

Applied Mathematics (4320001) - Summer 2023 Solution

Milav Dabgar

August 02, 2023

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, તો $A^T = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

શ્રેણિકના પરિવર્ત માટે, હાર એ સ્તંભ અને સ્તંભ એ હાર બને છે. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ -7 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, તો $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: c. (5, 3)

જવાબ

અનુરૂપ ઘટકોની સરખામણી કરતા: $x+y=8 \dots (1)$ $x-y=2 \dots (2)$
સમીકરણ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતા: $2x=10 \Rightarrow x=5$ સમીકરણ (1) માં કિંમત મૂકતા: $5+y=8 \Rightarrow y=3$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

જો $\begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \end{bmatrix}$, તો $y = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: c. 3

જવાબ

શ્રેણિક ગુણાકાર કરતા: $2x+9=15 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$ $2y+6=12 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ની કક્ષા _____ છે જવાબ: b. 3×2

જવાબ

શ્રેણિકમાં 3 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા 3×2 છે.

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 3) = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: b. $2x + 2$

જવાબ

ઘાત ના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 3) = 2x + 2 + 0 = 2x + 2$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: a. $\sec x \cdot \tan x$

જવાબ

પ્રમાણિત વિકલિત: $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $x^2 + y^2 = 1$, તો $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: b. $-\frac{x}{y}$

જવાબ

ગૂઠ વિકલન કરતા: $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ માટે: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int \log x \, dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$ જવાબ: b. $x \log x - x$

જવાબ

ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$ જવાબ: b. $-\frac{1}{x}$

જવાબ

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + c$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: a. } \frac{8}{3}$$

જવાબ

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 6y = 0 \text{ ની કક્ષા } \underline{\hspace{2cm}} \text{ અને પરિમાણ } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: a. 2, 3}$$

જવાબ

$$\text{કક્ષા} = \text{ઉચ્ચતમ વિકલિત} = 2 \text{ પરિમાણ} = \text{ઉચ્ચતમ વિકલિતની ઘાત} = 3$$

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x \text{ નો સંકલ્પકારક અવયવ } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: c. } \sin x$$

જવાબ

પુનઃગોઠવણી કરતા: $\frac{dy}{dx} - y \tan x = e^x$ આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ છે જ્યાં $P = -\tan x$. સંકલ્પકારક અવયવ = $e^{\int -\tan x dx} = e^{-\ln|\sec x|} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$.
જો કે, આપેલ જવાબ (c) $\sin x$ છે. ચાલો પ્રશ્ન ધ્યાનથી વાંચીએ. "વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ ..." "આ પ્રમાણિત સુરેખ સ્વરૂપમાં નથી." "MDX ઉકેલ મુજબ હું ચોક્કસ અનુસરણ કરીશ."

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે જવાબ: c. 3}$$

જવાબ

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ: 1, 2, 3, 4, 5 મધ્યક} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$$\text{જો અવલોકનો 15, 7, 6, a, 3 નો મધ્યક 7 હોય, તો } a = \underline{\hspace{2cm}} \text{ જવાબ: b. 4}$$

જવાબ

$$\frac{15+7+6+a+3}{5} = 7 \quad 31 + a = 35 \Rightarrow a = 4$$

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, તો શોધો $2A - B + C$

જવાબ

$$\begin{aligned} 2A &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ 2A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ 2A - B + C &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 12 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, તો સાબિત કરો કે $(A + B)^T = A^T + B^T$

જવાબ

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\ (A + B)^T &= \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \\ A^T &= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ A^T + B^T &= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{માટે, } (A + B)^T &= A^T + B^T \checkmark \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

ઉકેલો: $(x + y)dy = dx$

જવાબ

$$(x + y)dy = dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x + y \quad \frac{dx}{dy} - x = y$$

આ x માં સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે. સંકલ્યકારક અવયવ $= e^{\int -1dy} = e^{-y}$

$$e^{-y} \cdot x = \int ye^{-y}dy$$

$$\text{Using integration by parts: } \int ye^{-y}dy = -ye^{-y} - \int -e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} = -e^{-y}(y + 1)$$

$$\text{માટે: } xe^{-y} = -e^{-y}(y + 1) + C \quad x = -(y + 1) + Ce^y$$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ તો સાબિત કરો કે } A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

જવાબ

$$\text{સૌપ્રથમ, } A^2 \text{ ગણો: } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \checkmark$$

પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ તો શોધો } A^{-1}$$

જવાબ

સહઅવયવજ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતા: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$

$$|A| = 1(0 - 3) - 2(0 - 3) + 1(2 - 1) = -3 + 6 + 1 = 4$$

સહઅવયવ શોધતા: $C_{11} = -3, C_{12} = 3, C_{13} = 1, C_{21} = 1, C_{22} = -1, C_{23} = 1, C_{31} = 5, C_{32} = -1, C_{33} = -3$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણો $2x + 3y = 7$ અને $4x = 9 + y$ ઉકેલો

જવાબ

ફરીથી લખતા: $2x + 3y = 7$ અને $4x - y = 9$

$$\text{શ્રેણિક સ્વરૂપમાં: } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-1) - 3(4) = -2 - 12 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -34 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{માટે: } x = \frac{34}{14} = \frac{17}{7}, y = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]

જો $y = x^x$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

બંને બાજુ લઘુગણક લેતા: $\ln y = x \ln x$

બંને બાજુ વિકલન કરતા: $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]

જો $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+a^2}) \\ \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+a^2}) &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

જો $y = \operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x$, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો

જવાબ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) \\ &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = 0\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]

Differentiate $y = \cos x$ using the definition

જવાબ

વ્યાખ્યા મુજબ: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ \text{નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં: } \cos(x+h) &= \cos x \cos h - \sin x \sin h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} = \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \\ \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 &= -\sin x\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો

જવાબ

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 8x + 5 \\ f'(x) = 0 \text{ હેતુ: } 3x^2 - 8x + 5 &= 0 \Rightarrow (3x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ or } x = 1 \\ f''(x) &= 6x - 8 \\ \text{At } x = 1: f''(1) &= 6(1) - 8 = -2 < 0 \text{ (Maximum) At } x = \frac{5}{3}: f''\left(\frac{5}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{3}\right) - 8 = 2 > 0 \text{ (Minimum)} \\ \text{મહત્તમ કિંમત: } f(1) &= 1 - 4 + 5 + 7 = 9 \text{ ન્યૂનતમ કિંમત: } f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7 = \frac{158}{27}\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

જો $y = (\tan^{-1} x)^2$, તો સાબિત કરો કે $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$

જવાબ

$$y = (\tan^{-1} x)^2 \Rightarrow y_1 = \frac{dy}{dx} = 2(\tan^{-1} x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + (\tan^{-1} x) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{4x(\tan^{-1} x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{હવે ડાબી બાજુ કિંમત મૂકતા: } (1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = (1+x^2) \cdot \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{(1+x^2)^2} + 2x(1+x^2) \cdot \frac{2(\tan^{-1} x)}{1+x^2} = \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{1+x^2} + 4x(\tan^{-1} x) = \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2+4x^3(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$$

Wait, let me re-evaluate the substitution carefully. LHS = $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1$. Note that the standard textbook problem is usually $(1+x^2)^2y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$. However, the question says $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1$. Let's see if $(1+x^2)y_1 = 2\tan^{-1} x$. Diff again: $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = \frac{2}{1+x^2}$. Multiply by $(1+x^2)$: $(1+x^2)^2y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$. The question likely meant $(1+x^2)^2y_2$ OR it meant $(1+x^2)y_2 + 2xy_1$ equal to something else. BUT, looking at the MDX solution: The MDX solution ends with: " $= \frac{2}{1+x^2} \cdot (1+x^2) = 2$ ". This implies the term was indeed forming 2. Let's check the MDX step: " $= \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{1+x^2} + 4x(\tan^{-1} x)$ " " $= \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2}$ " This algebra seems weird in the MDX. $4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)$ would not cancel $-4x(\tan^{-1} x)$ cleanly unless x^2 term is handled. Calculated value: $\frac{2-4x\tan^{-1} x+4x\tan^{-1} x+4x^3\tan^{-1} x}{1+x^2}$. This is not 2.

There is a discrepancy in the MDX algebra or the question statement. However, User requires strict fidelity to the MDX text. "Migrate the ****EXACT**** text content from MDX to LaTeX." I will copy the MDX solution steps exactly, even if they look mathematically dubious, as per instructions. MDX text: $= \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot (1+x^2) = 2 \checkmark$

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

સંકલન કરો: $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$

જવાબ

ધારો કે $u = x^6$, તો $du = 6x^5 dx$, તેથી $x^5 dx = \frac{1}{6} du$

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{6} \tan^{-1}(x^6) + C$$

પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

સંકલન કરો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

જવાબ

$$\text{ધારો કે } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

ગુણધર્મ $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ નો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)} + \sqrt{\cos(\pi/2-x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\text{બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા: } 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{માટે: } I = \frac{\pi}{4}$$

પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

જો નીચેની માહિતીનો મધ્યક 19 હોય, તો ખૂટતી આવૃત્તિ શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 1. આવૃત્તિ વિતરણ

| | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 6 | 10 | 14 | 18 | 24 | 28 | 30 |
| f_i | 2 | 4 | 7 | f | 8 | 4 | 3 |

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = 19$$

$$\sum f_i = 2 + 4 + 7 + f + 8 + 4 + 3 = 28 + f \quad \sum f_i x_i = 2(6) + 4(10) + 7(14) + f(18) + 8(24) + 4(28) + 3(30)$$

$$= 12 + 40 + 98 + 18f + 192 + 112 + 90 = 544 + 18f$$

$$\frac{544 + 18f}{28 + f} = 19 \quad 544 + 18f = 19(28 + f) \quad 544 + 18f = 532 + 19f \quad 12 = f$$

$$\text{માટે, } f = 12$$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

સંકલન કરો: $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$

જવાબ

$$\text{આંશિક અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરતા: } \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$

$$\text{Setting } x = -1: -1 = A(1) \Rightarrow A = -1 \quad \text{Setting } x = -2: -2 = B(-1) \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{(x+2)^2}{x+1} \right| + C$$

પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

સંકલન કરો: $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$

જવાબ

$$\text{ધારો કે } u = x^3, \text{ તો } du = 3x^2 dx, \text{ તેથી } x^2 dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx = \int \frac{\tan^{-1} u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$\text{ધારો કે } v = \tan^{-1} u, \text{ તો } dv = \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{3} \int v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^2}{2} + C = \frac{(\tan^{-1} u)^2}{6} + C$$

$$= \frac{(\tan^{-1} x^3)^2}{6} + C$$

પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો: 10, 15, 7, 19, 9, 21, 23, 25, 26, 30

જવાબ

સૌપ્રથમ, મધ્યક શોધો: $\bar{x} = \frac{10+15+7+19+9+21+23+25+26+30}{10} = \frac{185}{10} = 18.5$

પ્રમાણિત વિચલન માટેનું કોષ્ટક:

કોષ્ટક 2. પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

| x_i | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-----------------|---------------------|
| 10 | -8.5 | 72.25 |
| 15 | -3.5 | 12.25 |
| 7 | -11.5 | 132.25 |
| 19 | 0.5 | 0.25 |
| 9 | -9.5 | 90.25 |
| 21 | 2.5 | 6.25 |
| 23 | 4.5 | 20.25 |
| 25 | 6.5 | 42.25 |
| 26 | 7.5 | 56.25 |
| 30 | 11.5 | 132.25 |

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 564.5$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{564.5}{10}} = \sqrt{56.45} = 7.51$$

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 3. માહિતી

| x_i | 4 | 8 | 11 | 17 | 20 | 24 | 32 |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|
| f_i | 3 | 5 | 9 | 5 | 4 | 3 | 1 |

$$N = \sum f_i = 3 + 5 + 9 + 5 + 4 + 3 + 1 = 30$$

$$\text{મધ્યક ગણતરી: } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3(4)+5(8)+9(11)+5(17)+4(20)+3(24)+1(32)}{30} = \frac{12+40+99+85+80+72+32}{30} = \frac{420}{30} = 14$$

પ્રમાણિત વિચલનનું કોષ્ટક:

કોષ્ટક 4. પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

| x_i | f_i | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-------|-----------------|---------------------|------------------------|
| 4 | 3 | -10 | 100 | 300 |
| 8 | 5 | -6 | 36 | 180 |
| 11 | 9 | -3 | 9 | 81 |
| 17 | 5 | 3 | 9 | 45 |
| 20 | 4 | 6 | 36 | 144 |
| 24 | 3 | 10 | 100 | 300 |
| 32 | 1 | 18 | 324 | 324 |

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1374}{30}} = \sqrt{45.8} = 6.77$$

પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 5. વર્ગીકૃત માહિતી

| Class | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 5 | 8 | 15 | 16 | 6 |

સૌપ્રથમ, વર્ગની મધ્યકિંમત શોધો અને મધ્યક ગણો:

કોષ્ટક 6. મધ્યકિંમતની ગણતરી

| Class | Midpoint (x_i) | f_i | $f_i x_i$ |
|-------|--------------------|-------|-----------|
| 0-10 | 5 | 5 | 25 |
| 10-20 | 15 | 8 | 120 |
| 20-30 | 25 | 15 | 375 |
| 30-40 | 35 | 16 | 560 |
| 40-50 | 45 | 6 | 270 |

$$N = 50, \sum f_i x_i = 1350 \quad \bar{x} = \frac{1350}{50} = 27$$

પ્રમાણિત વિચલનનું કોષ્ટક:

કોષ્ટક 7. પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

| x_i | f_i | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i(x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-------|-----------------|---------------------|------------------------|
| 5 | 5 | -22 | 484 | 2420 |
| 15 | 8 | -12 | 144 | 1152 |
| 25 | 15 | -2 | 4 | 60 |
| 35 | 16 | 8 | 64 | 1024 |
| 45 | 6 | 18 | 324 | 1944 |

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 6600$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\frac{6600}{50}} = \sqrt{132} = 11.49$$

પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે મધ્યક શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 8. વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ

| Class | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Frequency | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

મધ્યકિમતની રીતનો ઉપયોગ કરતા:

કોષ્ટક 9. મધ્યક ગણતરી

| Class | Midpoint (x_i) | f_i | $f_i x_i$ |
|--------|--------------------|-------|-----------|
| 30-40 | 35 | 3 | 105 |
| 40-50 | 45 | 7 | 315 |
| 50-60 | 55 | 12 | 660 |
| 60-70 | 65 | 15 | 975 |
| 70-80 | 75 | 8 | 600 |
| 80-90 | 85 | 3 | 255 |
| 90-100 | 95 | 2 | 190 |

$$N = \sum f_i = 50 \quad \sum f_i x_i = 3100$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3100}{50} = 62$$

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $xy \, dx - (y^2 + x^2) \, dy = 0$

જવાબ

પુનઃગોઠવણી કરતા: $xy \, dx = (y^2 + x^2) \, dy \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
આ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. ધારો કે $x = vy$, તો $\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$
કિંમત મૂકતા: $v + y \frac{dv}{dy} = \frac{y}{vy} + \frac{vy}{y} = \frac{1}{v} + v$
 $y \frac{dv}{dy} = \frac{1}{v} \Rightarrow v \, dv = \frac{dy}{y}$
બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int v \, dv = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln |y| + C$
ફરીથી કિંમત મૂકતા $v = \frac{x}{y}$: $\frac{x^2}{2y^2} = \ln |y| + C \quad x^2 = 2y^2 (\ln |y| + C)$

પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$

જવાબ

આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપનું છે જ્યાં $P(x) = \frac{2}{x}$ અને $Q(x) = \sin x$
 Integrating factor $= e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2 \ln |x|} = x^2$
 સમીકરણને સંકલ્પકારક અવયવ વડે ગુણતા: $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 \sin x$
 ડાબી બાજુ $\frac{d}{dx}(x^2 y)$ છે: $\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 \sin x$
 બંને બાજુ સંકલન કરતા: $x^2 y = \int x^2 \sin x dx$
 બે વાર ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$
 માટે: $x^2 y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ $y = -\cos x + \frac{2 \sin x}{x} + \frac{2 \cos x}{x^2} + \frac{C}{x^2}$

પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$

જવાબ

$(1 + x^2)$ વડે ભાગતા: $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\cos x}{1+x^2}$
 This is linear with $P(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ and $Q(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$
 Integrating factor $= e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$
 સંકલ્પકારક અવયવ વડે ગુણતા: $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$
 The left side is $\frac{d}{dx}[(1 + x^2)y]$: $\frac{d}{dx}[(1 + x^2)y] = \cos x$
 સંકલન કરતા: $(1 + x^2)y = \int \cos x dx = \sin x + C$
 માટે: $y = \frac{\sin x + C}{1+x^2}$

સૂત્રો

શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ

- Transpose: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
- Inverse: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$
- Properties: $(A + B)^T = A^T + B^T$

વિકલન

- Power Rule: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- Trigonometric: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- Inverse Trig: $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
- Logarithmic: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

સંકલન

- By Parts: $\int u dv = uv - \int v du$
- આદેશ: જો $u = g(x)$, તો $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$
- Definite Properties: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

વિકલ સમીકરણો

- Linear Form: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
- Integrating Factor: $e^{\int P(x)dx}$
- Variable Separable: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

આંકડાશાસ્ત્ર

- **Mean:** $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
- **Standard Deviation:** $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$
- **Variance:** $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$