

# એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2023 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

ઓગસ્ટ 02, 2023

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

## પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ની કક્ષા (Order) } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે.}$$

### જવાબ

જવાબ: b.  $2 \times 3$

ઉક્લ: શ્રેણિકમાં 2 હાર (rows) અને 3 સ્તંભ (columns) છે, તેથી કક્ષા  $2 \times 3$  છે.

## પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો A ની કક્ષા  $2 \times 3$  હોય અને B ની કક્ષા  $3 \times 2$  હોય તો AB ની કક્ષા \_\_\_\_\_ થશે.

### જવાબ

જવાબ: d.  $2 \times 2$

ઉક્લ: શ્રેણિકનો ગુણાકાર AB માટે, જો A એ  $2 \times 3$  અને B એ  $3 \times 2$  હોય, તો AB ની કક્ષા  $2 \times 2$  થશે.

## પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ હોય તો } A^T = \underline{\hspace{2cm}}$$

### જવાબ

જવાબ: b.  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ઉક્લ: હાર શ્રેણિકનો પરિવર્ત (transpose) સ્તંભ શ્રેણિક બને છે.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  હોય તો  $\text{adj } A = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

**જવાબ:** d.  $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

**ઉક્લ:**  $2 \times 2$  શ્રેણીક  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  માટે,  $\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

તેથી:  $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

## પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(e^x) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

**જવાબ:** a.  $e^x$

**ઉક્લ:**

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

## પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો  $f(x) = \log x$  હોય તો  $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

**જવાબ:** c. 1

**ઉક્લ:**

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

## પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(3^{\log_3 x}) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

**જવાબ:** b.  $2x$

**ઉક્લ:**  $a^{\log_a x} = x$  ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં:  $3^{\log_3 x} = x$  તેથી:  $\frac{d}{dx}(3^{\log_3 x}) = \frac{d}{dx}(x) = 1$   
જુઓ, આમાં એક પદ  $3^{\log_3 x^2} = x^2$  હોયું જોઈએ.  $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

### પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$$\int \sin x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ**

જવાબ: c.  $-\cos x$

ઉક્લ:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

### પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int_{-1}^1 x^3 \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ**

જવાબ: b. 0

ઉક્લ:

$$\int_{-1}^1 x^3 \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

### પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ**

જવાબ: d.  $\tan^{-1} x$

ઉક્લ:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

### પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$  ની કક્ષા (Order) \_\_\_\_\_ છે.

**જવાબ**

જવાબ: b. 2

ઉક્લ: સર્વોચ્ચ વિકલિત  $\frac{d^2y}{dx^2}$  છે, તેથી કક્ષા 2 છે.

### પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F) \_\_\_\_\_ છે

**જવાબ**

જવાબ: a.  $e^{\int P \, dx}$

ઉક્લ: સુરેખ વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  માટે, સંકલ્પકારક અવયવ  $e^{\int P \, dx}$  છે.

### પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

જો  $Z = 4 - 5i$  હોય તો  $\bar{Z} = \underline{\hspace{2cm}}$

#### જવાબ

જવાબ: c.  $4 - 5i$

ઉકેલ: જો  $Z = 4 - 5i$ , તો  $\bar{Z} = 4 + 5i$ . વિકલ્પોમાં કદાચ ભૂલ હોઈ શકે છે. સાચો જવાબ  $4 + 5i$  હોવો જોઈએ.

### પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$i^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$

#### જવાબ

જવાબ: b. -1

ઉકેલ:

$$i^{10} = i^{4 \cdot 2 + 2} = (i^4)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot (-1) = -1$$

### પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  હોય તો શ્રેણિક  $X$  શોધો જેથી  $2A + X = 3B$ .

#### જવાબ

ઉકેલ:  $2A + X = 3B \Rightarrow X = 3B - 2A$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

### પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો  $(AB)^T$  શોધો.

**જવાબ**

**ઉકેલ:** પ્રથમ,  $AB$  શોધો:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5(1) + 4(2) & 5(3) + 4(1) \\ 4(1) + 3(2) & 4(3) + 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$$

**પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]**

**ઉકેલો:**  $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^{-y}$ .

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^{-y}$$

અથ અલગ કરતા (Separating variables):

$$e^y dy = x^2 dx$$

બંને બાજુ સંકળન કરતા:

$$\int e^y dy = \int x^2 dx$$

$$e^y = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \ln \left( \frac{x^3}{3} + C \right)$$

**પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો.

**પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

**જવાબ**

**ઉકેલ:**

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $(A + B)^T = A^T + B^T$  સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો  $A^{-1}$  શોધો.

### જવાબ

**ઉક્લેદ:**  $A^{-1}$  શોધવા માટે, આપણે  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$  સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

પ્રથમ,  $|A|$  શોધીએ:  $|A| = 2(0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)) - (-1)(1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) + 0(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) |A| = 2(4) + 1(-3) = 8 - 3 = 5$

હવે સહઅવયવો (cofactors) શોધીએ:  $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3 \quad C_{13} =$

$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1 \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-(-1) = 1 \quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8) = -8 \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી સમીકરણો  $3x - y = 1, x + 2y = 5$  ઉક્લેદો.

### જવાબ

**ઉક્લેદ:** સમીકરણોને  $AX = B$  તરીકે લખી શકાય:  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(2) - (-1)(1) = 6 + 1 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2+5 \\ -1+15 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $x = 1$  અને  $y = 2$ .

## પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

જો  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તા:** ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$   
ધારો કે  $u = e^x + 1$  અને  $v = e^x - 1$   $\frac{du}{dx} = e^x$  અને  $\frac{dv}{dx} = e^x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(e^x - 1)(e^x) - (e^x + 1)(e^x)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તા:**  $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = b \cos \theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{b \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} = -\frac{b}{a} \cot \theta$$

### પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો:  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ .

#### જવાબ

**ઉક્તા:** ધારો કે  $u = \sqrt{x}$ , તેથી  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin \sqrt{x} + C$$

## પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

$y = x^{\cos x}$  નું x સાપેક્ષ વિકલન કરો.

#### જવાબ

ઉક્તથી: બંને બાજુ લઘુગુણક (ln) લેતાં:

$$\ln y = \cos x \ln x$$

બંને બાજુ x સાપેક્ષ વિકલન કરતાં:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (-\sin x) \\ \frac{dy}{dx} &= y \left( \frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \\ \frac{dy}{dx} &= x^{\cos x} \left( \frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right)\end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

જો  $y = A \cos pt + B \sin pt$  હોય, તો સાબિત કરો કે  $\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = 0$ .

#### જવાબ

ઉક્તથી:  $y = A \cos pt + B \sin pt$

$$\frac{dy}{dt} = -Ap \sin pt + Bp \cos pt$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Ap^2 \cos pt - Bp^2 \sin pt = -p^2(A \cos pt + B \sin pt) = -p^2y$$

$$\text{ટેથી: } \frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = -p^2y + p^2y = 0$$

### પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

એક કણાની ગતિનું સમીકરણ  $s = t^3 + 2t^2 - 3t + 5$  છે. તો  $t = 1$  અને  $t = 2$  સેકન્ડ કણાનો વેગ અને પ્રવેગ શોધો.

#### જવાબ

ઉક્તથી:  $s = t^3 + 2t^2 - 3t + 5$

વેગ (Velocity):  $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t - 3$

પ્રવેગ (Acceleration):  $a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$

$t = 1$  સમયે:  $v(1) = 3(1)^2 + 4(1) - 3 = 3 + 4 - 3 = 4$  એકમ/સેકન્ડ  $a(1) = 6(1) + 4 = 10$  એકમ/સેકન્ડ<sup>2</sup>

$t = 2$  સમયે:  $v(2) = 3(2)^2 + 4(2) - 3 = 12 + 8 - 3 = 17$  એકમ/સેકન્ડ  $a(2) = 6(2) + 4 = 16$  એકમ/સેકન્ડ<sup>2</sup>

## પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

ક્રમત શોધો:  $\int x \log x dx$ .

#### જવાબ

**ઉકેલ:** ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\int u dv = uv - \int v du$   
ધારો કે  $u = \log x$  અને  $dv = x dx$  તેથી  $du = \frac{1}{x} dx$  અને  $v = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int x \log x dx &= \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

ક્રમત શોધો:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .

#### જવાબ

**ઉકેલ:**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= [\tan^{-1} x]_{-1}^1 \\ &= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

$Z = 3 + 4i$  નો વ્યસ્ત શોધો.

#### જવાબ

**ઉકેલ:**

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{3+4i}$$

અંશ અને છેદને અનુબદ્ધ કરણી વડે ગુણતાઃ

$$Z^{-1} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{(3)^2 + (4)^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25}$$

$$Z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

## પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

કિંમત શોધો:  $\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$ .

#### જવાબ

**ઉક્તા:** ધારો કે  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$   
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$  ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતા:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(\pi/2 - x)}{\tan(\pi/2 - x) + \cot(\pi/2 - x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cot x}{\cot x + \tan x} dx \end{aligned}$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x + \cot x}{\tan x + \cot x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી:  $I = \frac{\pi}{4}$

### પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

રેખા  $y = x$ ,  $x = 5$  અને X-અક્ષ વડે ધેરાચેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તા:** પ્રદેશ  $y = x$ ,  $x = 5$ , અને  $y = 0$  (X-અક્ષ) દ્વારા સીમિત છે.

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_0^5 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2} \text{ ચોરસ એકમ}$$

### પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

જો  $x + iy = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$  હોય, તો  $x + y$  ની કિંમત શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તા:** પ્રથમ  $\frac{1+i}{2-i}$  ને સાદરૂપ આપીએ:

$$\frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2+3i-1}{4+1} = \frac{1+3i}{5}$$

ઉત્તે:

$$\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{(1+3i)^2}{25} = \frac{1+6i+9i^2}{25} = \frac{1+6i-9}{25} = \frac{-8+6i}{25}$$

તેથી:  $x = -\frac{8}{25}$  અને  $y = \frac{6}{25}$

$$x+y = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25} = -\frac{2}{25}$$

## પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

$Z = 5 + 12i$  નું વર્ગમૂળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે  $\sqrt{5+12i} = a+bi$  જ્યાં  $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+bi)^2 = 5+12i$$

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 5+12i$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 5+12i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા:  $a^2 - b^2 = 5 \dots (1)$   $2ab = 12 \dots (2)$

(2) પરથી:  $b = \frac{6}{a}$

(1) માં મુક્તા:  $a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

ધારો કે  $u = a^2$ :  $u^2 - 5u - 36 = 0$

$$(u-9)(u+4) = 0$$

કારણ કે  $u = a^2 \geq 0$ , આપણી પાસે  $u = 9$ , તેથી  $a = \pm 3$

જો  $a = 3$ , તો  $b = 2$  જો  $a = -3$ , તો  $b = -2$

તેથી:  $\sqrt{5+12i} = \pm(3+2i)$

### પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

સમીકરણ  $(2x-y)+yi = 6+4i$  પરથી  $x, y \in \mathbb{R}$  શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ:  $2x - y = 6 \dots (1)$  કાલ્પનિક ભાગ:  $y = 4 \dots (2)$

(1) માં (2) મુક્તા:  $2x - 4 = 6$   $2x = 10$   $x = 5$

તેથી:  $x = 5$  અને  $y = 4$

### પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

$Z = 1+i$  નો માનાંક અને મુખ્ય કોણાંક શોધો, અને Z ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

**જવાબ**

**ઉક્લ:**  $Z = 1 + i$   
**માનાંક:**  $|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$   
**મુખ્ય કોણાંક:**  $\arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$   
**ધ્રુવીય સ્વરૂપ:**  $Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

**પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો.

**પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]**

**ઉક્લો:**  $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy.$

**જવાબ**

**ઉક્લ:**

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy = (1 + x) + y(1 + x) = (1 + x)(1 + y)$$

અથ અલગ કરતાઃ

$$\frac{dy}{1+y} = (1+x)dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાઃ

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)dx$$

$$\ln|1+y| = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$1+y = Ae^{x+x^2/2} \quad \text{જ્યાં } A = e^C$$

$$y = Ae^{x+x^2/2} - 1$$

**પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]**

વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + y = e^x$  ઉક્લો.

**જવાબ**

**ઉક્લ:** આ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે, જ્યાં  $P = 1$  અને  $Q = e^x$ .

સંકલ્પકારક અવધાર:  $I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

સમીકરણને  $e^x$  વડે ગુણતાઃ

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = e^{2x}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાઃ

$$ye^x = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$y = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$$

## પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 1$  ઉકેલો.

### જવાબ

**ઉકેલ:** આ પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે, જ્યાં  $P = -\tan x$  અને  $Q = 1$ .

સંકલ્પકારક અવધિવાં:  $I.F. = e^{\int (-\tan x) dx} = e^{\ln |\cos x|} = \cos x$

સમીકરણને  $\cos x$  વડે ગુણતાં:

$$\cos x \frac{dy}{dx} - y \cos x \tan x = \cos x$$

$$\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y \cos x) = \cos x$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:

$$y \cos x = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$y = \tan x + \frac{C}{\cos x} = \tan x + C \sec x$$