§ 3.3 Caracterizarea sistemelor în timp discret

1. Sisteme liniare în timp discret, invariante în timp redate prin MM-ISI

A) Abordarea în domeniul timp

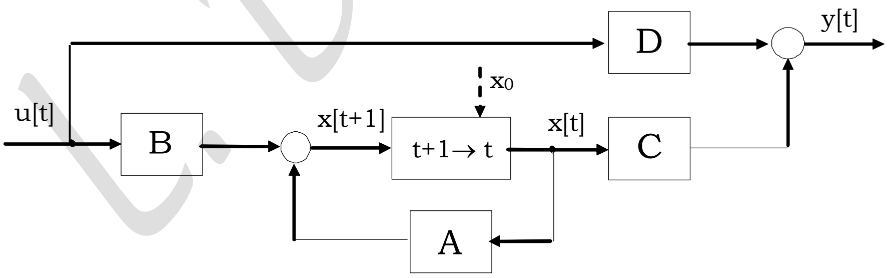
STD se prezintă sub forma de ecuaţii recursive[1] care leagă eşantioane ale secvenţei de intrare $\{u[t]\}_{t\in T}$ de eşantioane ale secvenţei de ieşire $\{y[t]\}_{t\in T}$. Pentru MM-ISI ale STD se utilizează forma cu operator de avans[2]:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t] \ , \qquad \text{cu } \ x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases} \tag{1}$$

În aceste ecuaţii:

- ✓ $u \in \mathbf{R}^m$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^p$, $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2,..., t_f\}$, cu $t_0 \in \mathbf{N}$ – *moment iniţial* şi $t_f \in \mathbf{N}$- *moment final.*
- ✓ Vectorul x_0 conţine *condiţiile iniţiale* care sunt de tipul „condiţii la momentul iniţial”.
- ✓ Matricele A, B, C şi D au aceleaşi denumiri ca şi în cazul timp continuu: A- *matricea sistemului*, B - *matricea de comandă (intrare)*, C - *matricea de ieşire (observare)*, D - *matricea de interconexiune*. Ele sunt matrice constante cu coeficienţi reali.
- ✓ **T** este mulţimea timp sau *orizontul de timp*. În particular putem avea $t \in \mathbf{T} = \{t_0, t_0+1, t_0+2,...\infty\}$. Ori de câte ori este posibil considerăm $t \in \mathbf{T} = \mathbf{N}$, respectiv $t_0 = 0$.

Relaţiile (1) cuprind de fapt un şir de sisteme de egalităţi, şir care se obţine dând lui t, consecutiv, valorile din mulţimea **T**. MM (1) îi asociem schema bloc din figură. Blocul simbolizat prin t+1 → t corespunde operaţiei de decalare (întârziere) în timp a secvenţei $\{x[t+1]\}_{t\in T}$ cu un pas h la stânga, prin care x[t+1] calculat în pasul curent devine x[t] din pasul de calcul următor.



În situaţia în care $D \neq 0$ *sistemul este la limita de strictă cauzalitate* respectiv *de realizabilitate fizică*.

Când D = 0 *sistemul este strict cauzal* respectiv *fizic realizabil*:

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t] \ , \qquad \text{cu } \ x[t_0] = x_0 \\ y[t] = Cx[t] \end{cases} \ . \tag{2}$$

Sistemele (1) şi (2) sunt de tip MIMO. În cazul SISO ele devin:

---

[1] Numite și ecuații recurente sau ecuații cu diferențe.

[2] Aceasta înseamnă că argumentele care apar pentru variabilele modelului sunt t şi t+1.

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + bu[t] \ , \qquad \text{cu} \ \ x[t_0] = x_0 \\ y[t] = c^T x[t] + du[t] \end{cases} \qquad , \qquad (1')$$

respectiv

$$\begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + bu[t] \ , \qquad \text{cu} \ \ x[t_0] = x_0 \\ y[t] = c^T x[t] \end{cases} \qquad . \qquad (2')$$

MM în timp discret pot fi obţinute plecând de la procese fizice în care fenomenele sunt descriptibile prin valori asociate unor momente discrete, sau plecând de la procese fizice descriptibile prin MM în timp continuu, dar monitorizate numai la momente discrete. Pentru primul caz reamintim două din exemplele deja întâlnite:

- ***Problema de stoc*** (sistem de ordinul 2, s – stoc, v – valoare stoc):

$$\begin{bmatrix} s[t+1] \\ v[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c[t] \\ a[t] \end{bmatrix} \ ; \ y[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s[t] \\ v[t] \end{bmatrix}$$

- ***Problema populaţiei de crustacee*** (sistem de ordinul 5, x_1, …, x_5 – numărul de crustacee aflate în primul an de viaţă, …, în al cincilea an de viaţă):

$$\begin{bmatrix} x_1[t+1] \\ x_2[t+1] \\ x_3[t+1] \\ x_4[t+1] \\ x_5[t+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix} \ , \ \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \\ x_4[0] \\ x_5[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000 \\ 1104 \\ 115 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[t] \\ y_2[t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-s_1 & 1-s_2 & 1-s_3 & 1-s_4 & 1-s_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[t] \\ x_2[t] \\ x_3[t] \\ x_4[t] \\ x_5[t] \end{bmatrix}$$

//

Problema de calcul a răspunsului sistemului (1) la un semnal de intrare dat se enunţă astfel:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Se dau:} \begin{cases} \begin{cases} x[t+1] = Ax[t] + Bu[t], & x[0] = x_0 \ \ \text{fixat}, \\ y[t] = Cx[t] + Du[t] \end{cases} \\ u[t], \ t \in \mathbf{N} \end{cases} \\ \text{Se cere: } \ y[t], \ t \in \mathbf{N}, \ \text{eventual şi } x[t], \ t \in \mathbf{N}. \end{cases}} \qquad (3)$$

Calculul se poate efectua direct în domeniul timp discret sau prin intermediul domeniului operațional folosind teorema sumei de convoluție. În primul caz soluţionarea decurge astfel:

i) Se rezolvă sistemul de ecuaţii recursive de ordinul I reprezentat de ecuaţiile de stare considerând $t_0 = 0$ şi condiţiile iniţiale x_0, respectiv secvenţa de intrare $\{u[t]\}_{t \in N}$. Rezolvarea ecuaţiilor de stare se soldează cu determinarea secvenţei de stare $\{x[t]\}_{t \in \mathbf{N}}$.

ii) Se înlocuieşte rezultatul de la punctul i) în ecuaţiile de ieşire.

Ecuaţiile de stare din (3) au soluţia [3]

$$x[t] = \begin{cases} x_0 \quad , \ t = 0 \\ A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu[\tau] \ \ , \ t \in \mathbf{N}^* \end{cases} \qquad . \qquad (4.1)$$

3) Verificaţi acest rezultat prin inducţie matematică.

Înlocuind rezultatul în ecuaţia de ieşire se obţine:

$$y[t]=\begin{cases}\underbrace{Cx_0}_{\substack{y_\ell[t],t\in 0\\ \text{răspunsul}\\ \text{liber}}} + \underbrace{Du[0]}_{\substack{y_f[t],t\in 0\\ \text{răspunsul}\\ \text{fortat}}}, & t=0\\ \underbrace{CA^t x_0}_{\substack{y_\ell[t],t\in N^*\\ \text{răspunsul}\\ \text{liber}}} + \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu[\tau]+Du[t]}_{\substack{y_f[t],t\in \mathbf{N}^*\\ \text{răspunsul}\\ \text{fortat}}} & ,t\in \mathbf{N}^*\end{cases} . \qquad (4.2)$$

Pentru *regimul liber*, când u[t] = 0, $t\in\mathbf{N}$, rezultă:

$$x_\ell[t]=A^t x_0 \quad , \ t\in\mathbf{N} \quad ; \quad y_\ell[t]=c^T A^t x_0 \quad , \ t\in\mathbf{N} . \qquad (5)$$

În *regim forţat*, când x_0 = 0, obţinem:

$$x_f[t]=\begin{cases}0 & , \ t=0\\ \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu[\tau] & t\in\mathbf{N}^*\end{cases} , \ y_f[t]=\begin{cases}Du[0] \ , & t=0\\ \sum_{\tau=0}^{t-1} CA^{t-\tau-1}Bu[\tau]+Du[t] & ,t\in\mathbf{N}^*\end{cases} . \qquad (6)$$

Şi în acest caz este valabilă *proprietatea de superpoziţie*.

Matricea

$$\Phi[t,\tau]=A^{t-\tau} \qquad (7)$$

se numeşte *matricea de tranziţie* sau *matricea fundamentală a sistemului*. În cazul $\tau = 0$ convenim să notăm matricea Φ[t, 0] cu Φ[t]:

$$\Phi[t] = A^t \quad . \qquad (8)$$

Denumirea de matrice de tranziţie este sugerată de prima ecuaţie (5), Φ[t] caracterizând tranziţia sistemului liber din stare iniţială x_0 în stare curentă $x_\ell[t]$.

- A doua relaţie (6) permite stabilirea imediată a formulei de calcul a *funcţiei răspuns la impuls unitar*. Astfel, pentru sistemele de tip SISO când $d=0$, considerând în relaţia (6) secvenţa de intrare $\{\delta[t]\}_{t\in N}$ se obţine [4]:

$$y_\delta[t]=\begin{cases}0, & t=0\\ c^T A^{t-1}b, & t\in N^*\end{cases} . \qquad (9)$$

Folosind acest rezultat și formula (11) de la pag. 78, bazată pe suma de convoluție, rezultă următoarea formulă echivalentă formulei (6):

$$y_f[t]=\sum_{\tau=0}^{\infty} y_\delta[t-\tau]\cdot u[\tau] , \ t\in N . \qquad (6')$$

Relaţia evidenţiază faptul că răspunsul forţat se poate calcula ca sumă de convoluţie între „răspunsul la impuls unitar” $h[t]\}_{t\in N}$ şi semnalul de intrare unilateral $\{u[t]\}_{t\in N}$. Rezultatul este similar celui din paragraful anterior.

[4] În literatură răspunsul la impuls unitar se notează adeseori cu $\{h[t]\}_{t\in N}$. (6') devenind: $y_f[t]=\sum_{\tau=0}^{t} h[t-\tau]\cdot u[\tau], t\in N$.

B. Abordarea în domeniul imaginilor (operaţional)

Pentru a calcula matricele şi funcţiile de transfer ale STD sunt importante următoarele trei proprietăţi ale transformatei **z:** i) proprietatea de liniaritate, ii) teoremele de translatare ale şirului original; iii) teorema sumei de convoluţie a funcţiilor original.

Stabilim în continuare *formula de calcul a matricei de transfer pentru sistemul în timp discret de tip MIMO redat prin MM-ISI*:

$$\begin{cases} x[t+1]=Ax[t]+Bu[t], \ \mathrm{x}[0]=\mathrm{x}_0 \\ y[t]=Cx[t]+Du[t], \ \mathrm{t}\in \mathbf{T}=\mathbf{N} \end{cases} . \qquad (10)$$

Făcând uz de primele două proprietăţi rezultă:

$$(10) \Longrightarrow \begin{cases} z[x(z)-x[0]]=Ax(z)+Bu(z) \\ y(z)=Cx(z)+Du(z) \end{cases} \qquad (11)$$

Din prima ecuaţie obţinem

$$x(z)=(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0]+(zI-A)^{-1}\cdot B\cdot u(z) \qquad (12.1)$$

iar prin înlocuirea rezultatului în a doua ecuaţie avem

$$y(z)=C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0]+[C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot B+D]\cdot u(z). \qquad (12.2)$$

Matricea de transfer se determină în condiţii iniţiale nule, deci din egalitatea

$$y(z)=[C(zI-A)^{-1}B+D]\cdot u(z). \qquad (13)$$

Deducem că:

$$H(z)=C(zI-A)^{-1}B+D . \qquad (14)$$

Pentru sistemele de tip SISO se fac în (12) şi (14) substituţiile $\mathrm{b}\to\mathrm{B}, \mathrm{c}^{\mathrm{T}}\to\mathrm{C}, \mathrm{d}\to\mathrm{D}$; rezultă

$$x(z)=(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0]+(zI-A)^{-1}\cdot b\cdot u(z) \qquad (12.1')$$

$$y(z)=c^T\cdot(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0]+[c^T\cdot(zI-A)^{-1}\cdot b+d]\cdot u(z) \qquad (12.2')$$

şi funcţia de transfer:

$$H(z)=c^T(zI-A)^{-1}b+d . \qquad (15)$$

Pentru sistemele fizic realizabile avem $D=0$ sau $d=0$. Deci

$$H(z)=C(zI-A)^{-1}B \qquad (14')$$

sau

$$H(z)=c^T(zI-A)^{-1}b . \qquad (15')$$

Termeni în x[0] din formulele (12.1) şi (12.2) corespund răspunsurilor libere, iar termenii care conţin pe u(z) corespund răspunsurilor forţate. Scriem că:

$$x(z)=x_f(z)+x_\ell(z), \quad y(z)=y_f(z)+y_\ell(z), \qquad (16)$$

în care

$$\begin{aligned} &x_f(z)=(zI-A)^{-1}\cdot B\cdot u(z), \quad x_\ell(z)=(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0], \\ &y_f(z)=H(z)\cdot u(z), \quad y_\ell(z)=C\cdot(zI-A)^{-1}\cdot z\cdot x[0] \end{aligned} . \qquad (16')$$

Variabile unificate în domeniile timp şi operaţional

Plecând de la aspectele asemănatoare ale MM-ISI ale STC şi STD a apărut ideea ca pentru unele probleme de teoria sistemelor cazul sistemelor în timp continuu şi cazul sistemelor în timp discret să fie surprinse, formal, printr-un singur tip de MM-ISI folosind aşa-numitele variabile unificate în domeniul timp:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \; t \in \mathbf{T} \quad , \tag{17}$$

în care:

- dacă mulţimea **T** este continuă, atunci u, x şi y sunt funcţiile în timp continuu $u(t), x(t)$ şi $y(t)$ iar $x' = \dot{x}(t)$,

- dacă mulţimea **T** este discretă, atunci u, x şi y sunt funcţii în timp discret cu valorile u[t], x[t] şi y[t] la momentul curent, iar $x' = x[t+1]$.

De asemenea, se observă că atunci când se pleacă de la MM-ISI formulele obţinute în domeniul operaţional pentru STD se aseamănă cu cele din cazul STC. În primele apare variabila operaţională **z**, în celelalte variabila operaţională **s**. Pentru a evidenţia acest lucru şi pentru a sistematiza şi mai mult modul de exprimare se foloseşte variabila unificată în domeniul operaţional

$$\lambda = \begin{cases} \text{s, pentru cazul STC} \\ \text{z, pentru cazul STD} \end{cases}.$$

Astfel, sistemului (17) cu polinomul caracteristic $\mu(\lambda) = |\lambda I - A|$ îi corespunde matricea de transfer

$$H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D \; . \tag{18}$$

2. Sisteme liniare în timp discret invariante în timp redate prin MM-II

A) Abordarea în domeniul timp

Prezentarea se referă numai la sisteme de tip SISO. MM-II ale STD liniare şi invariante în timp au formă de ecuaţii recurente de ordinul n cu coeficienţi constanţi. Ecuaţiile leagă în mod direct n+1 valori consecutive ale secvenţei (semnalului) de intrare $\{u[t]\}_{t\in\mathbf{T}}$ de n+1 valori consecutive ale secvenţei (semnalului) de ieşire $\{y[t]\}_{t\in\mathbf{T}}$. Ordinul de recurenţă, n, este şi ordinul sistemului.

Ca formă canonică se consideră MM-II la limita de realizabilitate fizică (la limita de cauzalitate) redat de ecuaţia recursivă (se foloseşte forma cu termeni de întârziere):

$$\begin{aligned} & a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \ldots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ & \qquad = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \ldots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \; , \\ & \text{cu } \; y[t_0-1], y[t_0-2], \cdots, y[t_0-n] \text{ şi } u[t_0-1], u[t_0-2], \cdots, u[t_0-n] \text{ fixate.} \end{aligned} \tag{19}$$

Pentru sistemul (19) mulţimea timp este **T** = $\{t_0, t_0+1, t_0+2, ..., t_f\} \subseteq$ **Z** (sau **N**) cu t_0 *–moment iniţial* şi t_f *- moment final*, iar coeficientul $a_n \neq 0$. În particular putem avea $t \in$ **T** = $\{t_0, t_0+1, t_0+2, ...\infty\}$. Vom observa că se consideră fixate condiţiile iniţiale $y[t_0-1]$, $y[t_0-2]$, ... , $y[t_0-n]$ şi $u[t_0-1]$, $u[t_0-2]$, ... , $u[t_0-n]$. Aceasta înseamnă că de fapt se operează cu eşantioane din mulţumea

$\mathbf{T}^*$ = $\{t_0-n, t_0-n+1, ..., t_0-1\} \cup$ **T** = $\{t_0-n, t_0-n+1, ..., t_0-1, t_0, t_0+1, t_0+2, ..., t_f\} \subseteq$ **Z** (sau **N**),

mulţime care conţine şi momente anterioare momentului iniţial. *Ca moment iniţial* t_0 *convenim să considerăm primul moment de la care începând se poate opera cu MM* (19), *adică primul moment pentru care se poate folosi* (19) *pentru a calcula pe* y[t]. Ori de câte ori este posibil adoptăm **T** = **N**.

Este esenţial să realizăm faptul că relaţia (19) sintetizează un sistem redat printr-un şir de egalităţi care se obţine pentru valorile succesive ale t ($t \in \mathbf{T}$):

$$\begin{aligned}&a_n y[t_0]+a_{n-1}y[t_0-1]+\ldots+a_1 y[t_0-n+1]+a_0 y[t_0-n]=\\&\quad=b_n u[t_0]+b_{n-1}u[t_0-1]+\ldots+b_1 u[t_0-n+1]+b_0 u[t_0-n]\ ,\end{aligned} \tag{20.0}$$

$$\begin{aligned}&a_n y[t_0+1]+a_{n-1}y[t_0]+\ldots+a_1 y[t_0-n+2]+a_0 y[t_0-n+1]=\\&\quad=b_n u[t_0+1]+b_{n-1}u[t_0]+\ldots+b_1 u[t_0-n+2]+b_0 u[t_0-n+1]\ ,\end{aligned} \tag{20.1}$$

. . .

$$\begin{aligned}&a_n y[t]+a_{n-1}y[t-1]+\ldots+a_1 y[t-n+1]+a_0 y[t-n]=\\&\quad=b_n u[t]+b_{n-1}u[t-1]+\ldots+b_1 u[t-n+1]+b_0 u[t-n]\ ,\end{aligned} \tag{20.t-t$_0$}$$

. . .

$$\begin{aligned}&a_n y[t_f]+a_{n-1}y[t_f-1]+\ldots+a_1 y[t_f-n+1]+a_0 y[t_f-n]=\\&\quad=b_n u[t_f]+b_{n-1}u[t_f-1]+\ldots+b_1 u[t_f-n+1]+b_0 u[t_f-n].\end{aligned} \tag{20.t$_f$-t$_0$}$$

Se observă că sistemul de ecuaţii (20) permite calcularea succesivă prin operaţii algebrice elementare a valorilor $y[t_0]$, $y[t_0+1]$, ..., $y[t_f]$ ale secvenţei semnalului de ieşire $\{y[t]\}$, $t \in \{t_0, ..., t_f\}$.

Problema de calcul a răspunsului sistemului (19), pentru $t_0 = 0$ şi $t_f \to \infty$, este de forma:

$$\boxed{\begin{cases}\text{Se dau}: \begin{cases}a_n y[t]+a_{n-1}y[t-1]+\ldots+a_1 y[t-n+1]+a_0 y[t-n]=\\ \qquad =b_n u[t]+b_{n-1}u[t-1]+\ldots+b_1 u[t-n+1]+b_0 u[t-n]\ ,\\ y[-1],y[-2],\cdots,y[-n] \text{ şi } u[-1],u[-2],\cdots,u[-n]\ ,\\ u[t]\ ,\ \ t \in \mathbf{N}.\end{cases}\\ \text{Se cere}: y[t]\ ,\ t \in \mathbf{N}\ .\end{cases}} \tag{21}$$

Soluţionarea ecuaţiei recurente din (21) se bazează pe utilizarea polinomului

$$\mu(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0\ , \tag{22}$$

considerat *polinom caracteristic al sistemului*. Problema poate fi soluţionată atât în domeniul timp cât şi în domeniul operaţional. Metodele de rezolvare în domeniul timp discret nu fac obiectul acestei lucrări.

B) Abordarea în domeniul imaginilor (operaţional)

În continuare stabilim *formula de calcul a funcţiei de transfer pentru sistemul monovariabil la intrare şi la ieşire (19)*.

În condiţii iniţiale nule, din (19) se obţine

$$y(z)=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\ldots+b_1 z^{-(n-1)}+b_0 z^{-n}}{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_1 z^{-(n-1)}+a_0 z^{-n}}u(z)\ . \tag{23}$$

Comparând acest rezultat cu formula de definire a f.d.t., pentru expresia acesteia rezultă:

$$\underline{H}(z)=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\ldots+b_1 z^{-(n-1)}+b_0 z^{-n}}{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_1 z^{-(n-1)}+a_0 z^{-n}}\ . \tag{24.1}$$

Sub această formă f.d.t. $\underline{H}(z)$ este un raport de 2 funcţii polinomiale de variabilă z^{-1}. Pentru multe calcule este mai avantajoasă forma care foloseşte funcţiile polinomiale în z asociate polinoamelor reciproce:

$$H(z)=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\ldots+b_1 z^1+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}\ . \tag{24.2}$$

Având f.d.t. a unui sistem, ieşirea sistemului pentru un semnal de intrare unilateral în condiţii inţiale nule poate fi calculată cu relaţia y(z) = H(z) u(z). Pentru trecerea din domeniul operaţional în domeniul timp se folosesc tabelele de transformare.

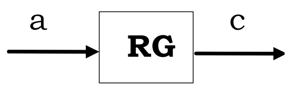
Funcţiile de transfer (24) pot fi rescrise sub forme care evidenţiază polii şi zerourile STD:

$$\underline{H}(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n}(1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i z^{-1})} = \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)} = H(z).$$

C) Implementarea legilor de reglare numerică

Matricele şi funcţiile de transfer în **z** sunt folosite în mod frecvent pentru sinteza ***legilor de reglare numerică*** numite şi *regulatoare numerice* sau *algoritmi de reglare numerică*. Odată determinată funcţia de transfer a unui regulator numeric este necesară explicitarea algoritmului în domeniul timp, de exemplu sub forma (19). Pe baza explicitării algoritmului sub forma (19) se scrie apoi modulul de program care implementează calculul mărimii de comandă.

Într-o aplicaţie concretă acest modul de program este o parte componentă a programului de conducere. Modulul de program care implementează algoritmul de reglare depinde în detaliu de caracteristicile suportului pe care se implementează şi cuprinde pe lângă calculele aferente algoritmului de reglare numeroase alte operaţii (de achiziţie a datelor măsurate, de filtrare, de calcul a erorii de reglare (sau mărimii de acţionare a) şi de transmitere a comenzii calculate, mărimea c).



Operaţia de explicitare a algoritmului de reglare în domeniul timp, destinat calculării pas cu pas (la intervale de timp de valoare h) a mărimii de comandă *c* în funcție de mărimi de intrare (*w* – mărimea de referință și *y* – mărimea de reacție, sau $a = w - y$, numită mărime de acționare) constă în principiu în asocierea unui sistem de forma (19) unei f.d.t. de forma (24.1) şi în explicitarea din acest MM-II a valorii ieşirii (mărimea *c*) la momentul curent t, adică a lui c[t].

Exemplu: *Pentru regulatorul numeric din figură, în ipoteza că are f.d.t.* $H_{RG}(z) = \frac{0.8z - 0.4}{z^2 - 1.2z + 0.2}$, *se obţine ecuaţia recursivă* $c[t] - 1.2 \cdot c[t-1] + 0.2 \cdot c[t-2] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2]$, *respectiv algoritmul de reglare numerică pentru care trebuie elaborat programul de implementare:*

$$c[t] = 0.8 \cdot a[t-1] - 0.4 \cdot a[t-2] + 1.2 \cdot c[t-1] - 0.2c \cdot [t-2] \ .$$

D) Sisteme cu răspuns la impuls în timp finit[5]

Se numeşte *sistem cu răspuns la impuls în timp finit* sau sistem de tip FIR (Finite Impulse Response) un sistem liniar în timp discret al cărui răspuns la impuls $\{h[t]\}_{t\in\mathbf{Z}}$ are un număr finit de valori nenule.

Restrângem discuţia la sistemele cauzale, caracterizate de faptul că $h[t] = 0$, $t < 0$. Fie, în acest caz, $\{h[t]\}_{t\in\mathbf{N}} = \{h[0], h[1], \cdots, h[t_f], 0, 0, \cdots\}$ răspunsul la impuls al sistemului de tip FIR. Transformata **z** a acestuia,

$$h(z) = h[0] + h[1] \cdot z^{-1} + \cdots + h[t_f] \cdot z^{-t_f} \ , \qquad (25)$$

este convergentă în întreg planul „*z*” fiindcă suma are un număr finit de termeni nenuli. Întrucât funcţia răspuns la impuls *h(z)* este totodată şi f.d.t. *H(z)* a sistemului FIR, rezultă că:

[5] În această secţiune răspunsul la impuls unitar se notează cu $\{h[t]\}_{t\in\mathbf{Z}}$.

$$H(z) = h[0] + h[1]\cdot z^{-1} + \dots + h[t_f]\cdot z^{-t_f} = \frac{h[0]\cdot z^{t_f} + h[1]\cdot z^{t_f-1} + \dots + h[t_f]}{z^{t_f}}. \tag{26}$$

Se observă că sistemul FIR este de ordinul t_f.

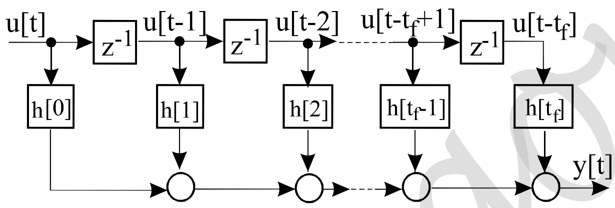
Cu $H(z)$ astfel determinat se poate calcula imaginea operațională a semnalului de ieşire al sistemului pentru orice semnal de intrare $\{u[t]\}_{t\in N}$, dat prin transformata u(z), și pentru condiții inițiale nule, cu formula:

$$y(z) = H(z)\cdot u(z) = h[0]\cdot u(z) + h[1]\cdot z^{-1}\cdot u(z) + \dots + h[t_f]\cdot z^{-t_f}\cdot u(z) \tag{27}$$

În domeniul timp din (27) rezultă

$$y[t] = h[0]\cdot u[t] + h[1]\cdot u[t-1] + \dots + h[t_f]\cdot u[t-t_f] \quad , \quad t \in \mathbf{N}. \tag{28}$$

Modelului (27) i se poate asocia schema bloc de mai jos numită *schema bloc a unui sistem de tip FIR*. Blocurile notate cu z^{-1} sunt blocuri de întârziere cu un pas de discretizare (blocuri de întârziere unitară, identice cu blocul notat cu t+1 $\rightarrow$ t din schema bloc de la începutul § 2.3). Este important de observat că schema bloc reprezintă o conexiune paralel. Trăsătura caracteristică a structurii din figură este lipsa conexiunii cu reacţie.

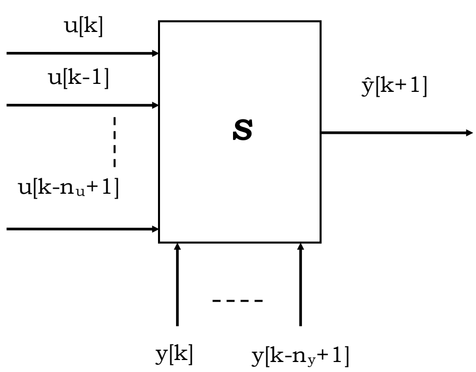


Spre deosebire de modelele de forma (19), adică de sistemele cu MM-II

$$\begin{aligned} a_n y[t] + a_{n-1} y[t-1] + \ldots + a_1 y[t-n+1] + a_0 y[t-n] = \\ = b_n u[t] + b_{n-1} u[t-1] + \ldots + b_1 u[t-n+1] + b_0 u[t-n] \end{aligned} ,$$

care conţin în membrul stâng cel puţin doi termeni referitori la y, reprezentând astfel o ecuaţie recurentă, respectiv o conexiune cu reacţie, modelul (28) conţine în membrul stâng un singur termen şi *nu reprezintă o ecuaţie recurentă*. Efectul îl constituie faptul că orice secvenţă de intrare cu un număr finit de termeni se transmite prin sistem FIR într-un interval de timp finit. Efectul recurenţei constă în faptul că răspunsul la impuls nu mai este în timp finit, ci conţine un număr infinit de termeni nenuli. De aceea modelele cu ecuaţii recurente sunt denumite şi *sisteme cu răspuns la impuls în timp infinit* sau sisteme de tip IIR (Infinite Impulse Response). *La nivel de schemă bloc trăsătura caracteristică a structurii unui sistem de tip IIR este prezenţa conexiunii cu reacţie*.

Un caz de utilizare a sistemelor de tip FIR îl reprezintă *sistemele de predicție* destinate estimării unei valori ulterioare a mărimii de ieșire a unui sistem fizic din secvențe de valori ale mărimii de intrare și de ieșire fără introducerea de interacțiuni dinamice între acestea. Figura următoare ilustrează un sistem de predicție într-un singur pas.



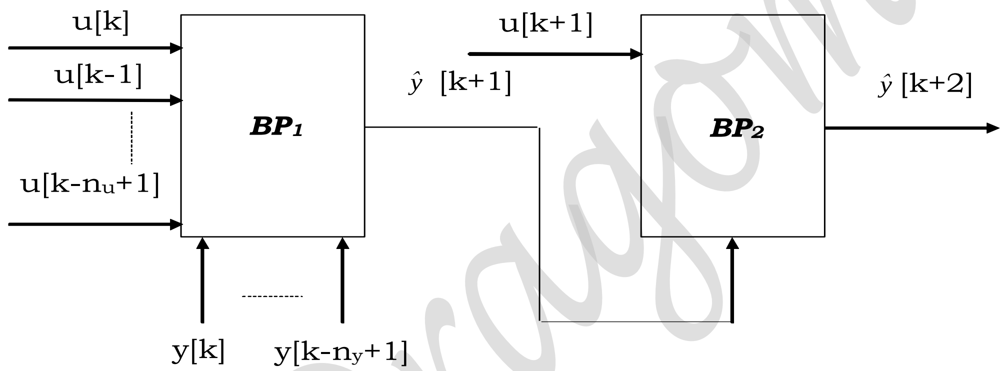
Din secvențele $\{u[k], u[k\text{-}1], \ldots, u[k\text{-}n_u\text{+}1]\}$ și $\{y[k], y[k\text{-}1], \ldots, y[k\text{-}n_y\text{+}1]\}$ sistemul estimează valoarea $\hat{y}[k+1]$ a lui y pentru pasul următor. Spunem că $\hat{y}[k+1]$ se obține prin *predicție într-un pas* din cele două șiruri de valori. În cazul liniar predicția într-un singur pas se realizează pe baza unei relații de forma:

$$\hat{y}[k+1]=\alpha_0\cdot y[k]+\alpha_1\cdot y[k-1]+\cdots+\alpha_{n_y-1}\cdot y[k-n_y+1]+\beta_0\cdot u[k]+\beta_1\cdot u[k-1]+\cdots+\beta_{n_y-1}\cdot u[k-n_u+1] \qquad (29)$$

Identificarea modelului de predicție (29) constă în determinarea rangurilor n_u și n_y și a coeficienților și $\{\alpha_i\}_{\overline{i=0,n_u}}$ și $\{\beta_j\}_{\overline{j=0,n_y}}$. Odată stabilite rangurile, coeficienții se determină astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+1]$- $y[k+1]$) să fie minimă.

Este ușor de observat că relația (29) este de forma (28) întrucât cele două secvențe au rolul de mărimi de intrare.

În practică se operează și cu modele de predicție în mai mulți pași. Ele pot fi realizate în diferite variante care diferă prin volumul de date memorate și resursele folosite pentru memorare și prelucrare. În figură este ilustrată schema bloc a unui *sistem de predicție în 2 pași*. Ea utilizează două blocuri de predicție BP_1 și BP_2, de tipul celui din figura anterioară. Structura blocului BP_2 este însă mult mai simplă decât structura blocului BP_1.



Rolul sistemului este de a furniza valoarea lui $\hat{y}[k+2]$ astfel încât eroarea de predicție ($\hat{y}[k+2]$ - $y[k+2]$) să fie minimă. Ca urmare, diferența $\hat{y}[k+1]$ - $y[k+1]$ nu mai face obiectul minimizării, iar valoarea $\hat{y}[k+1]$ nu reprezintă în general o estimată corectă a lui $y[k+1]$. Din acest motiv ea nu apare în figură ca un semnal de ieșire.