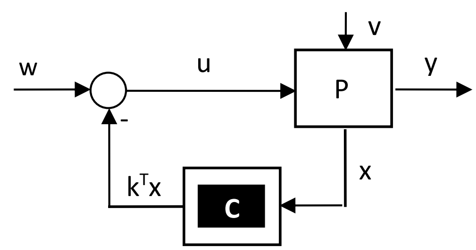
LUCRAREA DE LABORATOR NR.9

CRITERIUL RĂDĂCINILOR. CRITERIUL DE CONTROLABILITATE KALMAN

- *Stabilitatea* reprezintă o proprietate intrinsecă a sistemelor care se manifestă în condițiile perturbării regimurilor lor de funcționare prin variații ale semnalelor de intrare. Dacă la variații persistente ale semnalelor de intrare sistemul ajunge într-un nou regim de funcționare sau dacă la variații de durată limitată a semnalelor de intrare sistemul revine în vechiul regim de funcționare, sistemul se consideră stabil.

- *Controlabilitatea* este o a doua proprietate intrinsecă a sistemelor care constă în faptul că sistemul admite, potențial, semnale de intrare capabile să impună sistemului o tranziție în orice interval de timp finit dintr-o stare inițială oarecare într-o stare finală oarecare.

- Dacă un sistem este instabil, dar controlabil, atunci, din punct de vedere practic prezintă interes generarea unui semnal de intrare care să conducă sistemul pe o traiectorie stabilă (într-un regim de funcționare stabil). Acest lucru este posibil, la modul general, prin introducerea unei reacții după starea sistemului instabil. Prin introducerea canalului de reacție se completează structura sistemului inițial, rezultând un nou sistem, stabil. În acest context vorbim despre *stabilizarea sistemului prin reacție după stare*.



Ideea stabilizării prin reacție după stare este exemplificată în figura alăturată în care P este un proces condus, instabil dar controlabil. Mărimile de stare x se consideră măsurabile. Fiind controlabil, el poate fi stabilizat folosind o reacție realizată cu un compensator C. Acesta este un bloc amplificator sumator care efectuează operația $k^T x$, și contribuie la realizarea legii de comandă $u = w - k^T x$. Cu toate că structura din figură este în circuit închis, ea nu este considerată un sistem de reglare propriu-zis. Aceasta se datorează faptului că prin adoptarea amplificărilor compensatorului nu se poate controla decât parțial comportarea sistemului în circuit închis în raport cu w și v.

1. Criteriul rădăcinilor

- Criteriul rădăcinilor este un criteriu de analiză a stabilității unui sistem liniar. Aplicarea lui se face parcurgând următorii pași:

  a) Se determină polinomul caracteristic $\mu(\lambda)$ al sistemului (în ipoteza că gradul polinomului caracteristic este egal cu ordinul sistemului). De regulă, $\mu(\lambda)$ se obține ca numitor al f.d.t. (pentru sisteme de tip SISO) sau ca determinant, $\mu(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, atunci când se cunoaște MM-ISI al sistemului.

  b) Se calculează rădăcinile lui $\mu(\lambda)$, adică valorile proprii ale matricei A, și se amplasează în planul complex „s” sau „z”, după cum $\lambda = s$ sau $\lambda = z$.

  c) Se aplică criteriul rădăcinilor.

- Pentru STC enunțul **criteriului rădăcinilor** este următorul:

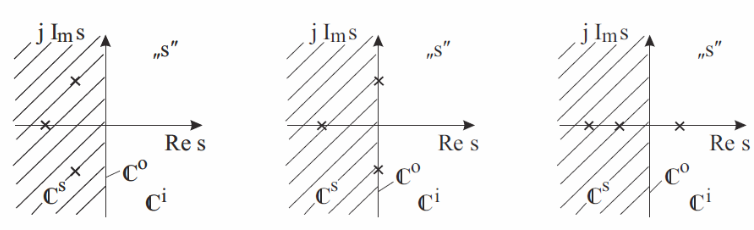
  Un sistem liniar în timp continuu cu polinomul caracteristic $\mu(s)$ *este:*

  - ***asimptotic stabil*** *atunci când valorile proprii ale lui* $\mu(s)$ *au partea reală strict negativă,*

- *__stabil__ atunci când unele valori proprii ale lui* $\mu(s)$ *au partea reală strict negativă iar restul valorilor proprii sunt pur imaginare, dar simple (în acest caz se mai spune că sistemul este "marginal stabil")*

  şi
- ***instabil** în restul cazurilor.*

Celor trei situaţii le corespund reprezentările din figura de mai jos care se referă la un sistem de ordinul III.

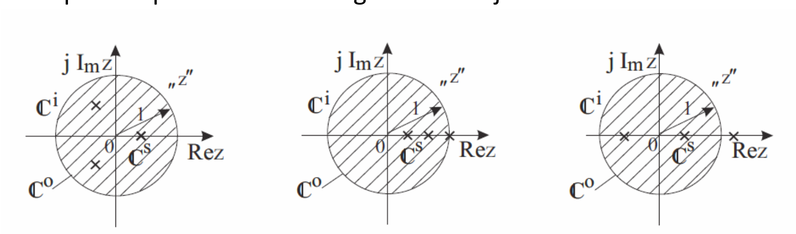


- Pentru STD enunțul **criteriului rădăcinilor** este următorul:

  Un sistem liniar în timp discret cu polinomul caracteristic $\mu(z)$ *este:*
  - ***asimptotic stabil** atunci când valorile proprii ale polinomului caracteristic* $\mu(z)$ *sunt în modul subunitare, adică* $|z_i| < 1$, $i = \overline{1;n}$,
  - ***stabil** dacă, cu excepţia unor rădăcini simple amplasate pe cercul* $|z| = 1$, *restul rădăcinilor sunt în interiorul cercului unitar (sistem marginal stabil)*

    şi
  - ***instabil** în restul cazurilor.*

Celor trei situaţii le corespund reprezentările din figura de mai jos care se referă la un sistem de ordinul III.



2. Criteriul de controlabilitate Kalman

- Criteriul de controlabilitate Kalman se referă la sisteme liniare de forma [1]:

$$x' = Ax + Bu,\ x \in R^n,\ u \in R^m. \qquad (1)$$

Cu matricele A şi B din (1) se formează următoarea matrice de tipul (n, mn) denumită ***matrice de controlabilitate*** a sistemului (1):

$$M_c = [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]. ^2 \qquad (2)$$

- ***Criteriul de controlabilitate Kalman are următorul enunț***:

  Sistemul liniar (1) este controlabil dacă şi numai dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu ordinul sistemului

$$rang\ M_c = n. \qquad (3)$$

[1] Se observă că operăm cu modele cu variabilă unificată. Ca urmare enunţul criteriului se referă simultan atât la STC cât şi la STD.

[2] Matricea M_c este o matrice celulară. Simbolurile $\vdots$ sau $|$ servesc ca separatoare pentru delimitarea (în scris a) celulelor. Aşadar, lângă prima celulă B, se pune a doua celulă AB, apoi celula A^2B ş.a.m.d.

Pentru sistemele monovariabile la intrare, pentru care m =1, M_c este o matrice pătratică de tipul (n,n), astfel că, echivalent condiţiei (3), avem:

$$\det M_c \neq 0 . \qquad (3')$$

3. Studiu de caz

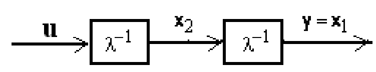
- Sistemele studiate în această secțiune sunt sistemele de ordinul II cu f.d.t. $H(\lambda)=\lambda^{-2}$ căreia îi corespunde MM-II (4), respective MM-ISI (5):

$$y(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot u(\lambda) \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} \cdot \underbrace{[u]}_{u} \\ \underbrace{[y]}_{y} = \underbrace{[1 \quad 0]}_{c^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x' = A \cdot x + b \cdot w \\ y = c^T \cdot x \end{cases} \qquad (5)$$

Deși din punct de vedere algebric au aceeași formă, în domeniul timp aceste sisteme au comportări mult diferite. Astfel, în timp continuu sistemul (4) corespunde sistemului de poziționare (sistem dublu integrator) (6), iar în timp discret sistemului de tip FIR (sistem cu răspuns la impuls în timp finit) (7). Pentru amândouă sistemele este valabilă schema bloc din figura de mai jos.

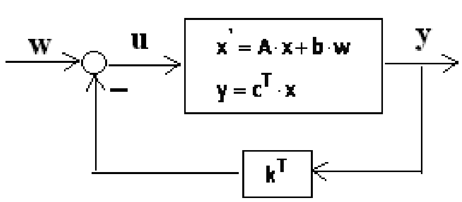
$$y(s) = \frac{1}{s^2} \cdot u(s) \qquad (6) \qquad y(z) = z^{-2} \cdot u(\lambda) \qquad (7)$$

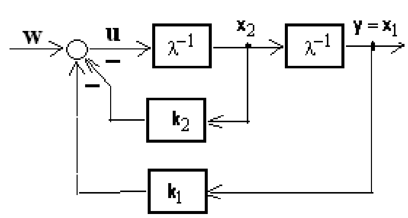


- Polinomul caracteristic al sistemului (5) este $\mu_o(\lambda) = \lambda^2$. Ca urmare, valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Aplicând criteriului rădăcinilor rezultă că sistemul (6) în timp continuu este instabil, pe când sistemul (7) în timp discret este asimptotic stabil.[3]
- Matricea de controlabilitate a sistemului (5) fiind invers-diagonală, rezultă că sistemul este controlabil:

$$M_c = [b \vdots A \cdot b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{rang} M_c = 2 \qquad (8)$$

- Sistemul (6) fiind instabil dar controlabil, el este stabilizabil prin reacție după stare. Reacția după stare se poate folosi și în cazul sistemului (6), caz în care sistemul rezultant nu mai este un sistem de tip FIR. În cazul de față pentru structura cu reacție după stare putem opera cu oricare din următoarele scheme bloc:





[3] Orice sistem de tip FIR este asimptotic stabil.

Așa cum se observă din schemele bloc reacția după stare se realizează folosind compensatorul $k=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$, respectiv legea de comandă în circuit închis

$$u=-k^T\cdot x+w \qquad (9)$$

Semnalul w este semnalul de conducere al sistemului. Înlocuind (9) în ecuațiile de stare din (5) rezultă

$$x^{'}=A\cdot x+b\cdot(-k^T\cdot x+w)=(\underbrace{A-b\cdot k^T}_{\bar{A}})\cdot x+b\cdot w\,, \qquad (10)$$

respectiv sistemul în circuit închis (11) cu polinomul caracteristic (12).

$$\begin{cases}x^{'}=\bar{A}\cdot x+b\cdot w\\ y=c^T\cdot x\end{cases} \quad (11)\,, \qquad \mu(\lambda)=\lambda^2+k_2\cdot\lambda+k_1\,. \qquad (12)$$

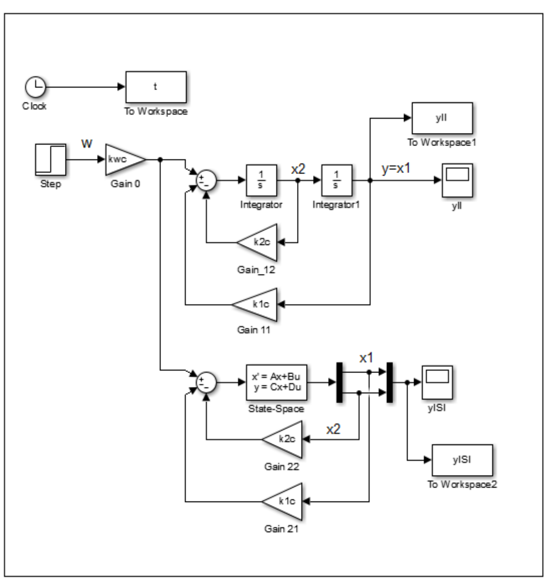
Sistemul (5) fiind controlabil, lui i se pot impune pe baza teoremei alocării, prin reacție după stare, orice pereche de poli $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. În adevăr, impunând perechea de poli $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, constatăm că sistemului în circuit închis i se impune polinomul caracteristic (13).

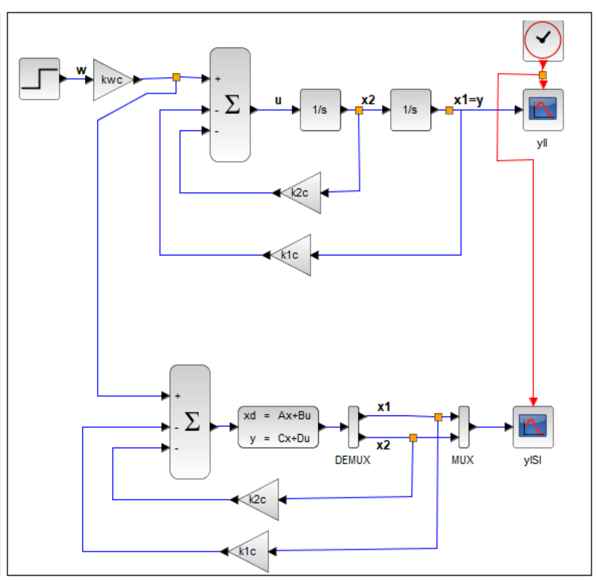
$$\mu(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\lambda+\lambda_1\cdot\lambda_2\,. \quad (13)$$

Expresiile (12) și (13) ale lui $\mu(\lambda)$ trebuind să fie identice, rezultă că amplificările compensatorului se calculează cu formulele:

$$k_1=\lambda_1\cdot\lambda_2\ ,\ k_2=-(\lambda_1+\lambda_2)\,. \qquad (14)$$

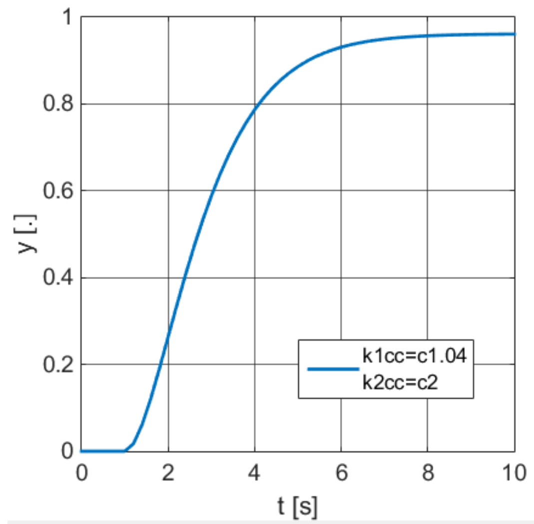
- În fișierul simulink L10_1/xcos L10_3 se găsesc modele intrare-ieșire, respectiv intrare-stare-ieșire pentru sistemul dublu integrator cu reacție după stare. Amplificările compensatorului au fost indexate suplimentar cu indicele „c”. La fel, indexăm cu „c” și valorile proprii.



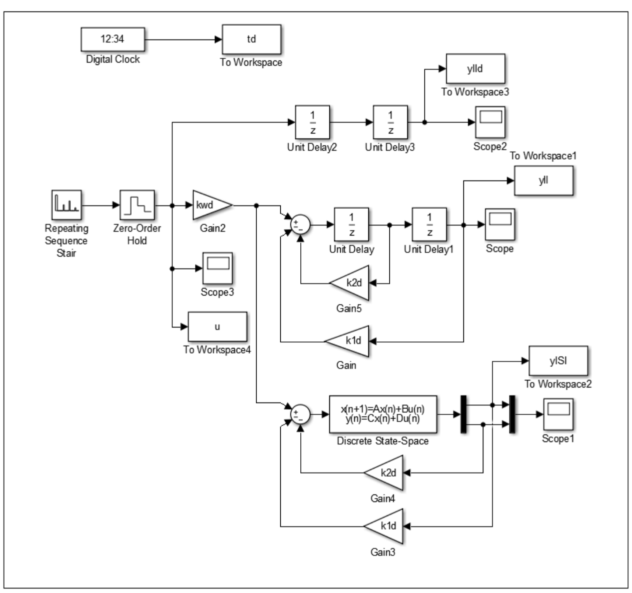


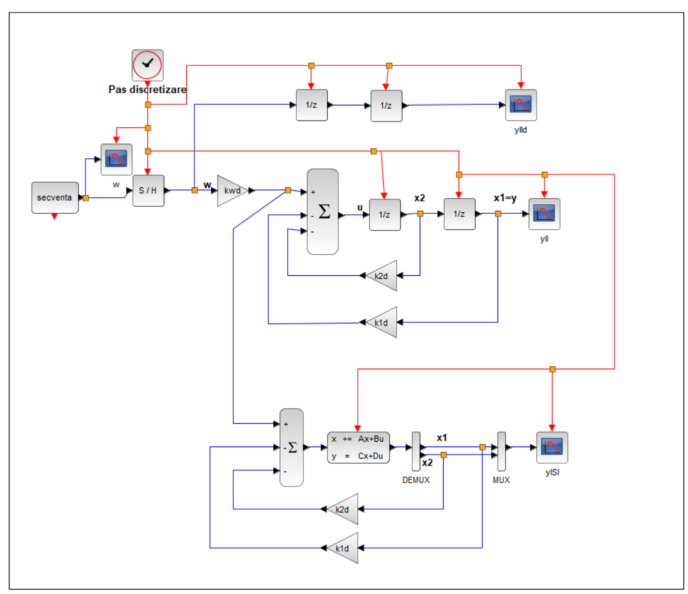
În mod suplimentar față de prezentarea teoretică, în schemă pe canalul mărimii de conducere s-a prevăzut o amplificare k_{wc}.

Presupunem că dorim să alocăm sistemului în circuit închis valorile proprii $\lambda_{1c} = -1+j\cdot 0.2$ și $\lambda_{2c} = -1-j\cdot 0.2$. Atunci, cu formulele (14) obținem $k_{1c} = 1.04$, $k_{2c} = 2$. Pentru $k_{wc} = 1$, răspunsul la semnalul treaptă unitară $u(t)=\sigma(t-1)$, $t \geq 0$ are aspectul din figură.

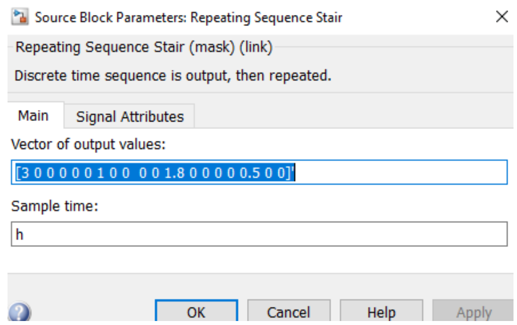


- În fișierul simulink L10_2/xcos L10_4 se găsesc modele intrare-ieșire, respectiv intrare-stare-ieșire pentru sistemul cu dublă întârziere unitară, fără și cu reacție după stare. Amplificările compensatorului au fost indexate suplimentar cu indicele „d”. La fel, indexăm cu „d” și valorile proprii.

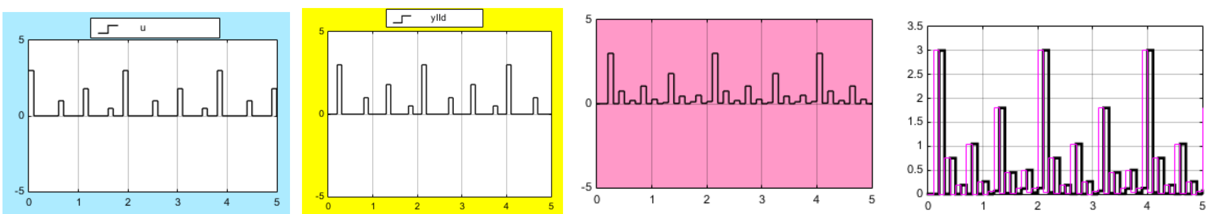




La intrarea tuturor sistemelor din model se aplică semnalul scară generat prin aplicarea secvenței repetitive care apare în interfața din figura alăturată. Presupunem că dorim să alocăm sistemului în circuit închis valorile proprii λ_{1d} = -0.5 și λ_{2c} = 0.5. Cu formulele (14) obținem k_{1d} = -0.25 și k_{2d} = 0. Se consideră k_{wd} = 1 și pasul de discretizare h = 0.1 s.



Mai jos sunt redate succesiv oscilogramele semnalului de intrare u, semnalele de ieșire yIId, yII și x_1 = yISI împreună cu x_2. Se observă că sistemul FIR transmite la ieșire integral semnalul aplicat la intrare, pe când sistemele în buclă alterează transmisia încercând stabilizarea acesteia la valorile de intrare aplicate.



În cadrul lucrării de laborator se vor aprofunda aspecte din această secțiune pentru alte date numerice.