એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2024 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જૂન 26, 2024

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **ની કક્ષા (Order) ______ છે.**

જવાબ

જવાબ: (b) 3 × 2
ઉકેલ: શ્રેણિકની કક્ષા (હાર) × (સ્તંભ) દ્વારા આપવામાં આવે છે શ્રેણિક A માં 3 હાર અને 2 સ્તંભ છે તેથી, કક્ષા = 3 × 2

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ **હોય તો** $A^{-1} =$ ______

જવાબ

જવાબ: (d) A^T
ઉકેલ: લાંબિક શ્રેણિક (orthogonal matrices) માટે, $A^{-1} = A^T$ કેમ કે $AA^T = I$, આપણને $A^{-1} = A^T$ મળે છે.

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$ ______

જવાબ

જવાબ: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$

ઉકેલ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1(-1)+2(2) & 1(6)+2(1) \\ 5(-1)+0(2) & 5(6)+0(1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 6+2 \\ -5+0 & 30+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ **હોય તો** $A^T =$ ______

જવાબ

જવાબ: (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ઉકેલ: શ્રેણિકનો પરિવર્ત (transpose) હાર અને સ્તંભની અદલાબદલી કરીને મેળવવામાં આવે છે.

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(4^x) =$ ______

જવાબ

જવાબ: (a) $4^x \log_e 4$

ઉકેલ: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ તેથી, $\frac{d}{dx}(4^x) = 4^x \ln 4 = 4^x \log_e 4$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) =$ ______

જવાબ

જવાબ: (b) 0

ઉકેલ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ) $\frac{d}{dx}(1) = 0$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $x = \sin\theta, y = \cos\theta$ **હોય તો** $\frac{dy}{dx} =$ ______

જવાબ

જવાબ: (d) $-\cot\theta$
ઉકેલ: $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta = -\cot\theta$$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int x^7 dx =$ _____

જવાબ

જવાબ: (c) $\frac{x^8}{8}$
ઉકેલ: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int_{-2}^{2} x^5 dx =$ _____

જવાબ

જવાબ: (b) 0
ઉકેલ: x^5 એ અયુગ્મ (odd) વિધેય છે. અયુગ્મ વિધેયો માટે, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ તેથી, $\int_{-2}^{2} x^5 dx = 0$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$ _____

જવાબ

જવાબ: (d) $\log|\sin x|$
ઉકેલ: ધારો કે $u = \sin x$, તેથી $du = \cos x dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x| + c$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + y = 0$ ની કક્ષા (order) _____ છે

જવાબ

જવાબ: (a) 3
ઉકેલ: વિકલ સમીકરણની કક્ષા એટલે તેમાં રહેલા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષા. ઉચ્ચતમ વિકલિત $\frac{d^3y}{dx^3}$ છે, તેથી કક્ષા = 3

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y = 3x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (integrating factor) ______ છે

જવાબ

જવાબ: (c) e^x
ઉકેલ: સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે સંકલ્પકારક અવયવ = $e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^7 =$ ______

જવાબ

જવાબ: (b) $-i$
ઉકેલ: $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$\arg(1+i) =$ ______

જવાબ

જવાબ: (c) $\frac{\pi}{4}$
ઉકેલ: $\arg(a+bi) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ $\arg(1+i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(A+B)^T = A^T + B^T$

જવાબ

ઉકેલ:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(A+B)^T = A^T + B^T$ ✓**સાબિત થયું**

પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **હોય તો દર્શાવો કે** $A \cdot A^{-1} = I$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, A^{-1} શોધો: $|A| = 1(3) - 1(2) = 3 - 2 = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

હવે $A \cdot A^{-1} = I$ ચકાસીએ:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(3)+1(-2) & 1(-1)+1(1) \\ 2(3)+3(-2) & 2(-1)+3(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark\textbf{સાબિત થયું}$$

પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $xdy + ydx = 0$ **ઉકેલો.**

જવાબ

ઉકેલ: $xdy + ydx = 0$ $xdy = -ydx$ $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$
બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1$$

$$\ln|y| + \ln|x| = c_1$$

$$\ln|xy| = c_1$$

$$|xy| = e^{c_1} = c \quad \text{(જ્યાં } c = e^{c_1} \text{ અચળાંક છે)}$$

તેથી, $xy = \pm c$ અથવા $xy = k$ જ્યાં k એક સ્વૈર અચળાંક છે.

પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **હોય તો દર્શાવો કે** $A^2 - 5A + 7I = 0$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, A^2 ગણો:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(3)+1(-1) & 3(1)+1(2) \\ -1(3)+2(-1) & -1(1)+2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

હવે $5A$ ગણો:

$$5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

તથા $7I$:

$$7I = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

હવે $A^2 - 5A + 7I = 0$ ચકાસીએ:

$$A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$ ✓**સાબિત થયું**

પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **હોય તો સાબિત કરો કે adj** $A = A$

જવાબ

ઉકેલ: adj A શોધવા માટે, આપણે સહઅવયવ શ્રેણિક શોધવો પડશે અને પછી તેનો પરિવર્ત કરવો પડશે.

સહઅવયવો (Cofactors): $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0(3) - 1(4) = -4$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(1(3) - 1(4)) = -(3-4) = 1$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 0(4) = 4$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -((-3)(3) - (-3)(4)) = -(-9+12) = -3$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4)(3) - (-3)(4) = -12 + 12 = 0$$
$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -((-4)(4) - (-3)(4)) = -(-16 + 12) = -(-4) = 4$$
$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-3)(0) = -3$$
$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -((-4)(1) - (-3)(1)) = -(-4 + 3) = -(-1) = 1$$
$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(0) - (-3)(1) = 0 + 3 = 3$$

સહઅવયવ શ્રેણિક = $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = (\text{સહઅવયવ શ્રેણિક})^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark \textbf{સાબિત થયું}$$

પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને નીચેના સુરેખ સમીકરણો ઉકેલો: $3x + 2y = 5$, $2x - y = 1$

જવાબ

ઉકેલ: સમીકરણોને $AX = B$ તરીકે લખી શકાય: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 3(-1) - 2(2) = -3 - 4 = -7$ શોધો.

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7}(5) + \frac{2}{7}(1) \\ \frac{2}{7}(5) - \frac{3}{7}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5+2}{7} \\ \frac{10-3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

તેથી, $x = 1, y = 1$

પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને x^5 નું x પ્રત્યે વિકલન શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વ્યાખ્યા અનુસાર: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$f(x) = x^5$ માટે:

$$\frac{d}{dx}(x^5) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5x^4\end{aligned}$$

તેથી, $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
અહીં, $u = x^2 - 1$, $v = x^2 + 1$ $\frac{du}{dx} = 2x$, $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[(x^2+1) - (x^2-1)]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[x^2+1-x^2+1]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x\cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

તેથી, $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

સંકલન શોધો: $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}dx$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, બહુપદી ભાગાકાર કરતા:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} = 1 + \frac{3x+6}{x^2+2x}$$

$$\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}dx = \int \left(1+\frac{3x+6}{x^2+2x}\right)dx$$
$$= \int 1dx + \int \frac{3x+6}{x^2+2x}dx$$
$$= x + \int \frac{3x+6}{x(x+2)}dx$$

બીજા સંકલન માટે: $\frac{3x+6}{x(x+2)} = \frac{3(x+2)}{x(x+2)} = \frac{3}{x}$

$$\int \frac{3x+6}{x(x+2)}dx = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln|x| + c$$

તેથી: $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}dx = x + 3\ln|x| + c$

પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

જો $y = \log(\sec x + \tan x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $y = \log(\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x)$$
$$= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x}$$
$$= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

તેથી, $\frac{dy}{dx} = \sec x$

પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

જો $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$
પ્રથમ વિકલિત: $\frac{dy}{dx} = 2(3e^{3x}) + 3(-2e^{-2x}) = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$
દ્વિતીય વિકલિત: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(3e^{3x}) - 6(-2e^{-2x}) = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$

હવે સમીકરણ ચકાસીએ: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y$

$$= (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x})$$
$$= 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x}$$
$$= e^{3x}(18 - 6 - 12) + e^{-2x}(12 + 6 - 18)$$
$$= e^{3x}(0) + e^{-2x}(0) = 0 \quad \checkmark \textbf{સાબિત થયું}$$

પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 11$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $f(x) = x^3 - 3x + 11$
પ્રથમ વિકલિત: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$
નિર્ણાયક બિંદુઓ માટે, $f'(x) = 0$ લેતા: $3(x - 1)(x + 1) = 0$ $x = 1$ અથવા $x = -1$
દ્વિતીય વિકલિત: $f''(x) = 6x$
$x = 1$ આગળ: $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ $x = -1$ આગળ: $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ સ્થાનીય મહત્તમ
વિધેયની કિંમતો: $x = 1$ આગળ: $f(1) = 1^3 - 3(1) + 11 = 1 - 3 + 11 = 9$ $x = -1$ આગળ: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 11 = -1 + 3 + 11 = 13$
તેથી:

- **સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત = 13 (જ્યાં $x = -1$)**
- **સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત = 9 (જ્યાં $x = 1$)**

પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $u = \log x$, તેથી $du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \int \cos u \, du = \sin u + c$$

પાછું મુકતા: $u = \log x$
તેથી, $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \sin(\log x) + c$

પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int x \sin x \, dx$

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
ધારો કે $u = x$ અને $dv = \sin x\,dx$ તેથી $du = dx$ અને $v = -\cos x$

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

તેથી, $\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + c$

પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

જો $(2x-y)+2yi = 6+4i$ હોય તો x અને y શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $(2x-y)+2yi = 6+4i$
વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ: $2x - y = 6$ ... (1) કાલ્પનિક ભાગ: $2y = 4$ ... (2)
સમીકરણ (2) પરથી: $y = 2$
સમીકરણ (1) માં મુકતા: $2x - 2 = 6$ $2x = 8$ $x = 4$
તેથી, $x = 4$ **અને** $y = 2$

પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

વક્ર $y = x^2$, રેખાઓ $x = 1$, $x = 2$ અને X-અક્ષ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: માગેલ ક્ષેત્રફળ નીચે મુજબ છે:

$$A = \int_1^2 x^2\,dx$$
$$A = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$
$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{7}{3} \text{ ચોરસ એકમ}$$

તેથી, **ક્ષેત્રફળ = $\frac{7}{3}$ ચોરસ એકમ**

પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

નિયત સંકલન $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x+\csc x} dx$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x+\csc x} dx$
$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec(\pi/2 - x)}{\sec(\pi/2 - x) + \csc(\pi/2 - x)} dx$$

કારણ કે $\sec(\pi/2 - x) = \csc x$ અને $\csc(\pi/2 - x) = \sec x$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\csc x + \sec x} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\sec x + \csc x} dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x + \csc x}{\sec x + \csc x} dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી, $I = \frac{\pi}{4}$
જવાબ: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x+\csc x} dx = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

જો $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = 1$

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ છે: $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$
જમણી બાજુ કરણી લેતા (Rationalizing):

$$\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\alpha + i\beta = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: $\alpha = \frac{a}{a^2+b^2}$ અને $\beta = -\frac{b}{a^2+b^2}$
હવે $\alpha^2 + \beta^2$ ગણતા:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2}$$

તેથી: $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a^2 + b^2) = 1$ ✓**સાબિત થયું**

પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $\frac{2+3i}{3+2i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા અને માનાંક શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, સંકર સંખ્યાને સાદુરૂપ આપીએ:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+2i} &= \frac{2+3i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}\\ &= \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\\ &= \frac{6-4i+9i-6i^2}{9-4i^2}\\ &= \frac{6+5i-6(-1)}{9-4(-1)}\\ &= \frac{6+5i+6}{9+4} = \frac{12+5i}{13}\end{aligned}$$

તેથી $\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$

અનુબદ્ધ કરણી (Conjugate): $\overline{\frac{2+3i}{3+2i}} = \frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$

માનાંક (Modulus): $\left|\frac{2+3i}{3+2i}\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{144}{169}+\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = \sqrt{1} = 1$$

પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-4}(\cos\theta-i\sin\theta)^{-5}}{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{7}}$

જવાબ

ઉકેલ: દ-મદ-પ્રેમય (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતા: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta+i\sin n\theta$

વળી, $\cos\theta-i\sin\theta = \cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

$(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-4} = \cos(-12\theta)+i\sin(-12\theta)$

$(\cos\theta-i\sin\theta)^{-5} = (\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^{-5} = \cos(5\theta)+i\sin(5\theta)$

$(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{7} = (\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta))^{7} = \cos(-14\theta)+i\sin(-14\theta)$

તેથી:

$$\begin{aligned}&\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^{-4}(\cos\theta-i\sin\theta)^{-5}}{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^{7}}\\ &= \frac{[\cos(-12\theta)+i\sin(-12\theta)][\cos(5\theta)+i\sin(5\theta)]}{\cos(-14\theta)+i\sin(-14\theta)}\\ &= \frac{\cos(-12\theta+5\theta)+i\sin(-12\theta+5\theta)}{\cos(-14\theta)+i\sin(-14\theta)}\\ &= \frac{\cos(-7\theta)+i\sin(-7\theta)}{\cos(-14\theta)+i\sin(-14\theta)}\end{aligned}$$

$$= \cos(-7\theta + 14\theta) + i\sin(-7\theta + 14\theta)$$
$$= \cos(7\theta) + i\sin(7\theta)$$

પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $1 + \sqrt{3}i$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

જવાબ

ઉકેલ: સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ માટે, ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ છે.
અહીં, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$
માનાંક (Modulus): $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
કોણાંક (Argument): $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
તેથી, ધ્રુવીય સ્વરૂપ છે: $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\tan y\,dx + \tan x\sec^2 y\,dy = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $\tan y\,dx + \tan x\sec^2 y\,dy = 0$
પદો અલગ કરતા: $\tan y\,dx = -\tan x\sec^2 y\,dy$
$\frac{dx}{\tan x} = -\frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y}$
$\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\frac{dy}{\sin y\cos y}$
$\cot x\,dx = -\frac{dy}{\sin y\cos y}$
કારણ કે $\frac{1}{\sin y\cos y} = \frac{2}{2\sin y\cos y} = \frac{2}{\sin 2y}$:
$\cot x\,dx = -\frac{2dy}{\sin 2y}$
બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int\cot x\,dx = -2\int\csc(2y)\,dy$
$\ln|\sin x| = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln|\csc(2y) + \cot(2y)|\right) + c$
$\ln|\sin x| = \ln|\csc(2y) + \cot(2y)| + c$
તેથી: $\sin x\cdot[\csc(2y) + \cot(2y)] = k$ જ્યાં k એક અચળાંક છે.

પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$

જવાબ

ઉકેલ: $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$
x વડે ભાગતા: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$
આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $P = -\frac{1}{x}$ અને $Q = x$
સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.): $I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$
સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા: $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 1$
આને આમ લખી શકાય: $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = 1$
સંકલન કરતા: $\frac{y}{x} = x + c$
તેથી: $y = x^2 + cx$

પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$**,** $y(0) = 3$

જવાબ

ઉકેલ: આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$
અહીં, $P = \frac{1}{x}$, $Q = e^x$
સંકલ્પકારક અવયવ: $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$ (ધારો કે $x > 0$)
સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા: $x\frac{dy}{dx} + y = xe^x$
આને આમ લખી શકાય: $\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$
બંને બાજુ સંકલન કરતા: $xy = \int xe^x dx$
ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા $\int xe^x dx$: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$
તેથી: $xy = e^x(x-1) + c$
તેથી: $y = \frac{e^x(x-1)+c}{x}$
સામાન્ય ઉકેલ: $y = \frac{e^x(x-1)+c}{x}$ **જ્યાં** $x \neq 0$