Случајне променљиве и расподеле

Опште о случајним променљивим

**У овој лекцији научићеш:**

* шта су случајне променљиве и како се означавају
* шта представља појама реализација
* који типови случајних променљивих постоје

Размотримо експеримент који се састоји у мерењу висине становника једног места. Становник се бира случајним одабиром, па му се мери висина. Изабраном становнику се такође може мерити и тежина, он се може питати за број деце, лични доходак и сл. Ако изабраног становника замислимо као исход експеримента избора становника, тада су висина, тежина, лични доходак неке његове особине - овде нумеричке. Можемо посматрати и ненумеричке особине: боју косе, здравље, припадност друштвеним организацијама, занимање итд. Свака ненумеричка особина се може на погодан начин представити као нумеричка. Нпр. можемо пописати сва занимања и доделити сваком по један број. Тада сваки изабрани човек има као занимање одговарајући додељени број.

Нумеричка вредност које својство исхода има, у принципу се мења од исхода до исхода, па је то својство једна нумеричка функција дефинисана на скупу исхода експеримената ɛ, са вредностима у скупу реалних бројева (тј. функција која пресликава ɛ у R).

У анализи се за ознаку функције обично узимају симболи f,g,h и сл., а за вредности f(x), g(x), h(x). У вероватноћи се обично за ознаку променљиве узимају велика слова X,Y,Z,.. а како су аргументни исходи e, то су одговарајуће вредности X(e), Y(e), Z(e).

**Пример** Динар се баца 3 пута. Нека је променљива X-број грбова у 3 бацања, Y-број писама заредом од почетка Z-број грбова у последња два бацања. Исписати табелу пресликавања.

*Решење* Погодно је направити табелу пресликавања:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| е | ППП | ППГ | ПГП | ПГГ | ГПП | ГПГ | ГГП | ГГГ |
| X | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| Y | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Z | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 |

Како се исход експеримента не може предвидети, не може се предвидети ни вредност променљиве X. Зато су нам од интереса вероватноће догађаја {X∈S}, за различите S. Најчешће се посматрају догађаји {a≤X<b}, {X<b}, {X=a}, {X>c} јер се за њих може лако видети да ли су се реализовали (a,b,c - константе), а преко њих се могу изаразити и много сложенији догађаји. У датом примеру P{X=1}=P{ППГ, ПГП, ГПП}=3/8, P{Y=3}=1/8, P{0≤Z<2}=6/8, тј. уопштено P{X∈S}=P{e: X(e)∈S}. Са те тачке гледишта, нема смисла разматрати оне променљиве X код којих се, нпр. не може одредити P{X≥2}. Зато се уводи следећа

*Дефиниција* Променљива X (X: ɛ → R) је случајна променљива ако је за сваки догађај {X<a}, {X=b}, a,b ∈ R дефинисана вероватноћа , тј. ако {X<a} ∈ F, {X=b} ∈ F.

Вредност случајне променљиве X не мора бити сваки реални број. Зато ћемо скуп слика RP{X(e): e∈ɛ} назвати скуп реализација сличних променљивих X а сам вредности X(e)=x - реализацијама сличне променљиве X. Треба запамтити: реализације означавамо малим словима x, y, z,... а случајне променљиве великим X, Y, Z,..

**\*Задатак 1**\*. У џепу се налазе 3 новчића од по 10 пара, 2 по 20 и 1 од 50 пара. Извлаче се на случајан начин 2 новчића заједно. Посматрамо укупну вредност X извученог новца.

1. Описати X као променљиву на скупу исхода,
2. Преко исхода извлачења описати догађаје {X=20}, {X<15}, {X≥50}

*Решење:*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| е | е1 | е2 | е3 | е4 | е5 |
| исход | 10 10 | 10 20 | 10 50 | 20 20 | 20 50 |
| X(e) | 20 | 30 | 60 | 40 | 70 |

{X=20} = {е1}, {X<15}=∅, {X≥50}={е3,е5}

**\*Задатак 2**\*. У задатку 1. одредити скуп реализација за X и одговарајуће вероватноће. Нека је Y-број новчића од 10 пара међу извученима. Одредити реализације за (X,Y).

*Решење* Реализације за X су 20, 30, 40, 60, 70 пара. Реализације за (X,Y) су (20,2), (30,1), (60,1), (40,0) (70,0) - што се чита из табеле у претходном задатку. Реализације за Y су 0, 1, 2.

**Задатак 3**. Изводи се 4 гађања у циљ. Нека је X број погодака за редом од почетка, Y број промашаја, Z дужина највеће серије погодака који иду за редом.

1. На скупу исхода дефинисати (X,Y,Z),
2. Одредити догађаје {X≥Y}, {Z≥2}, {max{X,Z}≤Y}, {X+Y=3}.

*Решење:* X,Y,Z дефинисаћемо преко табеле

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| e | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| X | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| Y | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| Z | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 |

{X≥Y} = {e12, e13, ..., e16}, {Z≥2}={e4, e7, e8, e12, e13, ..., e16}, {max{X,Z}≤Y}={e1, e7, e9, e10, e11, e13}, {X+Y=3}={e2, e3, e5, e10, e11, e14}

**Задатак 4**. Нека променљива X има коначно много реализација. Да би X била случајна промељива, довољно је да за сваки b∈R {X=b} ∈ F, тј. да сви догађаји {X=b} имају вероватноћу. Доказати.

*Решење:* Треба испитати да ли догађаји {X<a} ∈ F, за a ∈ R, ако {X=h} ∈ F, за h ∈ R. Нека су реализације за X:x1<x2<...xk. По претпоставци {X=xi} ∈ F, i=0, 1, 2, ..., k. Међутим, {X<а}=∅, ако је a≤x1, {X>а}=ɛ, ако је a>xk и {X<a}={X=x1} + {X=x2}+ ... + {X=xj}, за xj<a≤xj+1. То значи да је догађај {X<a} комбинација догађаја ∅, ɛ и {X=x1}, ..., {X=xk}, а свака њихова комбинација (унија) по дефиницији припада F, тј. {X<a} ∈ F, за a ∈ R.

**Задатак 5**. На шаховској табли се на случајан начин бира једно поље. Нека је Z број суседних белих а V суседних црних поља за изабрано поље. Описати (Z,V) на скупу исхода и одредити вероватноће свих реализација.

*Решење:* Да бисмо скратили писање, уводимо ознаке: B-бело поље, C-црно поље, I-поље на углу, II-поље на ивици ван угла, III-поље унутар табле. За суседна узимамо и она која се додирују теменима. На тај начин имамо 6 типова поља. Направимо табелу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| тип поља | CI | BI | CII | BII | CIII | BIII |
| број исхода | 2 | 2 | 12 | 12 | 18 | 18 |
| Z | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 |
| V | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 |

Тада је P(Z=2, V=1)=P(Z=1, V=2) 2/5, P(Z=3, V=2)=P(Z=2, V=3)=12/64, P(Z=4, V=4)=36/64

Надаље се разматрају два типа случајних променљивих: дискретне и апсолутно непрекидне. Надаље ћемо разматрати два типа слуајних променљивих: дискретне и апсолутно непрекидне. Дискретне случајне променљиве имају коначно много вредности {X1, X2, . . . , Xn} или пребројиво бесконачно много вредности {X1, X2, X3, . . .}. Апсолутно непрекидне случајне променљиве имају непребројиво много вредности. Постоје случајне променљиве које не одговарају ни једном од ова два типа.

За додатно објашњење случајних променљивих погледај следећи видео

3v9w79NhsfI