DEVOIR MAT8780

B-Partie informatique

Il est fortement recommandé que des commentaires soient incorporés à l'intérieur de vos scripts (programmes) pour permettre à l'utilisateur de mieux comprendre certaines lignes ou ensembles de lignes d'instructions

1 Soit la fonction de densité suivante définie sur $\mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2}\right)$$

où $a, b > 0$.

a) Construisez un script MatLab permettant de simuler N nombres tirés de cette densité en utilisant la méthode d'acceptation-rejet où plus précisément l'utilisateur devra choisir entre les densités suivantes pour fin de comparaison

$$g_1(x) = \frac{a}{(a+x)^2} \text{ ou } g_2(x) = \frac{b}{(b+x)^2}$$

les tirages provenant de ces dernières densités s'effectuant à l'aide de la méthode d'inversion.

En plus des nombres simulés, votre script devra fournir le nombre total d'itérations effectuées lors de l'utilisation de la méthode d'acceptation-rejet (nombre de passages dans la boucle).

b) En utilisant à chaque fois le même germe du générateur de nombres aléatoires de MatLab, utilisez votre programme pour produire 1000 nombres tirés de la densité f pour les valeurs $a = 1$ et $b = 2$

i) en prenant la densité g_1 pour comparaison

ii) en prenant la densité g_2 pour comparaison

puis comparez le nombre total d'itérations obtenues lors de l'utilisation de la méthode d'acceptation-rejet pour chacun des choix en i) et ii)

2 Construisez un script MatLab permettant de simuler N couples (x, y) tirés de la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2e^{-(x+y)}}{(1+e^{-x}+e^{-y})^3}, \ -\infty < x, y < \infty$$

puis, à partir de ce script, générez 10000 couples (x, y) tirés de la densité f afin d'estimer la covariance $COV(X,Y)$

3 En mathématique, la constante d'Euler-Mascheroni est définie par

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right]$$

cette limite convergeant lentement, en pratique il est préférable d'évaluer cette valeur par le biais d'expressions intégrales équivalentes comme celle-ci

$$\int_0^1 -\ln(-\ln(x))\,dx$$

qui peut notamment être estimé par une simulation Monte Carlo.

a) Soit U la variable uniforme sur $[0,1]$ à la base de la simulation Monte Carlo, construisez des scripts MatLab, permettant d'évaluer l'intégrale en utilisant comme variable de contrôle

i) $Y = U$

ii) $Y = \ln(U)$

b) Utilisez chacun de ces scripts pour évaluer γ à l'aide de 1000 valeurs tirés d'une loi uniforme sur $[0,1]$ puis comparez les résultats

4 Soit X une chaîne de Markov à temps discret à k états avec matrice de transition

$$P = [p_{ij}]_{1\le i,j\le k}$$

a) Construisez un script MatLab permettant de simuler N trajectoires de n pas telles que, pour i_0 et i_n fixés, $X(0) = i_0$ et $X(n) = i_n$

b) Si la matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

en générant 1000 trajectoires, utilisez le script pour évaluer la probabilité suivante :

$$P(X(0) = 2, X(5) = 2, X(i) \neq 2, i = 1,2,3,4)$$

5 Soit W un mouvement brownien standard,

a) Construisez un script MatLab permettant de simuler N trajectoires sur l'intervalle de temps $[0, T]$ à des instants équidistants de Δ unités et permettant de trouver

$$P\left(\exists t \in [0,1], W(t) \geq L\right)$$

b) En utilisant 10000 simulations de trajectoires sur l'intervalle $[0, 1]$ à des instants équidistants de 0,01 unités, évaluez

$$P\left(\exists t \in [0,1], W(t) \geq 1\right)$$

c) Sachant que pour $y_1, y_2 < 1$,

$$P\left(\exists t \in [t_1, t_2], W(t) \geq 1 | W(t_1) = y_1, W(t_2) = y_2\right) = \exp\left(-\frac{(1-y_1)(1-y_2)}{2(t_2-t_1)}\right)$$

modifiez le script en a) pour améliorer l'estimé de probabilité et utilisez celui-ci pour donner un nouvel estimé en b)