IFT2125

DEVOIR 1

SOOBEN Vennila
(20235256)

Problème 1 : Ordre asymptotique

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ les fonctions suivantes

$f_1(n) = n^{18} (\ln n)^{37}$

$f_2(n) = 3^n$

$f_3(n) = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 37 \ln \ln n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

	f_1	f_2	f_3
f_1	Θ	O	inc
f_2	ω	Θ	ω
f_3	inc	O	Θ

⓪ f_1 et f_1
f_2 et f_2 } identiques
f_3 et f_3

$\Rightarrow \Theta$

① On commence avec $f_1(n)$ et $f_2(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18} (\ln n)^{37}}{3^n}$$

En appliquant ln,

$$\ln f(n) = \ln \left(\frac{n^{18} (\ln n)^{37}}{3^n} \right)$$

$$= \ln \left(n^{18} (\ln n)^{37}\right) - \ln 3^n$$

$$= \ln n^{18} + \ln(\ln n)^{37} - \ln 3^n$$

$$= 18 \ln n + 37 \ln(\ln n) - \underbrace{n \ln 3}_{\text{celui-ci domine à cause du } n}$$

$$\ln f(n) \approx -n \ln 3 \approx -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln f(n) = \lim_{n\to\infty} -n \ln 3$$

(on le met $e^{\ln}$ pour Éliminer ln) $\rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{(\ln f(n))} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\ln 3}$

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\ln 3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\infty}$$

$$= 0$$

$f_1(n) \geqslant f_2(n)$

Ceci implique o et l'inverse, $f_2 \in \omega(f_1)$

② f_1 et f_3

Pour n pair:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18}(\ln n)^{37}}{2^n} = \text{même preuve que ① avec 2 à la place de 3} \Rightarrow 0$$

Pour n impair

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{18}(\ln n)^{37}}{37\ln(\ln n)} \Rightarrow 0\ (f_3)$$

$$\ln f(n) = \ln n^{18} + \ln(\ln n)^{37} - \ln(37\ln(\ln n))$$

$$= \underbrace{18\ln n}_{\text{terme dominant}} + 37\ln(\ln n) - \ln 37 - \ln(\ln n))$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln f(n) \approx 18\ln n$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln f(n)} \approx e^{18\ln(n)}$$ (applique $e^{\ln}$ pour éliminer ln)

$$\approx e^{\infty}$$

$$= \infty$$

∴ incomparables, on a des réponses différentes pour pair-impair

③ f_2 et f_3

p ↳ $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$= \infty$

$f_2 \not\leq f_3 \Rightarrow O$

et par opposition,

$f_3 \geq f_2 \Rightarrow \omega$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{37\ln(\ln n)} \overset{RH}{=} \frac{\frac{d}{dn}3^n}{\frac{d}{dn}37\ln(\ln n)}$$

$$= \frac{\ln 3 \times 3^n}{\frac{37}{\ln n \times n}}$$

$$= \frac{\ln 3 \times 3^n \times n \times \ln n}{37}$$

$= \infty$

(même arg. qu'à gauche)

Problème 2 : Ordres asymptotiques et log itéré

- Tétration $b \uparrow\uparrow n := \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ b^{b\uparrow\uparrow(n-1)} & \text{sinon} \end{cases}$ où $b,n \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$

- Logarithme itéré : $\ln^*(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ \ln^*(\ln n)+1 & \text{sinon} \end{cases}$ où $n \in \mathbb{R}^{>0}$

$2\uparrow\uparrow 5 = 2^{5^{5^{5^{5^{5}}}}}$

a) Pour tout $b \geq 2$, $\lim_{n\to\infty} b\uparrow\uparrow n = \infty$

$b\uparrow\uparrow n$ est une fonction qu'on peut définir de manière récursive $\Rightarrow$ preuve par induction

En utilisant une preuve par l'absurde,

Supposons que par contradiction,

$b\uparrow\uparrow n$ est bornée $>$ par $M>0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow b\uparrow\uparrow n \leq M$ pour $\exists m$, $n \in \mathbb{N}$

Par récursion,

$b\uparrow\uparrow(n+1) = b^{(b\uparrow\uparrow n)} \leq M$

En appliquant $\log_b$ des 2 côtés

$$\log_b\left(b^{b\uparrow\uparrow n}\right) \leq \log_b M$$

$$b\uparrow\uparrow n \leq \log_b M$$

$$\underbrace{\log_b(\log_b(\dots \log_b M))}_{n \text{ fois}}$$

Lors que $n\uparrow$, il devient $< b$ ou < 0

car plus $n\uparrow$, plus le nombre de $\log \uparrow$, ce qui fait décroître $b\uparrow\uparrow n$

Et si $n\uparrow\uparrow\uparrow$, peut négatif.

impossible car $b\uparrow\uparrow n \geq b\uparrow\uparrow 1 = b \geq 2$

Ceci est faux !

$\Rightarrow$ $b\uparrow\uparrow n$ n'est pas bornée supérieurement,

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b\uparrow\uparrow n = \infty$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, pour n assez grand,

$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{1}{2}$, alors $\lim_{n \to \infty} f(n) = 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{1}{2}$$

- Pour $n = N$,

$$\frac{f(N+1)}{f(N)} \leq \frac{1}{2}$$

$$f(N+1) \leq \frac{1}{2} f(N)$$

- Pour $n = N+1$,

$$f(N+2) \leq \frac{1}{2} f(N+1)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} f(N)\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 f(N)$$

- Par induction,

pour $k \geq 0$,

$$f(N+k) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k f(N)$$

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k f(N) = f(N) \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

c) $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $a^n \in o(b \uparrow\uparrow n)$ pour tout $a \geq 0$

Prouver: $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{b \uparrow\uparrow n} = 0$

Let $f(n) = \frac{a^n}{b \uparrow\uparrow n}$

1) On applique log à a^n

$$\log_2 a^n = n \log_2 a$$

2) " à $b \uparrow\uparrow n$

1) $n=1$ $\quad \log_2 (b \uparrow\uparrow 1) = \log_2 b$

2) $n \geq 2$ $\quad \log_2 (b \uparrow\uparrow n) = \log_2 (b^{b \uparrow\uparrow (n-1)})$

$$= b \uparrow\uparrow (n-1) \log_2 (b)$$

$$\log_2 a^n - \log_2 (b \uparrow\uparrow n) = n \log_2 a - b \uparrow\uparrow (n-1) \log_2 b$$

En analysant cette fonction, on voit que,

$b \uparrow\uparrow (n-1)$ croît bcp plus

$$b \uparrow\uparrow (n-1) \log_2 b >>> n \log_2 a$$

$\Rightarrow \log_2 (a^n) - \log_2 (b \uparrow\uparrow n) \to -\infty$ quand $n \to \infty$

en mettant nos fonctions du début à $2^{f(n)}$

$$\frac{a^n}{b \uparrow\uparrow n} = 2^{\underbrace{n \log_2 a - b \uparrow\uparrow (n-1) \log_2 b}_{\to -\infty}}$$

$$\approx 2^{-\infty}$$

$$\frac{a^n}{b \uparrow\uparrow n} \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty$$

d) Démontrer que $\ln^*(n) \in o(\ln \ln n)$

$$\ln^*(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ \ln^*(\ln n) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on a $\log^*(n) = \begin{cases} 0 \\ \log^*(\log n) + 1 \end{cases}$

$\log^* 2 = \log^*(\log 2) + 1$

$(\log 2 \leq 1, \log^*(\log 2) = 0)$

$= 1 + 0 = 1$

$\log^* 16 = 1 + \log^*(\log(\log 16))$

$= 1 + 1 + 1 = 3$

$\log^* n = ?$

↳ tant que $n > 1$,

Remp n par $\log n$

$k{+}{+}$

Resultat $= k$

1) On constate une croissance lente

2) On remarque aussi que pour trouver $\ln^*$, on utilise $\ln(\ln n)$

- $\ln(\ln n)$ tend vers l'infini

$\lim_{n \to \infty} \ln(\ln x)$

$= \ln \lim_{n \to \infty} \ln x$

$= \ln(+\infty)$

$= \infty$

- $\ln^* n$ croît bien plus lentement !

$\Rightarrow$ Même pour un terme $n \uparrow\uparrow\uparrow$, $\ln^* n$ est négligeable par rapport à $\ln \ln n$

$\Rightarrow \ln^* n \in \ln \ln n$

Q3) $\forall i,\ f_i \in o(f_{i+1})$

$\forall i, \forall^{\infty} n, f_i(n) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_i(n)}{f_{i+1}(n)} = 0$$ pour tout i, $f_i \in o(f_{i+1})$, $f_i(n) > 0$

MQ $\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

alors $a_i = 0$ pour $\forall i$

On utilisera une preuve par contradiction,

Supposons que $f_1, f_2, \dots f_k$ sont dépendants linéairement,

c'est-à-dire qu'il existe des constantes $c_1, c_2, \dots c_k \neq 0$, such that

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_k f_k(n) = 0$$

$$\Rightarrow c_k f_k(n) = -\left(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_{k-1} f_{k-1}(n)\right)$$

$$c_k = -\frac{1}{f_k(n)}\left(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_{k-1} f_{k-1}(n)\right)$$

On trouve la limite,

$$c_k = -\lim_{n\to\infty}\left(c_1 \frac{f_1(n)}{f_k(n)} + c_2 \frac{f_2(n)}{f_k(n)} + \dots + c_{k-1}\frac{f_{k-1}(n)}{f_k(n)}\right)$$

On peut enlever les termes c_i et $f_i(n)$ qu'on appellera F

$$c_k = -F \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{f_k(n)} + \frac{1}{f_k(n)} + \dots\right)$$

$$= 0$$

Ceci est une contradiction de notre énoncé,

$\Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_k$ sont linéairement indépendants

b) polynôme carac : $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$

λ

Si les racines du polynome sont réel et distinct, la sol générale,

$$T(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n$$

récurrence homogène linéaire : $T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \dots + a_k T(n-k)$

$T(n+k) = a_{k-1} T(n+k-1) + \dots + a_0 T(n) = 0$

1) À partir de la partie (a), on a que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_i(n)}{f_{i+1}(n)} = 0$$

$\Rightarrow$ fonctions f_i sont linéairement indépendantes

On sait que les racines sont réels et positives ;

alors $f_i(n) = r_i > 0$

Pour chaque i,

$$\frac{f_i(n)}{f_{i+1}(n)} = \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^n = 0$$

Alors on a une indépendance linéaire.

MAIS les racines peuvent être négatives, $\leftarrow$ ($\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2}{-1}\right)^x$ ne tend PAS vers 0)

Problème 4

a) $T_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 6 & \text{si } n=1 \\ 10T_1(n-1) - 9T_1(n-2) & \text{sinon} \end{cases}$

On commence par séparer les termes homogènes des non-homogènes.

$$T_1(n) - 10T_1(n-1) + 9T_1(n-2) = \underbrace{0 \cdot c^0}_{p(n)\, b^n}$$

On obtient un polynome de forme

$$(x^2 - 10x + 9)\, x$$

et on le veut dans la forme $(x-b)^{\deg p + 1}$

mais on voit que $= 0$

$\Rightarrow (x-0)^{0+1}$

$= x$

$$(x-9)(x-1)\,x$$

$x = 9$

$x = 1$

$x = 0$

Racine : 9 mult 1

1 mult 1

0 mult 1

$$t_n = c_1 9^n + c_2 1^n$$

$t_0 = c_1 + c_2 = 1$

$t_1 = 9c_1 + c_2 = 6$

$t_2 = 81c_1 + c_2 = 81$

$c_1 = 1 - c_2$

$9(1-c_2) + c_2 = 6$

$9 - 9c_2 + c_2 = 6$

$8c_2 = 3$

$c_2 = 3/8$

$c_1 = 1 - 3/8 = \frac{5}{8}$

$$\therefore t_n = \frac{5}{8} \cdot 9^n + \frac{3}{8} \cdot 1^n$$

b) $T_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2T_2(n-1) + n2^n + 5\cdot 2^n & \text{sinon} \end{cases}$

$p(n) \cdot b^n$ ← constante à la n

polynome

$\Rightarrow (x-b)^{\text{degré du polynome} + 1}$

$$T_2(n) - 2T_2(n-1) = n2^n + 5\cdot 2^n$$
$$= 2^n(n+5)$$

1) Diviser par 2^n

$$\frac{T_2(N)}{2^n} - \frac{2T_2(n-1)}{2^n} = n+5$$

Let $X_n = \dfrac{T_2(N)}{2^N}$

$$X_n - X_{n-1} = n+5$$

↳ on suppose an^2+bn+C

car degré +1

(note: j'ai essayé d'autres formes aussi mais en vain
celle-ci fonctionne)

$$an^2+bn+c = a(n-1)^2 + b(n-1) + c + n + 5$$
$$= a(n^2-2n+1) + b(n-1) + c + n + 5$$
$$= an^2 - 2an + a + bn - b + c + n + 5$$
$$= an^2 + n(-2a+b+1) + a - b + c + 5$$

$$bn + c = (-2a+b+1)n + (a-b+c+5)$$

1) $b = -2a+b+1$

↳ coeff de n

$a = 1/2$

2) $c = a-b+c+5$

$b = 11/2$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{2}n + C$$

On re-remplace $x_n = \frac{T_2(n)}{2^n}$

$$x_0 = \frac{T_2(0)}{2^0} = 1$$

$$\Rightarrow C = 1$$

$$X(n) = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{2}n$$

$$T_2(n) = \left(\frac{n^2 + 11n + 2}{2}\right) 2^n$$

$$= (n^2 + 11n + 2)\, 2^{n-1}$$

↑

Rép.