

એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2024 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જૂન 26, 2024

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ની કક્ષા (Order) _____ છે.

જવાબ

જવાબ: (b) 3×2

ઉકેલ: શ્રેણિકની કક્ષા (હાર) \times (સ્તંભ) દ્વારા આપવામાં આવે છે શ્રેણિક A માં 3 હાર અને 2 સ્તંભ છે તેથી, કક્ષા = 3×2

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ હોય તો $A^{-1} =$ _____

જવાબ

જવાબ: (d) A^T

ઉકેલ: લાંબિક શ્રેણિક (orthogonal matrices) માટે, $A^{-1} = A^T$ કેમ કે $AA^T = I$, આપણને $A^{-1} = A^T$ મળે છે.

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$

ઉકેલ:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1(-1) + 2(2) & 1(6) + 2(1) \\ 5(-1) + 0(2) & 5(6) + 0(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 + 4 & 6 + 2 \\ -5 + 0 & 30 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ હોય તો $A^T = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ઉકેલ: શ્રેણિકનો પરિવર્ત (transpose) હાર અને સ્તંભની અદલાબદલી કરીને મેળવવામાં આવે છે.

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx}(4^x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (a) $4^x \log_e 4$

ઉકેલ: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ તેથી, $\frac{d}{dx}(4^x) = 4^x \ln 4 = 4^x \log_e 4$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (b) 0

ઉકેલ: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ) $\frac{d}{dx}(1) = 0$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $x = \sin \theta, y = \cos \theta$ હોય તો $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (d) $-\cot \theta$ ઉકેલ: $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta = -\cot \theta$$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$$\int x^7 dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (c) $\frac{x^8}{8}$ ઉકેલ: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int_{-2}^2 x^5 dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (b) 0

ઉકેલ: x^5 એ અયુગ્મ (odd) વિધેય છે. અયુગ્મ વિધેયો માટે, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ તેથી, $\int_{-2}^2 x^5 dx = 0$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (d) $\log |\sin x|$ ઉકેલ: ધારો કે $u = \sin x$, તેથી $du = \cos x dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log |u| + c = \log |\sin x| + c$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^4 + y = 0$ ની કક્ષા (order) _____ છે

જવાબ

જવાબ: (a) 3

ઉકેલ: વિકલ સમીકરણની કક્ષા એટલે તેમાં રહેલા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષા. ઉચ્ચતમ વિકલિત $\frac{d^3 y}{dx^3}$ છે, તેથી કક્ષા = 3

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y = 3x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (integrating factor) _____ છે

જવાબ

જવાબ: (c) e^x ઉકેલ: સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે સંકલ્પકારક અવયવ $= e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^7 =$ _____

જવાબ

જવાબ: (b) $-i$ ઉકેલ: $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$\arg(1 + i) =$ _____

જવાબ

જવાબ: (c) $\frac{\pi}{4}$ ઉકેલ: $\arg(a + bi) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ $\arg(1 + i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(A + B)^T = A^T + B^T$

જવાબ

ઉકેલ:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(A + B)^T = A^T + B^T$ ✓ સાબિત થયું

પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો દર્શાવો કે $A \cdot A^{-1} = I$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, A^{-1} શોધો: $|A| = 1(3) - 1(2) = 3 - 2 = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

હવે $A \cdot A^{-1} = I$ ચકાસીએ:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(3) + 1(-2) & 1(-1) + 1(1) \\ 2(3) + 3(-2) & 2(-1) + 3(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark \text{ સાબિત થયું} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $xdy + ydx = 0$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: $xdy + ydx = 0$ $xdy = -ydx$ $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |y| + \ln |x| = c_1$$

$$\ln |xy| = c_1$$

$$|xy| = e^{c_1} = c \quad (\text{જ્યાં } c = e^{c_1} \text{ અચળાંક છે})$$

તેથી, $xy = \pm c$ અથવા $xy = k$ જ્યાં k એક સ્વૈર અચળાંક છે.

પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો દર્શાવો કે $A^2 - 5A + 7I = 0$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, A^2 ગણો:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(3) + 1(-1) & 3(1) + 1(2) \\ -1(3) + 2(-1) & -1(1) + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 - 1 & 3 + 2 \\ -3 - 2 & -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

હવે $5A$ ગણો:

$$5A = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

તથા $7I$:

$$7I = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

હવે $A^2 - 5A + 7I = 0$ ચકાસીએ:

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 7I &= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 - 15 + 7 & 5 - 5 + 0 \\ -5 + 5 + 0 & 3 - 10 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark \text{ સાબિત થયું} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\text{adj } A = A$

જવાબ

ઉકેલ: $\text{adj } A$ શોધવા માટે, આપણે સહઅવયવ શ્રેણિક શોધવો પડશે અને પછી તેનો પરિવર્ત કરવો પડશે.

સહઅવયવો (Cofactors): $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0(3) - 1(4) = -4$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(1(3) - 1(4)) = -(3 - 4) = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 0(4) = 4$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -((-3)(3) - (-3)(4)) = -(-9 + 12) = -3$$

$$\begin{aligned}
C_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4)(3) - (-3)(4) = -12 + 12 = 0 \\
C_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -((-4)(4) - (-3)(4)) = -(-16 + 12) = -(-4) = 4 \\
C_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-3)(0) = -3 \\
C_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -((-4)(1) - (-3)(1)) = -(-4 + 3) = -(-1) = 1 \\
C_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(0) - (-3)(1) = 0 + 3 = 3
\end{aligned}$$

$$\text{સહઅવયવ શ્રેણિક} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = (\text{સહઅવયવ શ્રેણિક})^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark \text{ સાબિત થયું}$$

પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને નીચેના સુરેખ સમીકરણો ઉકેલો: $3x + 2y = 5$, $2x - y = 1$

જવાબ

ઉકેલ: સમીકરણોને $AX = B$ તરીકે લખી શકાય: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 3(-1) - 2(2) = -3 - 4 = -7$ શોધો.

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7}(5) + \frac{2}{7}(1) \\ \frac{2}{7}(5) - \frac{3}{7}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5+2}{7} \\ \frac{10-3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

તેથી, $x = 1, y = 1$

પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને x^5 નું x પ્રત્યે વિકલન શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વ્યાખ્યા અનુસાર: $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x) = x^5$ માટે:

$$\frac{d}{dx}(x^5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતા: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5x^4 \end{aligned}$$

તેથી, $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

અહીં, $u = x^2 - 1$, $v = x^2 + 1$ $\frac{du}{dx} = 2x$, $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[(x^2+1) - (x^2-1)]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[x^2+1-x^2+1]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

તેથી, $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

સંકલન શોધો: $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} dx$

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, બહુપદી ભાગાકાર કરતા:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} = 1 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2x}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} dx &= \int \left(1 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2x} \right) dx \\
 &= \int 1 dx + \int \frac{3x + 6}{x^2 + 2x} dx \\
 &= x + \int \frac{3x + 6}{x(x + 2)} dx
 \end{aligned}$$

બીજા સંકલન માટે: $\frac{3x+6}{x(x+2)} = \frac{3(x+2)}{x(x+2)} = \frac{3}{x}$

$$\int \frac{3x + 6}{x(x + 2)} dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln |x| + c$$

તેથી: $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} dx = x + 3 \ln |x| + c$

પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

જો $y = \log(\sec x + \tan x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $y = \log(\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x) \\
 &= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\
 &= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x
 \end{aligned}$$

તેથી, $\frac{dy}{dx} = \sec x$

પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

જો $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$

પ્રથમ વિકલિત: $\frac{dy}{dx} = 2(3e^{3x}) + 3(-2e^{-2x}) = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$

દ્વિતીય વિકલિત: $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(3e^{3x}) - 6(-2e^{-2x}) = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$

હવે સમીકરણ ચકાસીએ: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y$

$$\begin{aligned} &= (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x}) \\ &= 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x} \\ &= e^{3x}(18 - 6 - 12) + e^{-2x}(12 + 6 - 18) \\ &= e^{3x}(0) + e^{-2x}(0) = 0 \quad \checkmark \text{ સાબિત થયું} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

વિધેય $f(x) = x^3 - 3x + 11$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $f(x) = x^3 - 3x + 11$

પ્રથમ વિકલિત: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

નિર્ણાયક બિંદુઓ માટે, $f'(x) = 0$ લેતા: $3(x - 1)(x + 1) = 0$ $x = 1$ અથવા $x = -1$

દ્વિતીય વિકલિત: $f''(x) = 6x$

$x = 1$ આગળ: $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ $x = -1$ આગળ: $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ સ્થાનીય મહત્તમ

વિધેયની કિંમતો: $x = 1$ આગળ: $f(1) = 1^3 - 3(1) + 11 = 1 - 3 + 11 = 9$ $x = -1$ આગળ: $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 11 = -1 + 3 + 11 = 13$

તેથી:

- સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત = 13 (જ્યાં $x = -1$)
- સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત = 9 (જ્યાં $x = 1$)

પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $u = \log x$, તેથી $du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \int \cos u du = \sin u + c$$

પાછું મુક્ત: $u = \log x$

તેથી, $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \sin(\log x) + c$

પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int x \sin x dx$

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int u dv = uv - \int v du$
ધારો કે $u = x$ અને $dv = \sin x dx$ તેથી $du = dx$ અને $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

તેથી, $\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + c$

પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

જો $(2x - y) + 2yi = 6 + 4i$ હોય તો x અને y શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: $(2x - y) + 2yi = 6 + 4i$
વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ: $2x - y = 6 \dots (1)$ કાલ્પનિક ભાગ: $2y = 4 \dots (2)$
સમીકરણ (2) પરથી: $y = 2$
સમીકરણ (1) માં મુકતા: $2x - 2 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$
તેથી, $x = 4$ અને $y = 2$

પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

વક્ર $y = x^2$, રેખાઓ $x = 1$, $x = 2$ અને X-અક્ષ વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: માગેલ ક્ષેત્રફળ નીચે મુજબ છે:

$$\begin{aligned}A &= \int_1^2 x^2 dx \\ A &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \text{ ચોરસ એકમ}\end{aligned}$$

તેથી, ક્ષેત્રફળ = $\frac{7}{3}$ ચોરસ એકમ

પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

નિયત સંકલન $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx$

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec(\pi/2 - x)}{\sec(\pi/2 - x) + \csc(\pi/2 - x)} dx$$

કારણ કે $\sec(\pi/2 - x) = \csc x$ અને $\csc(\pi/2 - x) = \sec x$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\csc x + \sec x} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\sec x + \csc x} dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x + \csc x}{\sec x + \csc x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી, $I = \frac{\pi}{4}$

જવાબ: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

જો $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = 1$

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ છે: $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$

જમણી બાજુ કરણી લેતા (Rationalizing):

$$\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\alpha + i\beta = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: $\alpha = \frac{a}{a^2+b^2}$ અને $\beta = -\frac{b}{a^2+b^2}$

હવે $\alpha^2 + \beta^2$ ગણતા:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left(\frac{a}{a^2+b^2} \right)^2 + \left(-\frac{b}{a^2+b^2} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

તેથી: $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a^2 + b^2) = 1$ ✓ સાબિત થયું

પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $\frac{2+3i}{3+2i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા અને માનક શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, સંકર સંખ્યાને સાદુરૂપ આપીએ:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+2i} &= \frac{2+3i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{6-4i+9i-6i^2}{9-4i^2} \\ &= \frac{6+5i-6(-1)}{9-4(-1)} \\ &= \frac{6+5i+6}{9+4} = \frac{12+5i}{13}\end{aligned}$$

તેથી $\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

અનુબદ્ધ કરણી (Conjugate): $\overline{\frac{2+3i}{3+2i}} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$

માનક (Modulus): $\left| \frac{2+3i}{3+2i} \right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = \sqrt{1} = 1$$

પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} (\cos \theta - i \sin \theta)^{-5}}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7}$

જવાબ

ઉકેલ: દે-મોવ્રે-પ્રેમથ (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતા: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

વળી, $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

$(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} = \cos(-12\theta) + i \sin(-12\theta)$

$(\cos \theta - i \sin \theta)^{-5} = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^{-5} = \cos(5\theta) + i \sin(5\theta)$

$(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7 = (\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta))^7 = \cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)$

તેથી:

$$\begin{aligned}& \frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} (\cos \theta - i \sin \theta)^{-5}}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7} \\ &= \frac{[\cos(-12\theta) + i \sin(-12\theta)][\cos(5\theta) + i \sin(5\theta)]}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)} \\ &= \frac{\cos(-12\theta + 5\theta) + i \sin(-12\theta + 5\theta)}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)} \\ &= \frac{\cos(-7\theta) + i \sin(-7\theta)}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos(-7\theta + 14\theta) + i \sin(-7\theta + 14\theta) \\
 &= \cos(7\theta) + i \sin(7\theta)
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા $1 + \sqrt{3}i$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

જવાબ

ઉકેલ: સંકર સંખ્યા $z = a + bi$ માટે, ધ્રુવીય સ્વરૂપ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ છે.

અહીં, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$

માનિક (Modulus): $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

કોણિક (Argument): $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

તેથી, ધ્રુવીય સ્વરૂપ છે: $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\tan y \, dx + \tan x \sec^2 y \, dy = 0$

જવાબ

ઉકેલ: $\tan y \, dx + \tan x \sec^2 y \, dy = 0$

પદો અલગ કરતા: $\tan y \, dx = -\tan x \sec^2 y \, dy$

$$\frac{dx}{\tan x} = -\frac{\sec^2 y \, dy}{\tan y}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{dy}{\sin y \cos y}$$

$$\cot x \, dx = -\frac{dy}{\sin y \cos y}$$

$$\text{કારણ કે } \frac{1}{\sin y \cos y} = \frac{2}{2 \sin y \cos y} = \frac{2}{\sin 2y}.$$

$$\cot x \, dx = -\frac{2dy}{\sin 2y}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int \cot x \, dx = -2 \int \csc(2y) \, dy$

$$\ln |\sin x| = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln |\csc(2y) + \cot(2y)|\right) + c$$

$$\ln |\sin x| = \ln |\csc(2y) + \cot(2y)| + c$$

તેથી: $\sin x \cdot [\csc(2y) + \cot(2y)] = k$ જ્યાં k એક અચળાંક છે.

પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

જવાબ

ઉકેલ: $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

x વડે ભાગતા: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં, $P = -\frac{1}{x}$ અને $Q = x$

સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.): $I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$

સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા: $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 1$

આને આમ લખી શકાય: $\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = 1$

સંકલન કરતા: $\frac{y}{x} = x + c$

તેથી: $y = x^2 + cx$

પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x, y(0) = 3$

જવાબ

ઉકેલ: આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$

અહીં, $P = \frac{1}{x}, Q = e^x$

સંકલ્પકારક અવયવ: $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$ (ધારો કે $x > 0$)

સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા: $x \frac{dy}{dx} + y = x e^x$

આને આમ લખી શકાય: $\frac{d}{dx} (xy) = x e^x$

બંને બાજુ સંકલન કરતા: $xy = \int x e^x dx$

ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા $\int x e^x dx$: ધારો કે $u = x, dv = e^x dx$ તેથી $du = dx, v = e^x$

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1)$

તેથી: $xy = e^x (x - 1) + c$

તેથી: $y = \frac{e^x (x-1) + c}{x}$

સામાન્ય ઉકેલ: $y = \frac{e^x (x-1) + c}{x}$ જ્યાં $x \neq 0$