EST066 – Estatística Computacional II – 2025/1

Prof. Lupércio F. Bessegato

Atividade nº 1 – Geração de Números Aleatórios

Instruções para entrega da lista:

a) Para fins do desenvolvimento desta lista a variável `mat` refere-se à sequência do 7º, 8º e 9º algarismo de sua matrícula
b) A resolução da lista deve estar apresentada em documento extensão `.html`, ou `.pdf`, gerada em R Markdown. Fazer o upload do relatório em R Markdown no Moodle até a data marcada.
c) O arquivo com o relatório de respostas deverá ser denominado `066-251_At01-SEUNOME.extensao`. (`.html` ou `.pdf`)
d) Não esqueça de se identificar no preâmbulo do arquivo, além de rotular corretamente as questões cujos comandos e resultados você estará apresentando.
e) Apresente todos os comandos que utilizou para obter os resultados solicitados. Preserve a ordem das questões e responda brevemente suas justificativas e comentários.
f) Não hesite em procurar-me caso tenha alguma dúvida com relação à solução da presente lista de exercícios, por meio do Fórum de Dúvidas.

1. Calcule a forma explícita da função quantílica e implemente gerador de números aleatórios das seguintes distribuições:
   a. Weibull. [alunos com `mat (mod 3) = 0`]
   b. Pareto. [alunos com `mat (mod 3) = 1`]
   c. Valor extremo. [alunos com `mat (mod 3) = 2`]

2. Use o método da inversa para gerar uma variável aleatória com a seguinte função de distribuição acumulada:
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } x > 1 \\ \frac{x^2+x}{(2} & , \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & , \text{se } x < 0 \end{cases}$$

3. Apresente o código de um método para gerar uma variável aleatória com a seguinte função de densidade de probabilidade:
$$f_X(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Mostre que se $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, então $X = \ln \frac{u}{1-u}$ é uma variável aleatória Logística(0, 1). Mostre também como gerar uma variável aleatória Logística(μ, β).

5. Para $\alpha \in [0,1]$, mostre que o algoritmo a seguir:
   Gerar $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ até $U < \alpha$
   produz uma simulação de $\mathcal{U}(0,\alpha)$ e o compare com a transformação αUpara valores de a próximos de 1.

6. Seja o gerador linear congruencial dado por:
$$x_i \equiv (ax_{i-1} + c) \bmod m$$
   Em que `a` é chamado multiplicador, `c`, incremento e `m`, módulo do gerador. Frequentemente, `c` é igual a `0` e, neste caso, o gerador é denominado *gerador congruencial multiplicativo*. Com essas considerações, execute o que se segue:

a. Implemente um código em R para construir um gerador de números pseudoaleatórios, usando um método congruencial multiplicativo com `m = 2^13 - 1` e `a = 17`.
b. Gere 500 números x_i.
c. Calcule a correlação dos pares de números sucessivos x_{i+1} e x_i.
d. Plote os pares. Em quantas linhas estão os pontos estão situados?
e. Agora, faça `a = 85`. Gere 500 números, calcule a correlação dos pares e plote-os.
f. Verifique os pares x_{i+2} e x_i. Calcule sua correlação.
g. Comente o que julgar pertinente.

7. Deseja-se construir um gerador da distribuição de Cauchy. Compare o método da inversão com outro baseado na geração de par de números aleatórios normais gerados pelo método polar de Box-Muller.

   a. Mostre que, se X_1 e X_2 são independentes e identicamente distribuídas de acordo com a normal padrão, então $Y = \frac{X_1}{X_2}$ tem distribuição de Cauchy.

   b. Mostre que a função de distribuição acumulada da variável aleatória de Cauchy é $F(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi}$ e implemente gerador dessa distribuição usando o método da inversão.

   c. Algum desses métodos é superior? Justifique.

   d. Use o gerador de sua preferência e elabore código para verificar empiricamente o Teorema Central do Limite, simulando médias amostrais de amostra aleatória (variáveis aleatórias iid) de população de Cauchy.

8. Implemente código em R para gerar números aleatórios de uma distribuição $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$, com a seguinte função de densidade de probabilidade:
   a. Use o algoritmo de aceitação/rejeição baseado na distribuição uniforme.
   b. Use o algoritmo de aceitação/rejeição baseado em beta gerada de acordo com a transformação apresentada no exemplo 2.2 de Robert e Casella (2010), pág. 69 (do pdf).
   c. Compare graficamente esses dois procedimentos, apresente os pontos gerados em cores diferentes para quando situarem-se na região de aceitação ou de rejeição. Apresente o porcentual de pontos gerados nas duas regiões. Comente.
9. Seja *X* uma variável aleatória exponencial com média 1. Crie um código com um algoritmo eficiente para simular uma variável aleatória cuja distribuição é a distribuição condicional de *X*, dado que *X* < 0,05, ou seja, cuja função de densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-0,05}} & \text{, se } 0 < x < 0,05; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   a. Estime $\mathrm{E}(X|X < 0,05)$ por meio de 1.000 números aleatórios dessa variável.
   b. Determine o valor exato de $\mathrm{E}(X|X < 0,05)$ e compare com o resultado obtido em (a).

10. Use o resultado apresentado no exercício 7, página 92, de ROSS (2006) e construa algoritmo para gerar variável aleatória com função de distribuição acumulada, apresentada abaixo. Avalie seu desempenho:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}+2x}{3} & \text{, se } 0 < x < 1; \\ \frac{3-\mathrm{e}^{-2x}}{3} & \text{, se } 1 < x < \infty \end{cases}$$

Fontes:

- GENTLE, J. E. *Random number generation and Monte Carlo methods*. 2nd. edition. New York: Springer, 2003.
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Monte Carlo statistical methods*. New York: Springer, 1999.
- ROBERT, C. P.; CASELLA, G. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. New York: Springer, 2010.
- ROSS, S. *Simulation*, 5th. Ed. London, UK: Academic Press, 2012.