Chapitre 1 - Notions de Probabilité

Marouane Il Idrissi
il_idrissi.marouane@uqam.ca

STT 1000 - Automne 2025
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal

UQÀM

Plan du chapitre

1. Variable Aléatoire
2. Lois discrètes usuelles
3. Lois continues usuelles
4. Couple de variables aléatoires
5. Deux variables aléatoires Gaussiennes
6. Résultats asymptotiques

Notes

Sommaire

Variable Aléatoire - Généralités

Une **variable aléatoire** (v.a.) est **une modélisation mathématique** d'un **phénomène incertain**:

- Lancer de dé
- Durée de vie d'une ampoule
- Bénéfice net journalier d'une entreprise

Son **support** est la **plage de valeur** qu'elle peut prendre:

- Lancer de dé $\to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Durée de vie d'une ampoule $\to [0, \infty)$
- Bénéfice net d'une entreprise $\to \mathbb{R}$

On dit qu'une variable aléatoire est:

- **Discrète** si son support est **dénombrable** ($\{0, 1\}$, $\{\text{Bleu}, \text{Rouge}\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$).
- **Continue** si son support est **indénombrable** ($[0, 1]$, $(0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Dans ce cours, les **variables aléatoires sont notées en MAJUSCULES**:
$X, Y, X_1, X_n, \overline{X}_n, S, S^2, T \ldots$

Notes

Variable Aléatoire - Observation/Réalisation

Une **observation** est **la réalisation** du **phénomène incertain** modélisé par la **variable aléatoire**:

- Lancer de dé $\rightarrow 3$
- Durée de vie d'une ampoule $\rightarrow$ 37 528h
- Bénéfice net journalier d'une entreprise $-367\ 449\$$

Dans ce cours, les **observations/réalisations sont notées en minuscules**:
$x, y, x_1, x_n, \overline{x}_n, s, s^2, t \dots$

☞ **Une variable aléatoire n'est pas un nombre**
☞ **Une observation est un nombre**

Variable Aléatoire - Caractérisation

On peut **caractériser** une **variable aléatoire** de différentes manières.

Par sa **loi**
☞ Par ex. $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, ou encore $Y \sim \mathcal{B}(0.7)$

Par sa **fonction de densité** (**continue**) ou **fonction de masse de probabilité** (**discret**)
☞ Par ex. $f_X(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ ou encore $f_Y(t) = \begin{cases} 0.7 & \text{si } t = 1, \\ 0.3 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par sa **fonction de répartition**, définie, pour une variable aléatoire Z, par

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} f_Z(t)dt & \text{si Z est une variable aléatoire continue} \\ \sum_{j \leq z} \mathbb{P}(Z = j) & \text{si Z est une variable aléatoire discrète} \end{cases}$$

☞ Par ex. $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ ou encore $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.3 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Notes

Variable Aléatoire - Espérance

L'**espérance** d'une **variable aléatoire** X est définie par ★

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt & \text{si } X \text{ est continue} \\ \sum_t t \times \mathbb{P}(X = t) & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Plus généralement, pour toute fonction g **intégrable**, on a ★

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt & \text{si } X \text{ est continue} \\ \sum_t g(t) \times \mathbb{P}(X = t) & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Résultat *(L'espérance est linéaire).* ★

Soient X et Y deux variables aléatoires, et $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois nombres réels. Alors,

$$\mathbb{E}[a + bX + cY] = a + b\mathbb{E}[X] + c\mathbb{E}[Y]$$

☞ **L'espérance d'une variable aléatoire est un nombre**

Variable Aléatoire - Variance et covariance

La **variance** d'une **variable aléatoire** X est définie par ★

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

L'**ecart-type** d'une **variable aléatoire** X est la **racine carrée de sa variance**, i.e., $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$

La **covariance** entre deux **variables aléatoires** X et Y est définie par ★

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Résultat *(La variance est quadratique).* ★

Soient X et Y deux variables aléatoires, et $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois nombres réels. Alors,

$$\mathbb{V}(a + bX + cY) = b^2\mathbb{V}(X) + c^2\mathbb{V}(Y) + 2bc\mathrm{Cov}(X, Y)$$

☞ **La variance d'une variable aléatoire est un nombre positif**

Notes

Variable Aléatoire - Quantiles

Le **quantile** d'ordre $\alpha \in [0, 1]$ d'une **variable aléatoire** X est le **nombre** q_α tel que ★

$$\mathbb{P}(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

☞ On a une probabilité de 50% d'observer des nombres inférieurs ou égaux à $q_{0.5}$ (médiane)

La **fonction de quantile** d'une **variable aléatoire** X est la fonction

$$Q_X(\alpha) = \inf\{q : F_X(q) = \alpha\}$$

où, de manière équivalente, c'est **l'inverse de la fonction de répartition** de X

☞ **L'ordre α d'un quantile est un nombre entre 0 et 1**
☞ **Un quantile de X est un nombre dans le support de X**

Sommaire

Notes

Lois discrètes usuelles - Bernoulli

Une v.a. X qui suit une **loi de Bernoulli** est une v.a. discrète ayant comme **support** $\{0, 1\}$ (échec, succès)

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$, **paramétrée** par la **probabilité de succès** $p = \mathbb{P}(X = 1) \in [0, 1]$

Elle modélise un phénomène qui n'a que **deux issues** possibles
Pile ou face, réussir un examen, présence de défaut...

Caractéristiques *(Loi de Bernoulli).* ★

- $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t) = p^t(1-p)^{1-t}$ pour $t \in \{0, 1\}$ ✍
- $\mathbb{E}[X] = p$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ ✍

☞ **Une v.a. ayant $\{0, 1\}$ comme support est forcément une v.a. de Bernoulli**

Lois discrètes usuelles - Binomiale

Une v.a. de **loi binomiale** modélise **le nombre de succès** obtenus lors de la réalisation de plusieurs expériences aléatoires **identiques et indépendantes**

Elle est **paramétrée** par:

- Le **nombre d'expériences réalisées**: $n \in \mathbb{N}$
- La **probabilité de succès de chaque expérience**: $p \in [0, 1]$

Elle modélise le **nombre de succès** suite à une **répétition** de phénomènes à **deux issues**
Plusieurs pile ou face, nombre d'étudiant.es passant un examen, nombre de pièces défectueuses...

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, et son **support** est $\{0, \ldots, n\}$

Caractéristiques *(Loi binomiale).* ★

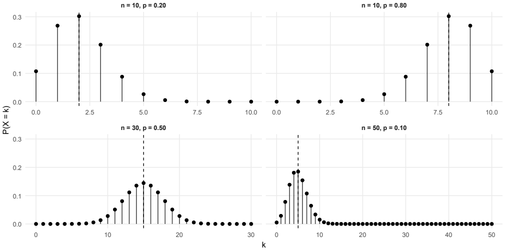
- $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $t \in \{0, \ldots, n\}$ ✍
- $\mathbb{E}[X] = np$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ ✍

☞ **Une v.a. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$** ✍

Notes

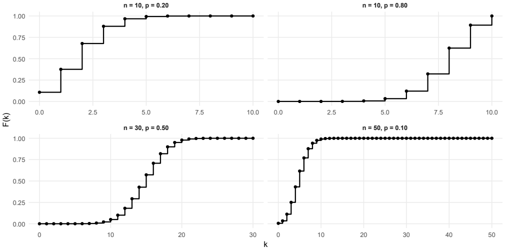
Loi binomiale : fonction de masse de probabilité (pmf)

Segments et points : P(X = k). Ligne pointillée : moyenne np.

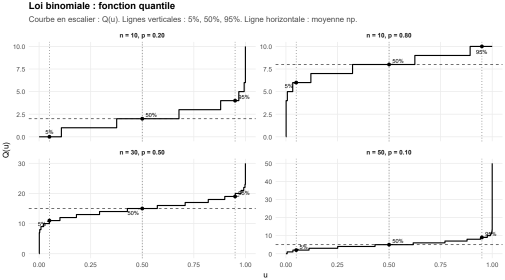


Loi binomiale : fonction de répartition (cdf)

Marche discrète : F(k) = P(X ≤ k).



Notes



Bernoulli et binomiale - Exemple

Example *(Compagnie d'assurance).* ✍

Une compagnie d'assurance reçoit des réclamations.
Chaque réclamation à une probabilité de 0.2 de dépasser 2000$.
☞ **Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive au moins une réclamation dépassant** 2000$ **parmi les 10 premières?**

1. Identifier la loi du phénomène "Réclamation dépassant 2000$"
2. Identifier la loi du phénomène "Nombre de réclamations dépassant 2000$ parmi les 10 premières"
3. Reformuler l'évènement "au moins une réclamation dépasse 2000$"
4. Répondre à la question

Rappel: Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{P}(X = t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$

Solution: $X \sim \mathcal{B}(10, 0.2)$, et $1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.8^{10} \approx 0.893$

Notes

Une v.a. de **loi uniforme discrète** modélise un phénomène où **toutes les issues sont équiprobables**

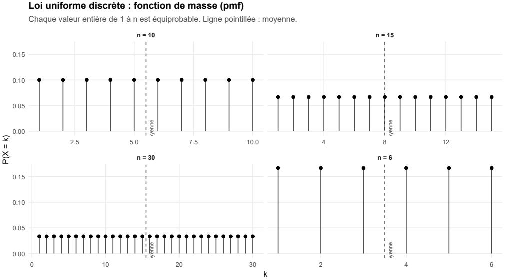
Elle est paramétrée par $n \in \mathbb{N}$, **le nombre d'issues du phénomène étudié**
Lancer de dé (non-pipé), tirer une carte, répondre au hasard à un QCM...

On note $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ et son **support** est $\{1, \dots, n\}$

Caractéristiques *(Loi uniforme discrète).* ★

- $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{1,\dots,n\}}(t)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$ ✍

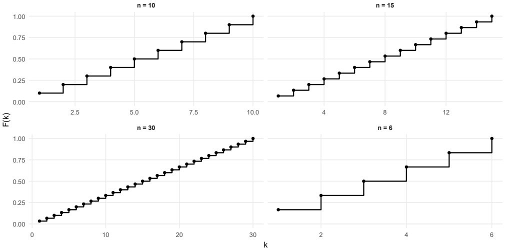
☞ **Une v.a. de loi Uniforme de paramètre $n = 2$ est une v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(0.5)$** ✍



Notes

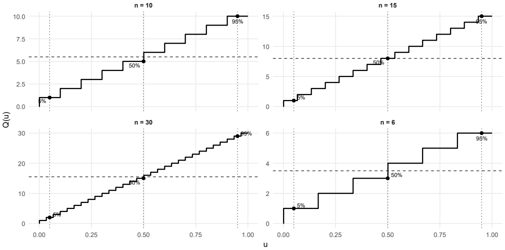
Loi uniforme discrète : fonction de répartition (cdf)

Marche discrète : F(k) = P(X ≤ k).



Loi uniforme discrète : fonction quantile (inverse cdf)

Courbe en escalier : Q(u). Lignes verticales : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne.



Notes

Sommaire

Lois continues usuelles - Uniforme

Une v.a. de **loi uniforme continue** modélise un phénomène à **issue réelle et équiprobable**

Elle est paramétrée par **un intervalle** $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < \infty$
Temps d'attente d'un ascenseur, roue de la fortune...

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et son **support** est l'intervalle $[a, b]$

Caractéristiques *(Loi uniforme continue)*. ★

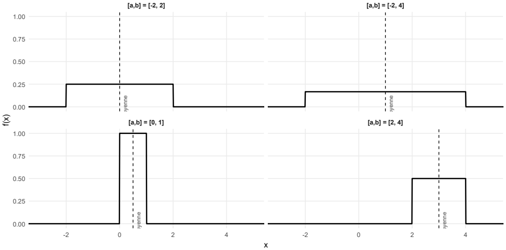
- $f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ✍

☞ **Une v.a. de loi uniforme continue généralise la loi uniforme discrète à un intervalle**

Notes

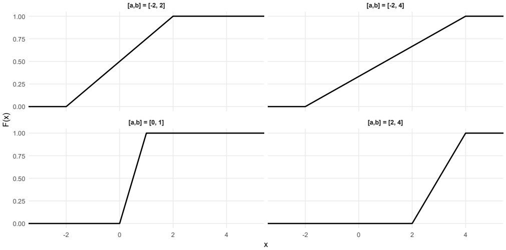
Loi uniforme continue : densité (pdf)

Segment horizontal sur [a,b] de hauteur 1/(b−a). Ligne pointillée : moyenne.

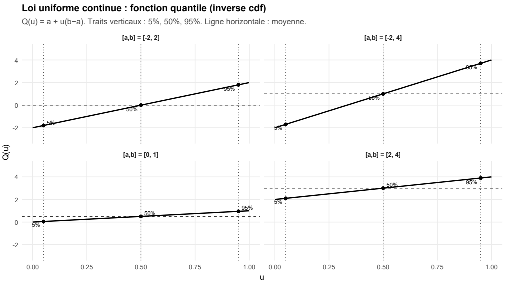


Loi uniforme continue : fonction de répartition (cdf)

0 pour x<a, linéaire sur [a,b], 1 pour x>b.



Notes



Lois continues usuelles - Exponentielle

Une v.a. de **loi exponentielle** modélise un phénomène à **issue réelle positive** (temps d'attente)

Durée de vie d'une ampoule, temps entre deux tremblements de terre...

Elle est paramétrée par $\lambda \in (0, \infty)$, généralement appelée **intensité**

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, et son **support** est $[0, \infty)$

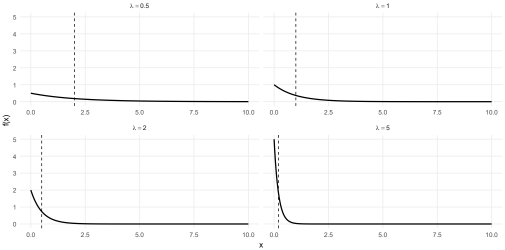
Caractéristiques *(Loi exponentielle)*. ★

- $f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ pour $t \in [0, \infty)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ✍

Notes

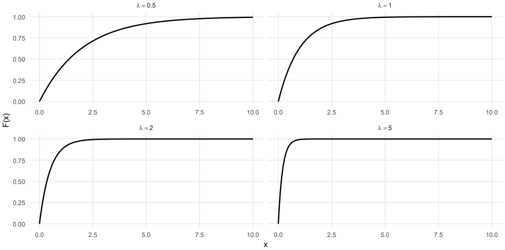
Loi exponentielle : densité (pdf)

Courbe décroissante. Ligne pointillée : moyenne = 1/lambda.

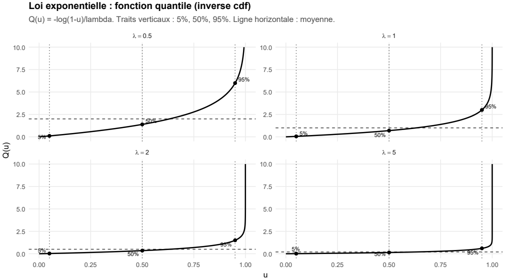


Loi exponentielle : fonction de répartition (cdf)

F(x) = 1 - exp(-lambda * x).



Notes



Lois continues usuelles - Normale

Une v.a. de **loi normale** (v.a. **Gaussienne**, ou **loi de Gauss**) modélise un phénomène à **issue réelle**

Poids des nouveaux-nés, erreurs de mesures...

Elle est paramétrée par son **espérance** $\mu \in \mathbb{R}$ et sa **variance** $\sigma^2 \in (0, \infty)$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et son **support** est $\mathbb{R}$ tout entier

La v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est dite **standard** ou **centrée-réduite**

Caractéristiques *(Loi normale)*. ★

- $f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[X] = \mu$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ ✍
- La v.a. $T = a + bX \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

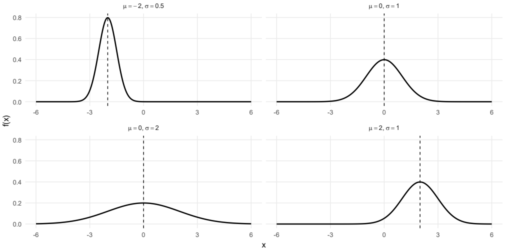
☞ C'est la loi la plus utilisée pour ses propriétés, et la plus importante dans ce cours

On verra qu'elle est primordiale pour la plupart des **résultats asymptotiques en statistique**

Notes

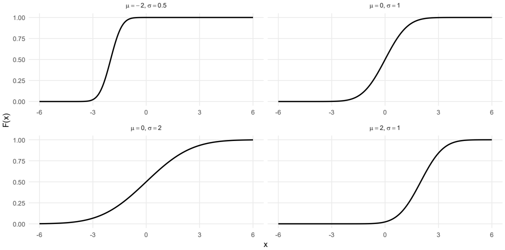
Loi normale : densité (pdf)

Courbe en cloche. Ligne pointillée : moyenne μ.

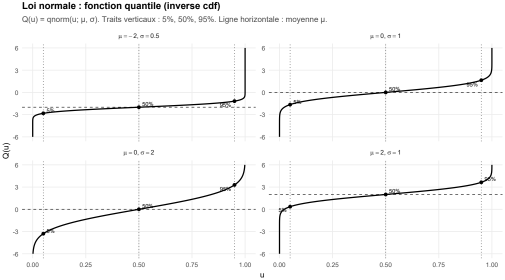


Loi normale : fonction de répartition (cdf)

$F(x) = P(X \leq x) = \text{pnorm}(x; \mu, \sigma)$.



Notes



Loi normale - Exemple

Example *(Taille des plantes).*

On s'intéresse à la taille de jeunes plants de tomates après 2 mois de croissance.
On sait que la taille moyenne d'un plant est de 30 cm, avec un écart-type de 4 cm.
☞ **Quelle est la probabilité qu'un plant choisi au hasard mesure plus de 35 cm ?**

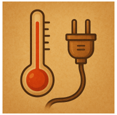
1. Modélisez le phénomène "Taille d'un plant de tomate" par une loi normale
2. Standardiser la variable pour pouvoir utiliser la loi normale standard
Rappel: Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $a + bX \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$
3. Reformuler l'évènement "taille supérieure à 35 cm"
4. Répondre à la question
Rappel: Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = \Phi(z)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Solution: Si $X \sim \mathcal{N}(30, 4^2)$, alors
$\mathbb{P}(X > 35) = 1 - \Phi\left(\frac{35-30}{4}\right) = 1 - \Phi(1.25) \approx 0.106$.

Notes

Sommaire

Couple de variables aléatoires



Jusqu'à maintenant, on a modélisé des **phénomènes univariés**...
Mais il est possible de modéliser **deux phénomènes conjointement**!

Très utile quand ils **dépendent l'un de l'autre**
Taille et poids, température et conso d'électricité, temps d'étude et note...

Supposons que l'on modélise un phénomène par X et un autre par Y

Le **vecteur aléatoire bivarié** (X, Y) modélise conjointement ces deux phénomènes

Le **support** de (X, Y) est le **produit cartésien** du support de X et de celui de Y
☞ Si X et Y sont de loi normale, le support de (X, Y) est le plan $\mathbb{R}^2$
☞ Si X et de Bernoulli et Y de loi exponentielle, le support de (X, Y) est l'ensemble $\{0, 1\} \times [0, \infty)$

☞ **Une réalisation d'un vecteur bivarié, c'est deux nombres**

Notes

Densité jointe, densités marginales

Un **vecteur aléatoire** (X, Y) est caractérisé par sa **fonction de densité jointe**
C'est une fonction $f_{(X,Y)}(s, t)$, telle que:

- Elle est **positive**

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad f_{(X,Y)}(s, t) \geq 0$$

- Son **intégrale est égale à 1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s, t) ds dt = 1$$

Pris séparément, X et Y restent des variables aléatoires
Leurs densités f_X et f_Y sont appelées les **densités marginales** du **vecteur aléatoire** (X, Y)

Il est possible de les **retrouver à partir de la densité jointe**:

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s, t) dt, \quad f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s, t) ds$$

Indépendance

Or, deux phénomènes peuvent **ne pas dépendre l'un de l'autre**
Score à Tetris et la température à Montréal, jour des premières couleurs et résultat d'un tirage au loto...

Dans ce cas là, on **modélise ces deux phénomènes** par des **v.a. indépendantes**

X et Y sont **indépendantes** (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) **si et seulement si la densité jointe du vecteur aléatoire** (X, Y) **est le produit des densités marginales**

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longleftrightarrow \quad f_{(X,Y)}(s, t) = f_X(s) \times f_Y(t)$$

Propriétés *(Indépendance).* ★

*Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes** ($X \perp\!\!\!\perp Y$), alors ($\Longrightarrow$)*

- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- $Cov(X, Y) = 0$
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

☞ **Ce sont des implications et pas des équivalences**

Notes

Sommaire

Rappels sur les v.a. Gaussiennes

Propriétés *(Somme de deux v.a. Gaussiennes).* ★

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ *et* $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

- *La v.a.* $T = a + bX \sim \mathcal{N}(\underbrace{a + b\mu_X}_{\mathbb{E}[T]}, \underbrace{b^2\sigma_X^2}_{\mathbb{V}(T)})$
- *Si* $X \perp\!\!\!\perp Y$*, alors la v.a.* $H = X + Y \sim \mathcal{N}(\underbrace{\mu_X + \mu_Y}_{\mathbb{E}[H]}, \underbrace{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}_{\mathbb{V}(H)})$

☞ Quelle est la loi de $aX + bY$? ✍

Notes

Variables aléatoires Gaussiennes - Indépendance, covariance et corrélation

On vu précédemment que pour **n'importe quel couple de v.a.** X et Y

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Or, si X et Y **sont Gaussiennes**, on a que

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

☞ **Ce n'est valide que pour deux v.a. Gaussiennes**

Le coefficient de corrélation entre $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ est défini par

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

☞ Dans la suite, on notera $\rho = \rho_{(X,Y)}$

Un **vecteur Gaussien bivarié** (X, Y), avec $-1 < \rho < 1$ a comme densité jointe

$$f_{(X,Y)}(s,t) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{s-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{t-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{s-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{t-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right)$$

☞ Montrons que lorsque $\rho = 0$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ✍

Variables aléatoires Gaussiennes - Combinaisons linéaires

Supposons maintenant que l'on ait **une séquence** $X_1, \ldots, X_k$ de $k \in \mathbb{N}$ **v.a. Gaussiennes indépendantes deux à deux**, où $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \ldots, k$

La **loi jointe** du **vecteur aléatoire multivarié** $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{k} f_{X_i}(t_i)$$

Propriétés *(Combinaison linéaire de Gaussiennes indépendantes).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_k$ de $k \in \mathbb{N}$ une séquence de v.a. Gaussiennes indépendantes deux à deux avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \ldots, k$. Soit des coefficients réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu_j, \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j \sigma_j)^2\right)$$

☞ **Ce résultat va être primordial à partir du Chapitre 4**

Notes

Sommaire

Rappels sur les limites

Étudier le **comportement asymptotique** d'une fonction, ça revient à étudier **sa limite**.
☞ **L'approximation des valeurs de la fonction** quand la variable **se rapproche de l'infini**

Par exemple:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

Si la limite d'une fonction est un réel, on dit que **la limite existe**, et que la fonction **converge**
Si ce n'est pas le cas, on dit que **la limite n'existe pas**, et que la fonction **diverge**

On peut également noter la limite autrement

$$\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

☞ **Pas de "n" à droite de la flèche!!!**

Notes

Théorème de la limite centrale

Théorème *(Théorème de la limite centrale (TLC)).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.s ***i) indépendantes**, **ii) ayant toutes la même loi** **iii) avec*** $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$, ***et*** $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Alors la fonction (de n) suivante admet comme limite

$$\sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- La limite de $T_n = \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sigma}\right)$ **existe** et donc elle **converge** vers une v.a. Z
- La **loi de** Z est **normale standard**

Interprétation alternative: La fonction de répartition de T_n converge vers celle d'une Gaussienne standard, c-à-d, $\mathbb{P}(T_n \leq t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(t)$

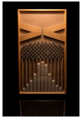
☞ Plus de détails dans le cours STT2000

☞ Ce théorème est le meilleur ami du statisticien et nous sera très utile à partir du Chapitre 4

Quand n est "grand", on peut **approcher la loi de** T_n **par une loi normale**

Approximation binomiale

Illustration du TLC dans le **cas de v.a. de Bernoulli**: Planche de Galton



A chaque clou, la bille **part à gauche (échec) ou à droite (succès)**

On modélise le passage par le clou i par une v.a. de **Bernoulli**: $X_i \sim \mathcal{B}(0.5)$

Après avoir traversé n rangées, le **nombre de pas à droite** est modélisé par une **v.a. binomiale**: $\sum_{i=1}^n X_i = Y \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$

☞ **Le nombre de pas à droite correspond à la case d'arrivée**

On répète cette expérience plusieurs fois: on lance plusieurs billes

☞ **Histogramme** pour représenter la distribution de Y (Chap 2)

Théorème *(Théorème de De-Moivre Laplace).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$, et $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Notes

Approximation binomiale - Correction pour la continuité

Utilisation de l'approximation d'une **loi binomiale par une loi normale**:

1. Vérifier les **conditions d'acceptabilité**: (n assez grand)

$$np - 3\sqrt{np(1-p)} > 0 \quad \text{et} \quad n > np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

☞ Conditions vérifiées: on se situe dans **le régime asymptotique**

2. On **choisit d'approximer** la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$
3. Ainsi, si une v.a. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, on peut **approcher sa loi** par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

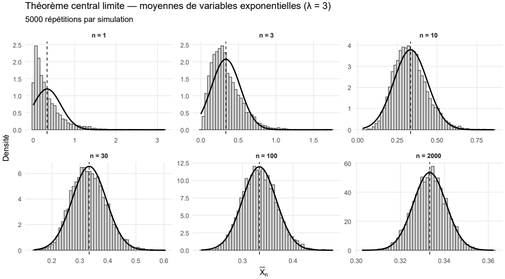
☞ Dans bien des cas, les calculs deviennent plus faciles

Petit problème:

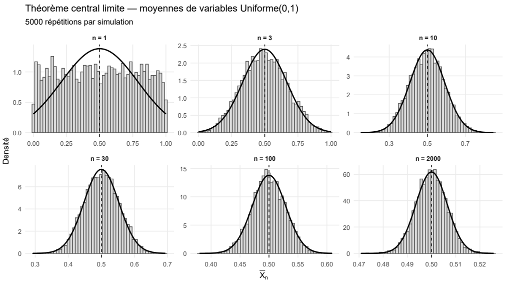
La loi $\mathcal{B}(n,p)$ est **discrète**, alors que la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ est **continue**

Pour corriger cet effet, on applique la **correction pour la continuité** ($t, a, b \in \{0, \ldots, n\}$):

Quantité ($\mathcal{B}(n,p)$)	Quantité approchée corrigée ($\mathcal{N}(np, np(1-p))$)
$\mathbb{P}(X = t)$	$\mathbb{P}(t - 1/2 \leq X \leq t + 1/2)$
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$	$\mathbb{P}(a - 1/2 \leq X \leq b + 1/2)$



Notes


Théorème central limite — moyennes de variables Uniforme(0,1)
5000 répétitions par simulation
n = 1
n = 3
n = 10
n = 30
n = 100
n = 2000
Densité
$\overline{X}_n$

Notes