

§ 1.4 Descrierea sistemelor. Regimuri de funcționare

1. Modele matematice intrare-ieșire și modele matematice intrare-stare-ieșire

- În contextul cursului, sistemele sunt *modele matematice* (MM) de tipul egalități sau sisteme de egalități, asociate unor sisteme fizice. Este vorba de egalități de tip ecuații funcționale, fiecare membru al unei egalități conținând „acțiunea” unui operator asupra unor funcții de timp.

În principiu egalitățile se folosesc ca ecuații pentru a calcula o parte dintre funcții (considerate semnale de ieșire) atunci când se cunosc celelalte funcții (considerate semnale de intrare).

Caracterizarea unui sistem prin modele matematice depinde de nivelul de percepție pe care dorim să-l redăm.

- Un prim nivel îl reprezintă *percepția funcțională sau de tip intrare-ieșire*, caz în care MM operează numai cu semnale de intrare și semnale de ieșire. Atributul ”funcțional” redă ideea că în descrierea matematică apar doar semnalele de intrare și de ieșire, adică semnalele cu care se exprimă funcția îndeplinită de sistem. În acest context vorbim de MM intrare-ieșire (MM-II). De regulă, MM-II cu care operăm au forma de ecuație diferențială ordinară (operatori diferențiali) care asociază semnalele $u(t)$ și $y(t)$ cu derivatele lor. Dacă inițial MM-II conține și integralele (în raport cu timpul), atunci forma finală diferențială a MM-II se obține din forma inițială prin operații de derivare în raport cu timpul.

Exemplul 1: MM-II în timp continuu

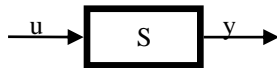
În secțiunea 1 din §.1.1 s-au prezentat două sisteme fizice ale căror MM, notate cu (1) și (2'), aveau forma comună (3). Ele reprezintă un MM-II în timp continuu, care în mod frecvent se scrie astfel:



$$T\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t) \quad (\text{MM-II de ordinul I în timp continuu})^1 \quad (1)$$

Coeficienții T și K , cu denumirile constantă de timp, respectiv amplificare, sunt parametrii modelului. MM-II (1) permite studierea mai multor aspecte legate de comportarea sistemului, bunăoară calcularea răspunsului sistemului la diferite semnale de intrare. De pildă, dacă $T=5$ s, iar $K=2$, sistemul răspunde la semnalul de intrare $u(t)=6 \cdot e^{-t}$ cu semnalul de ieșire $y(t)=-3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-0.2t}$ atunci când condiția inițială este $y(0)=0$ și cu semnalul $y(t)=-3 \cdot e^{-t}$ atunci când condiția inițială este $y(0)=-3$.

Exemplul 2: MM-II în timp discret este ilustrat prin sistemul (2):



$$0.5y[t] - 0.8y[t-1] + 2y[t-2] = u[t-1] + 4u[t-2] \quad (\text{MM-II de ordinul II în timp discret}) \quad (2)$$

¹ Sub formă operatorială MM se scrie astfel: $f_1\{y\}=f_2\{u\}$, unde $f_1 = T \cdot \frac{d}{dt} + 1$, iar $f_2 = K$.

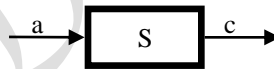
Modelul (2) este o ecuație recursivă de ordinul II. În model sunt combinate valorile lui $u[t]$ și $y[t]$ la mai multe momente, ponderate cu coeficienții: 0.5, -0.8, 2, 1, 4. Și acest model permite studierea mai multor aspecte legate de comportarea sistemului (2), în primul rând calcularea răspunsului sistemului la diferite semnale de intrare. De exemplu, răspunsul sistemului (2) având condițiile inițiale $y[-2] = 1/6$, $y[-1] = 5/3$, la semnalul de intrare $u[t] = (2.3/6) \cdot 2^{-t} + 1.1 \cdot (-1)^t$, $t \in \mathbb{N}$, $u[t] = 0$, $t < 0$, este $y[t] = 2^{-t} + (-1)^t$.

Potrivit celor prezentate în § 1.1, secțiunea 2, sistemele fizice au caracter inercial. În modelele matematice cu care operăm în cadrul acestei lucrări caracterul inercial se reflectă prin *ordinul sistemului*, notat cu n . Dacă $n \geq 1$ spunem că sistemul este inercial, iar dacă $n = 0$, spunem că sistemul este neinercial. Pentru a stabili ordinul sistemelor date prin MM-II, procedăm astfel:

- ✓ În cazul sistemelor în timp continuu (STC): a) Se aduce MM-II al STC la forma de ecuație diferențială ordinară, astfel încât atât semnalul de ieșire cât și semnalul de intrare să nu apară sub formă integrală și cel puțin unul dintre ele să apară sub formă nederivată. b) Din forma de la punctul a) stabilim ordinul sistemului ca fiind egal cu ordinul maxim de derivare al semnalului de ieșire.
 - Pentru exemplul 1: $n = 1$ întrucât apare derivata de ordinul I a semnalului de ieșire.
- ✓ În cazul sistemelor în timp discret (STD): a) Se aduce MM-II al STD la forma de ecuație recursivă astfel încât în aceasta argumentul maxim al mărimii de ieșire să fie momentul curent t . b) Din forma de la punctul a) stabilim ordinul sistemului ca fiind egal cu ordinul de recurență al ecuației recursive, adică cu diferența dintre cel mai mare argument și cel mai mic argument.
 - Pentru exemplul 2: $n = t - (t-2) = 2$.

Exemplul 3: MM-II al unui regulator de tip PI (proportional-integrator) cu temporizare are forma

$$5\dot{c}(t) + c(t) = 10 \int_0^t a(t) dt + a(t) \quad (3)$$



Modelul este de tip ecuație integro-diferențială. Pentru a calcula ordinul acestui sistem aducem egalitatea (3) la forma de egalitate diferențială. În acest scop o derivăm membru cu membru în raport cu parametrul t care apare în limita superioară a integralei definite. Rezultă:

$$5\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) = 10a(t) + \dot{a}(t) \Rightarrow n = 2.$$

- Un al doilea nivel de percepție este *percepția funcțional-structurală sau de tip intrare-stare-ieșire*. De data aceasta MM operează în afară de semnalele de intrare și de ieșire și cu o a treia categorie de semnale: *semnalele de stare* (mărimi de stare). *Mărimile de stare caracterizează ceea ce se întâmplă în interiorul sistemului, adică în structura sistemului* – de aici, atributul ”structural”. În acest caz vorbim de *MM intrare-stare-ieșire* (MM-ISI).

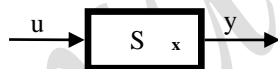
Evoluția fenomenelor dintr-un sistem fizic inercial în timp depinde de procesele de transfer și acumulare (în sens algebric) de energie / materie / informație. Procesele de acumulare de energie dintr-un sistem sunt exprimate cu ajutorul *mărimilor de stare* sau *variabilelor de stare*. Ansamblul acestor mărimi împreună cu mărimile de intrare ne furnizează în orice moment două categorii de informații despre sistem:

- ✓ *tendința de evoluție a sistemului*, adică informația dacă în momentul imediat următor valorile mărimilor de stare vor crește sau vor scădea;
- ✓ *valorile mărimilor de ieșire*.

În timp, energiile elementelor capabile de acumulare cresc sau scad. Vitezele proceselor elementare de acumulare de energie sunt diferite, corespunzător constantelor de timp ce caracterizează inerția elementelor acumulative. În acest context ordinul sistemului este egal cu număr de procese inerțiale elementare de acumulare de energie/ materie / informație existente în sistemul fizic.

Mărimile de stare sunt utilizate în modelele matematice intrare-stare-ieșire (MM-ISI). Mărimile de stare se notează cu x , iar numărul lor cu n . *Numărul n al mărimilor (semnalelor) de stare reprezintă ordinul sistemului*. De exemplu, dacă în interiorul sistemului avem trei procese inerțiale elementare de acumulare atunci sistemul are 3 variabile de stare, respectiv ordinul $n = 3$.

În ecuațiile care compun un MM-ISI se operează de regulă cu variabile vectoriale. În consecință, pentru un sistem (simbolizat ca în figura) de ordinul n vectorul mărimilor de stare este de forma:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$


MM-ISI conțin două grupuri de ecuații, destinate, respectiv, furnizării celor două categorii de informații menționate anterior. Forma generală a MM-ISI unui sistem în cazul timp continuu este:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) & (4') \\ y = g(x, u, t) & (4'') \end{cases}$$

iar a unui sistem în timp discret:

$$\begin{cases} x[t+1] = f(x[t], u[t], t) & (5') \\ y[t] = g(x[t], u[t], t) & (5'') \end{cases}$$

Pentru STC ecuațiile (4') reprezintă un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul I de forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{cases},$$

iar ecuațiile (4'') reprezintă un sistem de ecuații algebrice de forma:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ y_p = g_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{cases}.$$

Ecuatiile (4') se numesc *ecuații de stare* ale sistemului. Ele servesc pentru a calcula pe \dot{x} , ceea ce înseamnă că ne permit să determinăm tendința de evoluție a sistemului. Ecuatiile (4''), numite *ecuații de ieșire*, permit calcularea valorilor mărimii de ieșire la momentul curent t .

Faptul că \dot{x} se poate calcula înseamnă că semnalele $x(t)$ sunt funcții derivabile în raport cu timpul. Ca urmare, *variabilele de stare sunt funcții continue în raport cu timpul t* . De aici rezultă *criteriul de alegere a variabilelor de stare*: variabilele de stare trebuie să fie mărimi cu variație continuă în raport cu timpul t , valorile lor obținându-se prin integrare în raport cu timpul (acumulare):

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Enumerăm câteva *exemple tipice de mărimi de stare*: tensiunea între bornele unui condensator, curentul electric printr-o bobină, poziția sau viteza unui punct material, temperatura unui punct material ș.a.m.d. Toate aceste mărimi nu pot varia brusc (nu pot avea salturi instantanee), ci doar în mod continuu.

Pentru sistemele în timp discret pot fi variabile de stare *variabile care descriu procese de stocare*, de pildă: soldul dintr-un cont bancar, numărul de bucăți dintr-un anumit produs care se găsesc într-o magazie, numărul de credite transferabile acumulate de un student, precum și *variabile care provin prin eșantionarea de variabile de stare în timp continuu*.

Pentru STD, relațiile (5') reprezintă *ecuații de stare*, iar relațiile (5'') *ecuații de ieșire*. Ecuatiile de stare se prezintă sub forma unui sistem de n ecuații recursive de ordinul I (ordinul fiecărei ecuații este $(t+1) - t = 1$). În acest caz, tendința de evoluție apare prin faptul că din $x[t]$ și $u[t]$ putem să calculăm pe $x[t+1]$, adică ceea ce se va întâmpla în pasul următor. În rest, interpretările sunt în principiu aceleași cu cele din cazul timp continuu.

În concluzie, orice ecuație de stare, fie în timp continuu, adică:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1; n,$$

fie în timp discret, adică:

$$x_i[t+1] = f_i(x_1[t], \dots, x_n[t], u_1[t], \dots, u_m[t], t) = x_i[t] + \underbrace{\tilde{f}_i(x_1[t], \dots, x_n[t], u_1[t], \dots, u_m[t], t)}_{= f_i(x_1[t], \dots, x_n[t], u_1[t], \dots, u_m[t], t) - x_i[t]}, \quad i = 1; n,$$

descrie un proces elementar de acumulare exprimat prin operația de integrare menționată anterior, respectiv prin echivalentul ei în timp discret. Ordinul n înseamnă n procese elementare de acumulare. Aceste procese există și în cazul intrare-ieșire, doar că sunt mascate de forma modelelor.

- Sistemele (4')-(4'') și (5')-(5''), în care t apare ca argument distinct atât în f cât și în g , se numesc *sisteme variante în timp*. Spre deosebire de ele, sistemele:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (6) \quad \text{și} \quad \begin{cases} x[t+1] = f(x[t], u[t]) \\ y[t] = g(x[t], u[t]) \end{cases}, \quad (7)$$

care nu mai conțin pe t ca argument distinct (al treilea argument), se numesc *sisteme invariante în timp*.

• În (4') - (4''), (5') - (5''), (6) și (7), orice variație a lui u produce instantaneu și o variație a lui y . Altfel spus, variațiile intrării se transmit, sub o formă sau alta, instantaneu la ieșire. În sistemele fizice nu se petrece acest lucru; deci ecuațiile de ieșire de până acum sunt idealizări ale realității. Spunem că astfel de sisteme sunt la *limita de cauzalitate*, iar atunci când modelul trebuie să fie transpus într-un sistem fizic spunem că sistemul este la *limita de realizabilitate fizică*.

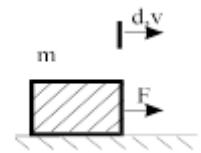
O modelare exactă trebuie să conducă la un model strict cauzal, ceea ce înseamnă că în MM-ISI ecuațiile de ieșire trebuie să aibă una din formele:

$$\begin{aligned} y &= g(x, t) & (4''') \\ y[t] &= g(x[t], t) & (5''') \\ y &= g(x) & (6'') \\ y[t] &= g(x[t]) & (7'') \end{aligned}$$

în care nu mai apare u .

Exemplul 4: Sistem de poziționare

Sistemul fizic din figura alăturată constă dintr-un corp de masă m , care se deplasează pe orizontală sub acțiunea unei forțe exterioare F cu viteza v , găsimu-se la momentul curent t la distanța d față de un referențial oarecare de pe direcția de deplasare. MM al acestui sistem este cunoscut sub denumirea de **sistem de poziționare** (pentru mișcarea de translație). După caz, orientarea sistemului este $F \rightarrow d$, atunci când ne interesează ca mărime de ieșire numai distanța d , $F \rightarrow v$, atunci când ne interesează ca mărime de ieșire numai viteza v , sau $F \rightarrow \{d, v\}$.



Pentru a stabili ecuațiile de stare ale sistemului de poziționare avem în vedere că accelerația imprimată de forța F este $a = F/m$ și faptul că potrivit celor discutate se recomandă să alegem ca variabile de stare distanța și viteza:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= d \\ x_2(t) &= v \end{aligned}$$

Deoarece:

$$\dot{d} = v \Rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

membrul drept al primei ecuații de stare este:

$$f_1(x_1, x_2, F) = x_2(t).$$

Potrivit relațiilor dintre forță și accelerație, respectiv viteză și accelerație, rezultă:

$$\dot{v} = a = \frac{1}{m} \cdot F(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} F(t);$$

Ca urmare, membrul drept al celei de a doua ecuații de stare are expresia:

$$f_2(x_1, x_2, F) = \frac{1}{m} F(t).$$

Presupunem că ne interesează orientarea $F \rightarrow d$. Cu notațiile din ecuațiile (6) avem:

$$y(t) = d(t) = x_1(t),$$

astfel că membrul drept al ecuației de ieșire este:

$$g(x_1, x_2, F) = x_1(t).$$

În final rezultă MM-ISI:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{m} \cdot F(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} \cdot (8)$$

Acest MM poate fi folosit pentru a studia proprietățile sistemului de poziționare și pentru a calcula răspunsul lui la diferite variații ale semnalului de intrare. De exemplu, considerând că la momentul inițial poziția este $d = d_0$, iar viteza v_0 , în ipoteza că se aplică semnalul de intrare $F(t) = F_0$, $t \geq 0$, răspunsul sistemului, calculat cu MM (8), este $d(t) = (F_0/m) \cdot t^2 + v_0 \cdot t + d_0$. (formula distanței pentru mișcarea uniform accelerată cu viteză inițială nenulă).

Exemplul 5:

Într-o crescătorie de crustacee care pot trăi cel mult cinci ani, crustaceele trăiesc într-un bazin izolat. Pentru a studia dinamica populației de crustacee se poate folosi un MM-ISI având variabilele de stare:

- ✓ x_1 - numărul de crustacee aflate în primul an de viață;
- ✓ x_2 - numărul de crustacee aflate în doilea an de viață;
- ✓ x_3 - numărul de crustacee aflate în al treilea an de viață;
- ✓ x_4 - numărul de crustacee aflate în al patrulea an de viață;
- ✓ x_5 - numărul de crustacee aflate în al cincilea an de viață.

Notăm cu s_i - ratele de supraviețuire și cu n_i - ratele de natalitate în anul de viață $i = 1, 2, 3, 4$.

Din punctul de vedere al exploatării crescătoriei, ne interesează numărul total q de crustacee existente în crescătorie în anul curent t , indiferent de vârstă (mărimea de ieșire).

După un raționament elementar, bazat pe bilanțul numărului de crustacee de la începutul fiecărui an de viață, pentru procesul descris rezultă în final MM-ISI în timp discret:

$$\begin{cases} x_1[t+1] = n_2x_2[t] + n_3x_3[t] + n_4x_4[t] + n_5x_5[t] \\ x_2[t+1] = s_1x_1[t] \\ x_3[t+1] = s_2x_2[t] \\ x_4[t+1] = s_3x_3[t] \\ x_5[t+1] = s_4x_4[t] \\ q[t] = x_1[t] + x_2[t] + x_3[t] + x_4[t] + x_5[t] \end{cases}$$

2. Clasificarea sistemelor

În cadrul cursului vom considera că sistemele dinamice se clasifică potrivit următorului tabel:

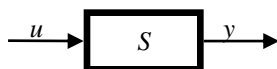
Criteriul de clasificare	Atributul sistemului	Tipul de ecuație în domeniul timp
Continuitatea timpului*	STC*	ecuație diferențială ordinară*
	STD*	ecuație recursivă*
Liniaritatea	liniar	ecuație liniară
	neliniar	ecuație neliniară

Variabilitatea parametrilor MM în raport cu timpul	invariant în timp*	ecuație cu parametri constanți în timp*
	variant în timp*	ecuație cu parametri variabili în timp
Dependența MM de coordonatele spațiale	cu parametri concentrați*	ecuație diferențială sau recursivă ordinară *
	cu parametri distribuiți**	ecuație diferențială cu derivate parțiale și omoloagele lor în timp discret.**

Am notat cu * tipurile de sisteme la care ne-am referit până acum, iar cu ** tipurile de sisteme care nu vor fi studiate în cadrul cursului de față.

În cele ce urmează ne referim la *liniaritatea unui sistem*.

Spunem că: *un sistem este liniar atunci când pentru el este valabil principiul superpoziției*.



Interpretarea acestei definiții cu referire la sistemul S din figură este următoarea:

- Fie $u_1(t)$ un semnal de intrare admisibil (o realizare a lui $u(t)$). Aplicat la intrare el va produce la ieșire un răspuns $y_1(t)$ (o realizare a lui $y(t)$). De asemenea, fie $u_2(t)$ un alt semnal de intrare admisibil (o altă realizare a lui $u(t)$). Aplicat la intrare el va produce la ieșire un răspuns $y_2(t)$ (o altă realizare a lui $y(t)$).
- Fie $u_3(t) = c_1 \cdot u_1(t) + c_2 \cdot u_2(t)$ un semnal de intrare admisibil unde c_1 și c_2 sunt constante numere complexe. Notăm răspunsul sistemului la aplicarea acestui semnal de intrare cu $y_3(t)$.
- Spunem că sistemul verifică principiul superpoziției, sau că este liniar, dacă: $\forall u_1(t), u_2(t)$ admisibile și c_1, c_2 arbitrare, rezultă că $y_3(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$.

Stabilirea liniarității unui MM pe baza acestei interpretări este adeseori anevoioasă. Practic folosim următoarea condiție de suficiență considerată drept *criteriu de recunoaștere a liniarității*:

Dacă în toți termenii egalităților din modelul matematic al unui sistem apare un singur semnal la puterea I, care poate lua orice valori reale, atunci sistemul este liniar. În cazul timp continuu derivatele, indiferent de ordin, se consideră semnale distincte. În cazul timp discret termenii de argument diferit de t se consideră că provin din semnale distincte.

Ca urmare, în fiecare ecuație a unui model matematic toți termenii trebuie să fie expresii de gradul I continue în raport cu funcțiile de timp (funcții propriu-zise și derivatele lor pentru cazul timp continuu sau realizări ale funcțiilor propriu-zise la diferite momente în cazul timp discret), iar acestea să poată lua orice valori (să nu fie supuse la limitări).

Atunci când condițiile acestui criteriu nu sunt îndeplinite, sistemul este neliniar.

Observații:

- 1) Definiția dată pentru un sistem liniar este valabilă atât în cazul timp continuu cât și în cazul timp discret.
- 2) O definiție completă a liniarității ține seama și de condițiile inițiale, în sensul că în cazul $u_3(t)$ se impune aceeași combinație liniară și condițiilor inițiale.

- ✓ Dacă operăm cu MM-II, condițiile inițiale se referă la valorile ieșirii la momentul inițial, al derivatelor acesteia până la ordinul $n-1$ sau a valorilor acestora pentru $n-1$ momente anterioare.
- ✓ Dacă operăm cu MM-ISI, condițiile inițiale sunt de forma $x(t_0)$ sau $x[t_0]$, adică valorile stărilor la un moment inițial t_0 .

Exemple:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad - \quad \text{sistem liniar de ordin } n=1 \quad (\text{SL})$$

$$\dot{y}(t) + y(t)|y(t)| = u(t) \quad - \quad \text{sistem neliniar de ordin } n=1 \quad (\text{SN})$$

$$5\dot{y}(t) + y(t) = 0.7 \cdot u(t) \text{ reprezintă un SL în timp continuu de ordin } n=1;$$

$$\ddot{y}(t) + 0.8 \cdot y(t) = \dot{u}(t) \text{ reprezintă un SL în timp continuu de ordin } n=2;$$

$$y[t] - 0.2 \cdot y[t-1] + y[t-2] = u[t-1] \text{ reprezintă un SL în timp discret de ordin } n=2;$$

$$y[t] + |y[t-1]| = u[t] \text{ reprezintă un SN în timp discret de ordin } n=1. \text{ El poate fi scris sub forma:}$$

$$\begin{cases} y[t] - y[t-1] = u[t], & y[t-1] < 0 \\ y[t] + y[t-1] = u[t], & y[t-1] \geq 0 \end{cases}$$

În cazurile practice semnalele sistemelor fizice sunt mărginite. Aceasta înseamnă că în modelele matematice ale sistemelor fizice, variabilele ar trebui supuse unor limitări și ca urmare ultima condiție din enunțul criteriului nu este îndeplinită. În concluzie, în mod riguros chiar și modelele matematice cu aspect liniar sunt neliniare, întrucât ele ar trebui să includă limitările semnalelor. Totuși, în multe situații de funcționare normală variabile nu își ating limitele. În astfel de situații se consideră că operăm cu sisteme liniare. În continuare dezvoltările din curs se fac în aceasta ipoteză. Timpul este considerat ca variabilă independentă limitată la intervalul de interes al utilizatorului.

3. Identificare. Realizare fizică

În tehnică, în special, și în știință, în general, apar două tipuri de probleme de bază referitoare la gestionarea MM ale sistemelor.

- ✓ Prima problemă o reprezintă *obținerea MM* corespunzătoare sistemelor fizice.
 - Această operație este denumită în mod curent *identificare*. Nu orice sistem fizic este identificabil.
- ✓ A doua problemă o reprezintă *implementarea fizică a MM*, adică transpunerea unui MM sintetizat pe o cale sau alta într-un sistem fizic.
 - Această operație este denumită în mod curent *realizare fizică*. Nu orice MM este fizic realizabil. Algoritmii de conducere a proceselor fizice trebuie să fie subsisteme fizic realizabile.

Problema identificării face obiectul unei discipline aparte: „identificarea sistemelor”. Problema realizării fizice face obiectul a numeroase discipline de specialitate din diferite domenii științifice, nu numai ingineresti. Un MM trebuie să răspundă întotdeauna unui scop bine precizat. Detalierea modelării dincolo de acest scop se soldează cu complicarea modelului și, de regulă, este inutilă.

Modelul matematic al unui sistem fizic poate fi obținut plecând de la descrierea proceselor care au loc în sistem prin ecuații cunoscute din discipline precum fizica, chimia, biologia, sociologia, finanțe ș.a. sau plecând de la tratarea sistemului fizic ca un „black box”. Prima cale a fost exemplificată în § 1.1, secțiunea 1, prin exemplele 1 și 2. În cel de-al doilea caz, sistemul fizic este excitat experimental cu diferite semnale de intrare, se înregistrează aceste semnale precum și răspunsul sistemului, apoi se prelucrează înregistrările în ideea definirii unei relații între intrare și

ieșire care să conducă la o comportare cât mai apropiată de cea constatată experimental. De regulă, pe aceasta cale se obțin MM-II. Ele nu descriu complet sistemul, ci doar dependența intrare-iesire.

Din punct de vedere matematic, la nivelul cursului, realizabilitatea fizică a unui STC o verificăm astfel: *un MM în timp continuu este fizic realizabil, dacă ordinul maxim de derivare al mărimii de ieșire mai mare decât ordinul maxim de derivare al mărimii de intrare; în caz de egalitate, el se găsește la limita de realizabilitate fizică.*

Exemple: Relația

$$T\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

este un model fizic realizabil, relația

$$2\ddot{y}(t) + 0.5 \cdot \dot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t)$$

este un model la limita de realizabilitate fizică; iar relația

$$y(t) = 3 \cdot \dot{u}(t) + 0.5 \cdot u(t)$$

nu este un model fizic realizabil.

Un MM în timp discret este fizic realizabil dacă argumentul maxim al mărimii de ieșire este mai mare decât argumentul maxim al mărimii de intrare.

Exemple:

- $y[t] + y[t-1] + 0.5 \cdot y[t-2] = u[t-1]$ este un model fizic realizabil;
- $y[t] + y[t-1] = u[t]$ este un model la limita de realizabilitate fizică;
- $y[t] = u[t+1] - u[t]$ nu este un model fizic realizabil.

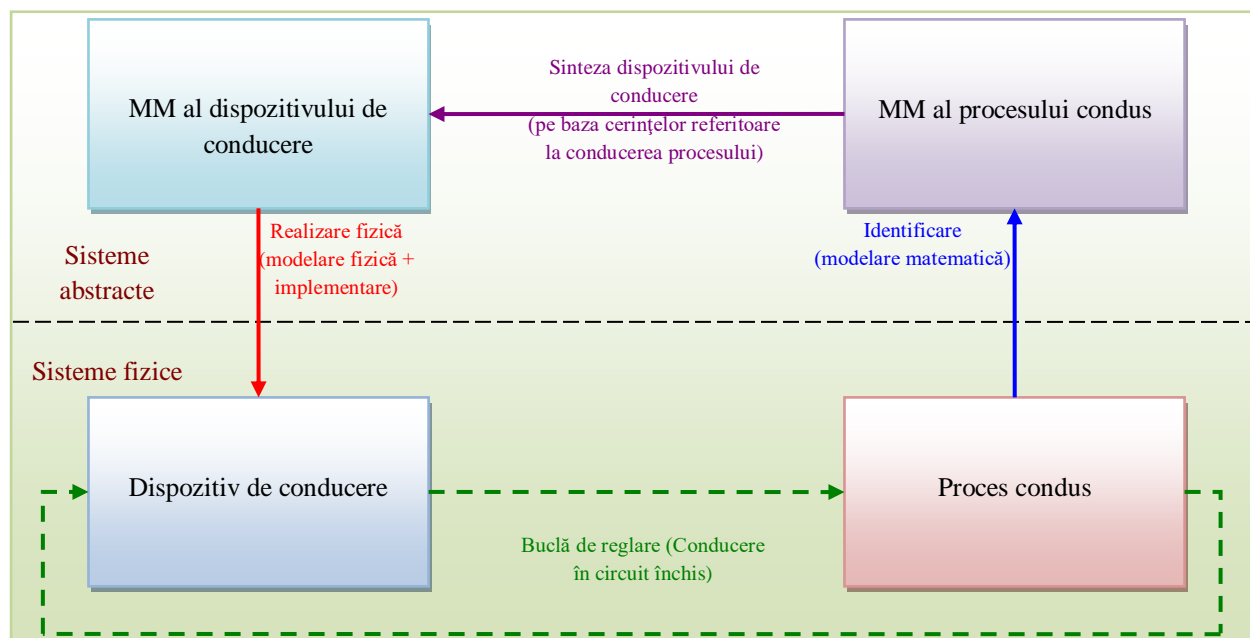
În unele situații operăm într-o primă aproximare și cu modele care nu sunt fizic realizabile.

Problematica identificării și realizabilității fizice o surprindem prin figura suport (de discuție) de mai jos. *Figura se referă la conceperea unui sistem de reglare automată* (finalizată prin realizarea fizică a dispozitivului de conducere). Ea este folosită ca pretext pentru a discuta aspectul identificării și aspectul realizabilității fizice.

Figura atrage atenția asupra situațiilor în care se pun problemele de identificare și realizare fizică la realizarea unui sistem de reglare. Ciclul care se parcurge în acest scop este următorul:

- i) se determină un MM al procesului condus (**identificare** – linia albastră),
- ii) se concepe și se calculează un MM al dispozitivului de conducere (sinteză – linia violetă),
- iii) se implementează rezultatul într-un sistem fizic (**realizare fizică** – linia roșie).

Sistemul de reglare (conducere) este partea reprezentată cu linie întreruptă de culoare verde. Rolul sistemului este ca procesul condus să realizeze o anumită funcție (să asigure anumite cerințe referitoare la conducere).



4. Punct de funcționare. Regimuri de funcționare, clasificări

Prin *mărimi caracteristice ale unui sistem* se înțeleg mărimile relevante pentru comportarea sistemului și monitorizarea funcției sistemului.

Ansamblul valorilor tuturor mărimilor caracteristice ale unui sistem, considerat la un moment dat, se numește *punct de funcționare al sistemului*. Ca urmare, mărimile caracteristice reprezintă coordonatele punctului de funcționare. Valorile coordonatelor se modifică în timp.

Notăm punctul de funcționare cu Λ . Vom scrie, de exemplu, $\Lambda(u, y)$ atunci când mărimile caracteristice sunt u și y , $\Lambda(u_{med}, y_{med})$ atunci când mărimile caracteristice sunt valorile medii ale mărimilor u și y asociate de o anumită manieră momentului curent ș.a.m.d.

Prin *regim de funcționare al unui sistem fizic* se înțelege un mod de comportare în timp al sistemului, destinat realizării unei anumite operații. În acord cu principiul cauzalității un regim de funcționare al unui sistem este determinat de un anumit semnal de intrare și/sau de o stare inițială, de echilibru sau dezechilibru, a sistemului și este caracterizat printr-o succesiune continuă sau discretă de puncte de funcționare în "spațiul" coordonatelor, succesiune numită *trajectorie asociată regimului de funcționare*. *Trajectoria reprezintă o imagine a variației temporale a mărimilor caracteristice în cursul unui regim de funcționare, deci o imagine grafică a regimului de funcționare*.

Dacă T este orizontul de timp căruia îi corespunde trajectoria, atunci vom nota trajectoria cu $\Lambda_T(u, y)$, $\Lambda_T(u_{med}, y_{med})$ ș.a.m.d.. Notațiile pun în evidență orizontul de timp și mărimile caracteristice.

Dacă mărimile caracteristice sunt variabilele de stare, x , ale sistemului, trajectoriile $\Lambda_T(x)$ se numesc *traectorii de stare*.

Exemplu: Se consideră sistemul liniar

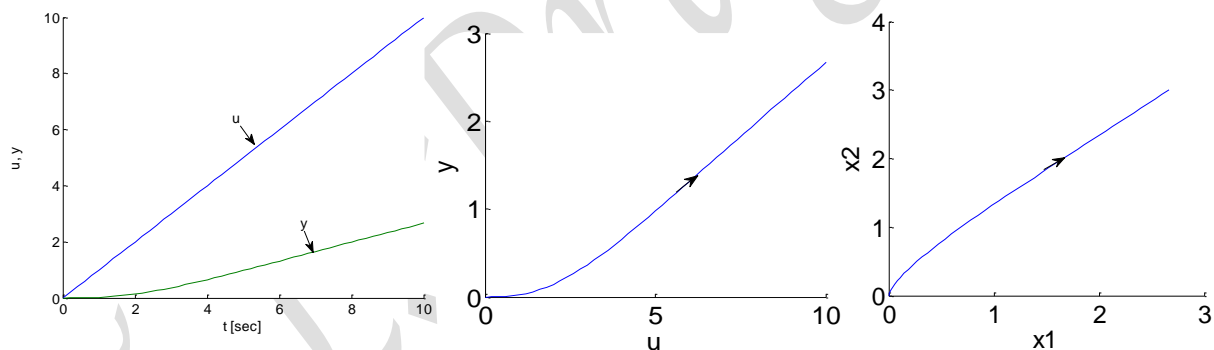
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -0.4x_1(t) - 0.2x_2(t) + 0.2u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

la intrarea căruia se aplică semnalul rampă unitară $u(t) = t$ în condiții inițiale nule, i.e. $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$. Intervalul de timp de studiu este de 10 secunde. Prin aplicarea la intrare a semnalului rampă declanșăm un regim de urmărire (o operație de urmărire a mărimii de intrare de către mărimea de ieșire). În figura de mai jos apar diferite modalități de a reda acest regim.

În figura din stânga sunt redată variațiile mărimilor de intrare și de ieșire, $u(t)$ și $y(t)$, în ideea că cele două mărimi sunt mărimi caracteristice ale sistemului.

În figura din mijloc apare traiectoria $y(u)$ corespunzătoare punctului de funcționare $\Lambda(u, y)$, adică traiectoria $\Lambda_{[0,10]}(u, y)$. Pentru a evidenția regimul care se instalează, evoluția punctului de funcționare pe traiectorie este sugerată cu o săgeată.

Ambele reprezentări sugerează că regimul de urmărire se instalează cu o anumită întârziere, urmărirea propriu-zisă instalându-se după ce variațiile celor două mărimi din prima figură devin proporționale, respectiv după ce în a doua figură evoluția sistemului este redată de o semidreaptă.



În figura din dreapta regimul este redat prin traiectoria de stare $x_2(x_1)$ corespunzătoare punctului de funcționare $\Lambda(x_1, x_2)$, adică traiectoria $\Lambda_{[0,10]}(x_1, x_2)$. Cu privire la această figură vom observa că procesul de urmărire nu mai este transparent. În schimb obținem o imagine a ceea ce se întâmplă în interiorul sistemului în cursul urmăririi: variațiile lui x_1 tinde să devină proporțională cu variația lui x_2 .

În consecință, un regim de funcționare poate fi redat prin intermediul mai multor mărimi caracteristice și mai multor tipuri de traiectorii. Depinde de noi, respectiv de scopul urmărit, alegerea celei mai potrivite forme de reprezentare.

□

Pentru clasificarea regimurilor de funcționare există numeroase criterii. Astfel, din punctul de vedere al variației în timp ale mărimilor caracteristice distingem două tipuri de regimuri:

- ✓ **regimuri permanente**, caracterizate prin faptul că mărimile caracteristice variază în timp după funcții tipizate corespunzătoare unor semnale standard: *funcția treaptă unitară*, *funcția rampă unitară*, *funcția parabolă unitară*, *funcția sinusoidală* sau altor funcții bine precizate, de exemplu funcții periodice;
- ✓ **regimuri tranzitorii**, caracterizate prin faptul că variabilele informaționale variază în timp după funcții netipizate, sistemul trecând, eventual, de la un regim permanent la altul (v. Fig.1, Fig.2 de mai jos).

Principalele tipuri de regimuri permanente sunt:

1) Regimul staționar sau permanent constant, - este caracterizat prin faptul că variabilele informaționale ale mărimilor caracteristice sunt constante pe subintervale de timp. Acest regim se instalează după încheierea regimului tranzitoriu (teoretic pentru $t \rightarrow \infty$) declanșat de aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal constant. Convenim să notăm valorile coordonatelor punctului de funcționare pentru $t \rightarrow \infty$ cu indicele „ ∞ ”. Vom scrie $\Lambda(u_\infty, y_\infty)$ sau, simplu, Λ_∞ . Punctul Λ_∞ este fix, ceea ce înseamnă că în regim staționar traiectoria sistemului se reduce la un punct.

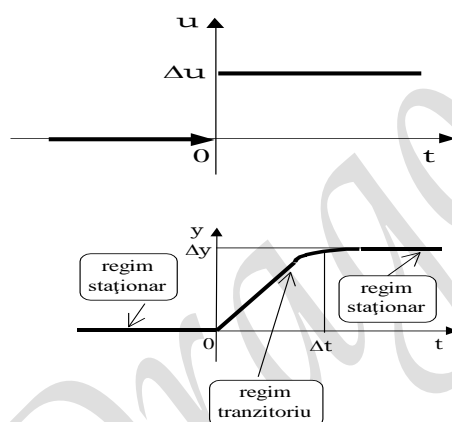
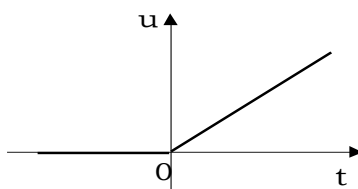


Fig. 1

2) Regimul permanent proporțional - este caracterizat de faptul că variabilele informaționale asociate mărimilor caracteristice variază în timp după funcții rampă. În acest regim toate derivatele de ordinul I în raport cu timpul sunt constante, adică $\dot{u}(t) = \dot{u}_\infty = \text{const.}$, $\dot{y}(t) = \dot{y}_\infty = \text{const.}$. Teoretic se poate considera că regimul este declanșat după aplicarea la intrarea sistemului a unor semnale rampă ca în Fig.2. În figură se pleacă dintr-un regim permanent care poate fi interpretat atât ca regim staționar cât și ca regim permanent proporțional determinat de o intrare nulă. În regim permanent proporțional $\Lambda(\dot{u}_\infty, \dot{y}_\infty)$ este un punct fix, pe când $\Lambda(u, y)$ este un punct mobil care descrie o semidreaptă sau un segment de dreaptă.



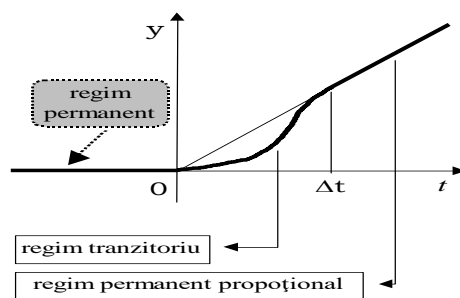


Fig. 2

3) Regimul permanent parabolic - este caracterizat de faptul că variabilele informaționale asociate mărimilor caracteristice variază în raport cu timpul după funcții parabolice. Deci, derivatele lor de ordinul II în raport cu timpul sunt constante. Declanșarea regimului este consecința aplicării de semnale parabolice la intrarea sistemului. Punctul $\Lambda(\ddot{u}_\infty, \ddot{y}_\infty)$ este fix, iar punctele $\Lambda(\dot{u}_\infty, \dot{y}_\infty)$ și $\Lambda(u, y)$ sunt mobile.

4) Regimul permanent sinusoidal, numit și *regim armonic* sau *regim sinusoidal cvasistaționar* - este caracterizat prin aceea că toate mărimile caracteristice, coordonate ale punctului de funcționare, variază în timp după funcții sinusoidale (de exemplu, $y(t)$ în Fig.3). Sistemul ajunge într-un astfel de regim în urma aplicării la intrare a unor semnale sinusoidale. Datorită variației temporale periodice a coordonatelor, cu o perioadă comună, punctul $\Lambda(u, y)$ este mobil pe o curbă închisă.

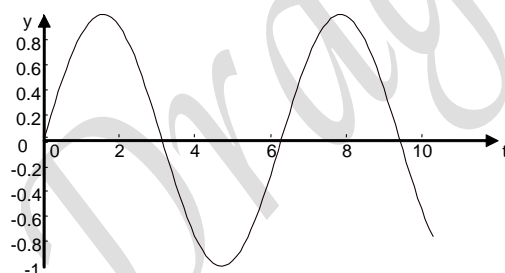


Fig. 3

Deoarece în regimurile 2, 3 și 4 și în regimurile tranzitorii mărimile variază în timp, ele poartă și denumirea de **regimuri nestaționare** sau (în mod neriguros) de **regimuri dinamice**.

În cazul sistemelor liniare invariante în timp se folosesc în mod frecvent conceptele de *regim liber* și de *regim forțat*.

Prin **regim liber** se înțelege un regim de funcționare determinat de o stare inițială dată a sistemului (de regulă condiții inițiale nenule care corespund unei situații de dezechilibru) în situația în care semnalul de intrare este nul ($u(t) = 0$), iar prin **regim forțat** se înțelege un regim de funcționare determinat de aplicarea la intrarea sistemului a unui semnal $u(t) \neq 0$ în condiții inițiale nule.

Observații:

- 1) În Fig. 1 și 4 sunt ilustrate răspunsurile la semnale treaptă a două sisteme liniare. Inițial sistemele se găsesc în stare de echilibru. În primul caz starea de echilibru este o stare de repaus. În al doilea caz starea de echilibru corespunde unui regim staționar determinat de un semnal treaptă de amplitudine u_0 . Ori de câte ori este posibil reducem din punct de vedere matematic (prin schimbări adecvate de variabile) stările inițiale de echilibru la stări de repaus.

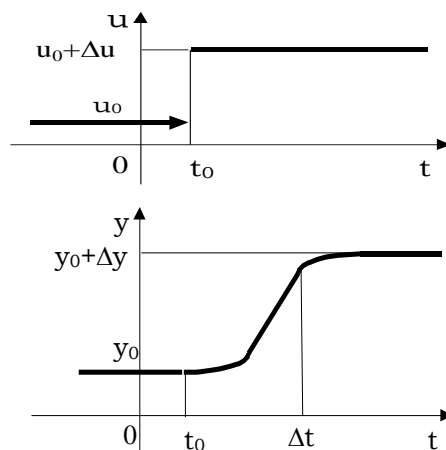


Fig. 4

- 2) Figurile 1, 2 și 4 mai evidențiază un aspect important: teoretic, un regim staționar (permanent) se obține pentru $t \rightarrow \infty$ dar din punct de vedere practic această situație nu convine și ca urmare se consideră că regimul staționar (permanent) rezultă după un interval finit de timp Δt adoptat în funcție de necesități sau de posibilitățile de percepție ale semnalului (în cazul de față: de semnalul de ieșire).
- 3) Utilizarea noțiunilor de regim liber și regim forțat se justifică numai pentru sisteme liniare, unde prin superpoziția lor se obține regimul real de funcționare.

Din considerente practice se impune menționarea a încă doi termeni: regim nominal și regim oarecare. Sistemele tehnice sunt concepute astfel încât să funcționeze într-un anumit regim caracterizat de indicatori tehnici și energetici bine precizați. Un astfel de regim este numit **regim nominal**. În realitate sistemele ajung să lucreze în **regimuri oarecare**, adică în regimuri mai mult sau mai puțin "îndepărtate" de regimul nominal. Regimurile oarecare pot fi clasificate, la rândul lor, în **regimuri normale**, **regimuri de avarie** ș.a.m.d.