

# Applied Mathematics (4320001) - Summer 2023 Solution

Milav Dabgar

August 02, 2023

## પ્રશ્ન 1 [14 ગુણ]

નીચેના વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી ખાલી જગ્યા પૂરો

## પ્રશ્ન 1.1 [1 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , તો  $A^T = \text{_____}$  જવાબ: b.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

જવાબ

શ્રેષ્ઠિકના પરિવર્ત માટે, હાર એ સ્તંભ અને સ્તંભ એ હાર બને છે.  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

## પ્રશ્ન 1.2 [1 ગુણ]

જો  $\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ -7 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ , તો  $(x, y) = \text{_____}$  જવાબ: c. (5, 3)

જવાબ

અનુરૂપ ઘટકોની સરખામણી કરતાઃ  $x + y = 8 \dots (1)$   $x - y = 2 \dots (2)$   
સમીકરણ (1) અને (2) નો સરવાળો કરતાઃ  $2x = 10 \Rightarrow x = 5$  સમીકરણ (1) માં કિંમત મૂકતાઃ  $5 + y = 8 \Rightarrow y = 3$

## પ્રશ્ન 1.3 [1 ગુણ]

જો  $\begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \end{bmatrix}$ , તો  $y = \text{_____}$  જવાબ: c. 3

જવાબ

શ્રેષ્ઠ ગુણાકાર કરતાઃ  $2x + 9 = 15 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$   $2y + 6 = 12 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$

### પ્રશ્ન 1.4 [1 ગુણ]

શ્રેણિક  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$  ની કક્ષા \_\_\_\_\_ છે જવાબ: b.  $3 \times 2$

#### જવાબ

શ્રેણિકમાં 3 હાર અને 2 સ્તંભ છે, તેથી કક્ષા  $3 \times 2$  છે.

### પ્રશ્ન 1.5 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 3) = \text{_____}$  જવાબ: b.  $2x + 2$

#### જવાબ

ધાત ના નિયમનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\frac{d}{dx}(x^2 + 2x + 3) = 2x + 2 + 0 = 2x + 2$

### પ્રશ્ન 1.6 [1 ગુણ]

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \text{_____}$  જવાબ: a.  $\sec x \cdot \tan x$

#### જવાબ

પ્રમાણિત વિકલિત:  $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

### પ્રશ્ન 1.7 [1 ગુણ]

જો  $x^2 + y^2 = 1$ , તો  $\frac{dy}{dx} = \text{_____}$  જવાબ: b.  $-\frac{x}{y}$

#### જવાબ

ગૂઢ વિકલન કરતાઃ  $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$  માટે:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

### પ્રશ્ન 1.8 [1 ગુણ]

$\int \log x \, dx = \text{_____} + c$  જવાબ: b.  $x \log x - x$

#### જવાબ

ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + c$

### પ્રશ્ન 1.9 [1 ગુણ]

$\int \frac{1}{x^2} dx = \text{_____} + c$  જવાબ: b.  $-\frac{1}{x}$

**જવાબ**

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} + c$$

**પ્રશ્ન 1.10 [1 ગુણ]**

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \text{_____} \quad \text{જવાબ: a. } \frac{8}{3}$$

**જવાબ**

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \left( \frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3} - \left( -\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

**પ્રશ્ન 1.11 [1 ગુણ]**

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^3 + 3 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 6y = 0 \text{ ની કક્ષા } \text{_____ અને પરિમાણ } \text{_____ છે જવાબ: a. 2, 3}$$

**જવાબ**

કક્ષા = ઉચ્ચતમ વિકલિત = 2 પરિમાણ = ઉચ્ચતમ વિકલિતની ઘાત = 3

**પ્રશ્ન 1.12 [1 ગુણ]**

$$\text{વિકલ સમીકરણ } \frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x \text{ નો સંકલ્યકારક અવયવ } \text{_____ છે જવાબ: c. } \sin x$$

**જવાબ**

પુનઃગોઈવણી કરતાં:  $\frac{dy}{dx} - y \tan x = e^x$  આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  છે જ્યાં  $P = -\tan x$ . સંકલ્યકારક અવયવ =  $e^{\int -\tan x dx} = e^{-\ln |\sec x|} = e^{\ln |\cos x|} = \cos x$ . જો કે, આપેલ જવાબ (c)  $\sin x$  છે. ચાલો પ્રશ્ન ધ્યાનથી વાંચીએ. "વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$  નો સંકલ્યકારક અવયવ ..." "આ પ્રમાણિત સુરેખ સ્વરૂપમાં નથી." "MDX ઉકેલ મુજબ હું ચોક્કસ અનુસરણ કરીશ."

**પ્રશ્ન 1.13 [1 ગુણ]**

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાફ્ટિક સંખ્યાઓનો મધ્યક } \text{_____ છે જવાબ: c. 3}$$

**જવાબ**

$$\text{પ્રથમ પાંચ પ્રાફ્ટિક સંખ્યાઓ: } 1, 2, 3, 4, 5 \text{ મધ્યક } = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

**પ્રશ્ન 1.14 [1 ગુણ]**

$$\text{જો અવલોકનો } 15, 7, 6, a, 3 \text{ નો મધ્યક } 7 \text{ હોય, તો } a = \text{_____ જવાબ: b. 4}$$

**જવાબ**

$$\frac{15+7+6+a+3}{5} = 7 \cdot 31 + a = 35 \Rightarrow a = 4$$

**પ્રશ્ન 2(a) [6 ગુણ]**

કોઈપણ બે ગણો

**પ્રશ્ન 2(a)(1) [3 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  અને  $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ , તો શોધો  $2A - B + C$

**જવાબ**

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2A - B + C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

**પ્રશ્ન 2(a)(2) [3 ગુણ]**

જો  $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  અને  $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ , તો સાબિત કરો કે  $(A + B)^T = A^T + B^T$

**જવાબ**

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

માટે,  $(A + B)^T = A^T + B^T \checkmark$

## પ્રશ્ન 2(a)(3) [3 ગુણ]

ઉકેલો:  $(x + y)dy = dx$

### જવાબ

$$(x + y)dy = dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x + y \cdot \frac{dx}{dy} - x = y$$

આ  $x$  માં સુરેખ વિકલ સમીકરણ છે. સંકલ્યકારક અવયવ  $= e^{\int -1 dy} = e^{-y}$

$$e^{-y} \cdot x = \int ye^{-y} dy$$

Using integration by parts:  $\int ye^{-y} dy = -ye^{-y} - \int -e^{-y} dy = -ye^{-y} - e^{-y} = -e^{-y}(y + 1)$

$$\text{માટે: } xe^{-y} = -e^{-y}(y + 1) + C \quad x = -(y + 1) + Ce^y$$

## પ્રશ્ન 2(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

## પ્રશ્ન 2(b)(1) [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , તો સાબિત કરો કે  $A^2 - 4A - 5I_3 = 0$

### જવાબ

$$\text{સૌપ્રથમ, } A^2 \text{ ગણો: } A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 4A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \checkmark$$

## પ્રશ્ન 2(b)(2) [4 ગુણ]

જો  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , તો શોધો  $A^{-1}$

**જવાબ**

સહઅવયવજ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરતાં:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$

$$|A| = 1(0 - 3) - 2(0 - 3) + 1(2 - 1) = -3 + 6 + 1 = 4$$

સહઅવયવ શોધતાં:  $C_{11} = -3, C_{12} = 3, C_{13} = 1, C_{21} = 1, C_{22} = -1, C_{23} = 1, C_{31} = 5, C_{32} = -1, C_{33} = -3$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

**પ્રશ્ન 2(b)(3) [4 ગુણ]**

શ્રેણિક પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને સમીકરણો  $2x + 3y = 7$  અને  $4x = 9 + y$  ઉકેલો

**જવાબ**

ફરીથી લખતાં:  $2x + 3y = 7$  અને  $4x - y = 9$

$$\text{શ્રેણિક સ્વરૂપમાં: } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-1) - 3(4) = -2 - 12 = -14$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -34 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{માટે: } x = \frac{34}{-14} = \frac{17}{7}, y = \frac{10}{-14} = \frac{5}{7}$$

**પ્રશ્ન 3(a) [6 ગુણ]**

કોઈપણ બે ગણો

**પ્રશ્ન 3(a)(1) [3 ગુણ]**

જો  $y = x^x$ , તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો

**જવાબ**

બંને બાજુ લઘુગણક લેતાં:  $\ln y = x \ln x$

બંને બાજુ વિકલન કરતાં:  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

**પ્રશ્ન 3(a)(2) [3 ગુણ]**

જો  $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ , તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો

**જવાબ**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

$$\frac{d}{dx}(x + \sqrt{x^2+a^2}) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

**પ્રશ્ન 3(a)(3) [3 ગુણ]**

જો  $y = \operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x$ , તો  $\frac{dy}{dx}$  શોધો

**જવાબ**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = 0$$

**પ્રશ્ન 3(b) [8 ગુણ]**

કોઈપણ બે ગણો

**પ્રશ્ન 3(b)(1) [4 ગુણ]**

Differentiate  $y = \cos x$  using the definition

**જવાબ**

યાખ્યા મુજબ:  $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

નિત્યસમનો ઉપયોગ કરતાં:  $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} = \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

**પ્રશ્ન 3(b)(2) [4 ગુણ]**

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 7$  ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત શોધો

**જવાબ**

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

$$f'(x) = 0 \text{ લેતાં: } 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow (3x-5)(x-1) = 0 \text{ } x = \frac{5}{3} \text{ or } x = 1$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

At  $x = 1$ :  $f''(1) = 6(1) - 8 = -2 < 0$  (Maximum) At  $x = \frac{5}{3}$ :  $f''\left(\frac{5}{3}\right) = 6\left(\frac{5}{3}\right) - 8 = 2 > 0$  (Minimum)

મહત્તમ કિંમત:  $f(1) = 1 - 4 + 5 + 7 = 9$  ન્યૂનતમ કિંમત:  $f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7 = \frac{158}{27}$

**પ્રશ્ન 3(b)(3) [4 ગુણ]**

જો  $y = (\tan^{-1} x)^2$ , તો સાબિત કરો કે  $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$

**જવાબ**

$$y = (\tan^{-1} x)^2 \Rightarrow y_1 = \frac{dy}{dx} = 2(\tan^{-1} x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \left[ \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + (\tan^{-1} x) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{4x(\tan^{-1} x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{હવે દાવી બાજુ કિમત મૂકતાં: } (1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = (1+x^2) \cdot \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{(1+x^2)^2} + 2x(1+x^2) \cdot \frac{2(\tan^{-1} x)}{1+x^2} = \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{1+x^2} + 4x(\tan^{-1} x) = \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2+4x^3(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$$

Wait, let me re-evaluate the substitution carefully. LHS =  $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1$ . Note that the standard textbook problem is usually  $(1+x^2)^2y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$ . However, the question says  $(1+x^2)y_2 + 2x(1+x^2)y_1$ . Let's see if  $(1+x^2)y_1 = 2\tan^{-1} x$ . Diff again:  $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = \frac{2}{1+x^2}$ . Multiply by  $(1+x^2)$ :  $(1+x^2)^2y_2 + 2x(1+x^2)y_1 = 2$ . The question likely meant  $(1+x^2)^2y_2$  OR it meant  $(1+x^2)y_2 + 2xy_1$  equal to something else. BUT, looking at the MDX solution: The MDX solution ends with: " $= \frac{2}{1+x^2} \cdot (1+x^2) = 2$ ". This implies the term was indeed forming 2. Let's check the MDX step: " $= \frac{2-4x(\tan^{-1} x)}{1+x^2} + 4x(\tan^{-1} x)" = \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2}$ ". This algebra seems weird in the MDX.  $4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)$  would not cancel  $-4x(\tan^{-1} x)$  cleanly unless  $x^2$  term is handled. Calculated value:  $\frac{2-4x\tan^{-1} x+4x\tan^{-1} x+4x^3\tan^{-1} x}{1+x^2}$ . This is not 2.

There is a discrepancy in the MDX algebra or the question statement. However, User requires strict fidelity to the MDX text. "Migrate the \*\*EXACT\*\* text content from MDX to LaTeX." I will copy the MDX solution steps exactly, even if they look mathematically dubious, as per instructions. MDX text:  
 $= \frac{2-4x(\tan^{-1} x)+4x(\tan^{-1} x)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot (1+x^2) = 2 \checkmark$

**પ્રશ્ન 4(a) [6 ગુણ]**

કોઈપણ બે ગણો

**પ્રશ્ન 4(a)(1) [3 ગુણ]**

સંકલન કરો:  $\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx$

**જવાબ**

$$\text{ધારો કે } u = x^6, \text{ તો } du = 6x^5 dx, \text{ તેથી } x^5 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{6} du = \frac{1}{6} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{6} \tan^{-1}(x^6) + C$$

**પ્રશ્ન 4(a)(2) [3 ગુણ]**

સંકલન કરો:  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}} dx$

**જવાબ**

$$\text{ધારો કે } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}} dx$$

ગુણધર્મ  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$  નો ઉપયોગ કરતાં:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)}}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)+\sqrt{\cos(\pi/2-x)}}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x+\sqrt{\sin x}}} dx$$

$$\text{બંને સમીકરણોનો સરવાળો કરતાં: } 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{માટે: } I = \frac{\pi}{4}$$

## પ્રશ્ન 4(a)(3) [3 ગુણ]

જો નીચેની માહિતીનો મધ્યક 19 હોય, તો ખૂટી આવૃત્તિ શોધો

### જવાબ

કોષ્ટક 1. આવૃત્તિ વિતરણ

$x_i$	6	10	14	18	24	28	30
$f_i$	2	4	7	f	8	4	3

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = 19$$

$$\sum f_i = 2 + 4 + 7 + f + 8 + 4 + 3 = 28 + f \quad \sum f_i x_i = 2(6) + 4(10) + 7(14) + f(18) + 8(24) + 4(28) + 3(30) = 12 + 40 + 98 + 18f + 192 + 112 + 90 = 544 + 18f$$

$$\frac{544+18f}{28+f} = 19 \quad 544 + 18f = 19(28 + f) \quad 544 + 18f = 532 + 19f \quad 12 = f$$

માટે,  $f = 12$

## પ્રશ્ન 4(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

## પ્રશ્ન 4(b)(1) [4 ગુણ]

સંકલન કરો:  $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$

### જવાબ

અંશિક અપૂર્ણાર્કનો ઉપયોગ કરતાં:  $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$

$$\text{Setting } x = -1: -1 = A(1) \Rightarrow A = -1 \quad \text{Setting } x = -2: -2 = B(-1) \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx = \int \left( \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C = \ln \left| \frac{(x+2)^2}{x+1} \right| + C$$

## પ્રશ્ન 4(b)(2) [4 ગુણ]

સંકલન કરો:  $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx$

### જવાબ

ધારો કે  $u = x^3$ , તો  $du = 3x^2 dx$ , તેથી  $x^2 dx = \frac{1}{3} du$

$$\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6} dx = \int \frac{\tan^{-1} u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{3} du$$

ધારો કે  $v = \tan^{-1} u$ , તો  $dv = \frac{1}{1+u^2} du$

$$= \frac{1}{3} \int v dv = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^2}{2} + C = \frac{(\tan^{-1} u)^2}{6} + C$$

$$= \frac{(\tan^{-1} x^3)^2}{6} + C$$

## પ્રશ્ન 4(b)(3) [4 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો: 10, 15, 7, 19, 9, 21, 23, 25, 26, 30

**જવાબ**

સૌપ્રથમ, મદ્યક શોધો:  $\bar{x} = \frac{10+15+7+19+9+21+23+25+26+30}{10} = \frac{185}{10} = 18.5$   
 પ્રમાણિત વિચલન માટેનું કોષ્ટક:

**કોષ્ટક 2.** પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
10	-8.5	72.25
15	-3.5	12.25
7	-11.5	132.25
19	0.5	0.25
9	-9.5	90.25
21	2.5	6.25
23	4.5	20.25
25	6.5	42.25
26	7.5	56.25
30	11.5	132.25

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 564.5$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{564.5}{10}} = \sqrt{56.45} = 7.51$$

**પ્રશ્ન 5(a) [6 ગુણ]**

કોઈપણ બે ગણો

**પ્રશ્ન 5(a)(1) [3 ગુણ]**

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

**જવાબ****કોષ્ટક 3.** માહિતી

$x_i$	4	8	11	17	20	24	32
$f_i$	3	5	9	5	4	3	1

$$N = \sum f_i = 3 + 5 + 9 + 5 + 4 + 3 + 1 = 30$$

$$\text{મદ્યક ગણતરી: } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3(4)+5(8)+9(11)+5(17)+4(20)+3(24)+1(32)}{30} = \frac{12+40+99+85+80+72+32}{30} = \frac{420}{30} = 14$$

પ્રમાણિત વિચલનનું કોષ્ટક:

**કોષ્ટક 4.** પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

$x_i$	$f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	-10	100	300
8	5	-6	36	180
11	9	-3	9	81
17	5	3	9	45
20	4	6	36	144
24	3	10	100	300
32	1	18	324	324

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન} = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1374}{30}} = \sqrt{45.8} = 6.77$$

## પ્રશ્ન 5(a)(2) [3 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે પ્રમાણિત વિચલન શોધો:

### જવાબ

#### કોષ્ટક 5. વર્ગીકૃત માહિતી

Class	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
Frequency	5	8	15	16	6

સૌપ્રથમ, વર્ગની મધ્યક્રમત શોધો અને મધ્યક ગણો:

#### કોષ્ટક 6. મધ્યક્રમતની ગણતરી

Class	Midpoint ( $x_i$ )	$f_i$	$f_i x_i$
0-10	5	5	25
10-20	15	8	120
20-30	25	15	375
30-40	35	16	560
40-50	45	6	270

$$N = 50, \sum f_i x_i = 1350 \bar{x} = \frac{1350}{50} = 27$$

પ્રમાણિત વિચલનનું કોષ્ટક:

#### કોષ્ટક 7. પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી

$x_i$	$f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
5	5	-22	484	2420
15	8	-12	144	1152
25	15	-2	4	60
35	16	8	64	1024
45	6	18	324	1944

$$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 6600$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\frac{6600}{50}} = \sqrt{132} = 11.49$$

## પ્રશ્ન 5(a)(3) [3 ગુણ]

નીચેની માહિતી માટે મધ્યક શોધો:

### જવાબ

કોષ્ટક 8. વર્ગીકૃત આવૃત્તિ વિતરણ

Class	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
Frequency	3	7	12	15	8	3	2

મધ્યકિંમતની રીતનો ઉપયોગ કરતાં:

કોષ્ટક 9. મધ્યક ગણતરી

Class	Midpoint ( $x_i$ )	$f_i$	$f_i x_i$
30-40	35	3	105
40-50	45	7	315
50-60	55	12	660
60-70	65	15	975
70-80	75	8	600
80-90	85	3	255
90-100	95	2	190

$$N = \sum f_i = 50$$

$$\text{મધ્યક} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{3100}{50} = 62$$

## પ્રશ્ન 5(b) [8 ગુણ]

કોઈપણ બે ગણો

## પ્રશ્ન 5(b)(1) [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $xy \, dx - (y^2 + x^2) \, dy = 0$

### જવાબ

પુનઃગોઠવણી કરતાં:  $xy \, dx = (y^2 + x^2) \, dy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + x^2}{xy} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

આ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. ધારો કે  $x = vy$ , તો  $\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$

કિંમત મૂકતાં:  $v + y \frac{dv}{dy} = \frac{y}{vy} + \frac{v^2 y}{y} = \frac{1}{v} + v$

$$y \frac{dv}{dy} = \frac{1}{v} \Rightarrow v \, dv = \frac{dy}{y}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં:  $\int v \, dv = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln |y| + C$

$$\text{ફરીથી કિંમત મૂકતા} v = \frac{x}{y}: \frac{x^2}{2y^2} = \ln |y| + C \Rightarrow x^2 = 2y^2(\ln |y| + C)$$

## પ્રશ્ન 5(b)(2) [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sin x$

### જવાબ

આ સુરેખ વિકલ સમીકરણ  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  સ્વરૂપનું છે જ્યાં  $P(x) = \frac{2}{x}$  અને  $Q(x) = \sin x$

Integrating factor =  $e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$

સમીકરણને સંકલ્યકરક અવયવ વડે ગુણતાઃ  $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^2 \sin x$

ડાબી બાજુ  $\frac{d}{dx}(x^2y)$  છે:  $\frac{d}{dx}(x^2y) = x^2 \sin x$

બંને બાજુ સંકલન કરતાઃ  $x^2y = \int x^2 \sin x dx$

બે વાર ખંડશ: સંકલનનો ઉપયોગ કરતાઃ  $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

માટે:  $x^2y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$   $y = -\cos x + \frac{2 \sin x}{x} + \frac{2 \cos x}{x^2} + \frac{C}{x^2}$

### પ્રશ્ન 5(b)(3) [4 ગુણ]

ઉકેલો:  $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$

### જવાબ

$(1+x^2)$  વડે ભાગતાઃ  $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\cos x}{1+x^2}$

This is linear with  $P(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  and  $Q(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$

અને સંકલ્યકરક અવયવ વડે ગુણતાઃ  $(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$

The left side is  $\frac{d}{dx}[(1+x^2)y]$ :  $\frac{d}{dx}[(1+x^2)y] = \cos x$

સંકલન કરતાઃ  $(1+x^2)y = \int \cos x dx = \sin x + C$

માટે:  $y = \frac{\sin x + C}{1+x^2}$

### સૂત્રો

#### શ્રેણિક પ્રક્રિયાઓ

- **Transpose:**  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$
- **Inverse:**  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$
- **Properties:**  $(A+B)^T = A^T + B^T$

### વિકલન

- **Power Rule:**  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- **Trigonometric:**  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- **Inverse Trig:**  $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
- **Logarithmic:**  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

### સંકલન

- **By Parts:**  $\int u dv = uv - \int v du$
- આદેશ: જો  $u = g(x)$ , તો  $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$
- **Definite Properties:**  $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

### વિકલ સમીકરણો

- **Linear Form:**  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
- **Integrating Factor:**  $e^{\int P(x)dx}$
- **Variable Separable:**  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

## આંકડાશાસ્ત્ર

- **Mean:**  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
- **Standard Deviation:**  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$
- **Variance:**  $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$