Стабло вероватноће

Стабло вероватноће, због своје прегледности и систематичности, врло често се примењује за рачунање вероватноће низа догађаја. Из тог разлога, можемо га искористити и у овом кратком примеру.

Узмимо пример крвних група. Случајно одабрана осба може имати једну од ледећих комбинација крвних група и Rh фактора

- 0+
- А+
- Б+
- АБ+
- 0-
- А-
- Б-
- АБ-

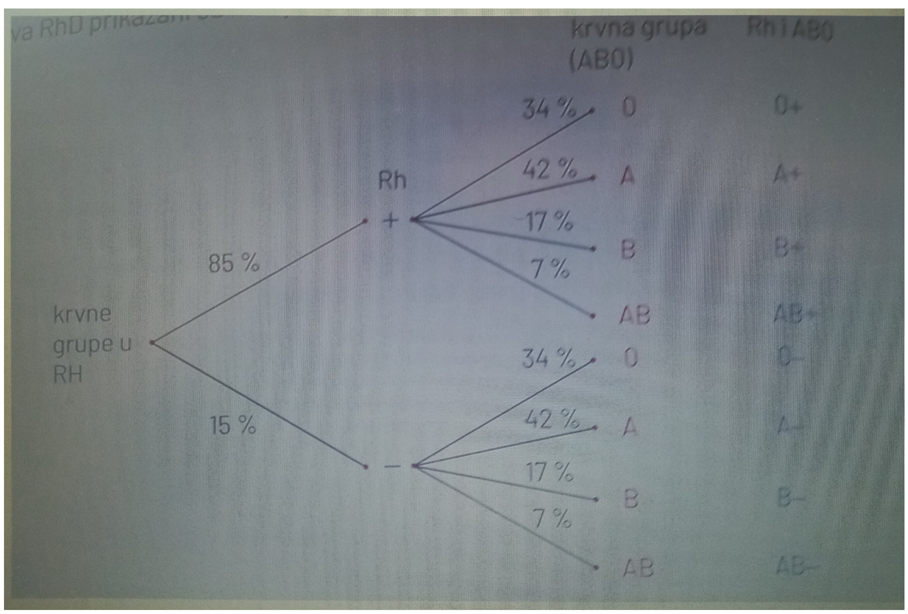

Figure 1:

Подаци о распрострањености крвних група у Хрватској из састава АБО и подаци уз састава RhD приказају се преко стабла вероватноће.

Прво гранање показује да је у Хрватској 85% становништва R_h позитивно, а 15% Rh негативно, односно вероватноћа да је особа R_h позитивна износи 0,85 а да је R_h негативна 0,15.

Друго гранање наставља се на сваку од претходних грана, а показује вероватноћу да нека особа има крвну групу 0, А, Б или АБ.

Уколико се користе подаци са једне гране са првог и једне гране са другог гранања која је са њом повезана може се израчунати вероватноћа свих комбинација крвне групе и R_h фактора.

На пример, будући да 34% особа има крвну групу 0, рачунамо да ће 34% од 85% R_h позитивних особа имати крвну групу 0, па је $p(0+) = 0,34 \cdot 0,85 = 0,289$.

Слично се рачуна и за остале комбинације:

- $p(\text{А}+) = 0,85 \cdot 0,42 = 0,357$
- $p(\text{Б}+) = 0,85 \cdot 0,17 = 0,1445$
- $p(\text{АБ}+) = 0,85 \cdot 0,07 = 0,0595$
- $p(0-) = 0,15 \cdot 0,34 = 0,051$
- $p(\text{А}-) = 0,15 \cdot 0,42 = 0,063$
- $p(\text{Б}-) = 0,15 \cdot 0,17 = 0,0255$
- $p(\text{АБ}-) = 0,15 \cdot 0,07 = 0,0105$

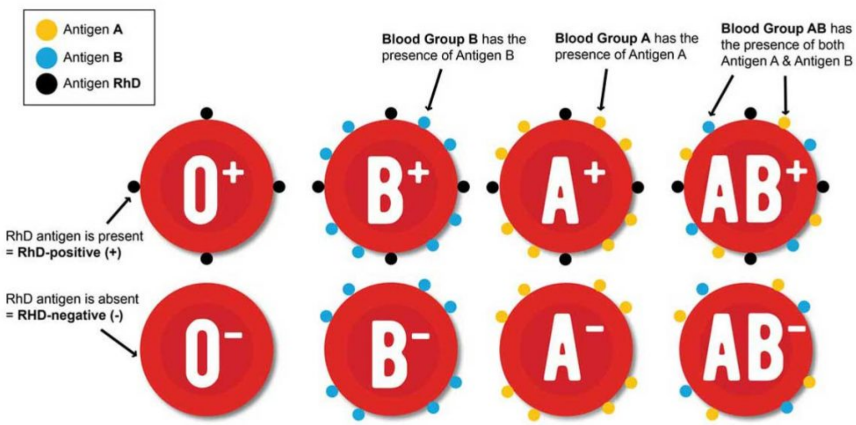

Figure 2:

Уочимо да је збир вероватноћа у сваком гранању једнак 1, као и збир вериватноћа коначних исхода јер су то сви могући исходи за постављен експеримент.

Задатак за самосталан рад

Нацртај стабло вероватноће за експеримент бацања три новчића.

Независни догађаји

Пример 1

Бацамо новчић и коцку. Новчић је могао пасти на писмо или главу, а на коцки један од шест бројева.

- Зависи ли исход бацања коцке од исхода бацања новчића?

Јасно је да та два догађаја нису повезана, односно да исход једног од њих не утиче на исход другог.

- У вероватноћи се овакви догађаји означавају као *независни догађаји*.
- Како независност утиче на вероватноћу?
- Погледати **Пример 1**.

Пример 2

Бацамо новчић и коцку. Нека су догађаји:

1. А = {новчић је пао на писмо}
2. Б = {на коцки је пао број 4}

- Одредимо вероватноћу $p(\text{А})$ и $p(\text{Б})$.
- Колика је вероватноћа да је пало писмо и број 4?

Израчунати умножак $p(\text{А}) \cdot p(\text{Б})$ и упоредити резултате.

Решење

- Бацање новчића има 2 једнако вероватна исхода па је $P(\text{А}) = \frac{1}{2}$
- Бацање коцке има 6 једнако вероватних исхода па је $P(\text{Б}) = \frac{1}{6}$
- Бацање новчића и коцке има $2 \cdot 6$ једнако вероватних исхода па је $P(\text{А} \cap \text{Б}) = \frac{1}{12}$

Дакле,

- $P(\text{А} \cap \text{Б}) = P(\text{А}) \cdot P(\text{Б})$
- Видели смо у претходном примеру да за независне догађаје вреди $P(\text{А} \cap \text{Б}) = P(\text{А}) \cdot P(\text{Б})$. То се често користи и као дефинција вероватно независних догађаја.

Дефинција

- За два догађаја А и Б кажемо да су независни ако важи:
- $p(\text{А} \cap \text{Б}) = p(\text{А}) \cdot p(\text{Б})$

Ако је интуитивно јасно или из текста задатка да су догађаји независни, дефиниција незвисности се употребљава за рачунање *вероватних пресека*.

Пример 3

У кутији се налази 8 црвених и 5 плавих куглица. Извучемо једну куглицу, вратимо је у кутију, па извучемо још једну.

- Колика је вероватноћа да је прва извучена куглица црвена, а друга плава?
- Колика је вероватноћа да су извучене црвена и плава куглица?

Figure 3:

Решење

- У кутији је 13 куглица. Означима са А и Б догађаје:
- А = {прва куглица је црвена}
- Б = {друга куглица је плава}

Након што извучемо једну куглицу, вратимо је у кутију. За друго извлачење имамо 13 куглица у кутији па је јасно да исход првог извлачења не утиче на исход другог извалачења, односно да су догађаји А и Б независни.

- $p(\text{А} \cap \text{Б}) = p(\text{А}) \cdot p(\text{Б}) = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{40}{169}$
- Догађај Ц = {извучене су црвена и плава куглица} можемо записати као унију догађаја {прва куглица је црвена, друга куглица је плава} и {прва куглица је плава, друга куглица је црвена}.
- Догађај {прва куглица је плава} = {друга куглица није плава} = Г
- Аналогно, {друга куглица је црвена} = {друга куглица није плава} = Д
- Сада је $p(\text{Ц}) = p((\text{А} \cap \text{Б}) \cup (\text{Г} \cap \text{Д})) = p(\text{А} \cap \text{Б}) + p(\text{Г} \cap \text{Д}) = (\frac{8}{13} \cdot \frac{5}{13}) + (\frac{5}{13} \cdot \frac{8}{13}) = \frac{80}{169}$

Задатак за самосталан рад

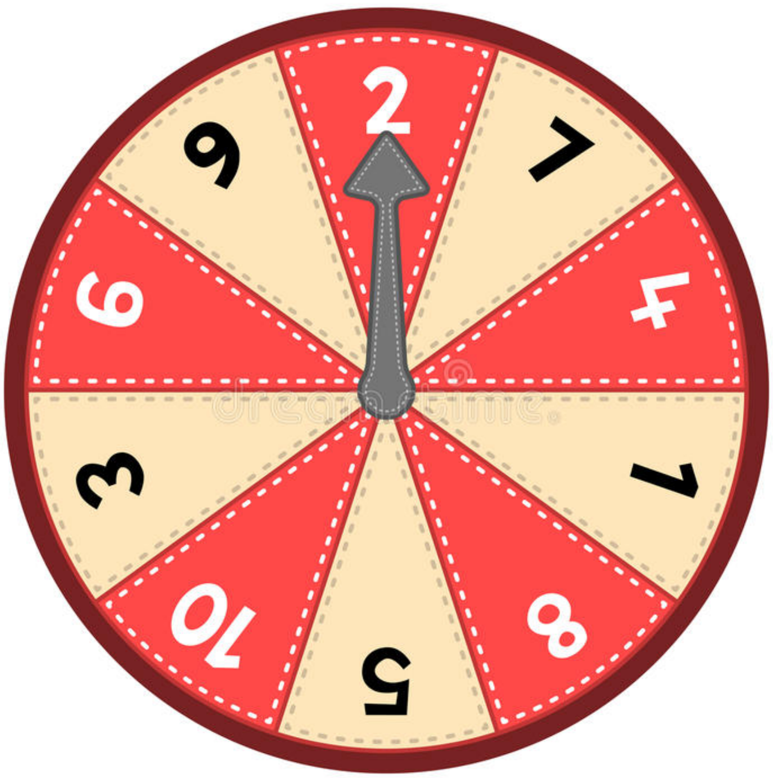

Figure 4:

- Два пута завртимо коло среће са слике. Колика је вероватноћа да смо:

а) први пут добили број мањи од 4, а други пут паран број

б) оба пута добили паран број

ц) први пут добили црвено, а други пут непаран број?

Пример 4

Три стрелца независно један од другог гађају мету. Вероватноћа њихових погодака су редом $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$. Колика је вероватноћа догађаја:

- сва 3 стрелца су погодила мету

- тачно је један стрелац погодио мету
- барем је један стрелац погодио мету

Figure 5:

Решење:

- А = {први стрелац је погодио мету}
- Б = {други стрелац је погодио мету}
- Ц = {трећи стрелац је погодио мету}

Овде је задато да су догађаји А, Б и Ц независни.

Сада је $p(\text{А} \cap \text{Б} \cap \text{Ц}) = p(\text{А}) \cdot p(\text{Б}) \cdot p(\text{Ц}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$

- Догађај {тачно један стрелац је погодио мету} = {први је погодио и други није погодио и трећи није погодио или први није погодио и други није погодио и трећи је погодио}
- Сва три случаја се међусобно искључују, а погодак или промашај једног од стрелаца не утиче на остала два стрелца. Сада је: $p((\text{А}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц})){\cup}((\bar{\text{А}}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц})){\cup}((\bar{\text{А}}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц})) = p((\text{А}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц}))+((\bar{\text{А}}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц}))+((\bar{\text{А}}{\cap}\text{Б}{\cap}\text{Ц})) = p(\text{А}){\cdot}p(\text{Б}){\cdot}p(\text{Ц})+p(\bar{\text{А}}){\cdot}p(\text{Б}){\cdot}p(\text{Ц})+p(\bar{\text{А}}){\cdot}p(\text{Б}){\cdot}p(\text{Ц}) = \frac{3}{5}{\cdot}\frac{1}{3}{\cdot}\frac{1}{6}+\frac{2}{5}{\cdot}\frac{2}{3}{\cdot}\frac{1}{6}+\frac{2}{5}{\cdot}\frac{1}{3}{\cdot}\frac{5}{6} = \frac{17}{90}$
- Догађај (барем је један стрелац погодио мету) је унија догађаја А, Б и Ц, односно мету је погодио тачно један стрелац или тачно два стрелца или тачно три стрелца. Међутим, тај догађај је супротан догађају {ниједан стрелац није погодио}, што је једноставније израчунати.
- p {барем је један стрелац погодио} = 1 - p {ниједан стрелац није погодио}

  $p(\text{А} \cap \text{Б} \cap \text{Ц}) = 1 - p(\bar{\text{А}} \cap \text{Б} \cap \text{Ц}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{44}{45}$

Задатак за самосталан рад 2

Вероватноћа да Луција закасни у школу је 0,3 , вероватноћа да Ива закасни је 0,1 док је вероватноћа да Дорија закасни 0,35. Њихови доласци у школу су међусобно независни. Колика је вероватноћа да неки дан тачно две закасне у школу?

Напомена

Дефиниција нам омогућава и једноставну проверу независности неких догађаја у којима се вероватноћа пресека може израчунати на неки други начин.

Пример 5

У некој породици са троје деце свако је с једнаком вероватноћом девојчица или дечак, независно од остале деце. Нека су догађаји:

- А = {сва деца су истог пола}
- Б = {највише је једно дете девојчица}
- Ц = {барем је једно дете девојчица}
- Покажимо да су А и Б, те и Б и Ц међусобно независни. Јесу ли А и Ц међусобно независни?

Figure 6:

Решење

Решење се добије цртањем стабла вероватноће након што девојчицу означимо са Ж, а дечака са М.

- А = {ЖЖЖ, МММ}
- Б = {ЖММ, МЖМ, ММЖ, МММ}
- Ц = {ЖЖЖ, ЖЖМ, ЖМЖ, ЖММ, МЖЖ, МЖМ, ММЖ}

Будући да је А ∩ В = {МММ}, следи

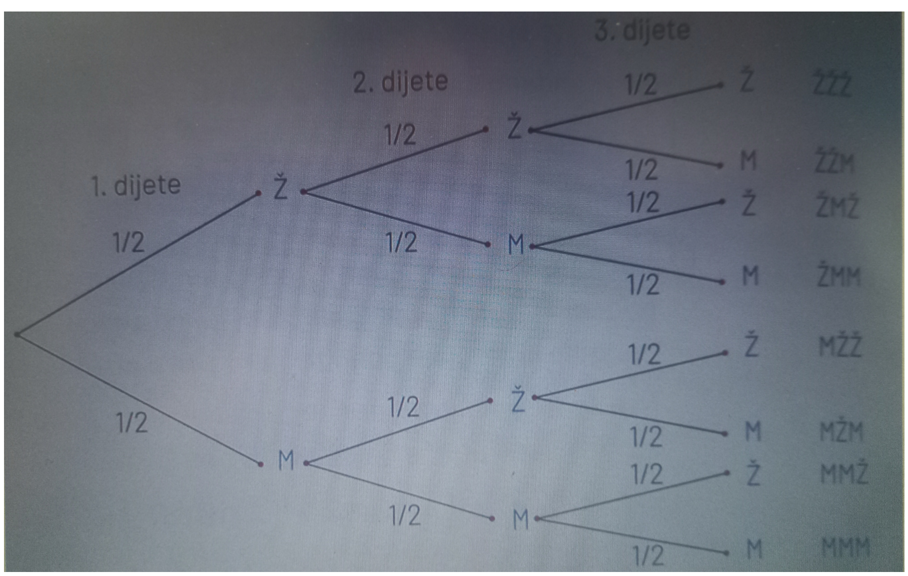

Figure 7:

- $p(А) \cdot p(Б) = \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{8} = p(А \cap Б)$ чиме смо доказали да су догађаји А и Б независни.
- Из $Б \cap Ц = ЖММ, МЖМ, ММЖ$ следи $p(Б) \cdot p(Ц) = \frac{4}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{8} = p(Б \cap Ц)$ па су и догађаји Б и Ц независни.
- Видимо да је $А \cap Ц = ЖЖЖ$ па је $p(А) \cdot p(Ц) = \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$ што није $p(А \cap Ц) = \frac{1}{8}$
- Следи да А и Ц нису независни догађаји.

Дефиниција:

- Три догађаја А, Б и Ц су независна ако је:
- $p(А \cap Б) = p(А) \cdot p(Б)$
- $p(А \cap Ц) = p(А) \cdot p(Ц)$
- $p(Б \cap Ц) = p(Б) \cdot p(Ц)$
- $p(А \cap Б \cap Ц) = p(А) \cdot p(Б) \cdot p(Ц)$

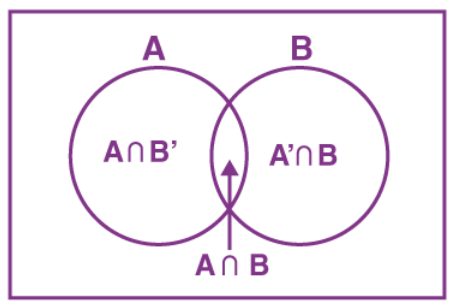

Figure 8:

Пример 6

Бацамо две симетричне коцке и разматрамо 3 догађаја:

- А = {на првој је коцки пао број 1 или 2 или 3}
- Б = {на другој коцки је пао број 4 или 5 или 6}
- Ц = {збир добијених бројева је 9}
- Јесу ли сва три догађаја међусобно независна?

Решење

Сваки од 36 елементарних догађаја једнако је могућ па знамо израчунати вероватноћу:

- $p(А) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, p(Б) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, p(Ц) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- Будући да је $А \cap Б \cap Ц = (3, 6)$, следи
- $p(А \cap Б \cap Ц) = \frac{1}{36} = p(А) \cdot p(Б) \cdot p(Ц)$.
- Треба још израчунати и вероватноћу по паровима:
- $p(А \cap Б) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = p(А) \cdot p(Б)$
- $p(А \cap Ц) = \frac{1}{36} = p(А) \cdot p(Ц)$
- $p(Б \cap Ц) = \frac{1}{12} = p(Б) \cdot p(Ц)$

Закључак је да сва три догађаја *нису* међусобно независна.

Задатак 3 за самосталан рад

1. Бацамо две симетричне коцке и посматрамо следећа три догађаја:

- А = {на првој коцки је пао број 4}
- Б = {на другој коцки је пао број 1}
- Ц = {збир добијених бројева је 5}
- Јесу ли сва три догађаја међусобно независна?

Задаци и питалице за проверу знања о независним догађајима

question172

Три пута бацамо коцку. Колика је вероватноћа да смо добили:

question171

Матеја и Немања бирају место за годишњи одмор. У ужем избору су им заливи Крк, Пашман и Дуги оток а на копну градови Сплит, Задар, Пула, Макрска и Цриквеница. Сва места су написали на папириће и извлаче два папирића. Колика је вероватноћа да ће извући (означи тачан одговор):

question1790

Када су догађаји А, Б и Ц независни? Када је:

question179090

Изабери тачне тврдње о независним догађајима:

Занимљив видео клип о независним догађајима

7QlZjoLmg3I