

# એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2024 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

જૂન 26, 2024

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી ચોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

## પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

શ્રેણિક  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  ની કક્ષા (Order) \_\_\_\_\_ છે.

### જવાબ

જવાબ: (b)  $3 \times 2$

ઉક્લેનું: શ્રેણિકની કક્ષા (હાર)  $\times$  (સ્તંભ) દ્વારા આપવામાં આવે છે શ્રેણિક A માં 3 હાર અને 2 સ્તંભ છે તેથી, કક્ષા =  $3 \times 2$

## પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$  હોય તો  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

### જવાબ

જવાબ: (d)  $A^T$

ઉક્લેનું: લાંબિક શ્રેણિક (orthogonal matrices) માટે,  $A^{-1} = A^T$  કેમ કે  $AA^T = I$ , આપણને  $A^{-1} = A^T$  મળે છે.

## પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

### જવાબ

જવાબ: (a)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$

ઉક્તા:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1(-1) + 2(2) & 1(6) + 2(1) \\ 5(-1) + 0(2) & 5(6) + 0(1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 + 4 & 6 + 2 \\ -5 + 0 & 30 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$  હોય તો  $A^T = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

જવાબ: (b)  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ઉક્તા: શ્રેણીકનો પરિસર્પ (transpose) હાર અને સ્તંભની અદલાબદલી કરીને મેળવવામાં આવે છે.

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]**

$\frac{d}{dx}(4^x) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

જવાબ: (a)  $4^x \log_e 4$

ઉક્તા:  $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$  તેથી,  $\frac{d}{dx}(4^x) = 4^x \ln 4 = 4^x \log_e 4$

**પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]**

$\frac{d}{dx}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ**

જવાબ: (b) 0

ઉક્તા:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  (ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમ)  $\frac{d}{dx}(1) = 0$

**પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]**

જો  $x = \sin \theta, y = \cos \theta$  હોય તો  $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ****જવાબ:** (d)  $-\cot\theta$ **ઉક્લ:**  $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$ 

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta = -\cot\theta$$

**પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]**

$$\int x^7 dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ****જવાબ:** (c)  $\frac{x^8}{8}$ **ઉક્લ:**  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ 

$$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + c$$

**પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]**

$$\int_{-2}^2 x^5 dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ****જવાબ:** (b) 0**ઉક્લ:**  $x^5$  એ અયુગમ (odd) વિધેય છે. અયુગમ વિધેયો માટે,  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$  તેથી,  $\int_{-2}^2 x^5 dx = 0$ **પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]**

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

**જવાબ****જવાબ:** (d)  $\log |\sin x|$ **ઉક્લ:** ધારો કે  $u = \sin x$ , તેથી  $du = \cos x dx$ 

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \log |u| + c = \log |\sin x| + c$$

**પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]**

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 + y = 0 \text{ ની કક્ષા (order) } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે}$$

**જવાબ****જવાબ:** (a) 3**ઉક્લ:** વિકલ સમીકરણની કક્ષા એટલે તેમાં રહેલા ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષા. ઉચ્ચતમ વિકલિત  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  છે, તેથી કક્ષા = 3

## પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + y = 3x$  નો સંકલ્પકારક અવયવ (integrating factor) \_\_\_\_\_ છે

**જવાબ:**

(c)  $e^x$

**ઉકેલ:** સુરેખ વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + P y = Q$  માટે સંકલ્પકારક અવયવ =  $e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

## પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

$i^7 = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

(b)  $-i$

**ઉકેલ:**  $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

## પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$\arg(1+i) = \underline{\hspace{2cm}}$

**જવાબ:**

(c)  $\frac{\pi}{4}$

**ઉકેલ:**  $\arg(a+bi) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$   $\arg(1+i) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

## પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

## પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $(A+B)^T = A^T + B^T$

**જવાબ:**

**ઉકેલ:**

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $(A + B)^T = A^T + B^T$  ✓ સાબિત થયું

## પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  હોય તો દર્શાવો કે  $A \cdot A^{-1} = I$

### જવાબ

**ઉકેલ:** પ્રથમ,  $A^{-1}$  શોધો:  $|A| = 1(3) - 1(2) = 3 - 2 = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

હવે  $A \cdot A^{-1} = I$  ચકાસીએ:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(3) + 1(-2) & 1(-1) + 1(1) \\ 2(3) + 3(-2) & 2(-1) + 3(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 - 2 & -1 + 1 \\ 6 - 6 & -2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \checkmark \text{સાબિત થયું} \end{aligned}$$

## પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ  $xdy + ydx = 0$  ઉકેલો.

### જવાબ

**ઉકેલ:**  $xdy + ydx = 0$   $xdy = -ydx$   $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |y| + \ln |x| = c_1$$

$$\ln |xy| = c_1$$

$$|xy| = e^{c_1} = c \quad (\text{જ્યાં } c = e^{c_1} \text{ અચળાંક છે})$$

તેથી,  $xy = \pm c$  અથવા  $xy = k$  જ્યાં  $k$  એક રવૈર અચળાંક છે.

## પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

## પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  હોય તો દર્શાવો કે  $A^2 - 5A + 7I = 0$

### જવાબ

**ઉકેલ:** પ્રથમ,  $A^2$  ગણો:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(3) + 1(-1) & 3(1) + 1(2) \\ -1(3) + 2(-1) & -1(1) + 2(2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 - 1 & 3 + 2 \\ -3 - 2 & -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

હવે  $5A$  ગણો:

$$5A = 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

તથા  $7I$ :

$$7I = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

હવે  $A^2 - 5A + 7I = 0$  ચકાસીએ:

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 7I &= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 - 15 + 7 & 5 - 5 + 0 \\ -5 + 5 + 0 & 3 - 10 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark \text{સાબિત થયું} \end{aligned}$$

## પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\text{adj } A = A$

### જવાબ

**ઉકેલ:**  $\text{adj } A$  શોધવા માટે, આપણે સહઅવયવ શ્રેણિક શોધવો પડશે અને પછી તેનો પરિવર્ત કરવો પડશે.

**સહઅવયવો (Cofactors):**  $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0(3) - 1(4) = -4$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(1(3) - 1(4)) = -(3 - 4) = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 1(4) - 0(4) = 4$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -((-3)(3) - (-3)(4)) = -(-9 + 12) = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4)(3) - (-3)(4) = -12 + 12 = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -((-4)(4) - (-3)(4)) = -(-16 + 12) = -(-4) = 4$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (-3)(0) = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -((-4)(1) - (-3)(1)) = -(-4 + 3) = -(-1) = 1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4)(0) - (-3)(1) = 0 + 3 = 3$$

સહઅવયવ શ્રેણીક =  $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } A = (\text{સહઅવયવ શ્રેણીક})^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark \text{ સાબિત થયું}$$

## પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

શ્રેણીક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને નીચેના સુરેખ સમીકરણો ઉકેલો:  $3x + 2y = 5, 2x - y = 1$

### જવાબ

**ઉકેલ:** સમીકરણોને  $AX = B$  તરીકે લખી શકાય:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $|A| = 3(-1) - 2(2) = -3 - 4 = -7$  શોધો.

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{7}(5) + \frac{2}{7}(1) \\ \frac{2}{7}(5) - \frac{3}{7}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5+2}{7} \\ \frac{10-3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

તેથી,  $x = 1, y = 1$

## પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

## પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

વિકલનની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને  $x^5$  નું  $x$  પ્રત્યે વિકલન શોધો.

**જવાબ**

**ઉક્તા:** વ્યાખ્યા અનુસાર:  $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x) = x^5$  માટે:

$$\frac{d}{dx}(x^5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}$$

દ્વારા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં:  $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5 - x^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) \\ &= 5x^4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5x^4\end{aligned}$$

તેથી,  $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

**પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]**

જો  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

**જવાબ**

**ઉક્તા:** ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

અહીં,  $u = x^2 - 1$ ,  $v = x^2 + 1$   $\frac{du}{dx} = 2x$ ,  $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[(x^2+1) - (x^2-1)]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x[x^2+1 - x^2+1]}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x \cdot 2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

તેથી,  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

**પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]**

સંકલન શોધો:  $\int \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} dx$

**જવાબ**

**ઉક્તા:** પ્રથમ, બહૃપદી ભાગાકાર કરતાં:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} = 1 + \frac{3x+6}{x^2+2x}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} dx &= \int \left(1 + \frac{3x + 6}{x^2 + 2x}\right) dx \\&= \int 1 dx + \int \frac{3x + 6}{x^2 + 2x} dx \\&= x + \int \frac{3x + 6}{x(x + 2)} dx\end{aligned}$$

બિજા સંકલન માટે:  $\frac{3x+6}{x(x+2)} = \frac{3(x+2)}{x(x+2)} = \frac{3}{x}$

$$\int \frac{3x + 6}{x(x + 2)} dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln|x| + c$$

તેથી:  $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} dx = x + 3 \ln|x| + c$

## પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

જો  $y = \log(\sec x + \tan x)$  હોય તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો.

#### જવાબ

ઉક્તાં:  $y = \log(\sec x + \tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x) \\&= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\&= \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \sec x\end{aligned}$$

તેથી,  $\frac{dy}{dx} = \sec x$

### પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

જો  $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0$

#### જવાબ

ઉક્તાં:  $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$

પ્રથમ વિકલિત:  $\frac{dy}{dx} = 2(3e^{3x}) + 3(-2e^{-2x}) = 6e^{3x} - 6e^{-2x}$

દ્વાત્રીય વિકલિત:  $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(3e^{3x}) - 6(-2e^{-2x}) = 18e^{3x} + 12e^{-2x}$

$$\begin{aligned}
 \text{હવે સમીકરણ ચકાસીએ: } & \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y \\
 & = (18e^{3x} + 12e^{-2x}) - (6e^{3x} - 6e^{-2x}) - 6(2e^{3x} + 3e^{-2x}) \\
 & = 18e^{3x} + 12e^{-2x} - 6e^{3x} + 6e^{-2x} - 12e^{3x} - 18e^{-2x} \\
 & = e^{3x}(18 - 6 - 12) + e^{-2x}(12 + 6 - 18) \\
 & = e^{3x}(0) + e^{-2x}(0) = 0 \quad \checkmark \text{સાબિત થયું}
 \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

વિધેય  $f(x) = x^3 - 3x + 11$  ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્લ:**  $f(x) = x^3 - 3x + 11$

પ્રથમ વિકલિત:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

નિર્ણાયક બિંદુઓ માટે,  $f'(x) = 0$  લેતા:  $3(x - 1)(x + 1) = 0$   $x = 1$  અથવા  $x = -1$

દ્વિતીય વિકલિત:  $f''(x) = 6x$

$x = 1$  આગળ:  $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$  સ્થાનીય ન્યૂનતમ  $x = -1$  આગળ:  $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$  સ્થાનીય મહત્તમ

વિધેયની કિંમતો:  $x = 1$  આગળ:  $f(1) = 1^3 - 3(1) + 11 = 1 - 3 + 11 = 9$   $x = -1$  આગળ:  $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 11 = -1 + 3 + 11 = 13$

તેથી:

- સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત = 13 (જ્યાં  $x = -1$ )
- સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમત = 9 (જ્યાં  $x = 1$ )

### પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો:  $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$

#### જવાબ

**ઉક્લ:** ધારો કે  $u = \log x$ , તેથી  $du = \frac{1}{x} dx$

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \int \cos u du = \sin u + c$$

પાછું મુકતા:  $u = \log x$

તેથી,  $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx = \sin(\log x) + c$

### પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો:  $\int x \sin x dx$

**જવાબ**

**ઉક્લ:** ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$   
ધારો કે  $u = x$  અને  $dv = \sin x \, dx$  તેથી  $du = dx$  અને  $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c\end{aligned}$$

તેથી,  $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + c$

**પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]**

જો  $(2x - y) + 2yi = 6 + 4i$  હોય તો  $x$  અને  $y$  શોધો.

**જવાબ**

**ઉક્લ:**  $(2x - y) + 2yi = 6 + 4i$   
વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતાઃ વાસ્તવિક ભાગ:  $2x - y = 6 \dots (1)$  કાલ્પનિક ભાગ:  $2y = 4 \dots (2)$   
સમીકરણ (2) પરથી:  $y = 2$   
સમીકરણ (1) માં મુક્તાઃ  $2x - 2 = 6$   $2x = 8$   $x = 4$   
તેથી,  $x = 4$  અને  $y = 2$

**પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે લખો.

**પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]**

જ્ઞ  $y = x^2$ , રેખાઓ  $x = 1$ ,  $x = 2$  અને X-અક્ષ વડે ઘેરાચેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

**જવાબ**

**ઉક્લ:** માગેલ ક્ષેત્રફળ નીચે મુજબ છે:

$$\begin{aligned}A &= \int_1^2 x^2 \, dx \\ A &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \text{ ચોરસ એકમ}\end{aligned}$$

તેથી, ક્ષેત્રફળ =  $\frac{7}{3}$  ચોરસ એકમ

## પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

નિયત સંકલન  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx$  ની ક્રિમત શોધો.

### જવાબ

**ઉક્તા:** ધારો કે  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx$   
 $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec(\pi/2 - x)}{\sec(\pi/2 - x) + \csc(\pi/2 - x)} dx$$

કારણ કે  $\sec(\pi/2 - x) = \csc x$  અને  $\csc(\pi/2 - x) = \sec x$ :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\csc x + \sec x} dx$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\csc x}{\sec x + \csc x} dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec x + \csc x}{\sec x + \csc x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી,  $I = \frac{\pi}{4}$

**જવાબ:**  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{\sec x + \csc x} dx = \frac{\pi}{4}$

## પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

જો  $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = 1$

### જવાબ

**ઉક્તા:** આપેલ છે:  $\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib}$   
જમણી બાજુ કરણી લેતા (Rationalizing):

$$\alpha + i\beta = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\alpha + i\beta = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતાં:  $\alpha = \frac{a}{a^2+b^2}$  અને  $\beta = -\frac{b}{a^2+b^2}$

હવે  $\alpha^2 + \beta^2$  ગણતાં:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \left( \frac{a}{a^2+b^2} \right)^2 + \left( -\frac{b}{a^2+b^2} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

તેથી:  $(\alpha^2 + \beta^2)(a^2 + b^2) = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a^2 + b^2) = 1 \checkmark$  સાબિત થયું

## પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા  $\frac{2+3i}{3+2i}$  ની અનુભવ સંકર સંખ્યા અને માનાંક શોધો.

#### જવાબ

**ઉક્તા:** પ્રથમ, સંકર સંખ્યાને સાદૃષ્ય આપીએ:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+2i} &= \frac{2+3i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{(2+3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{6-4i+9i-6i^2}{9-4i^2} \\ &= \frac{6+5i-6(-1)}{9-4(-1)} \\ &= \frac{6+5i+6}{9+4} = \frac{12+5i}{13}\end{aligned}$$

તેથી  $\frac{2+3i}{3+2i} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

**અનુભવ કરણી (Conjugate):**  $\overline{\frac{2+3i}{3+2i}} = \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i$

**માનાંક (Modulus):**  $\left| \frac{2+3i}{3+2i} \right| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = \sqrt{1} = 1$$

### પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

**સાદૃષ્ય આપો:**  $\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} (\cos \theta - i \sin \theta)^{-5}}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7}$

#### જવાબ

**ઉક્તા:** દ-મેન્ફ્રેન્સ પ્રેમય (De Moivre's theorem) નો ઉપયોગ કરતાં:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

જીણી,  $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

$(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} = \cos(-12\theta) + i \sin(-12\theta)$

$(\cos \theta - i \sin \theta)^{-5} = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^{-5} = \cos(5\theta) + i \sin(5\theta)$

$(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7 = (\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta))^7 = \cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)$

તેથી:

$$\begin{aligned}&\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^{-4} (\cos \theta - i \sin \theta)^{-5}}{(\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^7} \\ &= \frac{[\cos(-12\theta) + i \sin(-12\theta)][\cos(5\theta) + i \sin(5\theta)]}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)} \\ &= \frac{\cos(-12\theta + 5\theta) + i \sin(-12\theta + 5\theta)}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)} \\ &= \frac{\cos(-7\theta) + i \sin(-7\theta)}{\cos(-14\theta) + i \sin(-14\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos(-7\theta + 14\theta) + i \sin(-7\theta + 14\theta) \\
 &= \cos(7\theta) + i \sin(7\theta)
 \end{aligned}$$

### પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

સંકર સંખ્યા  $1 + \sqrt{3}i$  ને ધૂવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

#### જવાબ

**ઉકેલ:** સંકર સંખ્યા  $z = a + bi$  માટે, ધૂવીય સ્વરૂપ  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  છે.

અહીં,  $a = 1, b = \sqrt{3}$

**માનાંક (Modulus):**  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

**કોણાંક (Argument):**  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

તેથી, ધૂવીય સ્વરૂપ છે:  $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

### પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

### પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $\tan y dx + \tan x \sec^2 y dy = 0$

#### જવાબ

**ઉકેલ:**  $\tan y dx + \tan x \sec^2 y dy = 0$

પદો અલગ કરતાં:  $\tan y dx = -\tan x \sec^2 y dy$

$$\frac{dx}{\tan x} = -\frac{\sec^2 y dy}{\tan y}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{dy}{\sin y \cos y}$$

$$\cot x dx = -\frac{dy}{\sin y \cos y}$$

$$\text{કારણ કે } \frac{1}{\sin y \cos y} = \frac{2}{2 \sin y \cos y} = \frac{2}{\sin 2y}:$$

$$\cot x dx = -\frac{2dy}{\sin 2y}$$

$$\text{બંને બાજુ સંકળન કરતાં: } \int \cot x dx = -2 \int \csc(2y) dy$$

$$\ln |\sin x| = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln |\csc(2y) + \cot(2y)|\right) + c$$

$$\ln |\sin x| = \ln |\csc(2y) + \cot(2y)| + c$$

$$\text{તેથી: } \sin x \cdot [\csc(2y) + \cot(2y)] = k \text{ જ્યાં } k \text{ એક અચળાંક છે.}$$

### પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

#### જવાબ

**ઉકેલ:**  $x \frac{dy}{dx} - y = x^2$

$x$  વડે ભાગતાં:  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

આ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  સ્વરૂપનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે.

અહીં,  $P = -\frac{1}{x}$  અને  $Q = x$   
 સંકલ્પકરક અવયવ (I.F.):  $I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$   
 સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા:  $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 1$   
 અને આમ લખી શકાય:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x} \right) = 1$   
 સંકલન કરતા:  $\frac{y}{x} = x + c$   
 તેથી:  $y = x^2 + cx$

## પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$ ,  $y(0) = 3$

### જવાબ

ઉકેલ: આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે:  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$   
 અહીં,  $P = \frac{1}{x}$ ,  $Q = e^x$   
 સંકલ્પકરક અવયવ:  $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$  (ધારો કે  $x > 0$ )  
 સમીકરણને I.F. વડે ગુણતા:  $x \frac{dy}{dx} + y = xe^x$   
 અને આમ લખી શકાય:  $\frac{d}{dx}(xy) = xe^x$   
 બંને બાજુ સંકલન કરતા:  $xy = \int xe^x dx$   
 ઘંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતા  $\int xe^x dx$ : ધારો કે  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  તેથી  $du = dx$ ,  $v = e^x$   
 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x - 1)$   
 તેથી:  $xy = e^x(x - 1) + c$   
 તેથી:  $y = \frac{e^x(x - 1) + c}{x}$   
 સામાન્ય ઉકેલ:  $y = \frac{e^x(x - 1) + c}{x}$  જ્યાં  $x \neq 0$