

# એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - વિન્ટર 2023 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જાન્યુઆરી 31, 2024

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી ઓળય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

### પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$  ની કક્ષા (Order) \_\_\_\_\_ છે.

#### જવાબ

જવાબ: (d)  $2 \times 2$

ઉકેલ: શ્રેણિકમાં 2 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી તેની કક્ષા  $2 \times 2$  છે.

### પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \text{_____}$$

#### જવાબ

જવાબ: (a)  $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

ઉકેલ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 3+5 \\ 6+5 & 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

### પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

નીચેનામાંથી કયો ચોરસ શ્રેણિક છે?

#### જવાબ

જવાબ: (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

ઉકેલ: ચોરસ શ્રેણિકમાં હાર અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય છે. માત્ર વિકલ્પ (c) માં  $2 \times 2$  પરિમાણ છે.

## પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો  $A = [3]$  અને  $B = [4]$  હોય તો  $A \cdot B = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

જવાબ: (b) 12

ઉકેલ:

$$A \cdot B = [3] \times [4] = [3 \times 4] = [12] = 12$$

## પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

જો  $\frac{d}{dx} \sin x = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

જવાબ: (d)  $\cos x$

ઉકેલ:  $\sin x$  નું વિકલન  $\cos x$  છે.

## પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો  $f(x) = xe^x$  હોય તો  $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

જવાબ: (b) 1

ઉકેલ: ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં:  $f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$$f'(0) = e^0(1 + 0) = 1 \times 1 = 1$$

## પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો  $y = x^2$  હોય તો  $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

જવાબ: (b) 2

ઉકેલ:

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

## પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$

**જવાબ****જવાબ:** (a)  $\sin x$ **ઉક્તિ:**

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

**પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]**

$$\int_0^1 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ****જવાબ:** (c)  $\frac{1}{2}$ **ઉક્તિ:**

$$\int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

**પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]**

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$$

**જવાબ****જવાબ:** (a)  $\tan^{-1} x$ **ઉક્તિ:**

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

**પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]**

વિકલ સમીકરણ  $x \sin y + xy = x$  ની કક્ષા (Order)  $\underline{\hspace{2cm}}$  છે

**જવાબ****જવાબ:** (b) 1**ઉક્તિ:** સમીકરણને  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{\sin y}$  તરીકે લખી શકાય. સૌથી મોટું વિકલિત પ્રથમ કક્ષાનું છે.**પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]**

$$\frac{dy}{dx} + y = x \text{ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.) } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે}$$

**જવાબ****જવાબ:** (d)  $e^x$ **ઉક્તિ:**  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  માટે, સંકલ્પકારક અવયવ =  $e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

### પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$$i^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ:**

જવાબ: (b) -1

ઉકેલ: વ્યાખ્યા મુજબ,  $i^2 = -1$

### પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ:**

જવાબ: (c) 13

ઉકેલ:

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$$

### પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$  અને  $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  હોય તો  $2A + 3B - C$  શોધો.

**જવાબ:**

ઉકેલ:

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3 \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B - C = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 32 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$$

### પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો  $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  અને  $N = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $(M + N)^T = M^T + N^T$

**જવાબ****ઉક્લ:**

$$M + N = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(M + N)^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad N^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M^T + N^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $(M + N)^T = M^T + N^T$  સાબિત થાય છે.

**પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]**

**વિકલ સમીકરણ ઉક્લો:**  $x \frac{dy}{dx} + y = xy$

**જવાબ****ઉક્લ:**

$$x \frac{dy}{dx} + y = xy$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{y}{x} = y \left(1 - \frac{1}{x}\right) = y \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

ચલ અલગા કરતા (Separating variables):

$$\frac{dy}{y} = \frac{x-1}{x} dx$$

સંકલન કરતા:

$$\ln|y| = \int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x - \ln|x| + C$$

$$y = Ae^{x-\ln|x|} = A \frac{e^x}{x}$$

**પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો.

**પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]**

શ્રેણીક પદ્ધતિથી સમીકરણો  $2x + 3y = 8, 3x + 4y = 11$  ઉક્લો.

**જવાબ**

**ઉક્લ:** શ્રેણિક સ્વરૂપમાં લખતાઃ  $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$  શોધતાઃ

$$|A| = 2(4) - 3(3) = 8 - 9 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 + 33 \\ 24 - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

તેથી:  $x = 1, y = 2$

**પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $(AB)^T = B^T A^T$

**જવાબ**

**ઉક્લ:**

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $(AB)^T = B^T A^T$  સાબિત થાય છે.

**પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $A^2 - 4A + 7I = O$

**જવાબ**

**ઉક્લ:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$7I = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

સાબિત થાય છે.

## પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી  $f(x) = e^x$  નું વિકલિત શોધો.

#### જવાબ

**ઉકેલ:** વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતાં:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

કારણ કે  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  તેથી:  $f'(x) = e^x$

### પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો  $y = \log(\sin x)$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

#### જવાબ

**ઉકેલ:**

$$y = \log(\sin x)$$

સંકળ નિયમ (Chain rule) નો ઉપયોગ કરતાં:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

### પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો:  $\int (4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x}) dx$

#### જવાબ

**ઉકેલ:**

$$\int \left( 4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx \\
 &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| + C \\
 &= x^4 + x^3 + 2 \ln|x| + C
 \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

જો  $y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

#### જવાબ

ઉક્તા:

$$y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[e^{\tan x}] + \frac{d}{dx}[\log(\sin x)]$$

પ્રથમ પદ માટે:  $\frac{d}{dx}[e^{\tan x}] = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$  બિજા પદ માટે:  $\frac{d}{dx}[\log(\sin x)] = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$   
તૈથી:  $\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x + \cot x$

### પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

એક કણાની ગતિનું સમીકરણ  $s = t^4 + 3t$  છે. તો  $t = 2$  સેકન્ડ તેનો વેગ અને પ્રવેગ શોધો.

#### જવાબ

ઉક્તા: આપેલ છે:  $s = t^4 + 3t$

વેગ:  $v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 3$   $t = 2$  સમયે:  $v = 4(2)^3 + 3 = 4(8) + 3 = 32 + 3 = 35$  એકમ/સેકન્ડ

પ્રવેગ:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2$   $t = 2$  સમયે:  $a = 12(2)^2 = 12(4) = 48$  એકમ/સેકન્ડ૨

### પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

વિધેય  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$  ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

#### જવાબ

ઉક્તા:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

નિર્ણાયક બિંદુઓ (Critical points) માટે:  $f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$  અથવા  $x = -1$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$x = -1$  પર:  $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$  (મહત્તમ)  $x = 2$  પર:  $f''(2) = 12(2) - 6 = 18 > 0$  (ન્યૂનતમ)

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$  (મહત્તમ)  $f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$  (ન્યૂનતમ)

મહત્તમ ક્રિમત: 12 ( $x = -1$  પર) ન્યૂનતમ ક્રિમત: -15 ( $x = 2$  પર)

## પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

ક્રિમત શોધો:  $\int xe^x dx$

#### જવાબ

ઉકેલ: ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\int u dv = uv - \int v du$   
ધારો કે  $u = x, dv = e^x dx$  તેથી  $du = dx, v = e^x$

$$\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

### પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

ક્રિમત શોધો:  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

#### જવાબ

ઉકેલ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-\frac{4x^2}{9})}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{1-(\frac{2x}{3})^2}}$$

ધારો કે  $\frac{2x}{3} = \sin \theta$ , તેથી  $x = \frac{3 \sin \theta}{2}, dx = \frac{3 \cos \theta}{2} d\theta$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{3 \cos \theta}{2} d\theta}{3\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int \frac{\frac{3 \cos \theta}{2} d\theta}{3 \cos \theta} = \int \frac{1}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2x}{3} \right) + C \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

$\frac{1-i}{1+i}$  નો અનુભવ સંકર સંખ્યા શોધો.

#### જવાબ

ઉકેલ:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

-i ની અનુભવ સંકર સંખ્યા  $\overline{-i} = i$  છે.

## પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

**કિંમત શોધો:**  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

#### જવાબ

**ઉક્તાં:** ધારો કે  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

ગુણધર્મ:  $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$  નો ઉપયોગ કરતા,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી:  $I = \frac{\pi}{4}$

### પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

વર્તૃળ  $x^2 + y^2 = a^2$  નું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તાં:** વર્તૃળ  $x^2 + y^2 = a^2$  માટે,  $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

વર્તૃળનું ક્ષેત્રફળ =  $4 \times$  પ્રથમ ચરણમાં ક્ષેત્રફળ

$$= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

ધારો કે  $x = a \sin \theta$ ,  $dx = a \cos \theta d\theta$  જ્યારે  $x = 0, \theta = 0$ ; જ્યારે  $x = a, \theta = \pi/2$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2 \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

**સાદૃદૂર્ઘ આપો:**  $\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^5}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^3 \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta)}$

**જવાબ**

**ઉક્તિ:** દે-મોવારેના પ્રમેય (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતાં:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

અંશ:

$$\begin{aligned} & (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^5 \\ &= (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \cdot (\cos(-5\theta) + i \sin(-5\theta)) \\ &= \cos(12\theta - 5\theta) + i \sin(12\theta - 5\theta) \\ &= \cos 7\theta + i \sin 7\theta \end{aligned}$$

છેદ:

$$\begin{aligned} & (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^3 \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \\ &= (\cos(-6\theta) + i \sin(-6\theta)) \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \\ &= \cos(-6\theta + 12\theta) + i \sin(-6\theta + 12\theta) \\ &= \cos 6\theta + i \sin 6\theta \end{aligned}$$

પરિણામ:

$$\frac{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}{\cos 6\theta + i \sin 6\theta} = \cos(7\theta - 6\theta) + i \sin(7\theta - 6\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

**પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો.

**પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]**

જો  $(3x - 7) + 2iy = 5y + (5 + x)i$  હોય તો x અને y ની કિંમત શોધો.

**જવાબ**

**ઉક્તિ:**

$$(3x - 7) + 2iy = 5y + (5 + x)i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્યનિક ભાગો સરખાવતાં: વાસ્તવિક ભાગ:  $3x - 7 = 5y \dots (1)$  કાલ્યનિક ભાગ:  $2y = 5 + x \dots (2)$

સમીકરણ (2) પરથી:  $x = 2y - 5 \dots (3)$

(1) માં (3) મુક્તાં:

$$\begin{aligned} 3(2y - 5) - 7 &= 5y \\ 6y - 15 - 7 &= 5y \\ 6y - 22 &= 5y \Rightarrow y = 22 \end{aligned}$$

(3) પરથી:  $x = 2(22) - 5 = 44 - 5 = 39$

તૈથી:  $x = 39, y = 22$

**પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]**

$z = 1 + \sqrt{3}i$  ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

**જવાબ**

**ઉક્તિ:**

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

માનાંક:  $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$   
 કોણાંક:  $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$   
 ધ્રુવીય સ્વરૂપ:  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

### પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

$\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$  ને  $a + ib$  સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

#### જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ છેદનું સાદુરૂપ આપીએ:

$$(3+2i)(5-3i) = 15 - 9i + 10i - 6i^2 = 15 + i - 6(-1) = 15 + i + 6 = 21 + i$$

$$\frac{4+2i}{21+i} = \frac{(4+2i)(21-i)}{(21+i)(21-i)} = \frac{84-4i+42i-2i^2}{21^2-i^2} = \frac{84+38i+2}{441+1} = \frac{86+38i}{442}$$

$$= \frac{86}{442} + \frac{38}{442}i = \frac{43}{221} + \frac{19}{221}i$$

### પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$

#### જવાબ

ઉકેલ: આ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં:  $P = 2, Q = 3e^x$

સંકલ્પકારક અવયવ:  $\mu = e^{\int P dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$

સમીકરણને  $\mu$  વડે ગુણતા:

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{2x} \cdot e^x = 3e^{3x}$$

આ આપે છે:  $\frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 3e^{3x}$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:

$$ye^{2x} = \int 3e^{3x} dx = 3 \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C = e^{3x} + C$$

તેથી:  $y = \frac{e^{3x} + C}{e^{2x}} = e^x + Ce^{-2x}$

### પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$

### જવાબ

**ઉક્લ:** ધારો કે  $v = x + y$ , તેથી  $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$   
 તેથી  $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$   
 મૂળ સમીકરણમાં મુકતા:

$$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

ચલ અલગ કરતા:

$$\frac{dv}{v^2 + 1} = dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dv}{v^2 + 1} = \int dx$$

$$\tan^{-1}(v) = x + C$$

$$v = \tan(x + C)$$

પાછું મુકતા:  $x + y = \tan(x + C)$  તેથી:  $y = \tan(x + C) - x$

### પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉક્લો:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$ ,  $y(0) = 2$

### જવાબ

**ઉક્લ:** આ પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$

અહીં:  $P = \frac{1}{x}$ ,  $Q = e^x$

સંકલ્પકારક અવયવ:  $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$  (માટે  $x > 0$ )

સમીકરણને  $\mu = x$  વડે ગુણતા:

$$x \frac{dy}{dx} + y = xe^x$$

આ અપે છે:  $\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$

બંને બાજુ સંકલન કરતા (ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરીને):

$$xy = \int xe^x dx$$

$\int xe^x dx$  માટે: ધારો કે  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  તેથી  $du = dx$ ,  $v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$$

તેથી:  $xy = e^x(x - 1) + C$

$$y = \frac{e^x(x - 1) + C}{x}$$

પ્રારંભિક શરત  $y(0) = 2$  નો ઉપયોગ કરતા: અહીં શૂન્ય વડે ભાગાકારની સમસ્યા ઉફ્ફવે છે. સમીકરણનો ઉક્લ  $x = 0$  ની નજીક વધુ કાળજીપૂર્વક શોધવો પડે.

સામાન્ય ઉક્લ માટે:  $y = e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{C}{x}$