Vrste beskonačnosti. Paradoks Hilbertovog hotela

– Tehničko i naučno pisanje –

Milica Zubljić, Dimitrije Spasojević, Branko Katanić, Luka Tonić

Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2022.

Literatura

- Zasnovano na:
  Milica Zubljić, Dimitrije Spasojević, Branko Katanić, Luka Tonić: Vrste beskonačnosti. Paradoks Hilbertovog hotela, 2022.
  (https://github.com/milicazubljic/32_TNP2022/blob/main/32_ZubljicKatanicSpasojevicTonic.pdf)

Pregled

Pojam beskonačnosti

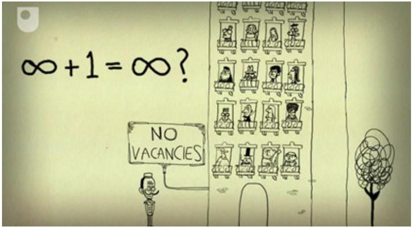
- Prva istraživanja pojma beskonačnosti
- Koncept i značenje pojma - je li beskonačno broj?
- Zanimljivosti
    - Simbol beskonačnosti - Džon Volis
    - Alhemija - Uroboros

Prebrojivost

- Kardinalnost skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ $\rightarrow$ $\aleph_0$ (alef nula)
- Neprebrojivost skupova $\mathbb{R}$ i $\mathbb{I}$

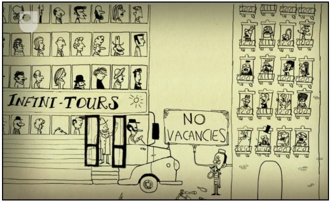
Konačan broj gostiju

- **Hilbertov hotel** - hotel sa beskonačno mnogo soba
- Ako je ovaj hotel pun, da li postoji način da oslobodimo još jednu sobu?
  - Kada svakog gosta iz sobe n zamolimo da pređe u sobu $n+1$, prva soba će ostati prazna
  - Ista formula važi za svaki konačan broj gostiju



Beskonačan broj gostiju

- Pred hotelom je sada beskonačno veliki autobus sa prebrojivo beskonačno mnogo gostiju
- Problem postaje nešto komplikovaniji kada treba napraviti mesta za beskonačno novih gostiju
- Sada će svaki gost iz sobe n preći u sobu $2n$ i tako ćemo osloboditi sve sobe sa neparnim brojem
- Pošto neparnih brojeva ima beskonačno mnogo, ovim procesom oslobodili smo beskonačno mnogo soba



Beskonačan broj autobusa sa beskonačno gostiju

- Pred hotelom je sada beskonačna kolona autobusa sa **prebrojivo** beskonačno mnogo putnika
- Da bismo smestili sve nove goste moramo da primenimo sledeće korake:
  - Prvo postojeće goste šaljemo u sobu sa prvim prostim brojem 2 stepenovanim brojem njihove trenutne sobe.
  - Sada gostima iz prvog autobusa dodeljujemo sledeći prost broj 3 stepenovan brojem njihovog sedišta.
  - Putnicima iz sledećeg autobusa dodeljuju se eksponenti sledećeg prostog broja.

Euklidov dokaz: beskonačno prostih brojeva

- Euklid je izneo dokaz da prostih brojeva ima beskonačno mnogo u svom delu „Elementi”
- Dat je bilo koji konačni skup prostih brojeva $p_1, p_2, ..., p_n$
- $P = p_1 p_2 ... p_n$
- Neka je $q = P + 1$. Tada q ili jeste ili nije prost broj.
  - Ako je q prost, onda postoji bar jedan broj (q) koji je prost, a nije u prvobitnom skupu.
  - Ako q nije prost, onda neki prost broj p deli q. Kad bi ovaj broj p bio u skupu, tada bi on delio P, ali bi p delilo i q. Ako p deli P i q, onda bi p morao da deli razliku ova dva broja. Pošto nijedan prost broj ne deli 1, p ne može pripadati skupu.

Neprebrojivost

- Šta ako dolazi tura gostiju koja ne može biti numerisana prirodnim brojevima?
- Skup za koji je nemoguće naći bijektivnu funkciju koja preslikava skup prirodnih brojeva u dati skup naziva se **neprebrojiv** skup
- Jedan od takvih skupova je skup realnih brojeva
- Hilbertov hotel ima prebrojivo mnogo beskonačnih soba
- Kada bi pokušali da smestimo neprebrojivo mnogo beskonačno gostiju u hotel ne bismo uspeli, jer neprebrojiv skup ima više elemenata nego prebrojiv skup

Zaključak

- Paradoks Hilbertovog hotela nam na dobar način objašnjava značaj koncepta beskonačnosti
- Glavni motiv analiziranja različitih vrsta beskonačnosti i paradoksa Hilbertovog hotela je razumevanje skupova brojeva koje svakodnevno koristimo kao što su skup prirodnih, celih i realnih brojeva