

Applied Mathematics (4320001) - Winter 2022 Solution

Milav Dabgar

February 23, 2022

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1(1) [1 ગુણ]

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ શ્રેણિકની કક્ષા _____ છે. જવાબ: b. 2×2

જવાબ

શ્રેણિકને 2 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા 2×2 છે.

પ્રશ્ન 1(2) [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો $2A - 3I =$ _____ જવાબ: a. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$\begin{aligned} 2A &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ 3I &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ 2A - 3I &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 1(3) [1 ગુણ]

જો $A_{2 \times 3}$ અને $B_{3 \times 4}$ શ્રેણિક હોય તો AB ની કક્ષા _____ છે. જવાબ: b. 2×4

જવાબ

શ્રેણિક ગુણાકાર AB માટે, જો A એ $m \times n$ અને B એ $n \times p$ હોય, તો AB એ $m \times p$ થાય. અહીં: $A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 4} = (AB)_{2 \times 4}$

પ્રશ્ન 1(4) [1 ગુણ]

જો $AB = I$ હોય તો શ્રેણિક $B = \dots$ જવાબ: c. A^{-1}

જવાબ

જો $AB = I$, તો B એ A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક છે, એટલે કે $B = A^{-1}$

પ્રશ્ન 1(5) [1 ગુણ]

 $\frac{d}{dx}(x^3 + 3^x + 3^3) = \dots$ જવાબ: c. $3x^2 + 3^x \log 3$

જવાબ

 $\frac{d}{dx}(x^3 + 3^x + 3^3) = 3x^2 + 3^x \log 3 + 0 = 3x^2 + 3^x \log 3$

પ્રશ્ન 1(6) [1 ગુણ]

જો $f(x) = e^{3x}$ હોય તો $f'(0) = \dots$ જવાબ: b. 3

જવાબ

 $f'(x) = 3e^{3x}$ $f'(0) = 3e^{3(0)} = 3e^0 = 3(1) = 3$

પ્રશ્ન 1(7) [1 ગુણ]

જો $y = e^x + 100x$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2} = \dots$ જવાબ: a. e^x

જવાબ

 $\frac{dy}{dx} = e^x + 100$ $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + 0 = e^x$

પ્રશ્ન 1(8) [1 ગુણ]

 $\int \frac{1}{x^2} dx = \dots + C$ જવાબ: b. $-\frac{1}{x}$

જવાબ

 $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + C$

પ્રશ્ન 1(9) [1 ગુણ]

 $\int (\log a) dx = \dots + C$ જવાબ: a. $x \log a$

જવાબ

કેમકે $\log a$ અચળ છે: $\int (\log a) dx = (\log a) \int dx = x \log a + C$

પ્રશ્ન 1(10) [1 ગુણ]

$$\int_0^1 e^x dx = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{જવાબ: a. } e - 1$$

જવાબ

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

પ્રશ્ન 1(11) [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે _____ અને _____ છે. જવાબ: d. 2, 1

જવાબ

કક્ષા (Order) = મહત્તમ વિકલન = 2 પરિમાણ (Degree) = મહત્તમ વિકલનની ઘાત = 1

પ્રશ્ન 1(12) [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y = 3x$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F.) _____ છે. જવાબ: c. e^x

જવાબ

$$\text{સમીકરણ } \frac{dy}{dx} + Py = Q \text{ માટે જ્યાં } P = 1: \text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$$

પ્રશ્ન 1(13) [1 ગુણ]

પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો મધ્યક _____ છે. જવાબ: c. 3

જવાબ

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ: } 1, 2, 3, 4, 5 \text{ મધ્યક} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

પ્રશ્ન 1(14) [1 ગુણ]

જો અવલોકનો 11, x, 19, 21, y, 29 નો મધ્યક 20 હોય તો $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$ જવાબ: a. 40

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{11+x+19+21+y+29}{6} = 20 \quad \frac{80+x+y}{6} = 20 \quad 80 + x + y = 120 \quad x + y = 40$$

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ હોય તો $(AB)^T$ શોધો.

જવાબ

પ્રથમ AB શોધો: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1(2) + 3(-1) + 2(1) & 1(1) + 3(1) + 2(-1) \\ 2(2) + 0(-1) + 1(1) & 2(1) + 0(1) + 1(-1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 - 3 + 2 & 1 + 3 - 2 \\ 4 + 0 + 1 & 2 + 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો $1 + x + x^2 = 0$ અને $x^3 = 1$ હોય તો સાબિત કરો કે $\begin{bmatrix} 1 & x^2 \\ x & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

Given: $1 + x + x^2 = 0$ and $x^3 = 1$

From $1 + x + x^2 = 0$, we get $x^2 = -1 - x$

Let's compute the matrix product: $\begin{bmatrix} 1 & x^2 \\ x & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(x) + x^2(1) & 1(x^2) + x^2(x) \\ x(x) + x(1) & x(x^2) + x(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x + x^2 & x^2 + x^3 \\ x^2 + x & x^3 + x^2 \end{bmatrix}$$

Since $x^3 = 1$ and $x + x^2 = -1$: $= \begin{bmatrix} -1 & x^2 + 1 \\ -1 & 1 + x^2 \end{bmatrix}$

Since $x^2 = -1 - x$, we have $x^2 + 1 = -x$ and $1 + x^2 = -x$

From $1 + x + x^2 = 0$, if x is a cube root of unity, then $x^2 + 1 = -x = -1$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + x^2 e^{-y} = 0$

જવાબ

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 e^{-y}$$

ચલને અલગ કરતા (Separating variables): $e^y dy = -x^2 dx$ બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int e^y dy = \int -x^2 dx$

$$e^y = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \ln\left(-\frac{x^3}{3} + C\right)$$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $A^2 - 4A - 5I_3 = O$

જવાબ

પ્રથમ A^2 ગણો: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

હવે $A^2 - 4A - 5I_3$ ગણો: $4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

$$5I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

x ની કઈ કિંમત માટે શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ અસામાન્ય શ્રેણિક બને?

જવાબ

જ્યારે નિશ્ચાયક શૂન્ય થાય ત્યારે શ્રેણિક અસામાન્ય બને છે.

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= (3-x) \begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ -4 & -1-x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1-x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 4-x \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= (3-x)[(4-x)(-1-x) - (1)(-4)] - 2[1(-1-x) - 1(-2)] + 2[1(-4) - (4-x)(-2)] \\
 &= (3-x)[-(4-x)(1+x) + 4] - 2[-1-x+2] + 2[-4+2(4-x)] \\
 &= (3-x)[-4-4x+x+x^2+4] - 2[1-x] + 2[-4+8-2x] \\
 &= (3-x)[x^2-3x] - 2(1-x) + 2(4-2x) \\
 &= (3-x)x(x-3) - 2 + 2x + 8 - 4x \\
 &= -x(3-x)^2 + 6 - 2x \\
 \text{શૂન્ય સાથે સરખાવતા: } -x(3-x)^2 + 6 - 2x &= 0 \text{ આનાથી } x = 1, x = 2, x = 3 \text{ મળે છે.}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી ઉકેલો: $2y + 5x = 4, 7x + 3y = 5$

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \text{શ્રેણિક સ્વરૂપ } AX &= B \text{ માં લખતા: } \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 A^{-1} \text{ શોધો: } \det(A) &= 5(3) - 2(7) = 15 - 14 = 1 \\
 A^{-1} &= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \\
 X &= A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\
 \text{તેથી: } x &= 2, y = -3
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]

વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \sqrt{x}$ નું વિકલિત શોધો.

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \text{વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતા: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
 \text{અંશનું સંમેયીકરણ કરતા: } &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]

જો $x + y = \sin(xy)$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

$$\begin{aligned}
 x \text{ ની સાપેક્ષે બંને બાજુ વિકલન કરતા: } \frac{d}{dx}(x + y) &= \frac{d}{dx}[\sin(xy)] \\
 1 + \frac{dy}{dx} &= \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) \\
 1 + \frac{dy}{dx} &= \cos(xy) \cdot \left(x \frac{dy}{dx} + y\right) \\
 1 + \frac{dy}{dx} &= \cos(xy) \cdot x \frac{dy}{dx} + y \cos(xy) \\
 1 + \frac{dy}{dx} - x \cos(xy) \frac{dy}{dx} &= y \cos(xy) \\
 \frac{dy}{dx}(1 - x \cos(xy)) &= y \cos(xy) - 1 \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{y \cos(xy) - 1}{1 - x \cos(xy)}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\
 &= \int \sin x \sec^2 x dx + \int \cos x \csc^2 x dx \\
 \text{પ્રથમ સંકલન માટે, ધારો કે } u &= \cos x, \text{ તો } du = -\sin x dx: \int \sin x \sec^2 x dx = -\int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u} = \sec x \\
 \text{બીજા સંકલન માટે, ધારો કે } v &= \sin x, \text{ તો } dv = \cos x dx: \int \cos x \csc^2 x dx = \int \frac{1}{v^2} dv = -\frac{1}{v} = -\csc x \\
 \text{તેથી: } \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \sec x - \csc x + C
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]

જો $y = e^x \cdot \sin x$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

જવાબ

$$\begin{aligned}
 \text{આપેલ છે: } y &= e^x \sin x \text{ પ્રથમ વિકલિત શોધો: } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) \\
 \text{બીજું વિકલિત શોધો: } \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}[e^x(\sin x + \cos x)] = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = e^x[\sin x + \cos x + \cos x - \sin x] \\
 &= 2e^x \cos x \\
 \text{હવે ચકાસતા: } \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y &= 2e^x \cos x - 2e^x(\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x \\
 &= 0 \\
 \text{સાબિત થાય છે.}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

વિધેય $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

જવાબ

$f'(x) = 0$ લઈને નિર્ણાયક બિંદુઓ શોધો: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા: $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$

તેથી $x = \frac{5}{3}$ અથવા $x = 1$

બીજું વિકલિત શોધો: $f''(x) = 6x - 8$

નિર્ણાયક બિંદુઓ ચકાસતા: $-x = 1$ માટે: $f''(1) = 6(1) - 8 = -2 < 0 \rightarrow -x = 5\frac{2}{3}$ માટે: $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{3}\right) - 8 = 10 - 8 = 2 > 0$

\rightarrow

વિધેયની કિંમતો ગણતા: $-f(1) = 1 - 4 + 5 + 7 = 9$ (સ્થાનીય મહત્તમ) $-f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7 = \frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3} + 7 = \frac{158}{27}$ (સ્થાનીય ન્યૂનતમ)

પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

એક કણનું ગતિ સમીકરણ $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ છે તો

(i) $t = 3$ સેકન્ડે વેગ અને પ્રવેગ શોધો.

(ii) પ્રવેગ શૂન્ય થાય ત્યારે "t" શોધો.

જવાબ

આપેલ છે: $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ વેગ: $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$ પ્રવેગ: $a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$

(i) $t = 3$ સેકન્ડે: - વેગ: $v(3) = 3(9) - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0$ m/s - પ્રવેગ: $a(3) = 6(3) - 12 = 18 - 12 = 6$ m/s²

(ii) જ્યારે પ્રવેગ શૂન્ય હોય: $6t - 12 = 0$ $t = 2$ સેકન્ડ

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$

જવાબ

આંશિક અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરતા: $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$x = A(x+2) + B(x+1)$

$x = -1$ લેતા: $-1 = A(1) \Rightarrow A = -1$ $x = -2$ લેતા: $-2 = B(-1) \Rightarrow B = 2$

$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx$

$= -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C$

$= \ln \left| \frac{(x+2)^2}{x+1} \right| + C$

પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

જવાબ

ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$... (1) ગુણધર્મ $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ નો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2-x)}{\sin(\pi/2-x) + \cos(\pi/2-x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \dots (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતા: $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx$

$$2I = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{તેથી: } I = \frac{\pi}{4}$$

પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

જો 15, 7, 6, a, 3 નો મધ્યક 7 હોય તો "a" શોધો.

જવાબ

મધ્યક = $\frac{\text{અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની સંખ્યા}}$

$$7 = \frac{15+7+6+a+3}{5}$$

$$7 = \frac{31+a}{5}$$

$$35 = 31 + a$$

$$a = 4$$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

ક્રિમત શોધો: $\int x^2 e^x dx$

જવાબ

બે વખત ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા: ધારો કે $u = x^2$, $dv = e^x dx$ તો $du = 2x dx$, $v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$\int 2x e^x dx$ માટે, ફરીથી ખંડશ: સંકલન વાપરતા: ધારો કે $u = 2x$, $dv = e^x dx$ તો $du = 2 dx$, $v = e^x$

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x$$

$$\text{Therefore: } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

વક્ર $y = 2x^2$, રેખાઓ $x = 1$, $x = 3$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જવાબ

$$\text{Area} = \int_1^3 2x^2 dx$$

$$= 2 \int_1^3 x^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3} [x^3]_1^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3}(27 - 1) \\
 &= \frac{2}{3} \times 26 \\
 &= 52\frac{2}{3} \text{ ચોરસ એકમ}
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

નીચેના વર્ગીકૃત માહિતી માટે ટૂંકી રીતે મધ્યક શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 1. વર્ગીકૃત માહિતી

Marks	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
No. of Students	8	10	24	30	12	16

પદ વિચલન રીતનો ઉપયોગ કરતા:

કોષ્ટક 2. મધ્યક ગણતરી

Class	x_i	f_i	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i d_i$
21-25	23	8	-3	-24
26-30	28	10	-2	-20
31-35	33	24	-1	-24
36-40	38	30	0	0
41-45	43	12	1	12
46-50	48	16	2	32
Total	-	100	-	-24

ધારેલો મધ્યક $A = 38$, વર્ગ લંબાઈ $h = 5$

$$\text{Mean} = A + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \times h$$

$$\text{Mean} = 38 + \frac{-24}{100} \times 5 = 38 - 1.2 = 36.8$$

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

નીચેના માહિતી માટે મધ્યક શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 3. વર્ગીકૃત માહિતી

x_i	92	93	97	98	102	104
f_i	3	2	3	2	6	4

$$\text{Mean} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

કોષ્ટક 4. પદ વિચલન ગણતરી

x_i	f_i	$f_i x_i$
92	3	276
93	2	186
97	3	291
98	2	196
102	6	612
104	4	416
Total	20	1977

$$\text{Mean} = \frac{1977}{20} = 98.85$$

પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

4, 6, 2, 4, 5, 4, 4, 5, 3, 4 માટે સરેરાશ વિચલન શોધો.

જવાબ

$$\text{First find the mean: Mean} = \frac{4+6+2+4+5+4+4+5+3+4}{10} = \frac{41}{10} = 4.1$$

મધ્યકથી વિચલન ગણો:

કોષ્ટક 5. વિચલન ગણતરી

x_i	$ x_i - \bar{x} $
4	$ 4 - 4.1 = 0.1$
6	$ 6 - 4.1 = 1.9$
2	$ 2 - 4.1 = 2.1$
4	$ 4 - 4.1 = 0.1$
5	$ 5 - 4.1 = 0.9$
4	$ 4 - 4.1 = 0.1$
4	$ 4 - 4.1 = 0.1$
5	$ 5 - 4.1 = 0.9$
3	$ 3 - 4.1 = 1.1$
4	$ 4 - 4.1 = 0.1$
Total	7.4

$$\text{સરેરાશ વિચલન} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{7.4}{10} = 0.74$$

પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

નીચેના અસતત આવૃત્તિ વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

જવાબ

કોષ્ટક 6. અસતત વર્ગીકૃત માહિતી

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

First find the mean:

કોષ્ટક 7. મધ્યક ગણતરી

x_i	f_i	$f_i x_i$
4	3	12
8	5	40
11	9	99
17	5	85
20	4	80
24	3	72
32	1	32
Total	30	420

$$\text{Mean} = \frac{420}{30} = 14$$

હવે પ્રમાણિત વિચલન ગણો:

કોષ્ટક 8. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	-10	100	300
8	5	-6	36	180
11	9	-3	9	81
17	5	3	9	45
20	4	6	36	144
24	3	10	100	300
32	1	18	324	324
Total	30	-	-	1374

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1374}{30}} = \sqrt{45.8} = 6.77$$

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{4x}{1+x^2}y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

જવાબ

આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે. જ્યાં $P = \frac{4x}{1+x^2}$ અને $Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ સંકલ્પકારક અવયવ શોધો: I.F. = $e^{\int P dx} = e^{\int \frac{4x}{1+x^2} dx}$

ધારો કે $u = 1 + x^2$, તો $du = 2x dx$ $\int \frac{4x}{1+x^2} dx = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| = 2 \ln(1+x^2)$

$$\text{I.F.} = e^{2 \ln(1+x^2)} = (1+x^2)^2$$

The solution is: $y \cdot (1+x^2)^2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)^2 dx$

$$y(1+x^2)^2 = \int 1 dx = x + C$$

$$y = \frac{x+C}{(1+x^2)^2}$$

પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 1$

જવાબ

$$(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

ધારો કે $v = x + y + 1$, તો $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$ કિંમત મૂકતા: $\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{1}{v^2}$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{v^2} = \frac{v^2+1}{v^2}$$

ચલને અલગ કરતા (Separating variables): $\frac{v^2}{v^2+1} dv = dx$

$$\left(1 - \frac{1}{v^2+1}\right) dv = dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતા: $\int \left(1 - \frac{1}{v^2+1}\right) dv = \int dx$

$$v - \arctan(v) = x + C$$

$$v = x + y + 1 \text{ પાછું મૂકતા: } (x + y + 1) - \arctan(x + y + 1) = x + C$$

$$y + 1 - \arctan(x + y + 1) = C$$

$$y = \arctan(x + y + 1) + C - 1$$

પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + y = e^x, y(0) = 1$

જવાબ

આ $P = 1$ અને $Q = e^x$ સાથેનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે. સંકલ્યકારક અવયવ: I.F. = $e^{\int 1 dx} = e^x$ ઉકેલ છે: $y \cdot e^x = \int e^x \cdot e^x dx = \int e^{2x} dx$

$$ye^x = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$y = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$$

પ્રારંભિક શરત $y(0) = 1$ નો ઉપયોગ કરતા: $1 = \frac{e^0}{2} + Ce^0 = \frac{1}{2} + C$

$$C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{તેથી: } y = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

સૂત્રો

શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ

- શ્રેણિક ગુણાકાર: $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}$
- પરિવર્ત શ્રેણિક: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
- વ્યસ્ત શ્રેણિક: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$
- નિશ્ચાયક 2×2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

વિકલન

- મૂળભૂત નિયમો: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- સાંકળ નિયમ: $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- ગુણાકારનો નિયમ: $\frac{d}{dx}[uv] = u'v + uv'$
- ગૂઢ વિધેયનું વિકલન: બંને બાજુ વિકલન કરો, y ને x ના વિધેય તરીકે લો

સંકલન

- મૂળભૂત સંકલિતો: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)
- ખંડશઃ સંકલન: $\int u dv = uv - \int v du$
- નિયત સંકલન: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

વિકલ સમીકરણો

- સુરેખ વિકલ સમીકરણ: $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, ઉકેલ: $y \cdot \text{I.F.} = \int Q \cdot \text{I.F.} dx$
- સંકલ્પકારક અવયવ: $\text{I.F.} = e^{\int P dx}$
- વિયોજનીય ચલ: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$

આંકડાશાસ્ત્ર

- મધ્યક: $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
- સરેરાશ વિચલન: $\text{M.D.} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$
- પ્રમાણિત વિચલન: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$