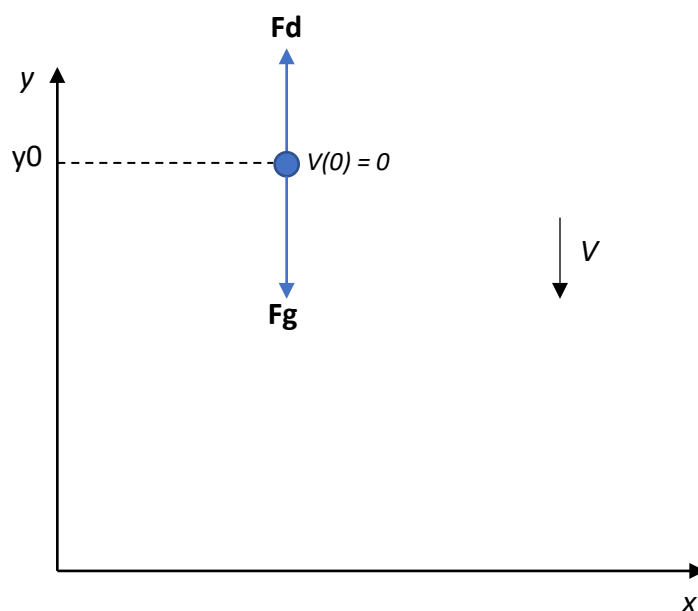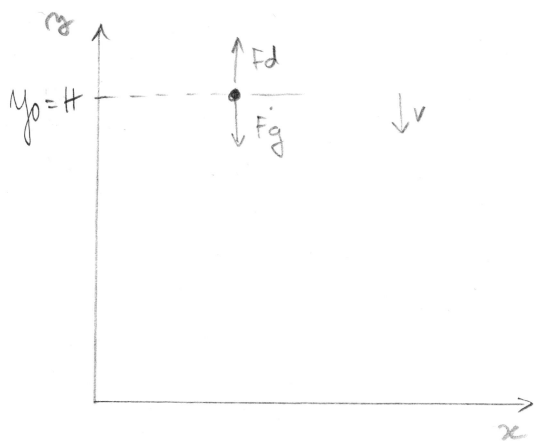# Seminarski rad iz osnova mehanike

Tekst zadatka: Kap kiše (5.6.1)

Kap kiše slobodno pada sa visine y0, na nju deluje sila Zemljine teže i sila otpora vazduha.

1. Rešiti zadatak analitički.

2. Naći brzinu kapi u funkciji vremena.

3. Naći ubrzanje kapi u funkciji vremena.

4. Prikazati položaj kapi u ekvidistantim trenucima vremena.

5. Odrediti trenutak kada se trenutna brzina razlikuje za manje od 0.1% od terminalne.

6. Pokazati šta se dešava ukoliko je v(0) = vt, v(0) > vt, v(0) < vt

$$m\vec{a} = \vec{F_d} + \vec{F_g}$$
$$m\vec{a} = k\vec{v} + m\vec{g}$$
$$ma = -kv - mg$$
$$\boxed{a = -\frac{k}{m}v - g}$$

Силе које делују и убрзање капи

$y_0 = H$

$\downarrow F_d$

$\cdot$

$\downarrow F_g$

$\downarrow v$

МАСА КАПИ : $\quad m = \rho V \quad ; \quad V = \frac{4\pi}{3}r^3 , \quad \rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ (вода) $(r \doteq 0.0005)$

коефицијент k : $\quad k = 6\pi \eta r$ („стоксова формула") $\rightarrow$ вискозност ваздуха

$v(t) = ?$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \implies \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v - g \implies dv = \left(-\frac{k}{m}v - g\right)dt \implies$$

$$\implies \frac{dv}{-\frac{k}{m}v - g} = dt \quad \Big/ \int \implies \int_0^{v(t)} \frac{dv}{-\frac{k}{m}v(t) - g} = \int_0^t dt \quad \Big/ \begin{cases} \text{почетни услови:} \\ y_0 = H, \ t_0 = 0, \ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{bmatrix} x = -\frac{k}{m}v - g & v_0 = 0 \rightarrow x(0) = -g \\ dx = -\frac{k}{m}dv & v(t) \rightarrow x(t) = -\frac{k}{m}v(t) - g \end{bmatrix} \implies \int_{-g}^{-\frac{k}{m}v(t)-g} -\frac{m}{k}\frac{dx}{x(t)} = t$$

$$\implies \ln x \Big|_{-g}^{-\frac{k}{m}v(t)-g} = -\frac{k}{m}t \implies \ln\left(\frac{-\frac{k}{m}v(t)-g}{-g}\right) = -\frac{k}{m}t \quad \Big/ e^{\square}$$

$$\implies \frac{-\frac{k}{m}v(t)-g}{-g} = e^{-\frac{k}{m}t} \implies -\frac{k}{m}v(t) = -ge^{-\frac{k}{m}t} + g \implies \boxed{v(t) = \frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)}$$

$$\boxed{V_{MAX} = V_T = -\frac{mg}{k} \quad \text{када} \quad t \longrightarrow 0}$$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)$$

$$\Rightarrow dh = -\frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)dt \,\Big/\, \int \quad \Rightarrow \quad \int_{h(0)=H}^{h(t)} dh = \int_0^t -\frac{mg}{k}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right)dt$$

$$\Rightarrow h(t) - H = -\frac{mg}{k}\left(\int_0^t e^{-\frac{kt}{m}}\,dt - \int_0^t dt\right)$$

$$\Rightarrow h(t) - H = -\frac{mg}{k}\left(\frac{m - me^{-\frac{kt}{m}}}{k} - t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\,h(t) = H - \frac{mg}{k}\left(\frac{m - me^{-\frac{kt}{m}}}{k} - t\right)\,}$$

→ Кад додирује тело у тренутку τ за $h(\tau)=0$

→ Заменом $v(\tau)$ можемо добити брзину удара о тело