

Applied Mathematics (4320001) - Winter 2023 Solution

Milav Dabgar

January 30, 2024

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1(1) [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ હોય તો $4A = \dots$ જવાબ: (b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1(2) [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ શ્રેણિકની કક્ષા } \quad \text{ ઉ. જવાબ: (a) } 2 \times 3$$

જવાબ

શ્રેણિકને 2 હાર અને 3 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા 2×3 છે.

પ્રશ્ન 1(3) [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો $A^2 = \dots$ જવાબ: (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1(4) [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો A નો સહ-અવયવજ (adjoint) શ્રેણીક = ... જવાબ: (c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

શ્રેણીક $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે, $adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1(5) [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \dots$ જવાબ: (d) $\sec^2 x$

જવાબ

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

પ્રશ્ન 1(6) [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\sin 5x) = \dots$ જવાબ: (b) $5 \cos 5x$

જવાબ

$\frac{d}{dx}(\sin 5x) = 5 \cos 5x$ (એઇન રૂલનો ઉપયોગ કરીને)

પ્રશ્ન 1(7) [1 ગુણ]

જો વિધેય $y = f(x)$ એ ખાત્મે મહત્તમ હોય તો $f'(a) = \dots$ જવાબ: (c) 0

જવાબ

મહત્તમ બિંદુએ, પ્રથમ વિકલિત શૂન્ય થાયા: $f'(a) = 0$

પ્રશ્ન 1(8) [1 ગુણ]

$\int \sin x dx = \dots + C$ જવાબ: (a) $-\cos x$

જવાબ

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

પ્રશ્ન 1(9) [1 ગુણ]

$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \dots + C$ જવાબ: (d) $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

જવાબ

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

પ્રશ્ન 1(10) [1 ગુણ]

$$\int_1^2 x^2 dx = \dots$$

જવાબ

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

પ્રશ્ન 1(11) [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^4 + \frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ની કક્ષા (order) ... છે. જવાબ: (c) 3

જવાબ

કક્ષા એ મહત્તમ વિકલન છે = 3

પ્રશ્ન 1(12) [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ નો સંકલ્યકારક અવયવ (I.F) ... છે. જવાબ: (b) x

જવાબ

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

પ્રશ્ન 1(13) [1 ગુણ]

39, 23, 58, 47, 50, 16, 61 નો મધ્યક ... છે. જવાબ: (b) 42

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{39+23+58+47+50+16+61}{7} = \frac{294}{7} = 42$$

પ્રશ્ન 1(14) [1 ગુણ]

પ્રથમ પાંચ પ્રાફુલ્લિક સંખ્યાઓનો મધ્યક ... છે. જવાબ: (a) 3

જવાબ

$$\text{મધ્યક} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

પ્રશ્ન 2 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]

પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ હોય, તો $3A + 2B - 4C$ શોધો.

જવાબ

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ -3 & 0 & 6 \\ 12 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 12 & 12 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \end{bmatrix}$$

$$3A + 2B - 4C = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 21 \\ -5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $(A + B)^T = A^T + B^T$

જવાબ

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

સાબિત થાય છે: $(A + B)^T = A^T + B^T$

પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ ઉકેલો: $xydy = (x + 1)(y + 1)dx$

જવાબ

અલગ કરતા (Separating variables): $\frac{y}{y+1} dy = \frac{x+1}{x} dx$

$$\left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

બંને બાજુ સંકળન કરતા: $y - \ln|y+1| = x + \ln|x| + C$

અંતિમ જવાબ: $y - x = \ln|y+1| + \ln|x| + C$

પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શ્રેણિક શોધો.

જવાબ

$$\text{ધારો કે } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(-3 - (-2)) - 1(2 - (-1)) + 2(4 - (-3)) = 3(-1) - 1(3) + 2(7) = -3 - 3 + 14 = 8$$

સહ-અવધવ (Cofactors):

- $C_{11} = -1, C_{12} = -3, C_{13} = 7$
- $C_{21} = 3, C_{22} = 1, C_{23} = -5$
- $C_{31} = 5, C_{32} = 7, C_{33} = -11$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી ઉકેલો: $3x - 2y = 8, 5x + 4y = 6$

જવાબ

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(4) - (-2)(5) = 12 + 10 = 22$$

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 44 \\ -22 \end{bmatrix}$$

ਜવਾਬ: $x = 2, y = -1$

ਪ੍ਰਸ਼ 2(b)(3) [4 ਗੁਣ]

ਜਦੋਂ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $A \cdot adj(A)$ ਸ਼ੋਧੋ।

ਜਵਾਬ

$$|A| = 1(6 - 2) - 2(4 - 1) + 1(4 - 3) = 4 - 6 + 1 = -1$$

ਕੋਈਪਣ ਅਤੇ ਹੋਰ ਮਾਟੇ: $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$

$$A \cdot adj(A) = (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ਪ੍ਰਸ਼ 3 [14 ਗੁਣ]

ਕੋਈਪਣ ਬੇ ਗਣਿ

ਪ੍ਰਸ਼ 3(a) [6 ਗੁਣ]

ਪ੍ਰਸ਼ 3(a)(1) [3 ਗੁਣ]

ਜਦੋਂ $y = \log\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਸ਼ੋਧੋ।

ਜਵਾਬ

$$y = \log(\sin x) - \log(1 + \cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{1}{1+\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$= \cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

ਨਿਤਯਸਮ $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ਨੂੰ ਉਪਯੋਗ ਕਰਤਾ।

ਜਵਾਬ: $\frac{dy}{dx} = \cot x + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

ਪ੍ਰਸ਼ 3(a)(2) [3 ਗੁਣ]

ਜਦੋਂ $y = \sin(x + y)$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਸ਼ੋਧੋ।

જવાબ

$$\text{બંને બાજુ વિકલન કરતાં: } \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} - \cos(x+y) \cdot \frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} [1 - \cos(x+y)] = \cos(x+y)$$

$$\text{જવાબ: } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]

મેળવો: $\int x^2 \log x dx$

જવાબ

ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાં: $\int u dv = uv - \int v du$

ધારો કે $u = \log x, dv = x^2 dx$ તો $du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \log x dx = \log x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\text{જવાબ: } \frac{x^3}{3} (\log x - \frac{1}{3}) + C$$

પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]**પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]**

ગતિ સમીકરણ $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 7$ છે. જ્યારે પ્રવેગ શૂન્ય હોય ત્યારે ૫ અને t શોધો.

જવાબ

$$s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 7$$

$$\text{વેગ: } v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 6t - 12$$

$$\text{પ્રવેગ: } a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

$$\text{જ્યારે પ્રવેગ} = 0: 12t - 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{At } t = 1/2: s = 2(\frac{1}{2})^3 - 3(\frac{1}{2})^2 - 12(\frac{1}{2}) + 7 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 7 = \frac{1}{2}$$

$$\text{જવાબ: } t = 1/2, s = 1/2$$

પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]

જો $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

જવાબ

$$y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ફરી: } \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y \\
 &= (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x}) \\
 &= 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x} \\
 &= (18 - 6 - 12)e^{3x} + (12 + 6 - 18)e^{-2x} = 0
 \end{aligned}$$

Hence proved

પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]

$f(x) = x^3 - 3x + 11$ ની મહત્વમાં અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો.

જવાબ

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 3x + 11 \\
 f'(x) &= 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1) \\
 \text{નિર્ણયક બિંદુઓ: } &x = 1, x = -1 \\
 f''(x) &= 6x \\
 x = 1 \text{ આગળ: } &f''(1) = 6 > 0 \rightarrow \text{સ્થાનીય ન્યૂનતમ } x = -1 \text{ આગળ: } f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow \text{સ્થાનીય મહત્વમ} \\
 f(1) &= 1 - 3 + 11 = 9 \text{ (minimum)} \quad f(-1) = -1 + 3 + 11 = 13 \text{ (maximum)} \\
 \text{જવાબ: } &\text{Maximum} = 13 \text{ at } x = -1, \text{ Minimum} = 9 \text{ at } x = 1
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]

પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]

મેળવો: $\int \sin 5x \sin 6x dx$

જવાબ

$$\begin{aligned}
 & \text{નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં: } \sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\
 & \sin 5x \sin 6x = \frac{1}{2}[\cos(5x - 6x) - \cos(5x + 6x)] \\
 &= \frac{1}{2}[\cos(-x) - \cos(11x)] = \frac{1}{2}[\cos x - \cos(11x)] \\
 & \int \sin 5x \sin 6x dx = \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos(11x)] dx \\
 &= \frac{1}{2}[\sin x - \frac{\sin(11x)}{11}] + C \\
 \text{જવાબ: } &\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sin(11x)}{22} + C
 \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]

મેળવો: $\int \frac{(1+x)e^x}{\cos^2(xe^x)} dx$

જવાબ

ધારો કે $u = xe^x$, તો $du = (1+x)e^x dx$

The integral becomes: $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = \tan u + C$

પાછું મૂકતાઃ $= \tan(xe^x) + C$

જવાબ: $\tan(xe^x) + C$

પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

માહિતી: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12 માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

જવાબ

Data: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12 $n = 8$

$$\text{મધ્યક} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$$

કોષ્ટક 1. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

x	x-9	(x-9) ²
6	-3	9
7	-2	4
10	1	1
12	3	9
13	4	16
4	-5	25
8	-1	1
12	3	9

$$\sum(x - 9)^2 = 74$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{74}{8}} = \sqrt{9.25} = 3.04$$

જવાબ: $\sigma = 3.04$

પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]**પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]**

મેળવો: $\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx$

જવાબ

આર્થિક અપૂર્ણાર્થીનો ઉપયોગ કરતાઃ $\frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$

$$2x+1 = A(x-3) + B(x+1)$$

$$\text{જ્યારે } x = -1: 2(-1) + 1 = A(-4) \Rightarrow -1 = -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\text{જ્યારે } x = 3: 2(3) + 1 = B(4) \Rightarrow 7 = 4B \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{7}{4} \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{7}{4} \ln|x-3| + C$$

જવાબ: $\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{7}{4} \ln|x-3| + C$

પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

મેળવો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x + \sqrt{\tan x}}} dx$

જવાબ

ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x + \sqrt{\tan x}}} dx$

ગુણધર્મ $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ નો ઉપયોગ કરતા:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot(\pi/2-x)}}{\sqrt{\cot(\pi/2-x) + \sqrt{\tan(\pi/2-x)}}} dx$$

Since $\cot(\pi/2 - x) = \tan x$ and $\tan(\pi/2 - x) = \cot x$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x + \sqrt{\cot x}}} dx$$

બંને પદનો સરવાળો કરતા: $2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{\sqrt{\cot x + \sqrt{\tan x}}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$

જવાબ: $I = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 2. વર્ગીકૃત માહિતી

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

$$N = \sum f_i = 3 + 5 + 9 + 5 + 4 + 3 + 1 = 30$$

$$\text{મધ્યદ} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3(4) + 5(8) + 9(11) + 5(17) + 4(20) + 3(24) + 1(32)}{30} \\ = \frac{12 + 40 + 99 + 85 + 80 + 72 + 32}{30} = \frac{420}{30} = 14$$

કોષ્ટક 3. સરેરાશ વિચલન ગણતરી

x_i	f_i	$ x_i - 14 $	$f_i x_i - 14 $
4	3	10	30
8	5	6	30
11	9	3	27
17	5	3	15
20	4	6	24
24	3	10	30
32	1	18	18

$$\sum f_i |x_i - 14| = 174$$

$$\text{Mean deviation} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{174}{30} = 5.8$$

જવાબ: Mean deviation = 5.8

પ્રશ્ન 5 [14 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]

પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે સરેરાશ વિચલન શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 4. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Freq	3	7	12	15	8	3	2

$$N = 50, \sum f_i x_i = 3100$$

$$\text{મધ્યક} = 3100/50 = 62$$

કોષ્ટક 5. સરેરાશ વિચલન ગણતરી

Class	x_i	f_i	$ x_i - 62 $	$f_i x_i - 62 $
30-40	35	3	27	81
40-50	45	7	17	119
50-60	55	12	7	84
60-70	65	15	3	45
70-80	75	8	13	104
80-90	85	3	23	69
90-100	95	2	33	66

$$\text{સરેરાશ વિચલન} = 568/50 = 11.36$$

$$\text{જવાબ: Mean deviation} = 11.36$$

પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

આપેલ માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 6. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	60	61	62	63	64	65	66	67	68
Freq	2	1	12	29	25	12	10	4	5

$$N = 100, \text{મધ્યક} = 63.8$$

કોષ્ટક 7. પ્રમાણિત વિચલન ગણતરી

x_i	f_i	$(x_i - 63.8)$	$(x_i - 63.8)^2$	$f_i(x_i - 63.8)^2$
60	2	-3.8	14.44	28.88
61	1	-2.8	7.84	7.84
62	12	-1.8	3.24	38.88
63	29	-0.8	0.64	18.56
64	25	0.2	0.04	1.00
65	12	1.2	1.44	17.28
66	10	2.2	4.84	48.40
67	4	3.2	10.24	40.96
68	5	4.2	17.64	88.20

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 290$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{290/100} = \sqrt{2.9} = 1.70$$

જવાબ: $\sigma = 1.70$

પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યક શોધો

જવાબ

કોષ્ટક 8. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
Freq	26	31	35	42	82	71

કોષ્ટક 9. મધ્યક ગણતરી

Class	Mid-value	f_i	$f_i x_i$
0-20	10	26	260
20-40	30	31	930
40-60	50	35	1750
60-80	70	42	2940
80-100	90	82	7380
100-120	110	71	7810

$$N = 287, \sum f_i x_i = 21070$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{21070}{287} = 73.42$$

જવાબ: Mean = 73.42

પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $(x + y + 1)^2 \frac{dy}{dx} = 1$ ઉકેલો

જવાબ

ધારો કે $z = x + y + 1$, તો $\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ તેથી $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$
 કિંમત મૂકતાં: $z^2(\frac{dz}{dx} - 1) = 1 z^2 \frac{dz}{dx} - z^2 = 1 z^2 \frac{dz}{dx} = 1 + z^2 \frac{z^2}{1+z^2} dz = dx$
 બંને બાજુ સંકળન કરતાં: $\int \frac{z^2}{1+z^2} dz = \int dx$
 $\int \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = x + C$
 $z - \tan^{-1} z = x + C$
 $z = x + y + 1$ પાછું મૂકતાં: $(x + y + 1) - \tan^{-1}(x + y + 1) = x + C$
જવાબ: $y + 1 = \tan^{-1}(x + y + 1) + C$

પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$, $y(0) = 2$

જવાબ

આ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.
 અહીં $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = e^x$
 સંકલ્પકરક અવયવ: $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| = x$ ($x > 0$ માટે)
 સમીકરણને x વડે ગુણતાં: $x \frac{dy}{dx} + y = xe^x$
 $\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$
 બંને બાજુ સંકળન કરતાં: $xy = \int xe^x dx$
 $\int xe^x dx$ માટે ખંડશ: સંકળનનો ઉપયોગ કરતાં: ધારો કે $u = x$, $dv = e^x dx$ તો $du = dx$, $v = e^x$
 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$
 So: $xy = e^x(x - 1) + C$ $y = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$
 પ્રારંભિક શરત $y(0) = 2$ નો ઉપયોગ કરતાં: જેમ $x \rightarrow 0$, આપણે L'Hôpital ના નિયમ કે શ્રેણી વિસ્તરણનો ઉપયોગ કરવો પડે.
 $x = 0$ આગળ મૂળ સમીકરણ પરથી: $\frac{dy}{dx} = e^x - \frac{y}{x}$ આ સૂચવે છે કે આપણે પ્રારંભિક શરત સાથે વધુ સાવચેત રહેતું જોઈએ.
વૈકલ્પિક અભિગમ: સમીકરણ $x = 0$ આગળ અસામાન્ય છે, તેથી આપણે $x \neq 0$ હોય તેવા વિસ્તારમાં ઉકેલીએ છીએ.
જવાબ: $y = \frac{e^x(x-1)+C}{x}$ જ્યાં C સીમા શરતો દ્વારા નક્કી થાય છે.

પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો: $y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$

જવાબ

$y \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}$
 $y \frac{dy}{dx} = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}$
 $\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{1+x^2} dx$
 બંને બાજુ સંકળન કરતાં: $\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \sqrt{1+x^2} dx$
 ડાબી બાજુ માટે, ધારો કે $u = 1 + y^2$, તો $du = 2y dy$: $\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} = \sqrt{1+y^2}$
 જમણી બાજુ માટે: $\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$
 Therefore: **જવાબ:** $\sqrt{1+y^2} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$

સૂત્રો

શ્રેણીક પ્રક્રિયાઓ

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $A \cdot adj(A) = |A| \cdot I$
- 2×2 શ્રેણીક $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે: $adj = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

વિકલન સૂત્રો

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- સંકળ નિયમ: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

સંકળન સૂત્રો

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

વિકલ સમીકરણો

- સુરેખ વિકલ સમીકરણ: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
- સંકલ્યકારક અવધાર: $I.F. = e^{\int P(x)dx}$
- વિચોજનીય ચલ: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

આંકડાશાસ્ત્ર

- મધ્યક: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ (અવગ્નિકૃત), $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ (વગ્નિકૃત)
- સરેરાશ વિચલન: $M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$
- પ્રમાણિત વિચલન: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$