

§ 1.2 Tipuri de semnale. Caracterizarea semnalelor în domeniul operațional

1. Semnale deterministe. Semnale aleatoare

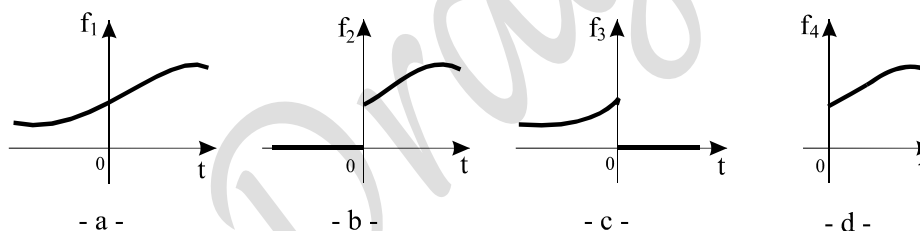
Se numește *semnal determinist* un semnal ale cărui valori sunt bine cunoscute ca funcții de timp în orice moment. Un semnal determinist este *predictibil*. Lui îi asociem în fiecare moment o valoare unică.

Se numește *semnal aleator* un semnal ale cărui valori nu sunt cunoscute ca funcții de timp, dar pentru care se cunosc, ca funcții de timp, probabilitățile de a lua valori într-un interval sau altul de valori (distribuțiile de probabilitate). Teoretic, unui semnal aleator îi pot fi asociate în fiecare moment o infinitate de valori. Nu este predictibil.

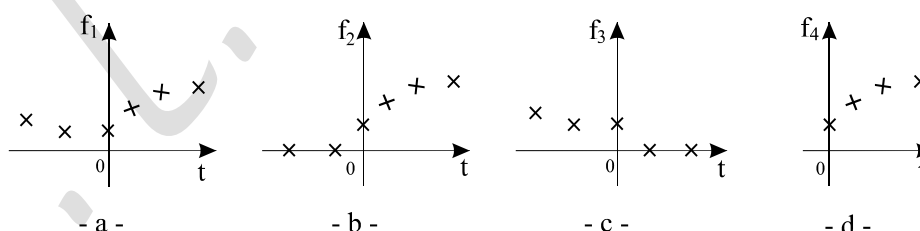
Cu toate că în practică majoritatea semnalelor sunt aleatoare, problemele pot fi abordate de cele mai multe ori folosind semnale deterministe de aproximare. De aceea, în cele ce urmează lucrăm numai cu semnale deterministe.

Din punctul de vedere al acoperirii cu valori nenule de către un semnal în timp continuu a mulțimii de timp T distingem 4 cazuri cărora le corespund figurile de mai jos:

- *semnal bilateral* ($T = \mathbf{R}$) – figura a;
- *semnal bilateral dreapta* ($T = \mathbf{R}$) – figura b; este numit și semnal cauzal;
- *semnal bilateral stânga* ($T = \mathbf{R}$) – figura c;
- *semnal unilateral sau semnal de tip cauzal* ($T = \mathbf{R}_+$) – figura d.



Terminologia este valabilă, cu modificările de rigoare ($T = \mathbf{Z}$ sau $T = \mathbf{N}$), și pentru semnalele în timp discret.



Semnalele cauzale și unilaterale sunt folosite pentru a studia procesele începând cu un moment dat, numit *moment inițial*. Această modalitate de studiu se numește „studiu prin decupare”, în sensul că studiul este realizat numai asupra unei părți din realitate, cea decupată începând cu momentul inițial.

2. Semnale standard

Semnalele standard se folosesc pentru a pune în evidență modul în care un sistem se comportă în situații relevante din punct de vedere tehnic.

Dacă comportarea unui sistem în raport cu astfel de semnale corespunde scopului urmărit, sistemul îndeplinindu-și rolul, atunci, potrivit standardelor, se admite că sistemul va avea o comportare corespunzătoare și în situațiile reale, mai puțin solicitante, „acoperite” de situațiile standard considerate.

Pe de altă parte, pentru a putea anticipa comportarea sistemelor în raport cu semnalele standard pe bază modelelor matematice ale sistemelor, semnalele standard trebuie să fie și ușor manipulabile matematic.

În acest context, principalele semnale standard sunt:

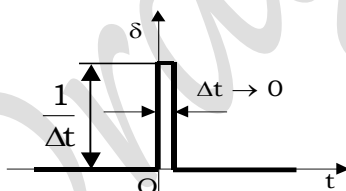
- ✓ semnalul impuls unitar;
- ✓ semnalul treaptă unitară;
- ✓ semnalul rampă unitară;
- ✓ semnalul parabolă unitară;
- ✓ semnalul sinusoidal.

A. Semnale standard în timp continuu

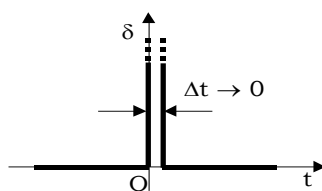
a) Semnalul impuls unitar $\delta(t)$

Este folosit pentru a caracteriza situații de solicitare foarte intensă și de foarte scurtă durată a sistemului.

Ca punct de plecare considerăm *impulsul real normat* din figură, adică impulsul de arie egală cu unitatea și durată Δt foarte mică ($\Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t} = 1$).



Semnalul *impuls unitar* $\delta(t)$, numit și *impuls Dirac*, se consideră că se obține din impulsul real normat prin trecere la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$. Impulsul Dirac se reprezintă în modul următor:



Matematic, impulsul Dirac nu este o funcție propriu-zisă ci o *distribuție* și anume funcția generalizată caracterizată prin *proprietatea de extracție* exprimată prin relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0),$$

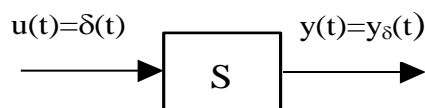
cu $f(t)$ definită pe \mathbf{R} . Potrivit acesteia, combinarea lui $f(t)$ cu distribuția Dirac $\delta(t - t_0)$ extrage din $f(t)$ valoarea $f(t_0)$ de la momentul t_0 . În particular, pentru $t_0 = 0$ avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0) .$$

În practică se consideră în mod frecvent că impulsul Dirac este o funcție propriu-zisă caracterizată prin relațiile:

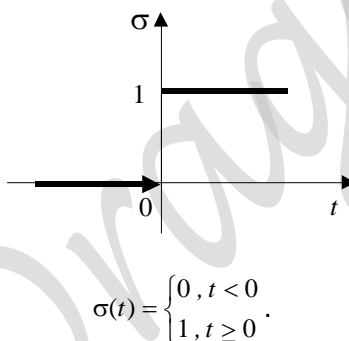
$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} .$$

Răspunsul unui sistem la impuls Dirac se numește *funcție răspuns la impuls* sau *funcție pondere* și se notează cu $h(t)$ sau $y_{\delta}(t)$.



Așa cum se va arăta, în cazul sistemelor liniare, $h(t)$ reprezintă un model matematic al sistemului.

b) Semnalul treaptă unitară $\sigma(t)$

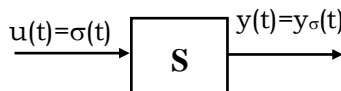


Semnalul treaptă unitară servește pentru a modela situații practice de tip „acțiune intensă de lungă durată”.

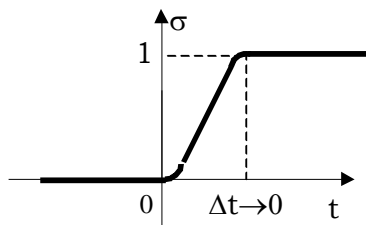
Matematic, există și alte variante de modelare a semnalului treaptă unitară. De pildă:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} .$$

Răspunsul unui sistem la semnalul treaptă unitară, notat cu $y_{\sigma}(t)$, poartă numele de *funcție indiceală*.



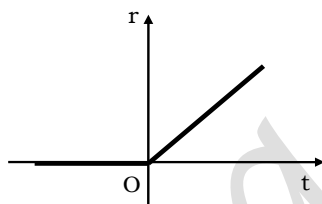
În realitate pot fi aplicate doar semnale treaptă ca și cel din figura următoare, cu Δt foarte mic (treaptă reală):



Semnalul treaptă este tot o distribuție și se demonstrează că în domeniul distribuțiilor este valabilă relația $\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$. În mod obișnuit, preluăm această relație și atunci când lucrăm cu funcții propriu-zise.

c) **Semnalul rampă unitară $r(t)$** - se folosește pentru analizarea sistemelor de urmărire sau pentru aproximarea unor semnale (prin semnale în formă de linii frânte):

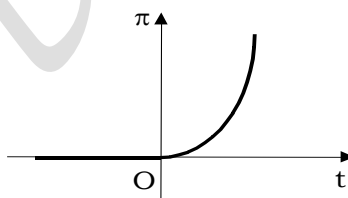
$$r(t) = t \cdot \sigma(t)$$



$$\dot{r}(t) = \sigma(t)$$

d) **Semnalul parabolă unitară $\pi(t)$** – se folosește, de asemenea, pentru analizarea sistemelor de urmărire sau pentru aproximarea unor semnale:

$$\pi(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma(t)$$



$$\dot{\pi}(t) = r(t)$$

e) **Semnalul sinusoidal (semnal armonic)**

Se folosește pentru analiza generală a semnalelor de diferite tipuri și a transferului acestora prin sisteme. Expresia semnalului sinusoidal este:

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),$$

unde:

- ✓ U_0 este amplitudinea semnalului;
- ✓ ω este pulsația semnalului; $\omega = 2\pi f$, unde f este frecvența semnalului;
- ✓ $\omega t + \varphi_0$ este faza semnalului la momentul curent t ;

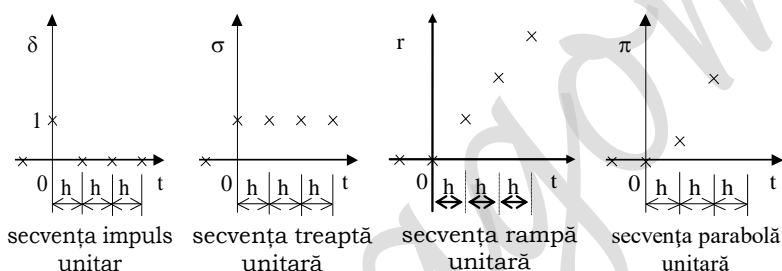
- ✓ φ_0 este faza semnalului la momentul $t = 0$.

Observație (cu caracter pregătitor pentru diferite tipuri de semnale folosite în cadrul cursului): Fie semnalul în timp continuu $f(t)$. Atunci:

- ✓ $f(t) \cdot \sigma(t)$ reține din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \geq 0$;
- ✓ $f(t) \cdot \sigma(t - t_0)$ reține din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \geq t_0$;
- ✓ $f(t)[\sigma(t - t_1) - \sigma(t - t_2)]$, unde $t_2 > t_1$, reține din $f(t)$ partea care corespunde lui $t \in [t_1; t_2]$.

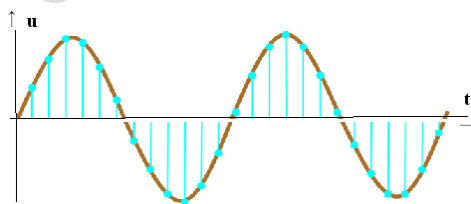
B. Semnale standard în timp discret

Și în cazul timp discret se folosesc semnale standard. În principal se utilizează omoloagele semnalelor standard în timp continuu, obținute prin eșantionarea semnalelor standard în timp continuu cu pasul h constant. Ele sunt ilustrate în figura de mai jos. Alternativ termenului de semnal, este folosit cel de *secvență*.

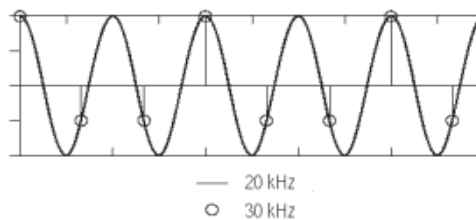


Eșantionarea unui semnal ar trebui să se facă astfel încât din secvența rezultată prin eșantionare să poată fi reconstruit în mod unic semnalul inițial. Ca urmare, *adoptarea valorii lui h trebuie făcută astfel încât să se piardă cât mai puțină informație prin eșantionare.*

În prima figură alăturată sinusoida $u(t)$ este eșantionată corect întrucât ea poate fi refăcută pe baza eșantioanelor. Deci se păstrează informația din semnalul eșantionat.



Semnal cu frecvența de 20 kHz eșantionat cu frecvența de 30 kHz



Reconstrucția semnalului conduce la un semnal cu frecvența de 10 kHz



În a doua figură sinusoida cu frecvența de 20 kHz nu este eșantionată corect. Frecvența de eșantionare, de 30 kHz, este prea mică și ca urmare informația reținută din semnalul sinusoidal este puternic distorsionată. În adevăr, la reconstrucție se obține un alt semnal sinusoidal decât cel inițial și anume un semnal cu frecvența de 10 kHz. Efectul poartă denumirea de *efect alias*.

Fundamentarea teoretică a modului în care trebuie făcută eșantionarea este dată de *teorema lui Shannon* care exprimă condiția de reconstruire a unui semnal din eșantioanele lui.

Fie f_B frecvența de bandă a unui semnal $x(t)$ (v. secțiunea 4 din acest paragraf). Teorema afirmă că:

Eșantionarea uniformă cu pasul h a semnalului $x(t)$ cu frecvența de bandă egală cu f_B permite reconstruirea semnalului în mod unic dacă și numai dacă $h < \frac{1}{2 \cdot f_B}$.

3. Reprezentarea semnalelor în domeniul imaginilor

În aplicațiile referitoare la diversele categorii de sisteme, avem de-a face cu prelucrarea unor semnale de intrare cu scopul de a obține diverse efecte, caracterizate prin forma și nivelul semnalelor de ieșire. În acest context, *semnalele, ca funcții de timp, sunt supuse operațiilor care apar în modelele matematice ale sistemelor, modele ce reprezintă egalități operatoriale*. Astfel, asupra semnalelor se efectuează alături de operațiile aritmetice și algebrice și operații de derivare, integrare sau de calcul recursiv. În acest context spunem că operăm cu *semnale reprezentate în domeniul timp*. În general, operarea cu semnale în domeniul timp este complicată. S-a căutat o alternativă de simplificare. Ea a fost oferită de calculul operațional, în speță de *transformata Laplace*, *transformata z*, *transformata Fourier* și transformata Hilbert, care oferă alte modalități de reprezentare a semnalelor.

Atunci când operăm cu transformatele semnalelor spunem că operăm cu semnale în *domeniul imaginilor sau în domeniul operațional*. În continuare ne referim numai la primele două transformări.

A) Reprezentarea semnalelor în domeniul operațional folosind transformata Laplace

Transformata Laplace se aplică semnalelor în timp continuu și operațiilor care se efectuează cu acestea, adică modelelor matematice ale sistemelor în timp continuu. În continuare ne referim numai la semnale.

Fie $f(t)$ o funcție bilaterală (un semnal bilateral). Se numește *integrală Laplace* a acesteia expresia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt ,$$

în care $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + j\omega$ (*frecvență complexă*). Pentru integrală, s joacă rol de parametru. Dacă integrala improprie este convergentă (poate fi calculată), în urma integrării rezultă o expresie de parametrul s , interpretată ca funcție de s . Ea se numește *transformată Laplace bilaterală a funcției $f(t)$* . Pentru a simplifica scrierea o notăm cu $f(s)$. Mulțimea valorilor lui s pentru care $f(s)$ există se numește domeniu de convergență al lui $f(s)$. Deci:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt . \quad (1)$$

În mod obișnuit lucrăm cu semnale și sisteme cauzale. Pentru acestea, în locul formulei (1) operăm cu *transformata Laplace unilaterală* (2) și inversa ei (2'):

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt . \quad (2) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} f(s) \cdot e^{st} \cdot ds \quad (2')$$

Valoarea α se consideră astfel încât dreapta $s = \alpha + j\omega$ să se situeze integral în domeniul de convergență al lui $f(s)$.

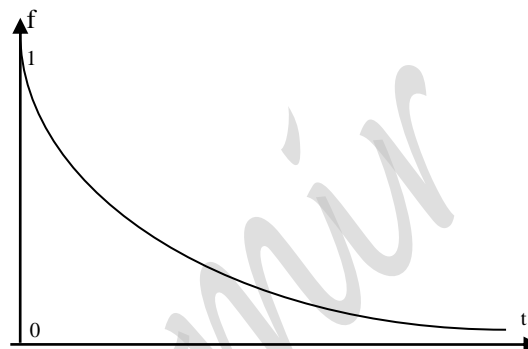
Mulțimea funcțiilor $f(t)$ care au transformate Laplace se numește mulțimea funcțiilor original. Mulțimea transformatelor Laplace se numește mulțimea funcțiilor imagine.

Pentru operația de asociere a transformatei $f(s)$ funcției de timp $f(t)$ folosim simbolizarea $f(s) \bullet \circ f(t)$ (haltera cu bile).

Operarea corectă cu transformata Laplace presupune cunoașterea, pentru fiecare caz în parte, a domeniului de convergență a lui $f(s)$, adică a domeniului din planul complex pe care este valabil rezultatul.

Exemplu: Fie funcția $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$. Graficul ei are aspectul din figura alăturată. Calculul transformatei Laplace unilaterale și stabilirea domeniului de convergență al acesteia decurg astfel:

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \\ &= -\frac{1}{s+a} e^{-(a+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+s)t} \right) = \\ &= \frac{1}{s+a} \text{ pentru } a + \sigma > 0 \end{aligned}$$



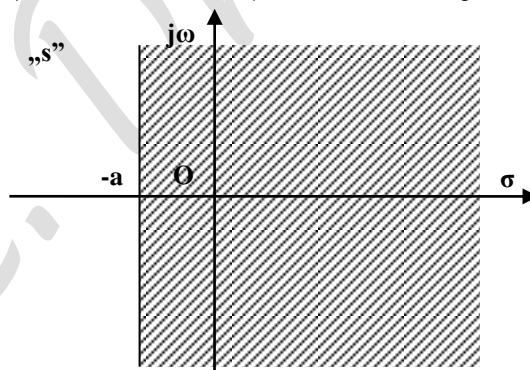
Calcularea limitei s-a făcut având în vedere că:

$$e^{-(a+s)t} = e^{-(a+\sigma+j\omega)t} = e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\omega t} = e^{-(a+\sigma)t} (\cos \omega t - j \sin \omega t).$$

În concluzie:

$$f(s) = \frac{1}{s+a}, s \in \{ \sigma + j\omega \mid \sigma > -a \}.$$

Domeniul de convergență, $\{ \sigma + j\omega \mid \sigma > -a \}$, dat de condiția $a + \sigma > 0$, este reprezentat mai jos prin hașurare:



• Pentru transpunerea operațiilor din domeniul timp în operații din domeniul operațional se aplică mai multe teoreme. În lucrarea de față cel mai des se folosesc următoarele teoreme¹:

✓ **teorema de liniaritate:**

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \bullet \circ c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s), \forall f_1, f_2 \text{ funcții original, } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

¹ Pentru a simplifica prezentarea, aspectele referitoare la domeniile convergență pentru care sunt valabile teoremele nu se prezintă.

✓ **teorema derivării:**

$$\begin{aligned}\dot{f}(t) &\stackrel{\circ}{\longleftrightarrow} s \cdot f(s) - f(0) \\ \ddot{f}(t) &\stackrel{\circ}{\longleftrightarrow} s^2 f(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \\ &\dots\end{aligned}$$

$f(0), \dot{f}(0)$ se numesc **condiții inițiale ale lui $f(t)$** . Ele au sens numai când $f(t)$ este o funcție cauzală sau unilaterală. Condițiile inițiale sintetizează preistoria semnalului și se asociază fie momentului $t = 0_+$ ($\lim_{t \rightarrow 0^+} t$), fie

momentului $t = 0_-$ ($\lim_{t \rightarrow 0^-} t$). Pentru o problemă dată se aplică același mod de tratare a condițiilor inițiale

pentru toate semnalele din sistem (de regulă $t = 0_-$). Dacă este vorba de o funcție bilaterală, atunci, noțiunea de condiții inițiale nu are sens întrucât nu există un moment inițial iar convergența integralei improprii impune pentru $f(t)$ limite egale cu 0 la $\pm \infty$, astfel că relațiile din teorema derivării devin

$$\dot{f}(t) \stackrel{\circ}{\longleftrightarrow} s \cdot f(s) \text{ etc..}$$

✓ **teorema produsului de convoluție:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) \cdot d\tau \stackrel{\circ}{\longleftrightarrow} f_1(s) \cdot f_2(s), (3)$$

$\forall f_1(t), f_2(t)$ funcții original cu transformatele Laplace $f_1(s)$ și $f_2(s)$, având intersecția domeniilor de convergență nevidă.

Notă: Convoluția este un procedeu matematic prin care se asociază unei perechi de semnale $\{f_1(t), f_2(t)\}$ un al treilea semnal. Valorile celui de al treilea semnal se obțin în orice moment t calculând integrala din (3) numită **produs de convoluție**. În cadrul integralei variabila de integrare este τ iar t joacă rol de parametru. Rezultatul integrării este o funcție de parametrul t . Produsul de convoluție este comutativ în raport cu perechea de semnale $\{f_1(t), f_2(t)\}$. Convoluția este cea mai importantă tehnică de calcul folosită în procesarea numerică (digital) a semnalelor.

Teorema produsului de convoluție consemnează faptul că transformata Laplace a produsului de convoluție este egală cu produsul algebric al transformatelor Laplace ale funcțiilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$.

B) Reprezentarea semnalelor în domeniul operațional folosind transformata z

Transformata z se aplică semnalelor în timp discret și operațiilor care se efectuează cu astfel de semnale, adică modelelor matematice ale sistemelor în timp discret. Semnalele în timp discret sunt șiruri de valori definite pe mulțimea numerelor întregi sau naturale (sau pe altă mulțime discretă inclusă în acestea). Semnalelor în timp discret li se pot asocia imagini operaționale sub formă de funcții analitice folosind transformata z .

Fie semnalul unilateral în timp discret $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{f[0], f[1], f[2], \dots, f[n], \dots\}$ și parametrul $z \in \mathbb{C}$. Se consideră suma:

$$\sum_{f,n} = f[0] + f[1] \cdot z^{-1} + f[2] \cdot z^{-2} + \dots + f[n] \cdot z^{-n}. (4)$$

În caz de convergență rezultatul este o funcție de parametrul z . Se numește *transformată z a șirului (semnalului)* $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$ (*transformata z unilaterală*) funcția de variabilă z care rezultă prin trecere la limită pentru $n \rightarrow \infty$ în suma de mai sus:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{f,n}$$

Domeniul de valori al lui z pentru care limita există se numește *domeniu de convergență al transformatei z* .

Semnalelor (șirurilor) bilaterale ($\{f[t]\}_{t \in \mathbb{Z}}$), li se asociază în mod asemănător *transformata z bilaterală*, ca limită a sumei:

$$\sum_{f,Z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] z^{-k} \quad (5)$$

La fel ca și în cazul timp continuu, în mod frecvent operăm cu semnale cauzale $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{f[0], f[1], f[2], \dots, f[n], \dots\}$ sau unilaterale, respectiv cu transformata z unilaterală. Inversa acesteia este (C este un contur închis raportat la domeniul de convergență al transformatei z):

$$f[t] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) \cdot z^{t-1} \cdot dz \quad (5')$$

Pentru operația de asociere a transformatei z funcției de timp $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}/\mathbb{Z}}$ și invers, folosim simbolizarea $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}/\mathbb{Z}} \longleftrightarrow f(z)$ (haltera cu discuri).

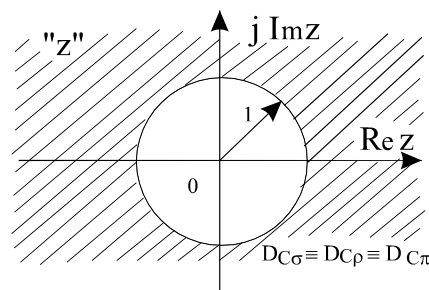
Exemplu: Să se calculeze transformata z a șirului $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}}$, unde $f[t] = e^{-ah t}$. (Proveniența termenului general este următoarea: $f(t) = e^{-at}$, $f(kh) = e^{-akh} \rightarrow f[k] = e^{-ahk}$, respectiv $f[t] = e^{-ah t}$). Succesiv avem:

$$\sum_{f,N} = f[0] + f[1]z^{-1} + \dots + f[n]z^{-n} = 1 + e^{-ah}z^{-1} + e^{-2ah}z^{-2} + \dots + e^{-nah}z^{-n} = \frac{1 - (e^{-ah}z^{-1})^n}{1 - e^{-ah}z^{-1}}$$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (e^{-ah}z^{-1})^n}{1 - e^{-ah}z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-ah}z^{-1}}, |e^{-ah}z| > 1 \quad (6)$$

$$f(z) = \frac{z}{z - e^{-ah}}, |z| > e^{-ah}$$

Domeniul de convergență este exteriorul cercului de rază e^{-ah} și este reprezentat hașurat în figura alăturată. El rezultă din condiția $|e^{-ah}z| > 1$, de existență a limitei din (6).



• Și în cazul transformatei z , se folosesc, de asemenea, diferite proprietăți ale acesteia pentru a înlocui calculul în timp discret cu calcul algebric în domeniul operațional. Ne vom referi la: *proprietatea de liniaritate, teoremele de*

translatare la stânga și la dreapta (teorema de translatare diferă după cum operăm cu transformata z unilaterală sau bilaterală) și *teorema convoluției* (sau *teorema sumei de convoluție*)².

- *teorema de liniaritate*:

$$c_1\{f_1[t]\} + c_2\{f_2[t]\} \longrightarrow c_1f_1(z) + c_2f_2(z), \quad \forall \{f_1[t]\}, \{f_2[t]\} \text{ funcții original, } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

- *teorema translatării (deplasării) la dreapta*: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original bilaterală dreapta sau unilaterală având asociate condiții inițiale nule (semnal causal), și $f(z)$ este imaginea acesteia ($\{f[t]\} \longrightarrow f(z)$), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{f[t-n]\}_{t \in \mathbb{N}}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la dreapta (n întreg pozitiv), atunci

$$\{f[t-n]\} \longrightarrow z^{-n}f(z);$$

în enunțul de mai sus, prin condiții inițiale se înțelege șirul de valori: $f[-1], f[-2], \dots, f[-n]$;

- *teorema translatării (deplasării) la stânga*: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original unilaterală (semnal causal) și $f(z)$ este imaginea acesteia ($\{f[t]\} \longrightarrow f(z)$), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{f[t+n]\}_{t \in \mathbb{N}}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la stânga (n întreg pozitiv), atunci

$$\{f[t+n]\} \longrightarrow z^n \cdot \{f(z) - f[0] - f[1] \cdot z^{-1} - f[2] \cdot z^{-2} - \dots - f[n-1] \cdot z^{-(n-1)}\};$$

- *teorema sumei de convoluție*:

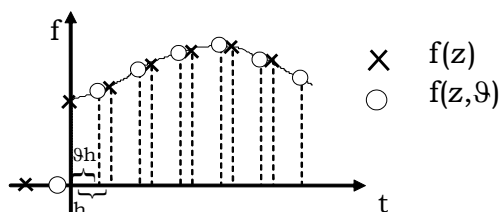
$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_1[t-\tau] \cdot f_2[\tau] \longrightarrow f_1(z) \cdot f_2(z).$$

$\forall \{f_1[t]\}, \{f_2[t]\}$ funcții original cu $f_1(z)$ și $f_2(z)$, transformate z având intersecția domeniilor de convergență nevidă.

Teorema produsului de convoluție consemnează faptul că transformata z a produsului de convoluție este egală cu produsul algebric al transformatelor z ale funcțiilor $\{f_1[t]\}$ și $\{f_2[t]\}$.

- În tehnică asociem de cele mai multe ori transformata z semnalelor în timp discret obținute prin eșantionarea unor semnale în timp continuu, $f(t)$, cu pas constant, la momente de eșantionare $t_k = kh$.³ Ce se întâmplă însă cu informația conținută de semnalele $f(t)$ între momentele de eșantionare ?

Pentru a putea răspunde la întrebare, se folosește *transformata z modificată*. Ea este asociată prin formule similare cu (4) și (5) unor șiruri de eșantioane prelevate la momente diferite de momentele $t_k = kh$, anume la momentele $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$, unde $\vartheta \in [0,1)$.



² Și de data aceasta, pentru a simplifica prezentarea, aspectele referitoare la domeniile convergență pentru care sunt valabile teoremele nu se prezintă.

³ Transformata z nu se referă strict la această situație.

Transformata z modificată este notată cu $f_g(z)$ și corespunde șirului de valori decalate în timp (punctele expandate prin cercuri). Modificând pe g în intervalul $[0,1)$ se poate baleia întreg semnalul $f(t)$. Pentru $g=0$ se obține transformata z propriu-zisă.

C) Tabele de transformare

În practică se lucrează cu transformate Laplace și cu transformate z precalculate disponibile în tabele de transformare. Tabelele de transformare permit și operația inversă: obținerea funcției originale a semnalului în timp continuu atunci când se cunoaște transformata Laplace, respectiv obținerea expresiei termenului general a semnalului în timp discret atunci când se cunoaște transformata z a semnalului în timp discret.

În cadrul cursului operăm cu tabele de transformare care au structura din tabelul de mai jos.

(1)	(2)	(3)	(4)
$f(t), t \geq 0$	$f(s)$	$f(z) = Z\{f(s)\}$	$f_g(z) = Z_g\{f(s)\}$

- În coloana (1) $f(t)$ este o funcție original de timp continuu, cauzală (unilaterală).
- În coloana (2) $f(s)$ este transformata Laplace a lui $f(t)$ din coloana (1), anume $f(s) \bullet \longrightarrow f(t)$.
- În coloana (3), apare transformata z a șirului care se obține din $f(t)$ din coloana (1) prin eșantionare la momentul $t=kh$. Prin notația $Z\{f(s)\}$ facem următoarea asociație de idei: $f(z)$ este transformata z asociată șirului de valori care se obține prin eșantionarea originalului lui $f(s)$ la momentele $t_k=kh$.

Exemplu: Presupunem că un semnal are transformata Laplace $f(s) = \frac{1}{s+2}$. Atunci, din tabelul de transformări interesează linia în care apare $f(s) = \frac{1}{s+a}$:

(1)	(2)	(3)	(4)
$f(t), t > 0$	$f(s)$	$f(z) = Z\{f(s)\}$	$f_g(z) = Z_g\{f(s)\}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-ah}}$	$\frac{ze^{-a \cdot gn}}{z-e^{-ah}}$

Întrucât $a=2$, potrivit tabelului semnalul (funcția original) este $f(t) = e^{-2t}$.

Termenul general al semnalului în timp discret care se obține prin eșantionarea lui $f(t)$ cu pasul 0.01 secunde este: $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{f(k \cdot h)\}_{k \in \mathbb{N}} = \{e^{-a \cdot h \cdot k}\}_{k \in \mathbb{N}, h=0.01} = \{e^{-2 \cdot 0.01 \cdot k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{e^{-0.02 \cdot t}\}_{t \in \mathbb{N}}$. În ultima egalitate s-a înlocuit k cu t . El are transformata z : $f(z) = \frac{z}{z-e^{-0.02}}$.

Să ne imaginăm că în urma unui calcul se obține $f(z) = \frac{z}{z-e^{-0.02}}$. Ca urmare $a \cdot h = 0.02$, iar termenul general al semnalului în timp discret este $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{e^{-0.02 \cdot t}\}_{t \in \mathbb{N}}$.

Căruia semnal în timp continuu îi corespunde secvența $\{f[t]\}_{t \in \mathbb{N}} = \{e^{-0.02t}\}_{t \in \mathbb{N}}$, respectiv imaginea

$f(z) = \frac{z}{z - e^{-0.02}}$? Presupunem că se cunoaște valoarea lui h . Atunci, $a = \frac{0.02}{h}$ și $f(t) = e^{-\frac{0.02}{h}t}$. Ca urmare

$f(z) = \frac{z}{z - e^{-0.02}}$ poate proveni din orice exponențială $f(t) = e^{-\frac{0.02}{h}t}$ eșantionată cu pasul h , iar soluția nu este unică.

- În coloana (4) apare transformata z modificată a semnalului $f(t)$. Ea este transformata z asociată șirului care se obține din $f(t)$ prin eșantionare la momentele $t_{k,9} = kh + 9h$.

Observații:

- ✓ Extrasul de tabel de transformare din exemplul anterior atrage atenția asupra faptului că, numeric, rezultatul obținut prin transformata Laplace este unic, pe când cel obținut cu transformata z depinde de mărimea pasului de discretizare h (în formulele din coloanele (3) și (4) apare parametrul h).
- ✓ Prin trecerea la limită pentru $9 \rightarrow 0$, rezultatul din coloana (4) conduce la expresia din coloana (3).
- ✓ Cu câteva excepții, transformatele z sunt funcții raționale, al căror numărător se divide prin z .

Folosind calculul operațional, simplificăm rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare sau a ecuațiilor recursive liniare, algebrizându-le. În teoria sistemelor aceste tipuri de ecuații sunt cele folosite pentru modelarea sistemelor.

4. Spectrele semnalelor în timp continuu

În secțiunile anterioare s-a procedat la caracterizarea semnalelor în domeniul timp și în domeniul operațional. În continuare prezentăm un *al treilea mod de caracterizare a semnalelor* pe care îl vom denumi *caracterizare în domeniul frecvență*.

Din punctul de vedere al periodicității semnalelor în raport cu timpul, distingem *semnale periodice* și *semnale neperiodice*. Pentru a le putea estima efectele în diverse circumstanțe, se folosesc pe larg, ca modele alternative, spectrele lor. Caracterizarea în domeniul frecvență, adică caracterizarea semnalelor prin spectre⁴, reprezintă un mijloc de descriere a semnalelor bazat pe *seria Fourier*, respectiv *transformata Fourier*. Potrivit teoriei lui Fourier, orice semnal în timp continuu poate fi reprezentat ca o sumă de semnale sinusoidale de diferite amplitudini și faze. La modul general, o astfel de reprezentare este denumită *reprezentare în domeniul frecvență a semnalului* sau *spectrul semnalului*. De regulă reprezentarea spectrală operează, așa cum se arată în continuare, cu mulțimea amplitudinilor și mulțimea fazelor sinusoidelor componente, denumite *spectru de amplitudine*, respectiv *spectru de fază*.

Spectrele semnalelor periodice sunt discrete. Spectrele semnalelor neperiodice sunt continue.

A) Semnale periodice

Fie $x(t)$ un semnal periodic de perioadă T_0 , deci de frecvență $f = \frac{1}{T_0}$ și pulsație $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Un astfel de semnal poate fi descompus în serie Fourier în mai multe moduri. Distingem:

⁴ Cuvântul „spectru” provine din limba latină: spectrum (plural spectra). În fizică el a fost introdus de Isaac Newton, în optică, cu referire la gama de culori observate la dispersia luminii albe printr-o prismă.

- ❖ Forma complexă a seriei Fourier, adică descompunerea:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j \cdot n \omega_0 t} \quad (1)$$

- ❖ Forma reală a seriei Fourier, adică descompunerea:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \omega_0 t + \varphi_n) \quad (2)$$

Coeficienții c_n sunt numere complexe și se numesc *coeficienții ai seriei Fourier complexe*.

✓ În cazuri simple, ei pot fi determinați prin aducerea expresiei lui $x(t)$ la forma (1)⁵.

✓ Dacă funcția $x(t)$ este absolut integrabilă pe durata unei perioade T_0 (integrala modulului, $|x(t)|$, este finită), atunci coeficienții seriei Fourier complexe se pot obține cu formula

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot n \omega_0 t} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

În reprezentare polară coeficienții c_n (numere complexe) se scriu sub forma $c_n = |c_n| \cdot e^{j \cdot \arg c_n}$.

Legătura dintre coeficienții seriei Fourier complexe și coeficienții formei reale a seriei Fourier este dată de formulele

$$A_n = \begin{cases} |c_0|, & n = 0 \\ 2 \cdot |c_n|, & n \geq 1 \end{cases}, \quad \varphi_n = \arg c_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Se numesc: *spectru de amplitudine*, respectiv *spectru de fază ale semnalului $x(t)$ corespunzătoare formei complexe a seriei Fourier*, mulțimea de valori $\{|c_n|\}_{n \in \mathbb{Z}}$, respectiv mulțimea de valori $\{\arg c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ asociate cu mulțimea de pulsații $\{n \cdot \omega_0\}_{n \in \mathbb{Z}}$, iar *spectru de amplitudine*, respectiv *spectru de fază ale semnalului $x(t)$ corespunzătoare formei reale a seriei Fourier*, mulțimea de valori $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectiv mulțimea de valori $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ asociate cu mulțimea de pulsații $\{n \cdot \omega_0\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Reprezentarea spectrului de amplitudine înseamnă reprezentarea mulțimilor de puncte de coordonate $\{(n \cdot \omega_0, |c_n|)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, iar *reprezentarea spectrului de fază* înseamnă reprezentarea mulțimilor de puncte de coordonate $\{(n \cdot \omega_0, \arg c_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sau $\{(n \cdot \omega_0, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ într-un sistem de axe cartezian (cu $\omega = n \cdot \omega_0$ în abscisă). Adeseori, în loc de puncte se reprezintă segmente (*spectru de linii*) de amplitudine $|c_n|$ sau A_n , respectiv $\arg c_n$ sau φ_n , distanța dintre două linii consecutive fiind de ω_0 unități (v. exemplele ce urmează). Spectrele semnalelor periodice pot fi considerate și ca funcții de variabila discretă n , caz în care distanța dintre două linii consecutive este de o unitate.

De remarcat că spectrul de amplitudine al semnalului $x(t)$ asociat pe baza formei reale a seriei Fourier diferă de spectrul de amplitudine al semnalului $x(t)$ asociat pe baza seriei Fourier complexe prin omiterea componentelor corespunzătoare lui $n < 0$ și dublarea valorilor componentelor corespunzătoare lui $n > 0$ (se însumează $|c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n|$), iar spectrul de fază al semnalului $x(t)$ asociat pe baza seriei Fourier reale reține din cel asociat pe baza seriei Fourier complexe, doar valorile corespunzătoare lui $n \in \mathbb{N}$.

⁵ Metoda este folosită în exemplele 1 și 2 prezentate în continuare.

Exemplul 1: Să se determine spectrul de amplitudine și spectrul de fază ale semnalului $x(t) = \sin 2t$. (Se observă că $\omega_0 = 2 \text{ sec}^{-1}$).

Soluție: Folosind formula lui Euler $\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$, expresia lui $x(t)$ devine:

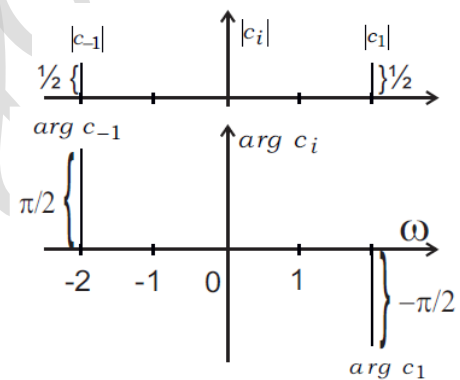
$$x(t) = \frac{1}{2j}(e^{j \cdot 2t} - e^{-j \cdot 2t}) = -\frac{1}{2j} \cdot e^{-j \cdot 2t} + \frac{1}{2j} \cdot e^{j \cdot 2t} = \frac{1}{2} j \cdot e^{-j \cdot 2t} - \frac{1}{2} j \cdot e^{j \cdot 2t} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot 2t}}_{c_{-1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{j \cdot 2t}}_{c_1}.$$

- În consecință, seria Fourier complexă a lui $x(t)$ este $x(t) = \sin 2t = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot 2t}}_{c_{-1}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot e^{j \cdot 2t}}_{c_1}$, ceea ce

înseamnă că spectrele de amplitudine și fază au doar câte două linii corespunzătoare punctelor $\{-\omega_0, |c_{-1}|\} = \{-2, \frac{1}{2}\}$ și $\{\omega_0, |c_1|\} = \{2, \frac{1}{2}\}$, respectiv $\{-\omega_0, \arg c_{-1}\} = \{-2, \frac{\pi}{2}\}$ și $\{\omega_0, \arg c_1\} = \{2, -\frac{\pi}{2}\}$. Dacă operăm cu valori raportate ale pulsației, adică cu n în loc de $n\omega_0$,

liniile corespund punctelor $\{-1, |c_{-1}|\} = \{-1, \frac{1}{2}\}$ și $\{1, |c_1|\} = \{1, \frac{1}{2}\}$,

respectiv $\{-1, \arg c_{-1}\} = \{-1, \frac{\pi}{2}\}$ și $\{1, \arg c_1\} = \{1, -\frac{\pi}{2}\}$. Spectrele din primul caz sunt reprezentate în figura alăturată.



- Seria Fourier reală a lui $x(t)$ este $x(t) = \sin 2t = \cos(2t - \frac{\pi}{2})$, spectrele de amplitudine și fază având doar câte o singură linie corespunzătoare punctelor $\{\omega_0, A_1\} = \{2, 1\}$ și $\{\omega_0, \varphi_1\} = \{2, -\frac{\pi}{2}\}$. Dacă

operăm cu valori raportate ale pulsației, adică cu n în loc de $n\omega_0$, liniile corespund punctelor $\{1, A_1\} = \{2, 1\}$, respectiv $\{1, \varphi_1\} = \{1, -\frac{\pi}{2}\}$.

Exemplul 2: Să se determine spectrul de amplitudine și spectrul de fază complexe ale semnalului $x(t) = 2a \sin^2 2\pi \cdot f \cdot t + b \sin 4\pi \cdot f \cdot t$, cu $a, b > 0$ parametri reali.

Soluție: Observăm că $x(t)$ este un semnal periodic de pulsație $\omega_0 = 4\pi f$. Îl supunem unor transformări matematice succesive, după cum urmează:

$$x(t) = a(1 - \cos 4\pi \cdot f \cdot t) + b \sin 4\pi \cdot f \cdot t$$

$$x(t) = a - a \cdot \frac{1}{2}(e^{j4\pi \cdot f \cdot t} + e^{-j4\pi \cdot f \cdot t}) + \frac{b}{2j}(e^{j4\pi \cdot f \cdot t} - e^{-j4\pi \cdot f \cdot t})$$

$$x(t) = \frac{I}{2} \left(-a - \frac{I}{j} b \right) e^{-j4\pi \cdot f \cdot t} + a - \frac{I}{2} \left(-a + \frac{I}{j} b \right) e^{j4\pi \cdot f \cdot t}$$

$$x(t) = \frac{I}{2} (-a + jb) e^{-j4\pi \cdot f \cdot t} + a e^{j \cdot 0} + \frac{I}{2} (-a - bj) e^{j4\pi \cdot f \cdot t}$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} e^{j \left(\pi - \arctg \frac{b}{a} \right)}}_{c_{-1}} e^{-j4\pi \cdot f \cdot t} + \underbrace{a e^{j \cdot 0}}_{c_0} + \underbrace{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} e^{j \left(\pi + \arctg \frac{b}{a} \right)}}_{c_1} e^{j4\pi \cdot f \cdot t}$$

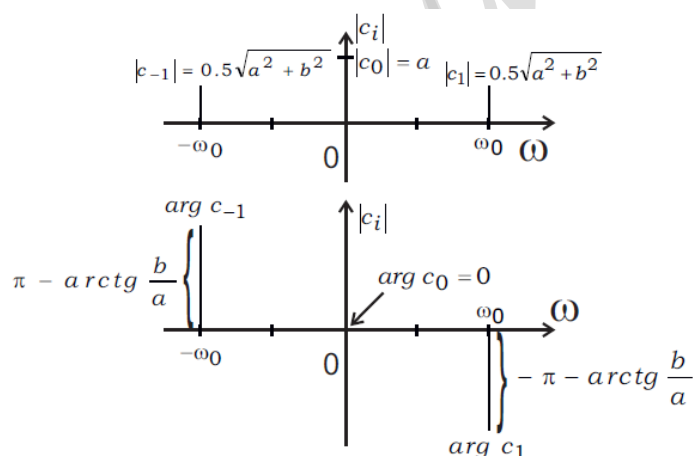
De data aceasta spectrul de amplitudine și cel de fază sunt formate din câte trei puncte:

$$\{-\omega_0, |c_{-1}|\} = \left\{ -4\pi f, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right\}, \quad \{0, |c_0|\} = \{0, a\} \text{ și } \{\omega_0, |c_1|\} = \left\{ 4\pi f, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right\},$$

în cazul spectrului de amplitudine, respectiv

$$\{\omega_0, \arg c_{-1}\} = \left\{ -4\pi f, \pi - \arctg \frac{b}{a} \right\}, \quad \{0, \arg c_0\} = \{0, 0\}, \quad \{\omega_0, \arg c_1\} = \left\{ 4\pi f, -\pi - \arctg \frac{b}{a} \right\}$$

în cazul spectrului de pulsație. Aspectul celor două spectre este redat în figurile de mai jos.



B) Semnale neperiodice

Semnalele neperiodice $x(t)$ absolut integrabile sunt caracterizabile prin transformarea Fourier (bilaterală):

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Seria Fourier nu este utilizabilă pentru acest caz deoarece unui semnal neperiodic, extins pe întreaga axă reală, îi corespunde o perioadă $T_0 \rightarrow \infty$, respectiv o pulsație $\omega_0 \rightarrow 0$. Dacă $\omega_0 \rightarrow 0$ rezultă că spectrul semnalelor neperiodice ar trebui să fie unul continuu. Această cerință este îndeplinită de *transformata Fourieri* $x(j\omega)$.

Funcția $|x(j\omega)|$, $\omega \in \mathbb{R}$ reprezintă spectrul de amplitudine al semnalului $x(t)$, iar funcția $\arg x(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ reprezintă spectrul de fază al semnalului $x(t)$.

Domeniul de pulsații pe care $x(j\omega) \neq 0$ se numește **bandă de pulsații**. Fie $[-\omega_B, \omega_B]$ banda de pulsații a unui semnal⁶. Atunci, frecvența $f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$ se numește **frecvență de bandă**, iar dublul ei, $f_s = 2 \cdot f_B$, **rată Nyquist**.

În continuare se exemplifică determinarea spectrelor semnalelor neperiodice pe cazul unui semnal impuls dreptunghiular amplasat în poziții diferite în raport cu momentul $t=0$.

Exemplul 3. Să se determine spectrul de amplitudine și spectrul de fază ale impulsului dreptunghiular $x(t) = a \cdot [\sigma(t+t_0) - \sigma(t-t_0)]$, $t_0 > 0$.

Soluție: Transformata Fourier a lui $x(t)$ este: $x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = a \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\omega t} dt$. Dezvoltând, integrala

obținem:

$$x(j\omega) = \frac{a}{\omega} \cdot (\sin \omega t + j \cdot \cos \omega t) \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{2a}{\omega} \cdot \sin \omega t_0,$$

respectiv spectrele

$$|x(j\omega)| = 2a \cdot \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right| = 2a \cdot t_0 \cdot |si(\omega t_0)|, \quad (3)$$

$$\arg x(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega t_0 \in \{(2k+1)\pi, (2k+2)\pi) | k \in Z_{-}^*\} \cup \{[2k\pi, (2k+1)\pi) | k \in Z_{+}\} \\ \pi, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Exemplul 4. Să se determine spectrul de amplitudine și spectrul de fază ale impulsului $x(t) = a \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-2t_0)]$, $t_0 > 0$. Acest semnal rezultă din cel din exemplul anterior prin translatare la dreapta cu t_0 secunde.

Transformata Fourier a lui $x(t)$ este:

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = a \cdot \int_0^{2t_0} e^{-j\omega t} dt.$$

Dezvoltând integrala, obținem:

$$x(j\omega) = \frac{a}{\omega} \cdot (\sin \omega t + j \cdot \cos \omega t) \Big|_0^{2t_0} = \frac{a}{\omega} \cdot [\sin 2\omega t_0 + j (\cos 2\omega t_0 - 1)] = \frac{2a \sin \omega t_0}{\omega} \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

În acest caz spectrul de amplitudine și spectrul de fază sunt date de funcțiile:

$$|x(j\omega)| = 2a \cdot \left| \frac{\sin \omega t_0}{\omega} \right| = 2a \cdot t_0 \cdot |si(\omega t_0)|, \quad (4)$$

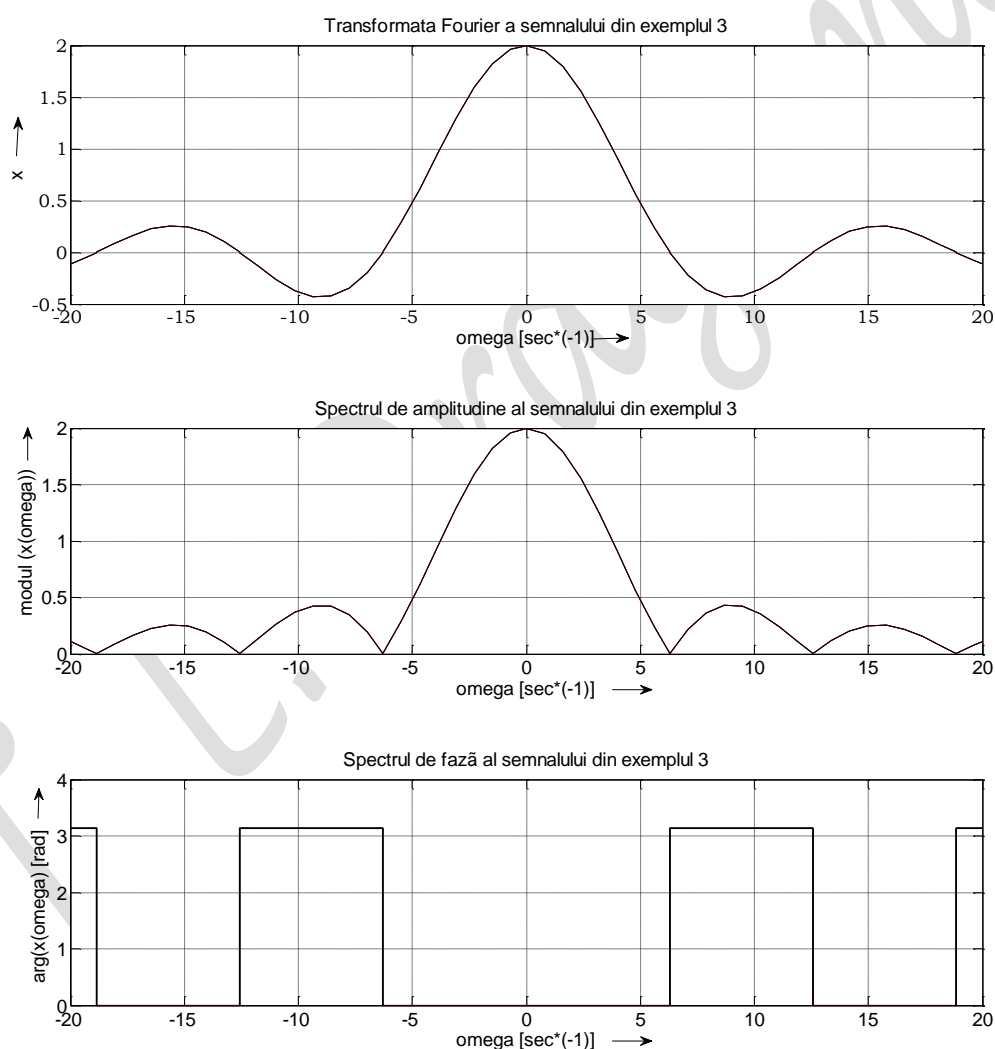
$$\arg x(j\omega) = \begin{cases} -\omega t_0, & \omega t_0 \in \{(2k+1)\pi, (2k+2)\pi) | k \in Z_{-}^*\} \cup \{[2k\pi, (2k+1)\pi) | k \in Z_{+}\} \\ \pi - \omega t_0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

⁶ De regulă banda de pulsații se consideră simetrică în raport cu $\omega = 0$.

În (3) și (4) s-a utilizat funcția $\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Exemplul 5. Un caz important în tehnică este semnalul impuls Dirac. Fie $f(t) = A \cdot \delta(t)$ un impuls Dirac de amplitudine A . El are transformata Fourier $f(j\omega) = A$. În consecință spectrul de amplitudine este $|f(j\omega)| = A$, iar spectrul de fază $\arg f(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{daca } A > 0 \\ \pi, & \text{daca } A < 0 \end{cases}$. Rezultatul este important prin faptul că spectrul de amplitudine fiind constant (bandă de pulsații infinită) rezultă că un impuls Dirac aplicat la intrarea unui sistem excită toate frecvențele proprii ale sistemului. Ca urmare el poate servi la caracterizarea sistemului la intrarea căruia se aplică.

Temă: a) Să se arate în continuarea exemplului 3 că transformatei Fourier și celor două spectre le corespund reprezentările grafice din figurile de mai jos.



b) Să se reprezinte grafic spectrele de amplitudine și de fază pentru exemplul 4 de mai sus.