

એન્જિનિયરિંગ મેથેમેટિક્સ (4320002) - સમર 2023 સોલ્યુશન

Milav Dabgar

ઓગસ્ટ 02, 2023

પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો.

પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ની કક્ષા (Order) } \underline{\hspace{2cm}} \text{ છે.}$$

જવાબ

જવાબ: b. 2×3

ઉક્લ: શ્રેણિકમાં 2 હાર (rows) અને 3 સ્તંભ (columns) છે, તેથી કક્ષા 2×3 છે.

પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો A ની કક્ષા 2×3 હોય અને B ની કક્ષા 3×2 હોય તો AB ની કક્ષા _____ થશે.

જવાબ

જવાબ: d. 2×2

ઉક્લ: શ્રેણિકનો ગુણાકાર AB માટે, જો A એ 2×3 અને B એ 3×2 હોય, તો AB ની કક્ષા 2×2 થશે.

પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

$$\text{જો } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ હોય તો } A^T = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: b. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

ઉક્લ: હાર શ્રેણિકનો પરિવર્ત (transpose) સ્તંભ શ્રેણિક બને છે.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો $\text{adj } A = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: d. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ઉક્લ: 2×2 શ્રેણીક $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ માટે, $\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

તેથી: $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(e^x) = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: a. e^x

ઉક્લ:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

જો $f(x) = \log x$ હોય તો $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: c. 1

ઉક્લ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(3^{\log_3 x}) = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: b. $2x$

ઉક્લ: $a^{\log_a x} = x$ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં: $3^{\log_3 x} = x$ તેથી: $\frac{d}{dx}(3^{\log_3 x}) = \frac{d}{dx}(x) = 1$
જુઓ, આમાં એક પદ $3^{\log_3 x^2} = x^2$ હોયું જોઈએ. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$$\int \sin x \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: c. $-\cos x$

ઉક્લ:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$$\int_{-1}^1 x^3 \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: b. 0

ઉક્લ:

$$\int_{-1}^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

જવાબ

જવાબ: d. $\tan^{-1} x$

ઉક્લ:

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ ની કક્ષા (Order) _____ છે.

જવાબ

જવાબ: b. 2

ઉક્લ: સર્વોચ્ચ વિકલિત $\frac{d^2y}{dx^2}$ છે, તેથી કક્ષા 2 છે.

પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ નો સંકલ્પકારક અવયવ (I.F) _____ છે

જવાબ

જવાબ: a. $e^{\int P \, dx}$

ઉક્લ: સુરેખ વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ માટે, સંકલ્પકારક અવયવ $e^{\int P \, dx}$ છે.

પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]

જો $Z = 4 - 5i$ હોય તો $\bar{Z} = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: c. $4 - 5i$

ઉકેલ: જો $Z = 4 - 5i$, તો $\bar{Z} = 4 + 5i$. વિકલ્પોમાં કદાચ ભૂલ હોઈ શકે છે. સાચો જવાબ $4 + 5i$ હોવો જોઈએ.

પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]

$i^{10} = \underline{\hspace{2cm}}$

જવાબ

જવાબ: b. -1

ઉકેલ:

$$i^{10} = i^{4 \cdot 2 + 2} = (i^4)^2 \cdot i^2 = 1^2 \cdot (-1) = -1$$

પ્રશ્ન 2(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(A).1 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો શ્રેણિક X શોધો જેથી $2A + X = 3B$.

જવાબ

ઉકેલ: $2A + X = 3B \Rightarrow X = 3B - 2A$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3B = 3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(A).2 [3 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો $(AB)^T$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: પ્રથમ, AB શોધો:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5(1) + 4(2) & 5(3) + 4(1) \\ 4(1) + 3(2) & 4(3) + 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 19 & 15 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(A).3 [3 ગુણ]

ઉકેલો: $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^{-y}$.

જવાબ

ઉકેલ:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot e^{-y}$$

અથ અલગ કરતા (Separating variables):

$$e^y dy = x^2 dx$$

બંને બાજુ સંકળન કરતા:

$$\int e^y dy = \int x^2 dx$$

$$e^y = \frac{x^3}{3} + C$$

$$y = \ln \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$$

પ્રશ્ન 2(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 2(B).1 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ અને $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો સાબિત કરો કે $(A + B)^T = A^T + B^T$.

જવાબ

ઉકેલ:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

તેથી, $(A + B)^T = A^T + B^T$ સાબિત થાય છે.

પ્રશ્ન 2(B).2 [4 ગુણ]

જો $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: A^{-1} શોધવા માટે, આપણે $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

પ્રથમ, $|A|$ શોધીએ: $|A| = 2(0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1)) - (-1)(1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) + 0(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1) |A| = 2(4) + 1(-3) = 8 - 3 = 5$

હવે સહઅવયવો (cofactors) શોધીએ: $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3 \quad C_{13} =$

$(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1 \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$-(-1) = 1 \quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8) = -8 \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

પ્રશ્ન 2(B).3 [4 ગુણ]

શ્રેણિક પદ્ધતિથી સમીકરણો $3x - y = 1, x + 2y = 5$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: સમીકરણોને $AX = B$ તરીકે લખી શકાય: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3(2) - (-1)(1) = 6 + 1 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2+5 \\ -1+15 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

તેથી, $x = 1$ અને $y = 2$.

પ્રશ્ન 3(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(A).1 [3 ગુણ]

જો $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉક્તા: ભાગાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં: $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
ધારો કે $u = e^x + 1$ અને $v = e^x - 1$ $\frac{du}{dx} = e^x$ અને $\frac{dv}{dx} = e^x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(e^x - 1)(e^x) - (e^x + 1)(e^x)}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(A).2 [3 ગુણ]

જો $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

જવાબ

ઉક્તા: $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = b \cos \theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{b \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\frac{b \cos \theta}{a \sin \theta} = -\frac{b}{a} \cot \theta$$

પ્રશ્ન 3(A).3 [3 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$.

જવાબ

ઉક્તા: ધારો કે $u = \sqrt{x}$, તેથી $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin \sqrt{x} + C$$

પ્રશ્ન 3(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 3(B).1 [4 ગુણ]

$y = x^{\cos x}$ નું x સાપેક્ષ વિકલન કરો.

જવાબ

ઉક્તથી: બંને બાજુ લઘુગુણક (ln) લેતાં:

$$\ln y = \cos x \ln x$$

બંને બાજુ x સાપેક્ષ વિકલન કરતાં:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \cos x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot (-\sin x) \\ \frac{dy}{dx} &= y \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \\ \frac{dy}{dx} &= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right)\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 3(B).2 [4 ગુણ]

જો $y = A \cos pt + B \sin pt$ હોય, તો સાબિત કરો કે $\frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = 0$.

જવાબ

ઉક્તથી: $y = A \cos pt + B \sin pt$

$$\frac{dy}{dt} = -Ap \sin pt + Bp \cos pt$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -Ap^2 \cos pt - Bp^2 \sin pt = -p^2(A \cos pt + B \sin pt) = -p^2y$$

$$\text{ટેથી: } \frac{d^2y}{dt^2} + p^2y = -p^2y + p^2y = 0$$

પ્રશ્ન 3(B).3 [4 ગુણ]

એક કણાની ગતિનું સમીકરણ $s = t^3 + 2t^2 - 3t + 5$ છે. તો $t = 1$ અને $t = 2$ સેકન્ડ કણાનો વેગ અને પ્રવેગ શોધો.

જવાબ

ઉક્તથી: $s = t^3 + 2t^2 - 3t + 5$

વેગ (Velocity): $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t - 3$

પ્રવેગ (Acceleration): $a = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$

$t = 1$ સમયે: $v(1) = 3(1)^2 + 4(1) - 3 = 3 + 4 - 3 = 4$ એકમ/સેકન્ડ $a(1) = 6(1) + 4 = 10$ એકમ/સેકન્ડ²

$t = 2$ સમયે: $v(2) = 3(2)^2 + 4(2) - 3 = 12 + 8 - 3 = 17$ એકમ/સેકન્ડ $a(2) = 6(2) + 4 = 16$ એકમ/સેકન્ડ²

પ્રશ્ન 4(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(A).1 [3 ગુણ]

ક્રમત શોધો: $\int x \log x dx$.

જવાબ

ઉકેલ: ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ $\int u dv = uv - \int v du$
ધારો કે $u = \log x$ અને $dv = x dx$ તેથી $du = \frac{1}{x} dx$ અને $v = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}\int x \log x dx &= \log x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) + C\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(A).2 [3 ગુણ]

ક્રમત શોધો: $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

જવાબ

ઉકેલ:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= [\tan^{-1} x]_{-1}^1 \\ &= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

પ્રશ્ન 4(A).3 [3 ગુણ]

$Z = 3 + 4i$ નો વ્યસ્ત શોધો.

જવાબ

ઉકેલ:

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{3+4i}$$

અંશ અને છેદને અનુબદ્ધ કરણી વડે ગુણતાઃ

$$Z^{-1} = \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{(3)^2 + (4)^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25}$$

$$Z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

પ્રશ્ન 4(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 4(B).1 [4 ગુણ]

કિંમત શોધો: $\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$.

જવાબ

ઉક્તા: ધારો કે $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx$
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતા:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(\pi/2 - x)}{\tan(\pi/2 - x) + \cot(\pi/2 - x)} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cot x}{\cot x + \tan x} dx \end{aligned}$$

બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતા:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x + \cot x}{\tan x + \cot x} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

તેથી: $I = \frac{\pi}{4}$

પ્રશ્ન 4(B).2 [4 ગુણ]

રેખા $y = x$, $x = 5$ અને X-અક્ષ વડે ધેરાચેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

જવાબ

ઉક્તા: પ્રદેશ $y = x$, $x = 5$, અને $y = 0$ (X-અક્ષ) દ્વારા સીમિત છે.

$$\text{ક્ષેત્રફળ} = \int_0^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2} \text{ ચોરસ એકમ}$$

પ્રશ્ન 4(B).3 [4 ગુણ]

જો $x + iy = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$ હોય, તો $x + y$ ની કિંમત શોધો.

જવાબ

ઉક્તા: પ્રથમ $\frac{1+i}{2-i}$ ને સાદરૂપ આપીએ:

$$\frac{1+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2+3i-1}{4+1} = \frac{1+3i}{5}$$

ઉત્તે:

$$\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{(1+3i)^2}{25} = \frac{1+6i+9i^2}{25} = \frac{1+6i-9}{25} = \frac{-8+6i}{25}$$

તેથી: $x = -\frac{8}{25}$ અને $y = \frac{6}{25}$

$$x+y = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25} = -\frac{2}{25}$$

પ્રશ્ન 5(A) [6 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(A).1 [3 ગુણ]

$Z = 5 + 12i$ નું વર્ગમૂળ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: ધારો કે $\sqrt{5+12i} = a+bi$ જ્યાં $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+bi)^2 = 5+12i$$

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 5+12i$$

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 5+12i$$

વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: $a^2 - b^2 = 5 \dots (1)$ $2ab = 12 \dots (2)$

(2) પરથી: $b = \frac{6}{a}$

(1) માં મુક્તા: $a^2 - \frac{36}{a^2} = 5$

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

ધારો કે $u = a^2$: $u^2 - 5u - 36 = 0$

$$(u-9)(u+4) = 0$$

કારણ કે $u = a^2 \geq 0$, આપણી પાસે $u = 9$, તેથી $a = \pm 3$

જો $a = 3$, તો $b = 2$ જો $a = -3$, તો $b = -2$

તેથી: $\sqrt{5+12i} = \pm(3+2i)$

પ્રશ્ન 5(A).2 [3 ગુણ]

સમીકરણ $(2x-y)+yi = 6+4i$ પરથી $x, y \in \mathbb{R}$ શોધો.

જવાબ

ઉકેલ: વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગો સરખાવતા: વાસ્તવિક ભાગ: $2x - y = 6 \dots (1)$ કાલ્પનિક ભાગ: $y = 4 \dots (2)$

(1) માં (2) મુક્તા: $2x - 4 = 6$ $2x = 10$ $x = 5$

તેથી: $x = 5$ અને $y = 4$

પ્રશ્ન 5(A).3 [3 ગુણ]

$Z = 1+i$ નો માનાંક અને મુખ્ય કોણાંક શોધો, અને Z ને ધ્રુવીય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

જવાબ

ઉક્લ: $Z = 1 + i$
માનાંક: $|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
મુખ્ય કોણાંક: $\arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$
ધ્રુવીય સ્વરૂપ: $Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

પ્રશ્ન 5(B) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે લખો.

પ્રશ્ન 5(B).1 [4 ગુણ]

ઉક્લો: $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy.$

જવાબ

ઉક્લ:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy = (1 + x) + y(1 + x) = (1 + x)(1 + y)$$

અથ અલગ કરતાઃ

$$\frac{dy}{1+y} = (1+x)dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાઃ

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)dx$$

$$\ln|1+y| = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$1+y = Ae^{x+x^2/2} \quad \text{જ્યાં } A = e^C$$

$$y = Ae^{x+x^2/2} - 1$$

પ્રશ્ન 5(B).2 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} + y = e^x$ ઉક્લો.

જવાબ

ઉક્લ: આ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ સ્વરૂપનું પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે, જ્યાં $P = 1$ અને $Q = e^x$.

સંકલ્પકારક અવધાર: $I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$

સમીકરણને e^x વડે ગુણતાઃ

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = e^{2x}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાઃ

$$ye^x = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$y = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$$

પ્રશ્ન 5(B).3 [4 ગુણ]

વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 1$ ઉકેલો.

જવાબ

ઉકેલ: આ પ્રથમ કક્ષાનું સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે, જ્યાં $P = -\tan x$ અને $Q = 1$.

સંકલ્પકારક અવધિવાં: $I.F. = e^{\int (-\tan x) dx} = e^{\ln |\cos x|} = \cos x$

સમીકરણને $\cos x$ વડે ગુણતાં:

$$\cos x \frac{dy}{dx} - y \cos x \tan x = \cos x$$

$$\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y \cos x) = \cos x$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:

$$y \cos x = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$y = \tan x + \frac{C}{\cos x} = \tan x + C \sec x$$