

Vrste beskonačnosti. Paradoks Hilbertovog hotela

– Tehničko i naučno pisanje –

Milica Zubljic, Dimitrije Spasojević, Branko Katanić, Luka
Tonić

Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2022.

Literatura

- Zasnovano na:
Milica Zubljic, Dimitrije Spasojević, Branko Katanić, Luka Tonić: Vrste beskonačnosti. Paradoks Hilbertovog hotela, 2022.
(https://github.com/milicazubljic/32_TNP2022/blob/main/32_ZubljicKatanicSpasojevicTonic.pdf)

Pregled

- 1 Uvod
- 2 Hilbertov hotel
- 3 Princip neprebrojivosti
- 4 Zaključak

Pojam beskonačnosti

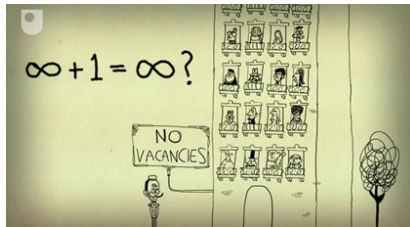
- Prva istraživanja pojma beskonačnosti
- Koncept i značenje pojma - je li beskonačno broj?
- Zanimljivosti
 - Simbol beskonačnosti - Džon Volis
 - Alhemija - Uroboros

Prebrojivost

- Kardinalnost skupova \mathbb{N} , \mathbb{Z} , $\mathbb{Q} \rightarrow \aleph_0$ (alef nula)
- Neprebrojivost skupova \mathbb{R} i \mathbb{I}

Konačan broj gostiju

- **Hilbertov hotel** - hotel sa beskonačno mnogo soba
- Ako je ovaj hotel pun, da li postoji način da oslobodimo još jednu sobu?
 - Kada svakog gosta iz sobe n zamolimo da pređe u sobu $n + 1$, prva soba će ostati prazna
 - Ista formula važi za svaki konačan broj gostiju



Beskonačan broj gostiju

- Pred hotelom je sada beskonačno veliki autobus sa prebrojivo beskonačno mnogo gostiju
- Problem postaje nešto komplikovaniji kada treba napraviti mesta za beskonačno novih gostiju
- Sada će svaki gost iz sobe n preći u sobu $2n$ i tako ćemo osloboditi sve sobe sa neparnim brojem
- Pošto neparnih brojeva ima beskonačno mnogo, ovim procesom oslobodili smo beskonačno mnogo soba



Beskonačan broj autobusa sa beskonačno gostiju

- Pred hotelom je sada beskonačna kolona autobus sa **prebrojivo** beskonačno mnogo putnika
- Da bismo smestili sve nove goste moramo da uradimo sledece korake:
 - Prvo postojeće goste šaljemo u sobu sa prvim prostim brojem 2 stepenovanim brojem njihove trenutne sobe.
 - Sada gostima iz prvog autobusa dodeljujemo sledeci prost broj 3 stepenovan brojem njihovog sedista.
 - Putnicima iz sledeceg autobusa se dodeljuju eksponenti sledećeg prostog broja

Euklidov dokaz: beskonačno prostih brojeva

- Euklid je izneo dokaz da prostih brojeva ima beskonačno mnogo u svom delu „Elementi”
- Dat bilo koji konačni skup prostih brojeva p_1, p_2, \dots, p_n
- $P = p_1 p_2 \dots p_n$
- Neka je $q = P + 1$. Tada q ili jeste ili nije prost broj
 - Ako je q prost, onda postoji bar jedan broj (q) koji je prost, a nije u prvobitnom skupu.
 - Ako q nije prost, onda neki prost broj p deli q . Kad bi ovaj broj p bio u skupu, tada bi on delio P ali bi p delilo i q . Ako p deli P i q , onda bi p morao da deli razliku ova dva broja. Postoji jedan prost broj ne deli 1 p ne može pripadati skupu.

Neprebrojivost

- Šta ako dolazi tura gostiju koja ne može biti numerisana prirodnim brojevima?
- Skup za koji je nemoguće naći bijektivnu funkciju koja preslikava skup prirodnih brojeva u dati skup naziva se **neprebrojiv** skup
- Jedan od takvih skupova je skup realnih brojeva
- Hilbertov hotel ima prebrojivo mnogo beskonačnih soba
- Kada bi pokušali da smestimo neprebrojivo mnogo beskonačno gostiju u hotel ne bismo uspjeli, jer neprebrojiv skup ima više elemenata nego prebrojiv skup

Zaključak

- Paradoks Hilbertovog hotela nam na dobar način objašnjava značaj koncepta beskonačnosti
- Glavni motiv analiziranja različitih vrsta beskonačnosti i paradoksa Hilbertovog hotela je razumevanje skupova brojeva koje svakodnevno koristimo kao što su skup prirodnih, celih i realnih brojeva