

### §. 3.4 Stabilirea modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme

Una dintre problemele care se pune în mod frecvent cu privire la conexiunile de sisteme este stabilirea MM al unei conexiuni de sisteme atunci când se cunosc MM ale sistemelor componente. În acest context vorbim despre *problema stabilirii modelelor matematice ale conexiunilor de sisteme*. Ne referim numai la situația în care sistemele interconectate sunt liniare și separabile în raport cu modul de interconectare.

*Calculul se poate efectua cu MM în domeniul timp sau cu MM operaționale. Obiectul paragrafului este prezentarea unor metode de stabilire a modelelor conexiunilor.* Atât în domeniul timp, cât și în domeniul imaginilor, avem de a face din punct de vedere matematic cu o problemă de eliminare. *De fiecare dată, se operează cu variabile unificate.*

#### 1. Stabilirea MM-ISI pentru conexiunile fundamentale <sup>1</sup>.

Conexiunile fundamentale sunt conexiunile serie, derivație și cu reacție. Problema stabilirii MM-ISI ale acestora este următoarea:

Se cunosc: *MM-ISI ale sistemelor (strict cauzale) interconectate:*

$$(S_1): \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \quad \text{și} \quad (S_2): \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Se cere: MM-ISI al conexiunii

$$(S): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

Potrivit *principiului agregării stărilor* mulțimea variabilelor de stare ale conexiunii este formată din ansamblul mărimilor de stare ale subsistemelor componente. În consecință, *conexiunea are vectorul de stare*  $x = [x_1^T \quad x_2^T]^T$ , iar *ordinul sistemului rezultat este egal cu suma ordinelor sistemelor componente*. Afirmatia redă un fapt evident atât din punct de vedere matematic cât și din punct de vedere fenomenologic.

➤ MM-ISI al conexiunii serie din figură se obține eliminând toate variabilele diferite de intrarea  $u$ , ieșirea  $y$  și vectorul de stare  $x$ . Succesiv obținem:

$$\begin{array}{c} u=u_1 \rightarrow \boxed{S_1} \xrightarrow{y_1=u_2} \boxed{S_2} \xrightarrow{y_2=y} \\ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2 x_2 + B_2 y_1 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y &= y_2 = C_2 x_2 \end{aligned} \end{array}$$

Matriceal, rezultatul ia forma:

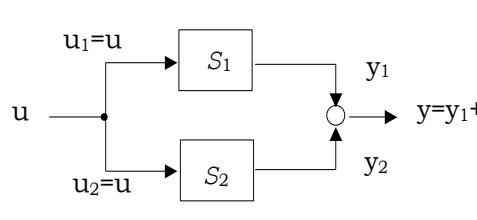
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Metoda de calcul în acest caz constă în efectuarea de substituții succesive și aducerea rezultatului final la forma canonică a MM-ISI.

Polinomul caracteristic al sistemului este egal cu produsul polinoamelor caracteristice  $\mu_{A_1}(\lambda)$  și  $\mu_{A_2}(\lambda)$  ale sistemelor (1):

$$\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & 0 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda) \cdot \mu_{A_2}(\lambda). \quad (4)$$

➤ Pentru conexiunea derivație rezultă



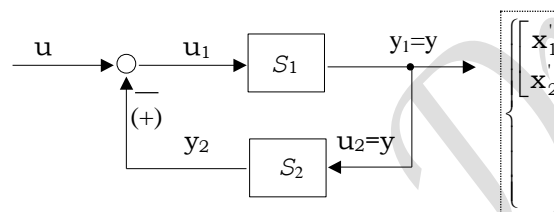
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_B u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

Și în acest caz este valabil rezultatul din (4)

➤ În cazul conexiunii cu reacție eliminările se efectuează astfel:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= A_1 x_1 + B_1 u_1 = A_1 x_1 + B_1 (u \mp y_2) = A_1 x_1 + B_1 u \mp B_1 C_2 x_2 \\ \dot{x}_2' &= A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2 x_2 + B_2 y = A_2 x_2 + B_2 y_1 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y &= y_1 = C_1 x_1 \end{aligned}$$

Sub formă matriceală ecuațiile devin



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & \mp B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}}_C \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

Polinomul caracteristic al sistemului este

$$\mu_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - A_1 & \pm B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \mu_{A_1}(\lambda) \cdot \mu_{A_2}(\lambda) \cdot |I \pm H_1(\lambda) H_2(\lambda)|. \quad (7)$$

În urma dezvoltării determinantului din ultima expresie din (7) polinoamele  $\mu_{A_1}(\lambda)$  și  $\mu_{A_2}(\lambda)$  se simplifică. Deci valorile proprii ale conexiunii cu reacție sunt date numai de numărătorul determinantului.

## 2. Algebra schemelor bloc (MM-II)

Prin algebra schemelor bloc se înțelege *un ansamblu de reguli destinate calculului matricelor și funcțiilor de transfer ale sistemelor complexe atunci când se cunosc: schemele bloc ale sistemelor complexe precum și matricele și funcțiile de transfer ale blocurilor componente*. Se disting două categorii de reguli:

- reguli de reducere,
- reguli de reconfigurare.

*Regulile de reducere* servesc pentru reducerea numărului de blocuri dintr-o schemă bloc inițială prin înlocuirea diferitelor tipuri de conexiuni printr-un singur bloc având aceeași funcție sau matrice de transfer ca și conexiunea.

*Regulile de reconfigurare* servesc pentru modificarea unei scheme bloc date astfel încât să poată fi aplicate regulile de reducere.

Spre deosebire de regulile de reducere care, în principiu, nu introduc modificări sistemice, aplicarea regulilor de reconfigurare se soldează întotdeauna cu modificări sistemice (de exemplu: rezultă un sistem de ordin mai mare) care păstrează neschimbate doar dependențele intrare-ieșire.

În continuare se prezintă *trei reguli de reducere*. Ele se referă la conexiunile fundamentale care au făcut obiectul secțiunii anterioare. Se presupune cunoscute matricea de transfer  $H_1(\lambda)$  a sistemului  $S_1$  și matricea de transfer  $H_2(\lambda)$  a sistemului  $S_2$ . Trebuie determinate matricele de transfer ale conexiunilor.

1°. În cazul *conexiunii serie* :

$$y(\lambda) = y_2(\lambda) = H_2(\lambda)u_2(\lambda) = H_2(\lambda)y_1(\lambda) = H_2(\lambda)H_1(\lambda)u_1(\lambda) = H_2(\lambda)H_1(\lambda)u(\lambda).$$

Comparând acest rezultat cu relația de definire a matricei de transfer,  $y(\lambda) = H(\lambda) \cdot u(\lambda)$ , obținem următoarea formulă de calcul a matricei de transfer a conexiunii serie a două subsisteme:

$$H(\lambda) = H_2(\lambda) \cdot H_1(\lambda) \quad (8)$$

Pentru  $q$  subsisteme înseriate având f.d.t.  $H_i(\lambda)$ ,  $i=1;q$  se obține formula generală:

$$H(\lambda) = \prod_{i=1}^q H_i(\lambda) \quad (9)$$

Trebuie să observăm că matricea de transfer a conexiunii este egală cu produsul matricelor de transfer ale subsistemelor componente *luate în ordine de la ieșire spre intrare*. Întrucât calculul a fost făcut pentru cazul MIMO produsul nu este comutativ. Dacă cele  $q$  subsisteme sunt de tip SISO atunci, matricele de transfer se reduc la f.d.t., iar produsele din (8) și (9) sunt comutative.

2°. Pentru *conexiunea derivație* se obține matricea de transfer

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda) \quad (10)$$

Pentru cazul a  $q$  subsisteme legate în paralel formula devine:

$$H(\lambda) = \sum_{i=1}^q H_i(\lambda) \quad (11)$$

3°. Pentru *conexiunea cu reacție* matricea de transfer a conexiunii se determină *considerând ca punct de plecare exprimarea mărimii de ieșire  $y(\lambda)$  de pe calea directă și făcând apoi substituții succesive până când se obține un rezultat în funcție tocmai de  $y(\lambda)$  și de mărimea de intrare  $u(\lambda)$*  :

$$y(\lambda) = y_1(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot u_1(\lambda) = H_1(\lambda) \cdot (u(\lambda) \mp y_2(\lambda)) = H_1(\lambda)[u(\lambda) \mp H_2(\lambda)u_2(\lambda)] = H_1(\lambda)[u(\lambda) \mp H_2(\lambda)y(\lambda)] .$$

De aici deducem:

$$[I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]y(\lambda) = H_1(\lambda)u(\lambda) \rightarrow y(\lambda) = [I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda)u(\lambda) .$$

Identificând acest rezultat cu formula de definire  $y(\lambda) = H(\lambda)u(\lambda)$  , obținem

$$H(\lambda) = [I \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)]^{-1}H_1(\lambda) . \quad (12)$$

Dacă  $S_1$  și  $S_2$  sunt de tip SISO, atunci  $H_1$  și  $H_2$  sunt funcții de transfer, deci expresii scalare. Rezultă

$$H(\lambda) = \frac{H_1(\lambda)}{1 \pm H_1(\lambda)H_2(\lambda)} . \quad (13)$$

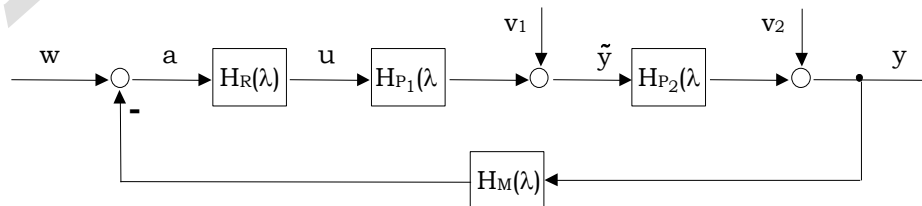
Notăm funcția de transfer a căii directe  $u \rightarrow u_1 \rightarrow S_1 \rightarrow y$ , cu  $H_d$ , iar a canalului  $u \rightarrow y_1 \rightarrow S_1 \rightarrow y \rightarrow S_2 \rightarrow y_2$ , denumit sistem deschis, cu  $\tilde{H}$ . În consecință, avem:

$$\begin{aligned} H_d(\lambda) &= H_1(\lambda) \\ \tilde{H}(\lambda) &= H_1(\lambda)H_2(\lambda) \end{aligned} \rightarrow H(\lambda) = \frac{H_d(\lambda)}{1 \pm \tilde{H}(\lambda)} . \quad (14)$$

În formulele de calcul ale matricelor și funcțiilor de transfer pentru conexiunea cu reacție *semnul (+) corespunde reacției negative, iar semnul (−) corespunde reacției pozitive*.

În cazul sistemelor liniare cu mai multe mărimi de intrare dependența intrare-ieșire se poate obține în domeniul imaginilor prin superpoziție, folosind regulile de reducere de mai sus.

**Exemplu:** Să se stabilească dependența intrare - ieșire în domeniul imaginilor pentru sistemul (de reglare cu un grad de libertate) din figură, sistemul având orientarea  $\{w, v_1, v_2\} \rightarrow y$ .



**Soluție:** Fie  $H_w(\lambda)$ ,  $H_{v1}(\lambda)$  și  $H_{v2}(\lambda)$  f.d.t. prin care se exprimă influența mărimilor de intrare asupra mărimii de ieșire. Ele se obțin din schema bloc dată, prin particularizări, astfel:

$$H_w(\lambda) = \left. \frac{y(\lambda)}{w(\lambda)} \right|_{\substack{v_1(\lambda)=0 \\ v_2(\lambda)=0}} = \frac{H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} H_{v1}(\lambda) &= \left. \frac{y(\lambda)}{v_1(\lambda)} \right|_{\substack{w(\lambda)=0 \\ v_2(\lambda)=0}} = \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 - H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)(-1)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} = \\ &= \frac{H_{P_2}(\lambda)}{1 + H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)} \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} H_{v2}(\lambda) &= \left. \frac{y(\lambda)}{v_2(\lambda)} \right|_{\substack{w(\lambda)=0 \\ v_1(\lambda)=0}} = \frac{1}{1 - H_M(\lambda)(-1)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_R(\lambda)} = \\ &= \frac{1}{1 + H_R(\lambda)H_{P_1}(\lambda)H_{P_2}(\lambda)H_M(\lambda)} \end{aligned} \quad (15.3)$$

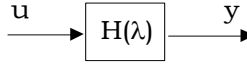
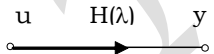
Sistemul fiind liniar este valabil principiul superpoziției, astfel că dependența intrare-ieșire are forma:

$$y(\lambda) = H_w(\lambda)w(\lambda) + H_{v1}(\lambda)v_1(\lambda) + H_{v2}(\lambda)v_2(\lambda). \quad (16)$$

### 3. Regula lui Mason (MM-II)

Un mijloc de calcul facil, alternativ algebrei schemelor bloc, îl reprezintă *folosirea grafelor de fluență*.<sup>2</sup>

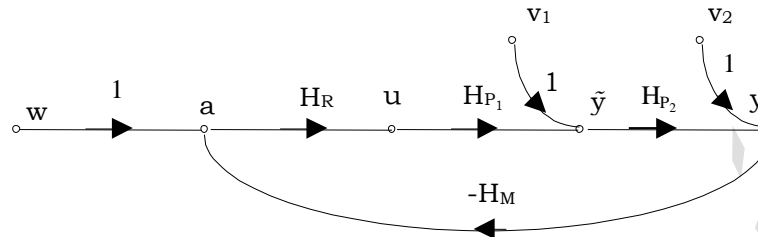
Considerăm numai cazul sistemelor de tip SISO. Schemele bloc ale acestora se pot înlocui prin grafe care pot fi citite și utilizate cu ușurință. Odată înlocuită o schemă bloc printr-un graf sau odată atașat un graf unui model matematic scris sub formă operațională, funcțiile de transfer care interesează pot fi calculate folosind așa-numita *regulă a lui Mason*.

Dependenței  $y(\lambda) = H(\lambda) \cdot u(\lambda)$ , îi este atașată schema bloc , respectiv graful de fluență . Spre deosebire de schema bloc, în care mărimilor de intrare și de ieșire li se asociază săgeți, în

<sup>2</sup> Graful reprezintă o *rețea de ramuri dirijate* interconectate în puncte numite *noduri* și care definesc în mod univoc un sistem de ecuații algebrice liniare. Fiecare nod corespunde unei variabile. Fiecare ramură are asociată o anumită mărime numită *transmitanța ramurii*. Un nod din care toate ramurile diverg (au sensuri de plecare din nod) se numește *nod de intrare*. Un nod în care toate ramurile converg (au sensuri de intrare în nod) se numește *nod de ieșire*. Celelalte noduri, în care apar atât ramuri convergente cât și ramuri divergente, se numesc *noduri ordinare*. Nodurile de intrare reprezintă variabilele independente ale sistemului, iar celelalte noduri variabilele dependente (de ieșire sau interne). Semnalul dintr-un nod ordinar sau dintr-un nod de ieșire este egal cu suma produselor dintre transmitanțele ramurilor convergente și semnalele nodurilor din care aceste ramuri pleacă. Semnalul dintr-un nod de intrare se consideră dat.

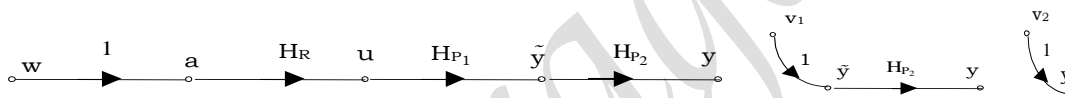
cazul grafului celor două mărimi li se asociază noduri. Funcției de transfer din interiorul blocului îi corespunde în cazul grafului *transmitanța arcului* care leagă nodurile.

În figură este ilustrat graful echivalent schemei bloc din exemplul din secțiunea 2 (secțiunea anterioară):

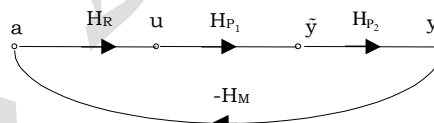


Terminologia asociată utilizării formulei lui Mason este următoarea:

- ♦ *cale elementară* - un subgraf în circuit deschis alcătuit din arce simple care leagă un nod de intrare de un nod de ieșire fără a utiliza un același nod de două ori; în graful din figură apar trei căi elementare; *transmitanța unei căi elementare este egală cu produsul transmitanțelor arcelor componente*;



- ♦ *bucă* - un subgraf în circuit închis, alcătuit din arce simple, care pornește dintr-un nod și revine în același nod fără a parcurge orice alt nod de două ori; în figură apare o singură buclă; *transmitanța unei bucle este egală cu produsul transmitanțelor arcelor componente*;



- ♦ *elemente confluente ale unui graf* - două căi elementare, două bucle sau o cale elementară și o buclă care au în comun cel puțin un nod;
- ♦ *elemente disjuncte ale unui graf* - două bucle, două căi elementare, o buclă și o cale elementară care diferă cel puțin printr-un arc.

Notăm cu  $T_i$ ,  $i = 1$ ;  $n_{ce}$  - transmitanța unei căii elementare „i” care leagă o intrare  $u$  de o ieșire  $y$  și cu  $T'_j$ ,  $j = 1$ ;  $n_b$  transmitanța unei bucle oarecare „j” a grafului. Cu  $n_{ce}$  și  $n_b$  s-au notat, respectiv, numărul căilor elementare disjuncte de la  $u$  la  $y$  și numărul buclelor disjuncte din graf.

Funcția de transfer corespunzătoare canalului care leagă mărimea (nodul) de intrare  $u$  de mărimea (nodul) de ieșire  $y$  se obține cu formula:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{ce}} T_i \Delta'_i}{\Delta} \quad (17)$$

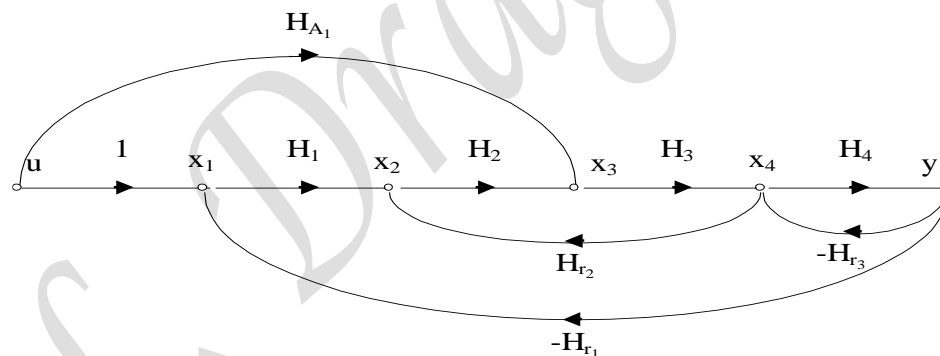
numită *formula lui Mason*. În această formulă<sup>3</sup>

$$\Delta = 1 - \sum T'_i + \sum T'_i T'_j - \sum T'_i T'_j T'_k + \dots \quad (18)$$

este determinantul grafului, iar  $\Delta'_i$  minorul asociat căii elementare „i”. Minorul  $\Delta'_i$  se obține din  $\Delta$  înlocuind în expresia acestuia cu 0 toate transmitanțele corespunzătoare buclelor confluențe cu calea elementară „i”.

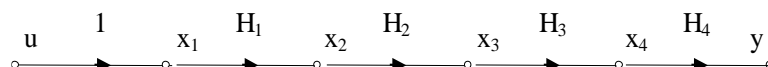
În (18)  $\sum T'_i = \sum_{i=1}^{n_b} T'$  reprezintă suma transmitanțelor tuturor buclelor din graf,  $\sum T'_i T'_j$  suma produselor transmitanțelor tuturor perechilor de bucle neconfluente din graf, iar  $\sum T'_i T'_j T'_k$  suma produselor transmitanțelor tuturor tripletelor de bucle neconfluente două câte două din graf ș.a.m.d.

**Exemplul :** Să se calculeze f.d.t. pentru un sistem cu orientarea  $u \rightarrow y$  redat de graful din figură (s-a omis scrierea argumentului operațional  $\lambda$ ).



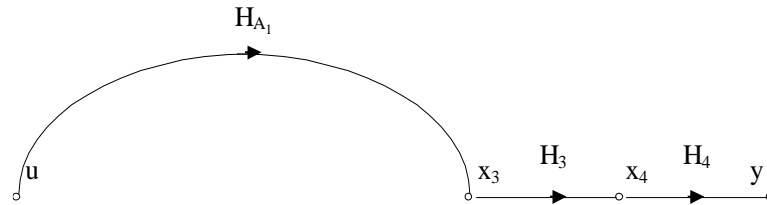
**Soluție :** Nodul de intrare și nodul de ieșire sunt interconectate prin intermediul a două căi elementare care diferă prin porțiunile cuprinse între nodurile  $u$  și  $x_3$ . Ele sunt:

Calea elementară 1 cu transmitanța  $T_1 = H_1 H_2 H_3 H_4$ :



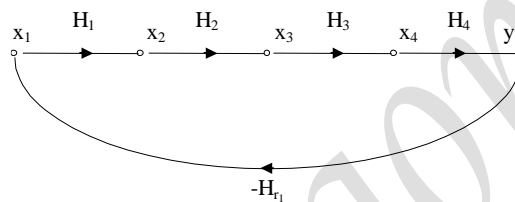
<sup>3</sup> De observat alternanța semnelor în formula (18) !

Calea elementară 2 cu transmitanța  $T_2 = H_{A_1} H_3 H_4$ :

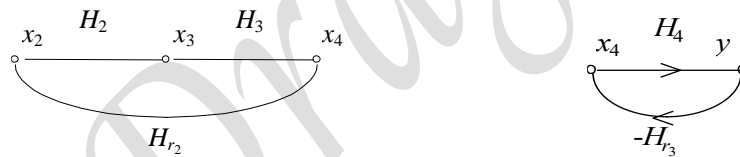


Graful conține trei bucle.

Bucula 1 are transmitanța  $T'_1 = -H_1 H_2 H_3 H_4 H_{r_1}$ :



Buclele 2 și 3 au transmitanțele  $T'_2 = H_2 H_3 H_{r_2}$ ,  $T'_3 = -H_4 H_{r_3}$ :



Întrucât toate perechile de bucle sunt confluențe determinantul sistemului este  $\Delta = 1 - (T'_1 + T'_2 + T'_3)$ . Totodată, buclele fiind confluențe cu ambele căi elementare minorii asociați acestora sunt egali cu 1:  $\Delta'_1 = 1$ ,  $\Delta'_2 = 1$ .

Folosind formula lui Mason rezultă:

$$H(\lambda) = \frac{T_1 \Delta'_1 + T_2 \Delta'_2}{1 - T'_1 - T'_2 - T'_3} = \frac{(H_1 H_2 + H_{A_1}) H_3 H_4}{1 + H_1 H_2 H_3 H_4 H_{r_1} - H_2 H_3 H_{r_2} + H_4 H_{r_3}}.$$