UQÀM

Fiche d'exercices - Chapitre 1

STT 1000 - Automne 2025

Exercice 1.1. Dans chacune des situations suivantes, déterminez le support de la variable aléatoire X dont il est question, ainsi que la réalisation de cette variable aléatoire.

(a) Parmi n lancers d'une pièce de monnaie, on obtient m fois le résultat face. On s'intéresse à la variable aléatoire X correspondant à la différence entre le nombre de faces et le nombre de piles obtenus.

(b) Un appareil électronique dont le temps de fonctionnement X (en heures) suit une loi exponentielle brise après 108 heures.

(c) On s'intéresse maintenant au nombre X de fois que l'appareil doit être remplacé durant une période de deux semaines (336 heures), sachant que les réalisations du temps de fonctionnement des cinq premiers appareils utilisé sont de 108, 121, 97, 195, et 136.

Exercice 1.2. Dans chacun des cas suivants, calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X, ainsi que $\mathbb{P}(X > 2)$.

(a) $X \sim \mathscr{U}([1,3])$

(b) $X = Y^2$, où $Y \sim \mathscr{U}(\{1,2,3\})$

(c) $X = Y/2 - 1$, où $Y \sim \mathscr{B}(10, 0.4)$

(d) X admet la fonction de répartition

$$F_X(t) = 1 - (1-t)^2, \quad t \in [0,1]$$

Exercice 1.3. Afin de contrôler la qualité des pièces produites par une machine, on prélève de temps en temps un échantillon de 10 pièces. On arrête la production pour inspecter la machine si dans l'échantillon on trouve plus de deux pièces défectueuses; autrement, on laisse la machine fonctionner. Supposons qu'en fait 20% de la production est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'après un échantillonnage de 10 pièces, on la laisse fonctionner?

Exercice 1.4. Un célèbre magicien qui prétendait avoir des pouvoirs de perception extrasensorielle a accepté de se livrer à une expérience dans laquelle il se proposait de deviner le résultat du lancer d'un dé. En 12 essais, il a réussi à deviner le résultat 10 fois. Vérifiez que la probabilité d'un nombre de succès aussi grand que 10 (c'est-à-dire supérieur ou égal à 10) est excessivement petite pour quelqu'un qui répond au hasard, et expliquez à quelle conclusion ce fait a tendance à mener.

Exercice 1.5. Calculez le quantile d'ordre $\alpha \in [0,1]$ de $X \sim \mathscr{U}([a,b])$ et de $Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$. En particulier, quelle est la médiane de ces deux variables aléatoires?

Exercice 1.6. Soit X une variable aléatoire et $q_X(\alpha)$ son quantile d'ordre $\alpha \in [0,1]$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, et définissons la variable aléatoire $Y = a + bX$. Exprimez, avec justification, le quantile d'ordre α de Y en fonction de a, b et $q_X(\alpha)$.

Exercice 1.7. Chaque soir, un météorologue présente une prévision météorologique qui inclut entre autre la "probabilité" qu'il pleuve le lendemain. Afin d'évaluer la précision de ses prévisions, nous l'évaluons de la façon suivante: s'il a prédit qu'il pleuvrait avec probabilité p, nous lui attribuons un score de $1-(1-p)^2$ s'il pleut réellement, et de $1-p^2$ sinon.

Si le météorologue croit réellement que la probabilité qu'il pleuve demain est de 0.6, quelle devrait être sa prévision afin de maximiser l'espérance de son score? Et s'il croit que la probabilité qu'il pleuve demain est $p^* \in (0,1)$?

Exercice 1.8. Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance 12 et de variance 16. À l'aide de la table de la loi normale, calculez les probabilités suivantes.

(a) $\mathbb{P}(X \leq 15)$

(b) $\mathbb{P}(X > 12)$

(c) $\mathbb{P}(13 \leq X \leq 17)$

(d) $\mathbb{P}(|X-12| \leq 7.84)$

Exercice 1.9. Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance 2 et de variance 9. À l'aide de la table de la loi normale, trouvez la valeur de c telle que chacun des énoncés suivants est satisfait.

(a) $\mathbb{P}(X \leq c) = 0.9$

(b) $\mathbb{P}(X > c) = 0.975$

(c) $\mathbb{P}(|X-2| \leq c) = 0.95$

Exercice 1.10. Soit X et Y deux variables aléatoires de loi $\mathscr{B}(p_X)$ et $\mathscr{B}(p_Y)$, respectivement, telles que $\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0.3$, $\mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0.1$, $\mathbb{P}(X=1, Y=0) = 0.2$, et $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0.4$.

(a) X et Y sont-elles indépendantes?

(b) Calculez $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(c) Déduisez-en $\mathbb{V}(X+3Y-2)$.

Exercice 1.11. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes de support $\{-1,1\}$ et $\{-1,0,1\}$, respectivement, pour lesquelles les probabilités $\mathbb{P}(X=s,Y=t)$ sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

s \ t	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

(a) Calculez les fonctions de masses marginales de X et de Y.

(b) Calculez $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(c) X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 1.12. Soit $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}([0,1])$. Montrez que la variable aléatoire $Y=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$ a une fonction de répartition donnée par

$$F_Y(t)=t^n, \quad t\in[0,1].$$

Exercice 1.13. Supposons que l'examen final du cours STT1000 contient cinq questions à choix multiple ayant chacune quatre choix de réponse.

(a) Si vous répondez à chaque question en choisissant l'une des quatre réponses de façon aléatoire et uniforme, quelle est la probabilité que vous obteniez au moins la note de passage de 50%?

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir la note de passage si l'examen comporte plutôt 10 questions?

(c) Et si l'examen comporte 25 questions, pouvez-vous trouver une valeur approximative d'obtenir la note de passage?

Exercice 1.14. Soit $X_1,\ldots,X_{100}$ des variables aléatoires indépendantes dont la fonction de répartition commune est donnée par

$$F(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t^2/16, & 0\le t\le 4\\ 1, & t>4\end{cases},$$

et soit $\bar{X}_n=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$ leur moyenne. Calculez une approximation de

$$\mathbb{P}(2.6\le \bar{X}_n\le 2.7).$$