UQÀM

Fiche d'exercices - Chapitre 3

STT 1000 - Automne 2025

Exercice 3.1. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de taille n de la loi $\mathcal{U}(0, \theta])$. On souhaite estimer le paramètre θ. Calculez le biais, la variance et l'écart quadratique moyen de $\hat{\theta}(\mathbf{X}) = 2\overline{X}_n$.

Exercice 3.2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de taille n de la loi $\mathcal{U}([\theta, \theta+1])$. On souhaite estimer le paramètre θ.

(a) Calculez le biais de la moyenne échantillonnale $\overline{X}_n$.

(b) Utilisez votre réponse en (a) pour trouver un estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ qui est sans biais.

(c) Calculez l'efficacité relative de $\overline{X}_n$ par rapport à l'estimateur $\hat{\theta}(\mathbf{X})$ trouvé en (b).

Exercice 3.3. Soit X_1, X_2, X_3 un échantillon iid de taille $n = 3$ de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On souhaite estimer le paramètre $\theta = 1/\lambda$, et on considère les quatre estimateurs suivants.

$$\hat{\theta}_1(\mathbf{X}) = \overline{X}_n, \quad \hat{\theta}_2(\mathbf{X}) = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad \hat{\theta}_3(\mathbf{X}) = \frac{X_1 + 2X_2}{3}, \quad \hat{\theta}_4(\mathbf{X}) = 2\min(X_2, X_3).$$

(a) Montrez que ces estimateurs sont tous sans biais. **Indice:** rappelons que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ_X et λ_Y, respectivement, alors $\min(X, Y) \sim \mathcal{E}(\lambda_X + \lambda_Y)$.

(b) Ordonnez ces estimateurs selon leur variance.

Exercice 3.4. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid tel que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2$. On considère l'estimateur de μ donné par $\hat{\mu}(\mathbf{X}) = a\overline{X}_n + b$, où $\overline{X}_n$ dénote la moyenne échantillonnale et $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Calculez le biais de $\hat{\mu}(\mathbf{X})$.

(b) Calculez la variance de $\hat{\mu}(\mathbf{X})$.

(c) Calculez l'écart quadratique moyen de $\hat{\mu}(\mathbf{X})$.

(d) Pour quelle valeur du couple (a, b) l'estimateur $\hat{\mu}(\mathbf{X})$ est-il sans biais?

Exercice 3.5. Dans l'énoncé de la question précédente, supposons maintenant que $b = 0$.

(a) Pour quelle valeur de a l'écart quadratique moyen de $\hat{\mu}(\mathbf{X})$ est-il minimisé? **Indice:** pensez à dériver l'écart quadratique moyen en fonction de a.

(b) Soit a égal à la valeur trouvée à la partie (a). Calculez l'efficacité relative de $\hat{\mu}(\mathbf{X})$ par rapport à $\overline{X}_n$.

Exercice 3.6. Soient $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$ et $\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$ deux estimateurs d'un paramètre θ. Considérons l'estimateur $\hat{\theta}_3(\mathbf{X}) = a\hat{\theta}_1(\mathbf{X}) + (1-a)\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$.

(a) Calculez le biais de $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ en fonction de a, $\text{biais}_\theta(\hat{\theta}_1(\mathbf{X}))$ et $\text{biais}_\theta(\hat{\theta}_2(\mathbf{X}))$.

(b) Pour quelle valeur de a l'estimateur $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ est-il sans biais?

Exercice 3.7. Considérons les estimateurs $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$, $\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$ et $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ tels que définis à la question précédente. Supposons maintenant que $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$ et $\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$ sont sans biais et qu'ils sont indépendants.

(a) Calculez l'écart quadratique moyen de $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ en fonction de a, $v_1 = \mathbb{V}\big(\hat{\theta}_1(\mathbf{X})\big)$ et $v_2 = \mathbb{V}\big(\hat{\theta}_2(\mathbf{X})\big)$.

(b) Pour quelle valeur de a l'écart quadratique moyen de $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ est-il minimisé? **Indice:** pensez à dériver l'écart quadratique moyen en fonction de a.

Exercice 3.8. Considérons les estimateurs $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$, $\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$ et $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ tels que définis aux questions précédentes. Supposons maintenant que $\hat{\theta}_1(\mathbf{X})$ et $\hat{\theta}_2(\mathbf{X})$ ne sont pas indépendants, mais plutôt que leur covariance est égale à c.

(a) Calculez l'écart quadratique moyen de $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ en fonction de a, $v_1 = \mathbb{V}\big(\hat{\theta}_1(\mathbf{X})\big)$, $v_2 = \mathbb{V}\big(\hat{\theta}_2(\mathbf{X})\big)$, et c.

(b) Pour quelle valeur de a l'écart quadratique moyen de $\hat{\theta}_3(\mathbf{X})$ est-il minimisé? **Indice:** pensez à dériver l'écart quadratique moyen en fonction de a.

Exercice 3.9. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de taille n tel que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2$.

(a) Calculez l'espérance de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

(b) Dans quelle situation $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ est-il un estimateur sans biais de σ^2?

Exercice 3.10. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de taille n de la loi $\mathscr{U}([0, \theta])$, dont on rappelle que la fonction de densité est

$$f_X(t) = \frac{1}{\theta}, \quad t \in [0, \theta]$$

et dont l'espérance et la variance sont $\mathbb{E}[X] = \theta/2$ et $\mathbb{V}(X) = \theta^2/12$. Calculez l'estimateur de θ par la méthode des moments.

Exercice 3.11. Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon iid de taille n de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$, dont on rappelle que la fonction de densité est

$$f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad t \in [0, \infty)$$

et dont l'espérance et la variance sont $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ et $\mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$.

(a) Calculez l'estimateur de λ par la méthode des moments.

(b) Calculez l'estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.