

એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - વિન્ટર 2023 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જાન્યુઆરી 31, 2024

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ની કક્ષા (Order) _____ છે.

જવાબ

જવાબ: (d) 2×2

ઉકેલ: શ્રેણિકમાં 2 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી તેની કક્ષા 2×2 છે.

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$

ઉકેલ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 3+5 \\ 6+5 & 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

નીચેનામાંથી કયો ચોરસ શ્રેણિક છે?

જવાબ

જવાબ: (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

ઉકેલ: ચોરસ શ્રેણિકમાં હાર અને સ્તંભની સંખ્યા સમાન હોય છે. માત્ર વિકલ્પ (c) માં 2×2 પરિમાણ છે.

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો $A = [3]$ અને $B = [4]$ હોય તો $A \cdot B = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (b) 12

ઉકેલ:

$$A \cdot B = [3] \times [4] = [3 \times 4] = [12] = 12$$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx} \sin x = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (d) $\cos x$ ઉકેલ: $\sin x$ નું વિકલન $\cos x$ છે.

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો $f(x) = xe^x$ હોય તો $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (b) 1

ઉકેલ: ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતા: $f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$$f'(0) = e^0(1+0) = 1 \times 1 = 1$$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો $y = x^2$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (b) 2

ઉકેલ:

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$

જવાબ

જવાબ: (a) $\sin x$
ઉકેલ:

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int_0^1 x dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: (c) $\frac{1}{2}$
ઉકેલ:

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}} + c$$

જવાબ

જવાબ: (a) $\tan^{-1} x$
ઉકેલ:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $x \sin y + xy = x$ ની કક્ષા (Order) _____ છે

જવાબ

જવાબ: (b) 1
ઉકેલ: સમીકરણને $\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy}{\sin y}$ તરીકે લખી શકાય. સૌથી મોટું વિકલિત પ્રથમ કક્ષાનું છે.

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

 $\frac{dy}{dx} + y = x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.) _____ છે

જવાબ

જવાબ: (d) e^x
ઉકેલ: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે, સંકલ્પકારક અવયવ $= e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (b) -1

ઉકેલ: વ્યાખ્યા મુજબ, $i^2 = -1$

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$(2 + 3i)(2 - 3i) = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: (c) 13

ઉકેલ:

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$$

પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ અને $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ હોય તો $2A + 3B - C$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3 \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 24 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B - C = \begin{bmatrix} 19 & 34 \\ 10 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 32 \\ 9 & 19 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ અને $N = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(M + N)^T = M^T + N^T$

જવાબ

ઉકેલ:

$$M + N = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(M + N)^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad N^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M^T + N^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(M + N)^T = M^T + N^T$ સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $x \frac{dy}{dx} + y = xy$

જવાબ

ઉકેલ:

$$x \frac{dy}{dx} + y = xy$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{y}{x} = y \left(1 - \frac{1}{x} \right) = y \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

ચલ અલગ કરતા (Separating variables):

$$\frac{dy}{y} = \frac{x-1}{x} dx$$

સંકલન કરતા:

$$\ln |y| = \int \frac{x-1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = x - \ln |x| + C$$

$$y = A e^{x - \ln |x|} = A \frac{e^x}{x}$$

પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી સમીકરણો $2x + 3y = 8$, $3x + 4y = 11$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: શ્રેણિક સ્વરૂપમાં લખતા: $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

A^{-1} શોધતા:

$$|A| = 2(4) - 3(3) = 8 - 9 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 + 33 \\ 24 - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

તેથી: $x = 1, y = 2$

પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$

જવાબ

ઉકેલ:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(AB)^T = B^T A^T$ સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A + 7I = O$

જવાબ

ઉકેલ:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$7I = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી $f(x) = e^x$ નું વિકલિત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

કારણ કે $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ તેથી: $f'(x) = e^x$

પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો $y = \log(\sin x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$y = \log(\sin x)$$

સાંકળ નિયમ (Chain rule) નો ઉપયોગ કરતા:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int (4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x}) dx$

જવાબ

ઉકેલ:

$$\int \left(4x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx \\
&= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \ln |x| + C \\
&= x^4 + x^3 + 2 \ln |x| + C
\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

જો $y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$y = e^{\tan x} + \log(\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[e^{\tan x}] + \frac{d}{dx}[\log(\sin x)]$$

પ્રથમ પદ માટે: $\frac{d}{dx}[e^{\tan x}] = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$ બીજા પદ માટે: $\frac{d}{dx}[\log(\sin x)] = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$
તેથી: $\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x + \cot x$

પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

એક કણની ગતિનું સમીકરણ $s = t^4 + 3t$ છે. તો $t = 2$ સેકન્ડે તેનો વેગ અને પ્રવેગ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: આપેલ છે: $s = t^4 + 3t$

વેગ: $v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 3$ $t = 2$ સમયે: $v = 4(2)^3 + 3 = 4(8) + 3 = 32 + 3 = 35$ એકમ/સેકન્ડ

પ્રવેગ: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 12t^2$ $t = 2$ સમયે: $a = 12(2)^2 = 12(4) = 48$ એકમ/સેકન્ડ²

પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

વિધેય $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

નિર્ણાયક બિંદુઓ (Critical points) માટે: $f'(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ અથવા $x = -1$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$x = -1$ પર: $f''(-1) = 12(-1) - 6 = -18 < 0$ (મહત્તમ) $x = 2$ પર: $f''(2) = 12(2) - 6 = 18 > 0$ (ન્યૂનતમ)

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 5 = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$ (મહત્તમ) $f(2) = 2(8) - 3(4) - 12(2) + 5 = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$ (ન્યૂનતમ)
મહત્તમ કિંમત: 12 ($x = -1$ પર) ન્યૂનતમ કિંમત: -15 ($x = 2$ પર)

પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int x e^x dx$

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: $\int u dv = uv - \int v du$
ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$

$$\int x e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

જવાબ

ઉકેલ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-\frac{4x^2}{9})}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{1-(\frac{2x}{3})^2}}$$

ધારો કે $\frac{2x}{3} = \sin \theta$, તેથી $x = \frac{3 \sin \theta}{2}$, $dx = \frac{3 \cos \theta}{2} d\theta$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{3 \cos \theta}{2} d\theta}{3\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int \frac{\frac{3 \cos \theta}{2} d\theta}{3 \cos \theta} = \int \frac{1}{2} d\theta = \frac{\theta}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x}{3} \right) + C \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

$\frac{1-i}{1+i}$ નો અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$-i$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\overline{-i} = i$ છે.

પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$

ગુણધર્મ: $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ નો ઉપયોગ કરતા,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)}}{\sqrt{\cos(\pi/2 - x)} + \sqrt{\sin(\pi/2 - x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી: $I = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ નું ક્ષેત્રફળ સંકલનની મદદથી શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ માટે, $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $4 \times$ પ્રથમ ચરણમાં ક્ષેત્રફળ

$$= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

ધારો કે $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta d\theta$ જ્યારે $x = 0$, $\theta = 0$; જ્યારે $x = a$, $\theta = \pi/2$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$$

પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

સાદુરૂપ આપો: $\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^5}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^3 \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta)}$

જવાબ

ઉકેલ: દે-મોવરના પ્રમેય (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતા: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
અંશ:

$$\begin{aligned} & (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^4 \cdot (\cos \theta - i \sin \theta)^5 \\ &= (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \cdot (\cos(-5\theta) + i \sin(-5\theta)) \\ &= \cos(12\theta - 5\theta) + i \sin(12\theta - 5\theta) \\ &= \cos 7\theta + i \sin 7\theta \end{aligned}$$

છેદ:

$$\begin{aligned} & (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^3 \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \\ &= (\cos(-6\theta) + i \sin(-6\theta)) \cdot (\cos 12\theta + i \sin 12\theta) \\ &= \cos(-6\theta + 12\theta) + i \sin(-6\theta + 12\theta) \\ &= \cos 6\theta + i \sin 6\theta \end{aligned}$$

પરિણામ:

$$\frac{\cos 7\theta + i \sin 7\theta}{\cos 6\theta + i \sin 6\theta} = \cos(7\theta - 6\theta) + i \sin(7\theta - 6\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

જો $(3x - 7) + 2iy = 5y + (5 + x)i$ હોય તો x અને y ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$(3x - 7) + 2iy = 5y + (5 + x)i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ: $3x - 7 = 5y \dots (1)$ કાલ્પનિક ભાગ: $2y = 5 + x \dots (2)$
સમીકરણ (2) પરથી: $x = 2y - 5 \dots (3)$

(1) માં (3) મુકતા:

$$3(2y - 5) - 7 = 5y$$

$$6y - 15 - 7 = 5y$$

$$6y - 22 = 5y \Rightarrow y = 22$$

(3) પરથી: $x = 2(22) - 5 = 44 - 5 = 39$

તેથી: $x = 39, y = 22$

પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

$z = 1 + \sqrt{3}i$ ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં ફેરવો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

માનક: $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

કોણક: $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

ધ્રુવીય સ્વરૂપ: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

$\frac{4+2i}{(3+2i)(5-3i)}$ ને $a + ib$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ છેદનું સાદુરૂપ આપીએ:

$$(3+2i)(5-3i) = 15 - 9i + 10i - 6i^2 = 15 + i - 6(-1) = 15 + i + 6 = 21 + i$$

$$\begin{aligned} \frac{4+2i}{21+i} &= \frac{(4+2i)(21-i)}{(21+i)(21-i)} = \frac{84 - 4i + 42i - 2i^2}{21^2 - i^2} = \frac{84 + 38i + 2}{441 + 1} = \frac{86 + 38i}{442} \\ &= \frac{86}{442} + \frac{38}{442}i = \frac{43}{221} + \frac{19}{221}i \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + 2y = 3e^x$

જવાબ

ઉકેલ: આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં: $P = 2, Q = 3e^x$

સંકલ્પકારક અવયવ: $\mu = e^{\int P dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$

સમીકરણને μ વડે ગુણતા:

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = 3e^{2x} \cdot e^x = 3e^{3x}$$

આ આપે છે: $\frac{d}{dx}(ye^{2x}) = 3e^{3x}$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$ye^{2x} = \int 3e^{3x} dx = 3 \cdot \frac{e^{3x}}{3} + C = e^{3x} + C$$

તેથી: $y = \frac{e^{3x} + C}{e^{2x}} = e^x + Ce^{-2x}$

પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $v = x + y$, તેથી $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

મૂળ સમીકરણમાં મુકતા:

$$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

ચલ અલગ કરતા:

$$\frac{dv}{v^2 + 1} = dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા:

$$\int \frac{dv}{v^2 + 1} = \int dx$$

$$\tan^{-1}(v) = x + C$$

$$v = \tan(x + C)$$

પાછું મુકતા: $x + y = \tan(x + C)$ તેથી: $y = \tan(x + C) - x$

પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$, $y(0) = 2$

જવાબ

ઉકેલ: આ પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$

અહીં: $P = \frac{1}{x}$, $Q = e^x$

સંકલ્પકારક અવયવ: $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$ (માટે $x > 0$)

સમીકરણને $\mu = x$ વડે ગુણતા:

$$x \frac{dy}{dx} + y = x e^x$$

આ આપે છે: $\frac{d}{dx}(xy) = x e^x$

બંને બાજુ સંકલન કરતા (ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરીને):

$$xy = \int x e^x dx$$

$\int x e^x dx$ માટે: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તેથી $du = dx$, $v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1)$$

તેથી: $xy = e^x(x - 1) + C$

$$y = \frac{e^x(x - 1) + C}{x}$$

પ્રારંભિક શરત $y(0) = 2$ નો ઉપયોગ કરતા: અહીં શૂન્ય વડે ભાગાકારની સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. સમીકરણનો ઉકેલ $x = 0$ ની નજીક વધુ કાળજીપૂર્વક શોધવો પડે.

સામાન્ય ઉકેલ માટે: $y = e^x \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{C}{x}$