Условие:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ПОТРЕБИТЕЛИ  ПОСТАВЩИКИ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ЗАПАСЫ |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3** | **170** |
| 2 | **12** | **2** | **10** | **7** | **9** | **15** | **115** |
| 3 | **3** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2** | **12** | **6** | **102** |
| ПОТРЕБНОСТИ | **145** | **109** | **133** | **195** | **97** | **165** |  |

Для разрешимости транспортной задачи необходимо, чтобы суммарные запасы продукции у поставщиков равнялись суммарной потребности потребителей. Проверим это условие.

∑запасы = 170 + 115 + 152 + 161 + 102 = 700

∑потребности = 145 + 109 + 133 + 195 + 97 + 165 = 844

Так как запасы поставщиков меньше потребности потребителей, введем фиктивного поставщика 6, с запасом продукции равным 844-700=144. Стоимость доставки единицы продукции от фиктивного поставщика ко всем потребителям примем равной нулю.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3** | **170** |
| 2 | **12** | **2** | **10** | **7** | **9** | **15** | **115** |
| 3 | **3** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2** | **12** | **6** | **102** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **145** | **109** | **133** | **195** | **97** | **165** |  |

Теперь выполняется условие.

Этап I

*Метод наименьшей стоимости*

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают клетку с наименьшей стоимостью, для этой ячейки присваиваем меньшее из чисел ai, или bj. Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Повторяем, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен c22=2

x22 = min(109,115) = 109.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3** | **170** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **115 – 109 = 6** |
| 3 | **3** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2** | **12** | **6** | **102** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **145** | **109-109 = 0** | **133** | **195** | **97** | **165** |  |

Искомый элемент равен c54=2.

x54 = min(102,195) = 102.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3** | **170** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **102-102= 0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **145** | **0** | **133** | **195 – 102 = 93** | **97** | **165** |  |

Искомый элемент равен c16=3.

x16 = min(165,17) = 165.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3 | 165** | **170-165 = 5** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **145** | **0** | **133** | **93** | **97** | **165 – 165 = 0** |  |

Искомый элемент равен c31=3.

X31 = min(145,152) = 145.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3 | 165** | **5** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4** | **13** | **152-145 = 7** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **145 – 145 = 0** | **0** | **133** | **93** | **97** | **0** |  |

Искомый элемент равен c35=4.

X35 = min(7,97) = 7.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5** | **13** | **3 | 165** | **5** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **7 – 7 = 0** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **0** | **0** | **133** | **93** | **97 – 7 = 90** | **0** |  |

Искомый элемент равен c14=5.

x14 = min(5,93) = 5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **5 – 5 = 0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5** | **15** | **4** | **161** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **0** | **0** | **133** | **93 – 5 = 88** | **90** | **0** |  |

Искомый элемент равен c44=5.

x44 = min(161,88) = 88.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9** | **15** | **6** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5 | 88** | **15** | **4** | **161 – 88 = 73** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **0** | **0** | **133** | **88 – 88 = 0** | **90** | **0** |  |

Искомый элемент равен c25=9.

x25 = min(6,90) = 6.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9 | 6** | **15** | **6 – 6 =0** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12** | **5 | 88** | **15** | **4** | **73** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **0** | **0** | **133** | **0** | **90 – 6 = 84** | **0** |  |

Искомый элемент равен c43=12.

x43 = min(73,133) = 73.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9 | 6** | **15** | **0** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12 | 73** | **5 | 88** | **15** | **4** | **73 – 73 = 0** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **144** |
| Потребность | **0** | **0** | **133 – 73 = 60** | **0** | **84** | **0** |  |

Искомый элемент равен c63=0.

x63 = min(144,60) = 60.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9 | 6** | **15** | **0** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12 | 73** | **5 | 88** | **15** | **4** | **0** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 0 | **144 – 60 = 84** |
| Потребность | **0** | **0** | **60 – 60 = 0** | **0** | **84** | **0** |  |

Искомый элемент равен c65=0.

x65 = min(84,84) = 84.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9 | 6** | **15** | **0** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12 | 73** | **5 | 88** | **15** | **4** | **0** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 84 | 0 | **84 – 84 = 0** |
| Потребность | **0** | **0** | **0** | **0** | **84 – 84 = 0** | **0** |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | **14** | **4** | **8** | **5 | 5** | **13** | **3 | 165** | **0** |
| 2 | **12** | **2 | 109** | **10** | **7** | **9 | 6** | **15** | **0** |
| 3 | **3 | 145** | **7** | **13** | **10** | **4 | 7** | **13** | **0** |
| 4 | **6** | **12** | **12 | 73** | **5 | 88** | **15** | **4** | **0** |
| 5 | **5** | **13** | **11** | **2 | 102** | **12** | **6** | **0** |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 84 | 0 | **0** |
| Потребность | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность потребителей удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число базисных переменных. Их должно быть m + n - 1 = 11

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 5\*5 + 3\*165 + 2\*109 + 9\*6 + 3\*145 + 4\*7 + 12\*73 + 6\*88 + 2\*102 + 0\*60 + 0\*84 = 2863

Этап II

*Метод потенциалов*

Каждому поставщику ai ставим в соответствие некоторое число - ui, называемое потенциалом поставщика. Каждому потребителю bj ставим в соответствие некоторое число - vj, называемое потенциалом потребителя. Для базисной ячейки (задействованного маршрута), сумма потенциалов поставщика и потребителя должна быть равна тарифу данного маршрута.

ui + vj = cij

Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 5; 0 + v4 = 5; v4 = 5

u1 + v6 = 3; 0 + v6 = 3; v6 = 3

u4 + v4 = 5; 5 + u4 = 14; u4 = 0

u4 + v3 = 12; 0 + v3 = 12; v3 = 12

u6 + v3 = 0; 12 + u6 = 0; u6 = -12

u6 + v5 = 0; -12 + v5 = 0; v5 = 12

u2 + v5 = 9; 12 + u2 = 9; u2 = -3

u2 + v2 = 11; -3 + v2 = 2; v2 = 5

u5 + v4 = 2; 5 + u5 = -2; u5 = -3

u3 + v5 = 4; 12 + u3 = 4; u3 = -8

u3 + v1 = 3; -8 + v1 = 3; v1 = 11

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | U |
| b 1 | b 2 | b3 | b 4 | b 5 | b 6 |
| a 1 | 14 | 4 | 8 | 5 | 5 | 13 | 3 | 165 | u1 = 0 |
| a 2 | 12 | 2 | 109 | 10 | 7 | 9 | 6 | 15 | u2 = -3 |
| a 3 | 3 | 145 | 7 | 13 | 10 | 4 | 7 | 13 | u3 = -8 |
| a 4 | 6 | 12 | 12 | 73 | 5 | 88 | 15 | 4 | u4 = 0 |
| a 5 | 5 | 13 | 11 | 2 | 102 | 12 | 6 | u5 = -3 |
| a 6 | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 84 | 0 | u6 = -12 |
| V | v1 = 11 | v2 = 5 | v3 = 12 | v4 = 5 | v5 = 12 | v6 = 3 |  |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij

(1;2): ∆12 = 0 + 5 - 4 = 1 > 0

(1;3): ∆13 = 0 + 12 - 8 = 4 > 0

(4;1): ∆41 = 0 + 11 - 6 = 5 > 0

(5;1): ∆51 = -3 + 11 - 5 = 3 > 0

max(1,4,5,3) = 5

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (4;1): 6. Для этого в перспективную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 14 | 4 | 8 | 5 | 5 | 13 | 3 | 165 | 0 |
| 2 | 12 | 2 | 109 | 10 | 7 | 9 | 6 | 15 | 0 |
| 3 | 3 | 145[-] | 7 | 13 | 10 | 4 | 7[+] | 13 | 0 |
| 4 | 6[+] | 12 | 12 | 73[-] | 5 | 88 | 15 | 4 | 0 |
| 5 | 5 | 13 | 11 | 2 | 102 | 12 | 6 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 60[+] | 0 | 0 | 84[-] | 0 | 0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. прибавляем 73 к объемам грузов, стоящих в плюсовых и вычитаем 73 из xij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 14 | 4 | 8 | 5 | 5 | 13 | 3 | 165 | 0 |
| 2 | 12 | 2 | 109 | 10 | 7 | 9 | 6 | 15 | 0 |
| 3 | 3 | 72 | 7 | 13 | 10 | 4 | 80 | 13 | 0 |
| 4 | 6|73 | 12 | 12 | 5 | 88 | 15 | 4 | 0 |
| 5 | 5 | 13 | 11 | 2 | 102 | 12 | 6 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 133 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.

u1 + v4 = 5; 0 + v4 = 5; v4 = 5

u1 + v6 = 3; 0 + v6 = 3; v6 = 3

u4 + v4 = 5; 5 + u4 = 14; u4 = 0

u4 + v3 = 12; 0 + v3 = 12; v3 = 12

u6 + v3 = 0; 12 + u6 = 0; u6 = -12

u6 + v5 = 0; -12 + v5 = 0; v5 = 12

u2 + v5 = 9; 12 + u2 = 9; u2 = -3

u2 + v2 = 11; -3 + v2 = 2; v2 = 5

u5 + v4 = 2; 5 + u5 = -2; u5 = -3

u3 + v5 = 4; 12 + u3 = 4; u3 = -8

u3 + v1 = 3; -8 + v1 = 3; v1 = 11

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | U |
| b 1 | b 2 | b3 | b 4 | b 5 | b 6 |
| a 1 | 14 | 4 | 8 | 5 | 5 | 13 | 3 | 165 | u1 = 0 |
| a 2 | 12 | 2 | 109 | 10 | 7 | 9 | 6 | 15 | u2 = -3 |
| a 3 | 3 | 72 | 7 | 13 | 10 | 4 | 80 | 13 | u3 = -8 |
| a 4 | 6|73 | 12 | 12 | 5 | 88 | 15 | 4 | u4 = 0 |
| a 5 | 5 | 13 | 11 | 2 | 102 | 12 | 6 | u5 = -3 |
| a 6 | 0 | 0 | 0 | 133 | 0 | 0 | 11 | 0 | u6 = -12 |
| V | v1 = 11 | v2 = 5 | v3 = 12 | v4 = 5 | v5 = 12 | v6 = 3 |  |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: F(x) = 5\*5 + 3\*165 + 2\*109 + 9\*6 + 3\*72 + 4\*80 + 6\*73 + 5\*88 + 2\*102 + 0\*142 + 0\*11 = 2410

*Анализ оптимального плана.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | | | Запас |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 14 | 4 | 8 | 5 | 5 | 13 | 3 | 165 | 0 |
| 2 | 12 | 2 | 109 | 10 | 7 | 9 | 6 | 15 | 0 |
| 3 | 3 | 72 | 7 | 13 | 10 | 4 | 80 | 13 | 0 |
| 4 | 6|73 | 12 | 12 | 5 | 88 | 15 | 4 | 0 |
| 5 | 5 | 13 | 11 | 2 | 102 | 12 | 6 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 133 | 0 | 0 | 11 | 0 | 0 |
| Потребность | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Из 1-го склада необходимо доставить 5 ед. товара 4-му потребителю и 165 ед. товара 6-му потребителю.

Из 2-го склада необходимо доставить 109 ед. товара 2-му потребителю и 6 ед. товара 5-му потребителю.

Из 3-го склада необходимо доставить 72 ед. товара 1-му потребителю и 80 ед. товара 5-му потребителю.

Из 4-го склада необходимо доставить 73 ед. товара 1-му потребителю и 88 ед. товара 4-му потребителю.

Из 5-го склада необходимо доставить 102 ед. товара 4-му потребителю.

Потребность 3-го потребителя остается неудовлетворенной на 133 ед.

Потребность 5-го потребителя остается неудовлетворенной на 11 ед.