબ**

**ઉકેલ:** આ પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$
અહીં: $P = \frac{1}{x}$, $Q = e^x$
સંકલ્પકારક અવયવ: $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$ (માટે $x > 0$)
સમીકરણને $\mu = x$ વડે ગુણતા:

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^x$$

આ આપે છે: $\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$
બંને બાજુ સંકલન કરતા (ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરીને):

$$xy = \int xe^x dx$$

$\int xe^x dx$ માટે: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$$

તેથી: $xy = e^x(x - 1) + C$

$$y = \frac{e^x(x - 1) + C}{x}$$

પ્રારંભિક શરત $y(0) = 2$ નો ઉપયોગ કરતા: અહીં શૂન્ય વડે ભાગાકારની સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. સમીકરણનો ઉકેલ $x = 0$ ની નજીક વધુ કાળજીપૂર્વક શોધવો પડે.
સામાન્ય ઉકેલ માટે: $y = e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{C}{x}$