

Applied Mathematics (4320001) - સરવાળોmer 2022 Solution

Milav Dabgar

August 23, 2022

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ તો $A^2 = \dots\dots\dots$ જવાબ: (c) $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1(1) + 2(3) & 1(2) + 2(4) \\ 3(1) + 4(3) & 3(2) + 4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ તો $2A - 2I = \dots\dots\dots$ જવાબ: (a) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$2I = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$2A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ તો $\text{Adj } A = \dots\dots\dots$ જવાબ: (a) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$

જવાબ

For a 2×2 matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
 $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

શ્રેણિકની કક્ષા $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 20 & 41 & 0 \\ 15 & 4 & 30 & 40 & 1 \\ 25 & 6 & 40 & 39 & 2 \\ 35 & 8 & 50 & 38 & 3 \end{bmatrix}$ is જવાબ: (b) 4×5

જવાબ

શ્રેણિકમાં 4 હાર અને 5 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા 4×5 છે.

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \dots\dots\dots$ જવાબ: (d) 0

જવાબ

કારણ કે $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ)
 $\frac{d}{dx}(1) = 0$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો $f(x) = \log x$ તો $f'(1) = \dots\dots\dots$ જવાબ: (a) 1

જવાબ

$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
 $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $x^2 + y^2 = a^2$ તો $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$ જવાબ: (b) $-\frac{x}{y}$

જવાબ

બંને બાજુ x ની સાપેક્ષે વિકલન કરતા: $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$$\int x^2 dx = \dots\dots\dots \text{જવાબ: (b) } \frac{x^3}{3}$$

જવાબ

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int e^{x \log a} dx = \dots\dots\dots \text{જવાબ: (d) } \frac{a^x}{\log a}$$

જવાબ

$$e^{x \log a} = a^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int \cot x dx = \dots\dots\dots \text{જવાબ: (a) } \log |\sin x|$$

જવાબ

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

ધારો કે $u = \sin x$, તો $du = \cos x dx$. $\int \frac{du}{u} = \log |u| + c = \log |\sin x| + c$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણની કક્ષા } \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^4 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 = 0 \text{ is } \dots\dots\dots \text{જવાબ: (b) } 2$$

જવાબ

અહીં ઉચ્ચતમ વિકલિત $\frac{d^2 y}{dx^2}$ છે, જે દ્વિતીય વિકલિત છે. માટે, the order is 2.

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

$$\text{સંકલ્પકારક અવયવ of વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} + y = 3x \text{ is } \dots\dots\dots \text{જવાબ: (c) } e^x$$

જવાબ

$$\text{સુરેખ વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ માટે, જ્યાં } P = 1. \text{ સંકલ્પકારક અવયવ } = e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

જો given data is 6, 9, 7, 3, 8, 5, 4, 8, 7 and 8 તો mean is જવાબ: (b) 6.5

જવાબ

મધ્યક = $\frac{\text{સરવાળો of all values}}{\text{Number of values}}$

સરવાળો = $6 + 9 + 7 + 3 + 8 + 5 + 4 + 8 + 7 + 8 = 65$

Number of values = 10. મધ્યક = $\frac{65}{10} = 6.5$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

The mean value of first eight natural numbers is જવાબ: (b) 4.5

જવાબ

પ્રથમ આઠ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. સરવાળો = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ મધ્યક = $\frac{36}{8} = 4.5$

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $(M + N)^T = M^T + N^T$

જવાબ

$$M + N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(M + N)^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, N^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^T + N^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

માટે, $(M + N)^T = M^T + N^T$. સાબિત.

પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $A^2 - 5A + 7I = 0$

જવાબ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 5A &= 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \\
 7I &= 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\
 A^2 - 5A + 7I &= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8 - 15 + 7 & 5 - 5 + 0 \\ -5 + 5 + 0 & 3 - 10 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{માટે, } A^2 - 5A + 7I &= 0. \text{ સાબિત.}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

ઉકેલો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + x^2 e^{-y} = 0$

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -x^2 e^{-y} \Rightarrow e^y dy = -x^2 dx \\
 \text{બંને બાજુ સંકલન કરતા: } \int e^y dy &= \int -x^2 dx \\
 e^y &= -\frac{x^3}{3} + C \\
 y &= \log \left(-\frac{x^3}{3} + C \right)
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો $-5y + 3x = 1$, $x + 2y - 4 = 0$ શ્રેણિકની મદદથી

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \text{સમીકરણોને ફરીથી લખતા: } 3x - 5y &= 1 \quad x + 2y = 4 \\
 \text{શ્રેણિક સ્વરૂપમાં: } \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 \text{ધારો કે } A &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 |A| &= 3(2) - (-5)(1) = 6 + 5 = 11 \\
 A^{-1} &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 + 20 \\ -1 + 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \text{માટે, } x &= 2, y = 1
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

જો $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ તો find $(AB)^{-1}$

જવાબ

$$\text{સમીકરણોનો સરવાળો કરતા: } 2A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{બાદબાકી કરતા: } (A + B) - (A - B) = 2B \quad 2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = (-2)(-6) - (-2)(0) = 12$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]

જો $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ તો સાબિત કરો કે $\text{adj } B = B$

જવાબ

3×3 શ્રેણિક માટે, આપણે સહઅવયવ શ્રેણિક શોધીને તેનો પરિવર્ત કરવો પડશે.

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4, C_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1, C_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3, C_{22} = + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, C_{23} = - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, C_{32} = - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, C_{33} = + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{Cofactor matrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } B = (\text{Cofactor matrix})^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Since $\text{adj } B = B$. સાબિત.

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]

જો $y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ તો find $\frac{dy}{dx}$

જવાબ

ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
 ધારો કે $u = 1 + \tan x$, $v = 1 - \tan x$. $\frac{du}{dx} = \sec^2 x$, $\frac{dv}{dx} = -\sec^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\tan x)(\sec^2 x) - (1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x - \tan x \sec^2 x + \sec^2 x + \tan x \sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

$$= \frac{2 \sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]

જો $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ તો find $\frac{dy}{dx}$

જવાબ

$\frac{dx}{dt} = a(1 + \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 + \cos t)} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$
 Using the identity $\sin t = 2 \sin(t/2) \cos(t/2)$ and $1 + \cos t = 2 \cos^2(t/2)$:
 $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \cos^2(t/2)} = \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)} = \tan(t/2)$

પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$

જવાબ

રીત 1: આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરતા ધારો કે $u = \sin x$, તો $du = \cos x \, dx$. When $x = 0$, $u = 0$; when $x = \pi/2$, $u = 1$.
 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \int_0^1 u \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$
 રીત 2: દ્વિ-ખૂણાના નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતા $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/2}$
 $= -\frac{1}{4} [\cos \pi - \cos 0] = -\frac{1}{4} [-1 - 1] = \frac{1}{2}$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]

જો $y = (\sin x)^{\tan x}$ તો find $\frac{dy}{dx}$

જવાબ

બંને બાજુ લઘુગણક લેતા: $\ln y = \tan x \ln(\sin x)$

બંને બાજુ વિકલન કરતા: $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sec^2 x \ln(\sin x) + \tan x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sec^2 x \ln(\sin x) + \tan x \cot x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sec^2 x \ln(\sin x) + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y[\sec^2 x \ln(\sin x) + 1]$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\tan x} [\sec^2 x \ln(\sin x) + 1]$$

પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

શોધો maximum and minimum value of $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

જવાબ

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

નિર્ણાયક બિંદુઓ માટે: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ or $x = -1$

$$f''(x) = 12x - 6$$

At $x = -1$: $f''(-1) = -12 - 6 = -18 < 0$ (Maximum) At $x = 2$: $f''(2) = 24 - 6 = 18 > 0$ (Minimum)

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$$

$$f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$$

મહત્તમ કિંમત = 12 at $x = -1$ ન્યૂનતમ કિંમત = -15 at $x = 2$

પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

The motion of a particle is given by $S = t^3 + 6t^2 + 3t + 5$. શોધો the velocity and acceleration at $t = 3$ sec.

જવાબ

$$\text{સ્થાન: } S = t^3 + 6t^2 + 3t + 5$$

$$\text{વેગ: } v = \frac{dS}{dt} = 3t^2 + 12t + 3$$

$$\text{પ્રવેગ: } a = \frac{dv}{dt} = 6t + 12$$

$$\text{At } t = 3: \text{ વેગ: } v(3) = 3(9) + 12(3) + 3 = 27 + 36 + 3 = 66 \text{ units/sec}$$

$$\text{પ્રવેગ: } a(3) = 6(3) + 12 = 18 + 12 = 30 \text{ units/sec}^2$$

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો $\int x^2 e^x dx$

જવાબ

ખંડશ: સંકલનની રીતનો બે વાર ઉપયોગ કરતા: ધારો કે $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

For $\int 2x e^x dx$: ધારો કે $u_1 = 2x$, $dv_1 = e^x dx \Rightarrow du_1 = 2 dx$, $v_1 = e^x$

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$$

$$\text{માટે: } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

$$\text{કિંમત શોધો } \int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} dx$$

જવાબ

$$\text{આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતનો ઉપયોગ કરતા: } \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$2x + 3 = A(x + 2) + B(x - 1)$$

$$\text{Setting } x = 1: 5 = 3A \Rightarrow A = \frac{5}{3} \quad \text{Setting } x = -2: -1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{5/3}{x-1} + \frac{1/3}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{5}{3} \ln |x-1| + \frac{1}{3} \ln |x+2| + C \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

શોધો mean using the given information

જવાબ

કોષ્ટક 1. આવૃત્તિ વિતરણ

x_i	52	55	58	62	79
f_i	5	3	2	3	6

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\sum f_i x_i = 52(5) + 55(3) + 58(2) + 62(3) + 79(6) = 260 + 165 + 116 + 186 + 474 = 1201$$

$$\sum f_i = 5 + 3 + 2 + 3 + 6 = 19$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{1201}{19} = 63.21$$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

$$\text{કિંમત શોધો } \int_{-1}^1 \frac{x^5 - 6x}{x-4} dx$$

જવાબ

$$\text{સૌપ્રથમ બહુપદી ભાગાકાર કરતા: } \frac{x^5 - 6x}{x-4} = x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 64x + 250 + \frac{1000}{x-4}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^5 - 6x}{x-4} dx = \int_{-1}^1 \left(x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 64x + 250 + \frac{1000}{x-4} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{16x^3}{3} + 32x^2 + 250x + 1000 \ln |x-4| \right]_{-1}^1$$

$$\text{At } x = 1: \frac{1}{5} + 1 + \frac{16}{3} + 32 + 250 + 1000 \ln 3 \quad \text{At } x = -1: -\frac{1}{5} + 1 - \frac{16}{3} + 32 - 250 + 1000 \ln 5$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{32}{3} + 500 + 1000 \ln \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{6+160+1500}{15} + 1000 \ln \frac{3}{5} = \frac{1666}{15} + 1000 \ln \frac{3}{5}$$

પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

ક્રિમત શોધો $\int \sin 5x \sin 6x \, dx$

જવાબ

ગુણાકાર-સરવાળાના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા: $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
 $\sin 5x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 6x) - \cos(5x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(11x)] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos(11x)]$
 $\int \sin 5x \sin 6x \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos(11x)] \, dx$
 $= \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{\sin(11x)}{11} \right] + C$
 $= \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin(11x)}{22} + C$

પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

Calculate the પ્રમાણિત વિચલન for the following data: 6, 7, 9, 11, 13, 15, 8, 10

જવાબ

Data: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15 (arranged in order) $n = 8$
 Step 1: ગણતરી મધ્યક $\bar{x} = \frac{6+7+8+9+10+11+13+15}{8} = \frac{79}{8} = 9.875$

Step 2: વિચલન અને તેના વર્ગની ગણતરી

કોષ્ટક 2. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	-3.875	15.016
7	-2.875	8.266
8	-1.875	3.516
9	-0.875	0.766
10	0.125	0.016
11	1.125	1.266
13	3.125	9.766
15	5.125	26.266

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 64.878$$

$$\text{Step 3: ગણતરી પ્રમાણિત વિચલન } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{64.878}{8}} = \sqrt{8.11} = 2.85$$

પ્રમાણિત વિચલન = 2.85

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

શોધો the mean for the following data:

જવાબ

કોષ્ટક 3. Data

X_i	92	93	97	98	102	104
F_i	3	2	2	3	6	4

$$\begin{aligned}\text{મધ્યક} &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ \sum f_i x_i &= 92(3) + 93(2) + 97(2) + 98(3) + 102(6) + 104(4) = 276 + 186 + 194 + 294 + 612 + 416 = 1978 \\ \sum f_i &= 3 + 2 + 2 + 3 + 6 + 4 = 20 \\ \text{મધ્યક} &= \frac{1978}{20} = 98.9\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

Calculate the પ્રમાણિત વિચલન for the following data: 5, 9, 8, 12, 6, 10, 6, 8

જવાબ

Data: 5, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 12 (arranged in order) $n = 8$

Step 1: ગણતરી મધ્યક $\bar{x} = \frac{5+6+6+8+8+9+10+12}{8} = \frac{64}{8} = 8$

Step 2: ગણતરી પ્રમાણિત વિચલન

કોષ્ટક 4. Deviations

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	-3	9
6	-2	4
6	-2	4
8	0	0
8	0	0
9	1	1
10	2	4
12	4	16

$$\begin{aligned}\sum (x_i - \bar{x})^2 &= 38 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{38}{8}} = \sqrt{4.75} = 2.18 \\ \text{પ્રમાણિત વિચલન} &= 2.18\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

Calculate the મધ્યક for the following data: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 75

જવાબ

$$n = 11$$

$$\text{સરવાળો} = 5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 + 65 + 75 + 85 + 95 + 75 = 575$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{575}{11} = 52.27$$

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$, $y(0) = 2$

જવાબ

This is a first-order linear વિકલ સમીકરણ of the form $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

Here, $P = \frac{1}{x}$ and $Q = e^x$

Integrating Factor: $\mu = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ (for $x > 0$)

Multiplying the equation by $\mu = x$: $x \frac{dy}{dx} + y = x e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) = x e^x$

બંને બાજુ સંકલન કરતા: $xy = \int x e^x dx$

માટે ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરતા $\int x e^x dx$: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1)$

માટે: $xy = e^x(x - 1) + C$

$y = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$

Final Answer: $y = e^x + \frac{1}{x}$ (subject to domain restrictions)

પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{x^2+1}y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

જવાબ

This is a first-order linear વિકલ સમીકરણ. $P = \frac{4x}{x^2+1}$, $Q = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

Integrating Factor: $\mu = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{4x}{x^2+1} dx}$

ધારો કે $u = x^2 + 1$, તો $du = 2x dx$. $\int \frac{4x}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln u = 2 \ln(x^2 + 1)$

$\mu = e^{2 \ln(x^2+1)} = (x^2 + 1)^2$

Multiplying the equation by μ : $(x^2 + 1)^2 \frac{dy}{dx} + 4x(x^2 + 1)y = 1$

This can be written as: $\frac{d}{dx}[y(x^2 + 1)^2] = 1$

Integrating: $y(x^2 + 1)^2 = x + C$

$y = \frac{x+C}{(x^2+1)^2}$

પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

જવાબ

ધારો કે $v = x + y$, તો $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

મૂળ સમીકરણમાં કિંમત મૂકતા: $\frac{dv}{dx} - 1 = \sin v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 1 + \sin v$

ચલ વિયોજન કરતા: $\frac{dv}{1+\sin v} = dx$

ડાબી બાજુનું સંકલન કરવા માટે, નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{1}{1+\sin v} = \frac{1-\sin v}{(1+\sin v)(1-\sin v)} = \frac{1-\sin v}{\cos^2 v}$

$\int \frac{dv}{1+\sin v} = \int \frac{1-\sin v}{\cos^2 v} dv = \int (\sec^2 v - \sec v \tan v) dv$

$= \tan v - \sec v + C_1$

માટે: $\tan(x + y) - \sec(x + y) = x + C$

સૂત્રો

- શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ: $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- Differentiation: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$, $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$

- **Integration:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\int e^x dx = e^x$, $\int \sin x dx = -\cos x$
- **Differential Equations:** Linear DE $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, IF $\mu = e^{\int P dx}$
- **અિક્ષણશાસ્ત્ર:** મધ્યક $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$, SD $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$