

Applied Mathematics (4320001) - Summer 2024 Solution

Milav Dabgar

June 25, 2024

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

ખાલી જગ્યા પૂરો

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ની કક્ષા = _____ છે જવાબ: (b) 2×3

જવાબ

શ્રેણિકમાં 2 હાર અને 3 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા 2×3 છે.

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $\begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ તો $x =$ _____ જવાબ: (d) 8

જવાબ

સમાન શ્રેણિક માટે, અનુરૂપ ઘટકો સમાન હોવા જોઈએ: $x - 3 = 5$ $x = 8$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ નો સહઅવયવજ શ્રેણિક = _____ જવાબ: (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

જવાબ

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ માટે $\text{adj} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

કોઈપણ ચોરસ શ્રેણિક A માટે, $(A^{-1})^{-1} =$ _____ જવાબ: (b) A

જવાબ

વ્યસ્ત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા મુજબ: $(A^{-1})^{-1} = A$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx} \log x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: (b) } \frac{1}{x}$$

જવાબ

લઘુગણકનું વિકલન: $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: (d) } 0$$

જવાબ

 $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ (અચળ) તેથી, $\frac{d}{dx} (\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = 0$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

$$\text{જો } x = a \cos \theta, y = a \sin \theta \text{ તો } \frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: (a) } -\cot \theta$$

જવાબ

$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\cot \theta$$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$$\int 5x^4 dx = \underline{\hspace{2cm}} + c \text{ જવાબ: (d) } x^5$$

જવાબ

$$\int 5x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^5}{5} = x^5 + c$$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int_0^1 e^x dx = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: (a) } e - 1$$

જવાબ

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int_{-1}^1 3x^2 - 2x + 1 dx = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: (c) 4}$$

જવાબ

$$\int_{-1}^1 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_{-1}^1 = (1 - 1 + 1) - (-1 - 1 - 1) = 1 - (-3) = 4$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y = x \text{ ની કક્ષા } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: (d) 1}$$

જવાબ

કક્ષા એ ઉચ્ચતમ વિકલિત છે. અહીં, ફક્ત પ્રથમ વિકલિત $\frac{dy}{dx}$ છે, તેથી કક્ષા = 1.

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} + 3y = x \text{ નો સંકલ્પકારક અવયવ } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: (d) } e^{3x}$$

જવાબ

સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે, સંકલ્પકારક અવયવ = $e^{\int P dx}$ અહીં $P = 3$, તેથી I.F. = $e^{\int 3 dx} = e^{3x}$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$$\text{પ્રથમ દસ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: (a) 5.5}$$

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{1+2+3+\dots+10}{10} = \frac{55}{10} = 5.5$$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$$\text{માહિતી 17, 15, 25, 34, 32 નો વિસ્તાર } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: (d) 19}$$

જવાબ

$$\text{વિસ્તાર} = \text{મહત્તમ} - \text{ન્યૂનતમ} = 34 - 15 = 19$$

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ તો $A + A^T + I$ શોધો.

જવાબ

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A + A^T + I &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A + 7I_2 = 0$ જવાબ: સાબિત

જવાબ

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \\
 4A &= 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \\
 7I_2 &= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\
 A^2 - 4A + 7I_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \checkmark
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $dy - 3x^2e^{-y}dx = 0$ જવાબ: $e^y = x^3 + C$

જવાબ

$$dy - 3x^2 e^{-y} dx = 0 \quad dy = 3x^2 e^{-y} dx \quad e^y dy = 3x^2 dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int e^y dy = \int 3x^2 dx \quad e^y = x^3 + C$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો જવાબ: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/14 & 1/14 & -1/14 \\ -9/14 & -7/14 & 11/14 \\ -5/14 & -5/14 & 1/2 \end{bmatrix}$

જવાબ

ધારો કે $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

સૌપ્રથમ, $\det(A)$ શોધો: $\det(A) = 3(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) - (-1)(4 \cdot 1 - (-1) \cdot 5) + 2(4 \cdot 0 - 1 \cdot 5) = 3(1) + 1(9) + 2(-5) = 3 + 9 - 10 = 2$
 $\det(A) \neq 0$ હોવાથી, વ્યસ્ત શ્રેણિક અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

સહઅવયવ અને સહઅવયવજ શ્રેણિક શોધતા: $C_{11} = 1, C_{12} = -9, C_{13} = -5, C_{21} = 1, C_{22} = -7, C_{23} = -5, C_{31} = -1, C_{32} = 11, C_{33} = 7$

$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 11 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 11 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

જો $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ અને $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ તો AB શોધો. જવાબ: $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

જવાબ

સમીકરણોનો સરવાળો કરતા: $(A + B) + (A - B) = 2A \quad 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

સમીકરણોની બાદબાકી કરતા: $(A + B) - (A - B) = 2B \quad 2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]

શ્રેણિકની મદદથી સુરેખ સમીકરણ સંહિતિ $2x + 3y = 1$, $y - 4x = 2$ ઉકેલો. જવાબ: $x = -\frac{1}{11}$, $y = \frac{13}{11}$

જવાબ

સમીકરણ સંહિતિને $AX = B$ તરીકે લખી શકાય: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 2(1) - 3(-4) = 2 + 12 = 14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Therefore: } x = -\frac{5}{14}, y = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Wait, MDX answer says $x = -1/11, y = 13/11$. Let's check the calculation in the MDX text. MDX Solution

says: $X = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}$ So $x = -5/14, y = 8/14 = 4/7$. But MDX Answer block says: $x = -1/11, y = 13/11$. There

is a contradiction in the source MDX. Let's calculate $\det(A)$ for $2x + 3y = 1$ and $y - 4x = 2 \Rightarrow -4x + y = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}. \det = 2 - (-12) = 14. A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}. X = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1-6 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

So $x = -5/14, y = 4/7$. The MDX Answer block is wrong or describes a different problem. MDX says:

****Answer****: $x = -\frac{1}{11}, y = \frac{13}{11}$ ****Solution****: ... Therefore: $x = -\frac{5}{14}, y = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

I must follow the "Solution" part for the body, but usually checking what to do with the "Answer" block. The workflow says "Strict Fidelity". I will copy EXACTLY what is in MDX, including the contradiction. However, I will trust the computation in the Solution block for the steps. I'll just copy the text as is.

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]

વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = e^x$ નું વિકલિત શોધો. જવાબ: $f'(x) = e^x$

જવાબ

$$\text{વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]

જો $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ તો સાબિત કરો કે $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ જવાબ: સાબિત

જવાબ

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

$$x \text{ ની સાપેક્ષે વિકલન કરતા: } \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \checkmark$$

પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx$ જવાબ: $x - \ln|\sec x + \tan x| + C$

જવાબ

$$\text{ધારો કે } I = \int \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$\text{અંશ અને છેદને } (\sec x - \tan x) \text{ વડે ગુણતા: } I = \int \frac{\tan x(\sec x - \tan x)}{(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)} dx = \int \frac{\tan x(\sec x - \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x} dx = \int \frac{\tan x(\sec x - \tan x)}{1} dx$$

$$= \int (\tan x \sec x - \tan^2 x) dx = \int \tan x \sec x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx = \sec x - \tan x + x + C$$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]

જો $e^x + e^y = e^{x+y}$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો. જવાબ: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(e^y - 1)}{e^y(e^x - 1)}$

જવાબ

$$e^x + e^y = e^{x+y}$$

$$x \text{ ની સાપેક્ષે વિકલન કરતા: } e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) e^x + e^y \frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^{x+y} \frac{dy}{dx}$$

$$\text{પુનઃગોઠવણી કરતા: } e^x - e^{x+y} = e^{x+y} \frac{dy}{dx} - e^y \frac{dy}{dx} e^x - e^{x+y} = \frac{dy}{dx} (e^{x+y} - e^y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{x+y}}{e^{x+y} - e^y} = \frac{e^x(1 - e^y)}{e^y(e^x - 1)} = \frac{e^x(e^y - 1)}{e^y(e^x - 1)}$$

પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

$y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ માટે, સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$. જવાબ: સાબિત

જવાબ

$$y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$$

$$\text{હવે સમીકરણ ચકાસતા: } \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x}) = 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x} = (18 - 6 - 12)e^{3x} + (12 + 6 - 18)e^{-2x} = 0 \cdot e^{3x} + 0 \cdot e^{-2x} = 0 \checkmark$$

પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

એક ગતિમાન કણનું ગતિ સમીકરણ $s = t^3 + 3t$, $t > 0$ છે, ક્યારે વેગ અને પ્રવેગ સમાન થશે? જવાબ: At $t = 1$ second

જવાબ

આપેલ છે: $s = t^3 + 3t$

વેગ: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 3$ પ્રવેગ: $a = \frac{dv}{dt} = 6t$

વેગ = પ્રવેગ માટે: $3t^2 + 3 = 6t$ $3t^2 - 6t + 3 = 0$ $t^2 - 2t + 1 = 0$ $(t - 1)^2 = 0$ $t = 1$
તેથી, $t = 1$ સેકન્ડે વેગ અને પ્રવેગ સમાન છે.

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ જવાબ: $-2 \cos \sqrt{x} + C$

જવાબ

ધારો કે $u = \sqrt{x}$, તો $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, તેથી $dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin u}{u} \cdot 2u du = 2 \int \sin u du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ જવાબ: $\frac{\pi}{4}$

જવાબ

$$\text{Let } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\text{ગુણધર્મ } \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \text{ નો ઉપયોગ કરતા: } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2-x)} + \sqrt{\sin(\pi/2-x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$\text{બંને પદોનો સરવાળો કરતા: } 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{તેથી: } I = \frac{\pi}{4}$$

પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યક શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 1. આવૃત્તિ વિતરણ

Age	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
Staff	5	7	9	11	10	8	6	4

જવાબ: Mean = 37.5 years

કોષ્ટક 2. મધ્યક ગણતરી

Class	Midpoint (x)	Frequency (f)	fx
20-24	22	5	110
25-29	27	7	189
30-34	32	9	288
35-39	37	11	407
40-44	42	10	420
45-49	47	8	376
50-54	52	6	312
55-59	57	4	228
Total		60	2330

$$\text{Mean} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2330}{60} = 38.83 \text{ years}$$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$ જવાબ: $\frac{\pi}{12}$

જવાબ

ધારો કે $u = x^3$, તો $du = 3x^2 dx$, તેથી $x^2 dx = \frac{1}{3} du$ જ્યારે $x = 0$, $u = 0$; જ્યારે $x = 1$, $u = 1$
 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{3} [\tan^{-1} u]_0^1 = \frac{1}{3} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

વક્ર $y = x^2$, X -અક્ષ અને $x = 2$ દ્વારા આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો જવાબ: ક્ષેત્રફળ = $\frac{8}{3}$ ચોરસ એકમ

જવાબ

આ પ્રદેશ $y = x^2$, $y = 0$ (X -અક્ષ), $x = 0$ અને $x = 2$ થી ઘેરાયેલો છે
ક્ષેત્રફળ = $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$ ચોરસ એકમ

પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

નીચેના સતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 3. Grouped Data

Class	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	5	8	15	16	6

જવાબ: Standard deviation = 10.95

કોષ્ટક 4. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

Class	Midpoint (x)	f	fx	x^2	fx^2
0-10	5	5	25	25	125
10-20	15	8	120	225	1800
20-30	25	15	375	625	9375
30-40	35	16	560	1225	19600
40-50	45	6	270	2025	12150
Total		50	1350		43050

$$\text{Mean } \bar{x} = \frac{1350}{50} = 27$$

$$\text{Variance} = \frac{\sum fx^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{43050}{50} - (27)^2 = 861 - 729 = 132$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{132} = 11.49$$

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

જો 25 અવલોકનોનો મધ્યક 50 હોય અને બીજા 75 અવલોકનોનો મધ્યક 60 હોય. બધા અવલોકનોને ધ્યાનમાં લેતા મિશ્ર મધ્યક શોધો. જવાબ: મિશ્ર મધ્યક = 57.5

જવાબ

$$\text{મિશ્ર મધ્યક} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{25 \times 50 + 75 \times 60}{25 + 75} = \frac{1250 + 4500}{100} = \frac{5750}{100} = 57.5$$

પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલન શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 5. Frequency Distribution

x_i	3	4	5	6	7	8
f_i	1	3	7	5	2	2

જવાબ: સરેરાશ વિચલન = 1.1

કોષ્ટક 6. સરેરાશ વિચલન ગણતરી

x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
3	1	3	2	2
4	3	12	1	3
5	7	35	0	0
6	5	30	1	5
7	2	14	2	4
8	2	16	3	6
Total	20	110		20

$$\text{Mean } \bar{x} = \frac{110}{20} = 5.5$$

$$\text{મધ્યક} = 5.5 \text{ થી વિચલન લેતા: સરેરાશ વિચલન} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{20}{20} = 1.1$$

પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

નીચેના માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

120, 132, 148, 136, 142, 140, 165, 153 જવાબ: પ્રમાણિત વિચલન = 13.36

જવાબ

કોષ્ટક 7. માહિતી કોષ્ટક

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
120	-19.5	380.25
132	-7.5	56.25
148	8.5	72.25
136	-3.5	12.25
142	2.5	6.25
140	0.5	0.25
165	25.5	650.25
153	13.5	182.25
Total	0	1360

$$n = 8, \sum x = 1116 \text{ Mean } \bar{x} = \frac{1116}{8} = 139.5$$

$$\text{Variance} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{1360}{8} = 170$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{170} = 13.04$$

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \tan x \cdot \tan y = 0$ જવાબ: $\ln |\cos y| = \ln |\cos x| + C$ or $\cos y = A \cos x$

જવાબ

$$\frac{dy}{dx} + \tan x \cdot \tan y = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\tan x \cdot \tan y \quad \frac{dy}{\tan y} = -\tan x dx \quad \cot y dy = -\tan x dx$$

$$\text{બંને બાજુ સંકલન કરતા: } \int \cot y dy = -\int \tan x dx \quad \ln |\sin y| = \ln |\cos x| + C_1 \quad \ln |\sin y| - \ln |\cos x| = C_1 \quad \ln \left| \frac{\sin y}{\cos x} \right| = C_1$$

$$\text{ઘાતાંકીય લેતા: } \frac{\sin y}{\cos x} = C \text{ (where } C = e^{C_1}) \quad \sin y = C \cos x$$

$$\text{વૈકલ્પિક સ્વરૂપ: } \cos y = A \cos x \text{ જ્યાં } A \text{ અચળ છે.}$$

પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

$$\text{ઉકેલો: } \frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x \text{ જવાબ: } y = e^x + Ce^{-2x}$$

જવાબ

$$\text{આ } \frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે. જ્યાં } P = 2 \text{ અને } Q = 3e^x$$

$$\text{સંકલ્પકારક અવયવ: } I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

$$\text{સમીકરણને } e^{2x} \text{ વડે ગુણતા: } e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{3x}$$

$$\text{ડાબી બાજુ } ye^{2x} \text{ નું વિકલન છે: } \frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 3e^{3x}$$

$$\text{બંને બાજુ સંકલન કરતા: } ye^{2x} = \int 3e^{3x} dx = e^{3x} + C$$

$$\text{તેથી: } y = e^x + Ce^{-2x}$$

પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

$$\text{ઉકેલો: } dy + 4xy^2 dx = 0; y(0) = 1 \text{ જવાબ: } y = \frac{1}{1+2x^2}$$

જવાબ

$$dy + 4xy^2 dx = 0 \quad dy = -4xy^2 dx \quad \frac{dy}{y^2} = -4x dx$$

$$\text{બંને બાજુ સંકલન કરતા: } \int y^{-2} dy = \int -4x dx \quad -\frac{1}{y} = -2x^2 + C \quad \frac{1}{y} = 2x^2 - C$$

$$\text{પ્રારંભિક શરત } y(0) = 1 \text{ નો ઉપયોગ કરતા: } \frac{1}{1} = 2(0)^2 - C \quad 1 = -C \quad C = -1$$

$$\text{તેથી: } \frac{1}{y} = 2x^2 + 1 \quad y = \frac{1}{2x^2+1}$$

સૂત્રો

શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ

- શ્રેણિક સરવાળા/બાદબાકી: અનુરૂપ ઘટકોનો સરવાળો/બાદબાકી
- શ્રેણિક ગુણાકાર: $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$
- પરિવર્ત શ્રેણિક: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
- નિશ્ચાયક (2×2): $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$
- વ્યસ્ત શ્રેણિક (2×2): $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- સહઅવયવજ શ્રેણિક (2×2): $\text{adj} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

વિકલન સૂત્રો

- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

- $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
- સાંકળ નિયમ: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- ગુણાકારનો નિયમ: $(uv)' = u'v + uv'$
- ભાગાકારનો નિયમ: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

સંકલન સૂત્રો

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (for $n \neq -1$)
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$
- ખંડશ: સંકલન: $\int u dv = uv - \int v du$

વિકલ સમીકરણો

- વિયોજનીય ચલ: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
- સુરેખ વિકલ સમીકરણ: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, ઉકેલ: $y \cdot I.F. = \int Q \cdot I.F. dx$
- સંકલ્યકારક અવયવ: $I.F. = e^{\int P dx}$

આંકડાશાસ્ત્ર સૂત્રો

- મધ્યક: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ (અવર્ગીકૃત), $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ (વર્ગીકૃત)
- સરેરાશ વિચલન: $M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$ (અવર્ગીકૃત), $M.D. = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i}$ (વર્ગીકૃત)
- પ્રમાણિત વિચલન: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (અવર્ગીકૃત)
- વિચરણ: $\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$
- વિસ્તાર: મહત્તમ કિંમત - ન્યૂનતમ કિંમત
- મિશ્ર મધ્યક: $\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$