Chapitre 4 - Intervalle de Confiance

Marouane Il Idrissi
il_idrissi.marouane@uqam.ca

STT 1000 - Automne 2025
Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal

UQÀM

Intervalle de confiance

Dans le **Chapitre 3**, on cherchait a faire une **estimation ponctuelle** d'un paramètre θ en se basant sur un échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Après avoir trouvé **un bon estimateur** $\widehat{\theta}(\mathbf{X})$, et calculé **une estimation** $\widehat{\theta}(\mathbf{x})$ à l'aide d'un **échantillon observé** $\mathbf{x}$, **quelle confiance peut-on avoir en** $\widehat{\theta}(\mathbf{x})$?
On sait que $\widehat{\theta}(\mathbf{x}) \neq \theta$ à moins d'avoir **observé toute la population** (qui est supposée infinie)...

Intuition:
Construire un **intervalle**, qui contiendrait **la vraie valeur de** θ avec **une grande probabilité!**

Par exemple, si on accepte un **risque de se de se tromper de** 5% , est-ce qu'on peut **trouver un intervalle** $[a(\mathbf{X}), b(\mathbf{X})]$ **à partir de l'échantillon** tel que:

$$\mathbb{P}\left(a(\mathbf{X}) \leq \theta \leq b(\mathbf{X})\right) = 0.95$$

☞ **C'est exactement la définition d'un intervalle de confiance!**

Notes

Plan du chapitre

1. Préliminaires probabilistes
2. Intervalles de confiance exacts
3. Intervalles de confiance asymptotiques
4. Intervalles de confiance pour deux échantillons Gaussiens
5. Précision et taille d´échantillon

Sommaire

Notes

Loi du Chi-Carré

Une v.a. de **loi du Chi-Carré** (ou Khi-Carré, ou χ^2) est une v.a. **continue positive**

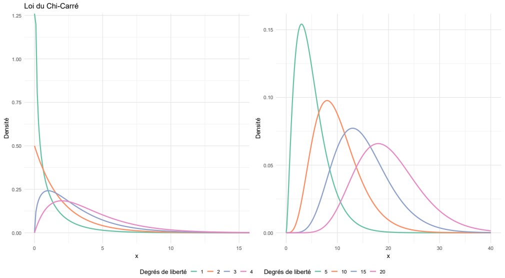
Elle est paramétrée par **un degré de liberté** $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

On note $X \sim \chi^2(k)$, et son support est $(0, \infty)$

Caractéristiques *(Loi du Chi-Carré).* ★

- $f_X(t) = \frac{t^{k/2-1}\exp(-t/2)}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$
- $\mathbb{E}[X] = k$
- $\mathbb{V}(X) = 2k$

Loi du Chi-Carré - Illustration



Notes

Loi du Chi-Carré - Propriétés

Propriétés *(Chi-Carré = Somme de carré de Gaussiennes standard).* ★

Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des ***variables aléatoires Gaussiennes standard et indépendantes****. Alors,*

$$V = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

☞ Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, quelle est la loi de Z^2? ✍

☞ En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[Z^4\right]$. ✍

Propriétés *(Somme de Chi-Carrés = Chi-Carré).* ★

Soient $Y_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $Y_2 \sim \chi^2(n_2)$ deux v.a.s ***indépendantes****, alors*

$$V = Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$

Loi de Student

Une v.a. de **loi de Student** est une v.a. **continue**

Elle est paramétrée par **un degré de liberté** $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

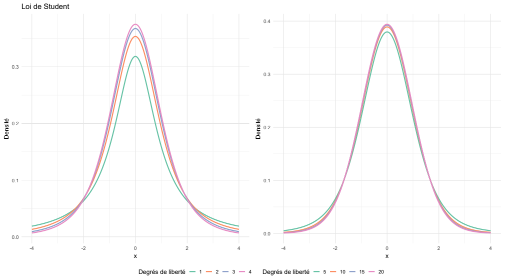
On note $X \sim \mathcal{T}(k)$ (des fois $t(k)$), et son support est $\mathbb{R}$

Caractéristiques *(Loi de Student).* ★

- $f_X(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$
- $\mathbb{E}[X] = 0$ pour $k \geq 2$, n'existe pas sinon
- $\mathbb{V}(X) = \frac{k}{k-2}$ pour $k > 2$, n'existe pas sinon

Notes

Loi de Student - Illustration



Loi de Student - Propriétés

Propriétés *(Student = Gaussienne divisée par Chi-Carré).* ★

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi^2(k)$ deux v.a.s ***indépendantes****. Alors:*

$$T = Z\sqrt{\frac{k}{V}} \sim \mathcal{T}(k)$$

Propriétés *(Comportement asymptotique de la loi de Student).* ★

Soit $f_T(s;k)$ la densité de la loi de Student, et $\phi(s)$ la densité ***normale standard****. Alors,*

$$f_T(s;k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi(s).$$

☞ **Plus le degré de liberté augmente, plus la loi de Student se rapproche d'une $\mathcal{N}(0,1)$.**

Notes

Sommaire

Intervalles de confiance

L'idée des **intervalles de confiance** (IC) est de **construire un intervalle aléatoire**, qui **contiendrait le paramètre que l'on souhaite estimer avec une grande probabilité**

Un *intervalle aléatoire*, c'est simplement un intervalle $[X, Y]$, ou X et Y sont deux v.a.s.

Cet intervalle aléatoire est construit à l'aide de **deux statistiques** $\widehat{\theta}_I(\mathbf{X})$ et $\widehat{\theta}_S(\mathbf{X})$

Une statistique, c'est **une fonction d'un échantillon**

Définition *(Intervalle de confiance).* ★

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de loi populationnelle $f(t, \theta)$. Soit $\alpha \in (0, 1)$ un **niveau de risque**. Un **intervalle de confiance au niveau** $1 - \alpha$ **pour le paramètre** θ est un intervalle aléatoire de la forme $\mathrm{IC}_\theta(\mathbf{X}) = \left[\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}), \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right]$, tel que:

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \mathrm{IC}_\theta(\mathbf{X})\right) = \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}) \le \theta \le \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right) = 1 - \alpha$$

Notes

Intervalles de confiance

☞ Le **niveau de risque** α contrôle **le risque que** θ **ne soit pas dans cet intervalle**:

- Pour $\alpha \times 100$ % des **échantillons observés**, θ ne sera **pas dans cet intervalle**
- pour $(1-\alpha) \times 100$ % des **échantillons observés**, θ sera effectivement **dans cet intervalle**

On dit qu'un **intervalle de confiance** pour θ est **informatif** si: ★

1. α est petit ;
2. La largeur de l'intervalle est petite.

Par exemple:
L'intervalle $[0, 1]$ pour le p d'une Bernoulli **n'est pas informatif**:

1. $\alpha = 0$, donc **on est sûr que** θ est **toujours** dedans ;
2. La largeur de l'intervalle est **trop grande pour être utile**.

☞ Généralement, on **fixe le risque** α à 0.1, 0.05 ou 0.01
Quels sont les **niveaux de confiance associés?** ✍

Intervalles de confiance - Unilatéral, bilatéral

Il y a **trois types d'IC**: ★

- **Unilatéral à droite**, de la forme $\left[-\infty, \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right]$, tel que: $\mathbb{P}\left(\theta \leq \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right) = 1-\alpha$
- **Unilatéral à gauche**, de la forme $\left[\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}), \infty\right]$, tel que: $\mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}) \leq \theta\right) = 1-\alpha$
- **Bilatéral**, de la forme $\left[\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}), \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right]$, tel que: $\mathbb{P}\left(\widehat{\theta}_I(\mathbf{X}) \leq \theta \leq \widehat{\theta}_S(\mathbf{X})\right) = 1-\alpha$

☞ Un **intervalle de confiance** bilatéral n'est **pas nécessairement symétrique autour de** θ!

Pourquoi utiliser chaque type d'IC: ★

- **Unilatéral à droite** : **Borne supérieure** pour θ
- **Unilatéral à gauche** : **Borne inférieure** pour θ
- **Bilatéral** : **Encadrer** la valeur précise de θ

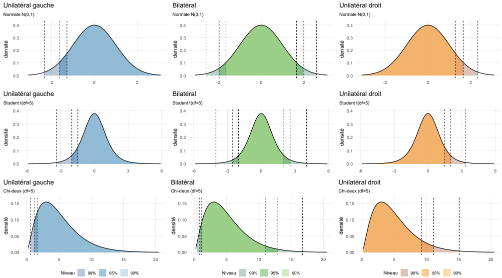
Notes

Intervalles de confiance - Recette pour construire un IC exact

Pour construire un IC pour θ inconnu à partir d'un échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$:

1. **Proposer un estimateur** $\widehat{\theta}(\mathbf{X})$ de θ
2. **Déterminer la loi exacte de** $\widehat{\theta}(\mathbf{X})$
3. Construire un **pivot** Δ entre $\widehat{\theta}(\mathbf{X})$ et θ, par exemple:
$$\Delta = \widehat{\theta}(\mathbf{X}) - \theta \quad \text{ou} \quad \Delta = \widehat{\theta}(\mathbf{X})/\theta.$$
   Un pivot Δ est une v.a. dont la loi ne dépend pas de θ!!
   ☞ Ce dernier point est **crucial** pour la construction d'un IC
4. Choisir un **niveau de risque** α, et donc un **niveau de confiance** $1-\alpha$. Se baser sur la **loi exacte** de Δ (table de probabilités) pour trouver **deux nombres** d_I et d_S tels que
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_s) = 1 - \alpha$$
5. Utiliser la définition de Δ, et les quantités d_I et d_S pour **isoler** θ dans le calcul de probabilité au-dessus, par exemple pour $\Delta = \widehat{\theta}(\mathbf{X}) - \theta$:
$$\mathbb{P}\left(d_I \leq \widehat{\theta}(\mathbf{X}) - \theta \leq d_S\right) = 1 - \alpha, \quad \iff \quad \mathbb{P}\left(\widehat{\theta}(\mathbf{X}) - d_S \leq \theta \leq \widehat{\theta}(\mathbf{X}) - d_I\right) = 1 - \alpha,$$

Intervalles de confiance - Illustration, loi du pivot



Notes

Échantillon Gaussien - IC bilatéral pour μ, variance connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ **inconnu**, **mais σ_*^2 est connu**
(Par exemple, on sait que $\sigma_*^2 = 2$).

On veut construire un IC bilatéral pour $\theta = \mu$.

1. Proposez un estimateur pour μ ✍
2. Quelle est la loi de cet estimateur? ✍
3. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{N}(0,1)$ **(qui ne dépend pas de μ)**✍
4. Quels deux nombres d_I et d_S permettent d'avoir
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍
5. Proposez un intervalle de confiance $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{X}), \widehat{\mu}_S(\mathbf{X})]$ pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍
6. Supposons que $n = 8$, $\alpha = 0.05$, $\sigma_*^2 = 2$ et que nous ayons comme échantillon observé
$$\mathbf{x} = (45.44, 45.68, 45.65, 44.92, 45.88, 48.61, 43.94, 43.75), \quad \text{et donc} \quad \overline{x}_n = 45.48.$$
Calculez l'intervalle observé $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{x}), \widehat{\mu}_S(\mathbf{x})]$ et interprétez-le. ✍

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à droite pour μ, variance connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ **inconnu**, **mais σ_*^2 est connu**
(Par exemple, on sait que $\sigma_*^2 = 2$).

On veut construire un IC unilatéral à droite pour $\theta = \mu$.

1. **Proposez un estimateur pour μ** ✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{N}(0,1)$ (qui ne dépend pas de μ)**✍
4. Quels nombre d_I permet d'avoir
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍
5. Proposez un intervalle de confiance $(-\infty, \widehat{\mu}_S(\mathbf{X})]$ pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍
6. Calculez l'intervalle observé $(-\infty, \widehat{\mu}_S(\mathbf{x})]$ basé sur les données précédentes et interprétez-le. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à gauche pour μ, variance connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ **inconnu**, **mais σ_*^2 est connu**
(Par exemple, on sait que $\sigma_*^2 = 2$).

On veut construire un IC unilatéral à gauche pour $\theta = \mu$.

1. **Proposez un estimateur pour μ** ✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (qui ne dépend pas de μ)**✍
4. Quels nombre d_S permet d'avoir
$$\mathbb{P}(\Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \text{ ? ✍}$$
5. Proposez un intervalle de confiance $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{X}), \infty)$ pour μ au niveau $1 - \alpha$. ✍
6. Calculez l'intervalle observé $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{x}), \infty)$ basé sur les données précédentes et interprétez-le. ✍

Échantillon Gaussien - IC bilatéral pour μ, variance inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.
On veut construire un IC bilatéral pour $\theta = \mu$.

Idée: Remplacer σ^2 par **un estimateur**!

1. Proposez un estimateur pour μ et un estimateur pour σ^2.✍
2. Quelles sont les lois de ces estimateur? ✍
3. En utilisant le résultat suivant (non démontré):

> **Lemme** *(Lemme de Basu).* ★
> *Soit* **X** *un* ***échantillon Gaussien i.i.d.*** *Alors,* $\overline{X}_n \perp\!\!\!\perp S^2$.

   Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{T}(n-1)$.✍
4. Quels deux nombres d_I et d_S permettent d'avoir
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \text{ ? ✍}$$
5. Proposez un intervalle de confiance $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{X}), \widehat{\mu}_S(\mathbf{X})]$ pour μ au niveau $1 - \alpha$. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à droite pour μ, variance inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.

On veut construire un IC unilatéral à droite pour $\theta = \mu$.

1. **Proposez un estimateur pour μ et un estimateur pour σ^2.** ✍
2. **Quelles sont les lois de ces estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{T}(n-1)$.** ✍
4. Quel nombre d_I permet d'avoir
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍
5. Proposez un intervalle de confiance $(\infty, \widehat{\mu}_S(\mathbf{X})]$ pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à gauche pour μ, variance inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma_*^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.

On veut construire un IC unilatéral à gauche pour $\theta = \mu$.

1. **Proposez un estimateur pour μ et un estimateur pour σ^2.** ✍
2. **Quelles sont les lois de ces estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{T}(n-1)$.** ✍
4. Quel nombre d_S permettent d'avoir
$$\mathbb{P}(\Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍
5. Proposez un intervalle de confiance $[\widehat{\mu}_I(\mathbf{X}), \infty)$ pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - IC bilatéral pour σ^2, moyenne connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$, avec μ_* **connu**.

On cherche à construire un IC bilatéral pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

1. Proposez un estimateur pour σ^2.✍
2. Quelle est la loi de cet estimateur? ✍
3. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n)$.✍
4. Quels deux nombres d_I et d_S permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \; ?$$ ✍

5. Proposez un intervalle de confiance $\left[\widehat{\sigma^2}_I(\mathbf{X}), \widehat{\sigma^2}_S(\mathbf{X})\right]$ pour σ^2 au niveau $1 - \alpha$. ✍

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à droite pour σ^2, moyenne connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$, avec μ_* **connu**.

On cherche à construire un IC unilatéral à droite pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

1. **Proposez un estimateur pour σ^2.**✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n)$.**✍
4. Quel nombre d_I permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(\Delta \geq d_I) = 1 - \alpha \; ?$$ ✍

5. Proposez un intervalle de confiance $\left[\widehat{\sigma^2}_I(\mathbf{X}), \infty\right)$ pour μ au niveau $1 - \alpha$. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à gauche pour σ^2, moyenne connue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_*, \sigma^2)$, avec μ_* **connu**.

On cherche à construire un IC unilatéral à gauche pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

1. **Proposez un estimateur pour σ^2.** ✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n)$.** ✍
4. Quel nombre d_I permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(\Delta \le d_S) = 1 - \alpha \text{ ? } ✍$$

5. Proposez un intervalle de confiance $\left(\infty, \widehat{\sigma^2}_S(\mathbf{X})\right]$ pour μ au niveau $1 - \alpha$. ✍

Échantillon Gaussien - IC bilatéral pour σ^2, moyenne inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.

On cherche à construire un IC bilatéral pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

Idée: Remplacer μ par **un estimateur!**

1. Proposez un estimateur pour μ et σ^2. ✍
2. Quelle est la loi de cet estimateur? ✍
3. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n-1)$. ✍
4. Quels deux nombres d_I et d_S permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(d_I \le \Delta \le d_S) = 1 - \alpha \text{ ? } ✍$$

5. Proposez un intervalle de confiance $\left[\widehat{\sigma^2}_I(\mathbf{X}), \widehat{\sigma^2}_S(\mathbf{X})\right]$ pour σ^2 au niveau $1 - \alpha$. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à droite pour σ^2, moyenne inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.

On cherche à construire un IC bilatéral pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

Idée: Remplacer μ par **un estimateur!**

1. **Proposez un estimateur pour μ et un estimateur pour σ^2.** ✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n-1)$.** ✍
4. Quel nombre d_I permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(\Delta \leq d_S) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍

5. Proposez un intervalle de confiance $\left[\widehat{\sigma^2}_I(\mathbf{X}), \infty\right)$ pour σ^2 au niveau $1-\alpha$. ✍

Échantillon Gaussien - IC unilatéral à gauche pour σ^2, moyenne inconnue

On a $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ et σ^2 **inconnus**.

On cherche à construire un IC bilatéral pour le paramètre $\theta = \sigma^2$.

Idée: Remplacer μ par **un estimateur!**

1. **Proposez un estimateur pour μ et un estimateur pour σ^2.** ✍
2. **Quelle est la loi de cet estimateur?** ✍
3. **Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \chi^2(n-1)$.** ✍
4. Quel nombre d_I permettent d'avoir

$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta) = 1 - \alpha \text{ ?}$$ ✍

5. Proposez un intervalle de confiance $\left(\infty, \widehat{\sigma^2}_S(\mathbf{X})\right]$ pour σ^2 au niveau $1-\alpha$. ✍

Notes

Échantillon Gaussien - Récapitulatif des ICs

Paramètre et type	Situation	$\widehat{\theta}(\mathbf{X})$	Pivot Δ	IC exact
Bilatéral pour μ	σ^2 connu	$\overline{X}_n$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. droite pour μ	σ^2 connu	$\overline{X}_n$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\left(-\infty \ ; \ \overline{X}_n + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. gauche pour μ	σ^2 connu	$\overline{X}_n$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$	$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \infty\right)$
Bilatéral pour μ	σ^2 inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$	$\left[\overline{X}_n - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \ ; \ \overline{X}_n + t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. droite pour μ	σ^2 inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$	$\left(-\infty \ ; \ \overline{X}_n + t_{1-\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. gauche pour μ	σ^2 inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{\overline{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$	$\left[\overline{X}_n - t_{1-\alpha,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \ ; \ \infty\right]$
Bilatéral pour σ^2	μ connu	$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$	$\frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{nS_0^2}{c_{1-\alpha/2,n}} \ ; \ \frac{nS_0^2}{c_{\alpha/2,n}}\right]$
Uni. droite pour σ^2	μ connu	$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$	$\frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left(0 \ ; \ \frac{nS_0^2}{c_{\alpha,n}}\right]$
Uni. gauche pour σ^2	μ connu	$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$	$\frac{nS_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left[\frac{nS_0^2}{c_{1-\alpha,n}} \ ; \ \infty\right)$
Bilatéral pour σ^2	μ inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{c_{1-\alpha/2,n-1}} \ ; \ \frac{(n-1)S_0^2}{c_{\alpha/2,n-1}}\right]$
Uni. droite pour σ^2	μ inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\left(0 \ ; \ \frac{(n-1)S^2}{c_{\alpha,n-1}}\right]$
Uni. gauche pour σ^2	μ inconnu	$\overline{X}_n,\ S^2$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{c_{1-\alpha,n-1}} \ ; \ \infty\right)$

Intervalle de confiance - Illustration

Exemple *(Contrôleur de paquets cafés)*. Vous êtes contrôleur qualité dans une compagnie qui vend du café. Pour assurer la conformité des paquets de cafés, ils doivent en moyenne peser **500g**, avec une variabilité acceptée de **3**g². On suppose que les masses (en g) suivent une loi Normale. Vous prélevez un échantillon de taille 10 :

$$498.7,\ 501.2,\ 499.8,\ 500.5,\ 497.9,\ 502.1,\ 499.3,\ 500.8,\ 501.0,\ 498.9$$

On observe $\overline{x}_n = 500.2$, $s^2 = 1.73$, $s = 1.32$, $s_0^2 = 1.56$

☞ Quelle est la loi de la population? ✍

☞ Calculez les ICs bilatéraux aux niveaux 90%, 95% et 99% pour μ et σ^2, dans toutes les configurations possibles. ✍

☞ Peut-on conclure que la production de café est conforme à la qualité attendue? ✍

Notes

Intervalle de confiance - Interprétation

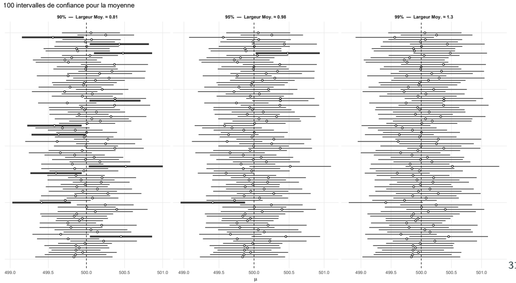
Le niveau de confiance **ne garantie pas que θ soit à l'intérieur de l'intervalle!**

Interprétation d'un **intervalle de confiance** $\mathrm{IC}_\theta(\mathbf{X})$ au niveau $(1-\alpha)$:

- On suppose que l'on peut simuler **beaucoup d'échantillons observés de même taille** n
- A partir de chacun échantillon, on **calcule un IC au niveau** $1-\alpha\%$
- Alors, θ **sera dans approximativement** $1-\alpha\%$ **de ces échantillons**
- **Si on augmente le nombre d'échantillons simulés, alors la proportion d'IC qui contiennent θ va tendre vers** $1-\alpha\%$

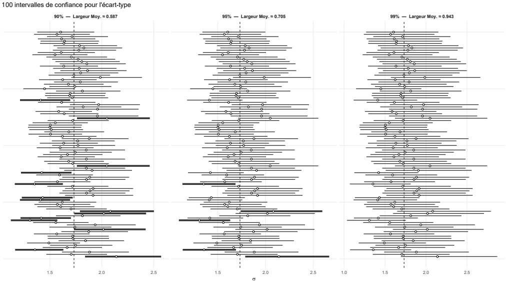
☞ **Pour un seul échantillon observé et un seul IC, on ne sait pas si θ appartient effectivement à cet échantillon**

Intervalle de confiance - Interprétation



Notes

Intervalle de confiance - Interprétation



Sommaire

Notes

Intervalle de confiance asymptotiques

Jusqu'à présent, on a **supposé que les échantillons étaient Gaussiens**
☞ C'était bien pratique pour **déterminer la loi du pivot**

Mais c'est un cadre de travail très limitant
On ne peut pas modéliser **TOUS** les phénomènes par les v.a. Gaussiennes

Par exemple, si on s'intéresse **un échantillon de durées de vie d'ampoules**
☞ C'est un phénomène qui se modélise généralement avec une loi exponentielle.

Idée: **Utiliser le Théorème de la Limite Centrale** pour approcher la loi du pivot
C'est la base des **ICs asymptotiques**

Théorème de la Limite Centrale

Théorème *(Théorème de la limite centrale (TLC)).* ★

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.s ***i) indépendantes, ii) ayant toutes la même loi iii) avec*** $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$, ***et*** $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Alors la fonction (de n) suivante admet comme limite

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Théorème *(Loi asymptotique du pivot pour μ).* ★

Dans le cadre du TLC, on a que:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

☞ **Quelle est la différence entre ces deux résultats?** ✍

Notes

Intervalles de confiance asymptotique pour μ - Recette

Pour construire un IC **asymptotique** pour $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ à partir d'un échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$:

1. **Utiliser l'estimateur** $\overline{X}_n$ pour μ
2. Utiliser le **pivot**:
$$\Delta = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S}\right)$$
3. **Vérifier que l'on est dans un régime asymptotique:** $n > 30$
☞ **Si (et seulement si) c'est le cas, supposer l'approximation suivante:**
$$\Delta = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$$
4. Choisir un **niveau de risque** α, et donc un **niveau de confiance** $1-\alpha$. Se baser sur la **loi asymptotique** de Δ (table de probabilités) qui donne, pour un IC bilatéral:
$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S}\right) \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$
5. Utiliser la définition de Δ pour **isoler** μ dans le calcul de probabilité au-dessus.

IC pour l'espérance - Échantillon quelconque

On a $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de **loi populationnelle inconnue**, avec:

- $\mu = \mathbb{E}[X_1] < \infty$
- $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$
- $n > 30$

1. Quelle est la loi asymptotique du pivot $\Delta = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S}\right)$? ✍
2. Sommes-nous dans un régime asymptotique? ✍
3. Quelle approximation pouvons-nous accepter? ✍
4. Sous cette approximation, quels nombres d_I et d_S permettent d'avoir:
$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1-\alpha?$$
✍
5. Proposez un IC asymptotique bilatéral $[\widehat{\mu}_S(\mathbf{X}), \widehat{\mu}_S(\mathbf{X})]$ pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍
6. Proposez des ICs asymptotiques unilatéraux pour μ au niveau $1-\alpha$. ✍

Notes

ICs asymptotiques pour l'espérance - Formules générales

Paramètre et type	Condition	$\widehat{\theta}(\mathbf{X})$	Pivot Δ	Loi asympto.	IC asympto
Bilatéral pour μ	$n > 30$ + TLC	$\overline{X}_n$	$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n-\mu}{S}\right)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. droite pour μ	$n > 30$ + TLC	$\overline{X}_n$	$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n-\mu}{S}\right)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\left(-\infty\ ;\ \overline{X}_n + z_{1-\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
Uni. gauche pour μ	$n > 30$ + TLC	$\overline{X}_n$	$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n-\mu}{S}\right)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \infty\right)$

Intervalle de confiance asymptotique pour μ - Illustration

Exemple *(Contrôleur d'ampoules)*. Vous êtes contrôleur qualité dans une compagnie qui produit des ampoules. Pour assurer la qualité des produits, elles doivent en moyenne durer **20000h**. On ne connaît pas la loi de la durée de vie de ces ampoules, mais on sait que son espérance et sa variance existent. Vous prélevez un échantillon de taille 50 avec:

$$\overline{x}_n = 20026.94, \quad s = 164.49$$

☞ Sommes-nous dans un régime asymptotique? Si oui, quel est la loi asymptotique du pivot? ✍

☞ Calculez les ICs asymptotiques bilatéraux et unilatéraux aux niveaux 90%, 95% et 99% pour μ. ✍

☞ Peut-on conclure que la durée de vie des ampoules est conforme? ✍

Notes

Sommaire

Deux échantillons Gaussiens

Jusqu'à présent, nous n'avions accès **qu'à un seul échantillon i.i.d.**
Ça nous a permis d'inférer de l'information sur les paramètres de la **loi de la population**

Comment faire si l'on a **deux populations différentes** que l'on souhaite comparer?

Exemple *(Méthodes de manufacture)*. Vous êtes en charge d'une usine de construction de vélo. Vous voulez comparer **deux méthodes de fabrication**. On modélise le **temps de fabrication par la méthode A** par une Gaussienne d'espérance μ_X, et le **temps de fabrication par la méthode B** par une Gaussienne d'espérance μ_Y.

On cherche **une estimation par IC** du gain de productivité moyen $\mu_X - \mu_Y$.

Objectif de cette section:
Construire des outils pour répondre à ce genre de problématique dans le cas Gaussien

Notes

Deux configurations

On a accès à **deux échantillons** issus de **deux populations différentes**:

- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{n_X})$ i.i.d. de taille n_X et de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$
- $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_Y})$ i.i.d. de taille n_Y et de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

On dit que:

- $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont **indépendants** si, pour $i = 1, \ldots, n_X$ et $j = 1, \ldots, n_Y$: $X_i \perp\!\!\!\perp Y_j$ ★
- $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont **appariés** si **les individus forment des paires**: ★
  - Les deux échantillons ont la même taille: $n_X = n_Y = n$
  - X_i et Y_i proviennent du **même individu** et forment une **paire** (X_i, Y_i)
  - Les paires sont **indépendantes entre elles**: $(X_i, Y_i) \perp\!\!\!\perp (X_j, Y_j)$ pour $i \neq j$.

Exemple *(Échantillons appariés)*. On veut mesurer **l'effet d'un médicament sur la fièvre**:

- X_i: température corporelle de l'individu i **avant la prise du médicament**
- Y_i: température corporelle du même individu i **4h après la prise du médicament**

Différence de moyennes - Échantillons indépendants, variances connues

On a $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{n_X})$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_Y})$ i.i.d. de loi populationnelle, $\mathcal{N}(\mu_Y \sigma_Y^2)$ où σ_X^2 et σ_Y^2 **sont supposés connus**, et $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$.

On cherche à construire des ICs pour $\mu_X - \mu_Y$.

1. Proposez un estimateur pour μ_X et pour μ_Y. ✍
2. Quelle est la loi de la différence de ces estimateurs? ✍
3. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. ✍
4. En déduire les intervalles de confiance unilatéraux et bilatéraux au niveau $1 - \alpha$. ✍

Notes

Différence de moyennes - Échantillons indépendants, variances égales, inconnues

On a $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{n_X})$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_Y})$ i.i.d. de loi populationnelle, $\mathcal{N}(\mu_Y \sigma^2)$ où σ^2 est **inconnu** et $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$.

Très important: On suppose que les lois populationnelles des deux échantillons ont la même variance!

On cherche à construire des ICs pour $\mu_X - \mu_Y$.

1. **Proposez un estimateur pour μ_X et pour μ_Y.**
2. **Quelle est la loi de la différence de ces estimateurs?**
3. En utilisant le pivot
$$\Delta = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_X + 1/n_Y}} \sim \mathcal{T}(n_X + n_Y - 2),$$
où
$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2},$$
déduire les intervalles de confiance unilatéraux et bilatéraux au niveau $1 - \alpha$. ✍

Différence de moyennes - Échantillons appariés

On a $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ i.i.d. de loi populationnelle, $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ où σ^2 est **inconnu** et pour tout $i \neq j$, $(X_i, Y_i) \perp\!\!\!\perp (X_j, Y_j)$.

Très important: Les deux échantillons sont appariés et donc pas indépendants. Leur taille est donc nécessairement la même.

On cherche à construire des ICs pour $\mu_X - \mu_Y$

1. Pour une paire (X_i, Y_i), déterminer la loi de $D_i = X_i - Y_i$. ✍
2. En déduire la loi de $\overline{D}_n$. ✍
3. Proposez un estimateur pour la variance de D_i. Quelle est sa loi? ✍
4. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{T}(n-1)$.
5. En déduire les intervalles de confiance unilatéraux et bilatéraux au niveau $1 - \alpha$. ✍

Notes

Différence de deux moyennes - Récapitulatif des ICs

Variance "poolée": $S_p^2 = \frac{(n_X-1)S_X^2+(n_Y-1)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$

Ech.	Type	Situation	Estimateurs	Pivot Δ
Indép.	Bilat.	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Indép.	Droite	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Indép.	Gauche	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Indép.	Bilat.	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_X+1/n_Y}} \sim \mathcal{T}(n_X+n_Y-2)$
Indép.	Droite	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_X+1/n_Y}} \sim \mathcal{T}(n_X+n_Y-2)$
Indép.	Gauche	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_X+1/n_Y}} \sim \mathcal{T}(n_X+n_Y-2)$
Appariés	Bilat.	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\frac{\overline{D}_n-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$
Appariés	Droite	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\frac{\overline{D}_n-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$
Appariés	Gauche	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\frac{\overline{D}_n-\mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$

V.C = Variances connues; V.E.I = Variances égales inconnues ; V.I = Variances inconnues

Différence de deux moyennes - Récapitulatif des ICs

Ech.	Type	Situation	Estimateurs	IC exact
Indép.	Bilat.	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}\right]$
Indép.	Droite	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\left(-\infty\,;\,(\overline{X}-\overline{Y}) + z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}\right]$
Indép.	Gauche	V.C	$\overline{X}, \overline{Y}$	$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_X^2/n_X+\sigma_Y^2/n_Y}\,;\,\infty\right)$
Indép.	Bilat.	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) \pm t_{1-\alpha/2,n_X+n_Y-2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\right]$
Indép.	Droite	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\left(-\infty\,;\,(\overline{X}-\overline{Y}) + t_{1-\alpha,n_X+n_Y-2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\right]$
Indép.	Gauche	V.E.I	$\overline{X}, \overline{Y}, S_p^2$	$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\alpha,n_X+n_Y-2}\, S_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}\,;\,\infty\right)$
Appariés	Bilat.	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\left[\overline{D}_n \pm t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$
Appariés	Droite	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\left(-\infty\,;\,\overline{D}_n + t_{1-\alpha,n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$
Appariés	Gauche	V.I	$\overline{D}_n, S_D^2$	$\left[\overline{D}_n - t_{1-\alpha,n-1}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\,;\,\infty\right)$

V.C = Variances connues; V.E.I = Variances égales inconnues ; V.I = Variances inconnues

Notes

Loi Fisher-Snedecor

Une v.a. de **loi de Fisher-Snedecor** (ou simplement Fisher) est une v.a. **continue positive**

Elle est paramétrée par **deux degrés de libertés** $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

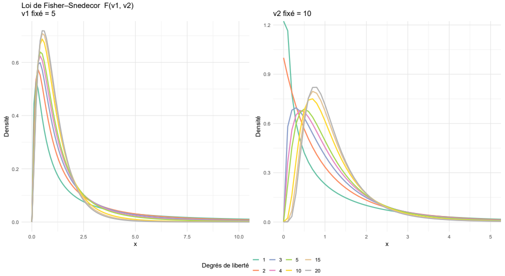
On note $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, et son support est $[0, \infty)$ et sa densité est donnée par:

$$f_X(t) = \frac{\left(\frac{\nu_1 t}{\nu_1 t + \nu_2}\right)^{\nu_1/2} \left(1 - \frac{\nu_1 t}{\nu_1 t + \nu_2}\right)^{\nu_2/2}}{tB(\nu_1/2, \nu_2/2)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t), \quad \text{où} \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Caractéristiques *(Loi de Fisher-Snedecor)*. ★

- $\mathbb{E}[X] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ pour $\nu_2 > 2$
- $\mathbb{V}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ pour $\nu_2 > 4$

Loi Fisher-Snedecor - Illustration



Notes

Loi Fisher-Snedecor - Propriétés

Propriétés *(Fisher = Ratio de deux Chi-Carrés indépendantes).* ★

Pour $U_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $U_2 \sim \chi^2(\nu_2)$, *et* $U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$:

$$\frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$$

Propriétés *(Transformation et lien avec d'autres lois).* ★

- *Si* $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, *alors* $\frac{1}{X} \sim \mathcal{F}(\nu_2, \nu_1)$
- *Si* $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, *alors* $T^2 \sim \mathcal{F}(1, \nu)$

Propriétés *(Quantile d'ordre de la loi de Fisher).* ★

Soit f_{α,ν_1,ν_2} *le quantile d'ordre* α *de* $X \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. *Alors, pour tout* $\alpha \in (0,1)$:

$$f_{1-\alpha,\nu_2,\nu_1} = \frac{1}{f_{\alpha,\nu_1,\nu_2}}$$

Ratio de variances - Échantillons indépendants

On a $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_{n_X})$ i.i.d. de loi populationnelle $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n_Y})$ i.i.d. de loi populationnelle, $\mathcal{N}(\mu_Y \sigma_Y^2)$ où **aucun des paramètres n'est connu** et $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$.

On cherche à construire des ICs pour $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.

1. Proposez un estimateur pour σ_X^2 et pour σ_Y^2. Quelles sont leurs lois?
2. Trouvez un pivot tel quel $\Delta \sim \mathcal{F}(n_X - 1, n_Y - 1)$.
3. En déduire les intervalles de confiance unilatéraux et bilatéraux au niveau $1 - \alpha$.

Notes

Ratio de variances — Récapitulatif des ICs (échantillons indépendants)

Éch.	Type	Situation	Estimateurs	Pivot Δ	IC exact
Indép.	Bilatéral	Moys. inconnues	$S_X^2,\ S_Y^2$	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,\,m-1}$	$\left[\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\alpha/2,n_X-1,n_Y-1}}\,;\,\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\alpha/2,n_X-1,n_Y-1}}\right]$
Indép.	Uni. droite	Moys. inconnues	$S_X^2,\ S_Y^2$	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,\,m-1}$	$\left(0\,;\,\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\alpha,n_X-1,n_Y-1}}\right]$
Indép.	Uni. gauche	Moys. inconnues	$S_X^2,\ S_Y^2$	$\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F_{n-1,\,m-1}$	$\left[\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\alpha,n_X-1,n_Y-1}}\,;\,\infty\right)$

Sommaire

Notes

Précision d'un intervalle de confiance

Dans plusieurs domaines, il est crucial de déterminer **combien d'observations** sont nécessaires pour que l'**intervalle de confiance soit suffisamment précis**
Par ex: Essais cliniques, sondages...

On doit d'abord définir la notion de **précision** d'un IC **bilatéral**

Définition *(Précision d'un intervalle de confiance).* ★
La **précision** d'un IC bilatéral $\left[\widehat{\theta}_S(\mathbf{X}), \widehat{\theta}_I(\mathbf{X})\right]$ correspond à sa **demi-largeur**:

$$\delta = \frac{\widehat{\theta}_S(\mathbf{X}) - \widehat{\theta}_I(\mathbf{X})}{2} \quad \text{(pour un IC bilatéral).}$$

☞ **Plus δ est petit, plus l'IC est précis**

Précision d'un IC - Exemple Gaussien

Exemple — moyenne d'une population gaussienne (variance connue) :

$$\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

La **précision** est alors :

$$\delta = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Remarques importantes : ★

- δ **diminue quand n augmente**: plus d'observations = intervalle plus serré
- δ **augmente avec $1-\alpha$**: plus le niveau de confiance est grand, plus l'intervalle est large ;
- δ **augmente avec σ**: plus le phénomène est incertain, moins on est précis.

Notes

Calcul de taille échantillonnale

Objectif : fixer une précision δ désirée et en déduire la taille minimale d'échantillon n nécessaire.

Pour l'exemple précédent, à partir de la relation:

$$\delta = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

on obtient: ★

$$\boxed{n^* = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{\delta}\right)^2}$$

☞ L'arrondit à l'entier supérieur de n^* assure d'avoir une précision d'au moins δ pour cet IC

Calcul de taille échantillonnale - Exemple

Exemple :

- On veut estimer la moyenne μ d'une population avec un IC à 95% de confiance
- On connaît $\sigma = 3$
- On souhaite une précision $d = 0.5$.

Alors :

$$n = \left(\frac{1.96 \times 3}{0.5}\right)^2 = 138.3 \Rightarrow \boxed{n = 139.}$$

Ainsi, pour une précision donnée:

- Doubler la précision (diviser d par 2) $\Rightarrow$ **multiplier n par 4**;
- Augmenter le niveau de confiance $\Rightarrow$ **Augmente la taille nécessaire**.

Notes

Calcul de taille échantillonnale - Illustration

Exemple *(Sondage)*.

Durant des élections municipales une personne candidate souhaite estimer **par un IC bilatéral asymptotique à 95%** la proportion p de citoyens qui voteront pour elle. Elle souhaite une précision de 3 points de pourcentages ($\delta = 0.03$).

Combien de personnes doit-il interroger au minimum?

☞ Comment modéliser l'échantillon? Quelle est sa loi populationnelle? ✍

☞ Donnez un estimateur de p. ✍

☞ Proposez un pivot asymptotique pour cet estimateur. En déduire un IC asymptotique bilatéral. ✍

☞ Quelle est la précision de cet IC? Quelle valeur de p la maximise? ✍

☞ Dans le pire cas, quelle taille d'échantillon permettrait d'avoir un IC avec la précision demandée? ✍

Notes