# Fiche d'exercices - Chapitre 5

## STT 1000 - Automne 2025

**Exercice 5.1.** En vue d'une élection entre deux candidats potentiels, $n = 15$ personnes ont été sondées. On souhaite tester l'hypothèse nulle $H_0 : p \geq 0.5$, où $p$ dénote la proportion de la population qui compte voter pour le candidat A. On utilise la statistique de test $n\hat{p}$, c'est-à-dire le nombre de répondants qui annoncent voter pour A, et la région de rejet $\{0, 1, 2\}$.

(a) Calculez le niveau $\alpha$ de ce test.

(b) Calculez la puissance du test en supposant que $p = 0.3$, puis en supposant $p = 0.2$, et finalement $p = 0.1$.

(c) Répétez les parties (a) et (b) si la région de rejet du test est élargie à $\{0, 1, 2, 3\}$.

(d) Calculez la p-valeur chaque valeur observée possible de $n\hat{p}$ entre 0 et 5.

**Exercice 5.2.** La compagnie pharmaceutique qui produit un médicament contre l'insomnie prétend qu'il aura un effet somnolent chez 80% des gens souffrant d'insomnie. Nous croyons que cet estimé de l'efficacité du médicament est exagéré, et souhaitons vérifier cette hypothèse. Pour ce faire, nous collectons un échantillon de $n = 10$ personnes souffrant d'insomnie à qui nous administrons le médicament et nous observons la variable aléatoire $Y$, le nombre de personnes parmi les 10 qui ont ressenti l'effet somnolent. Nous utilisons la région de rejet $\{0, 1, \ldots, 7\}$ pour contruire un test d'hypothèse.

(a) Quelles sont les hypothèses $H_0$ et $H_1$ qui sont testées?

(b) Que représente le niveau $\alpha$ dans cette situation?

(c) Calculez $\alpha$.

(d) Que représente la puissance du test dans cette situation?

(e) Calculez la puissance en supposant que la vraie efficacité est $p = 0.4$ et $p = 0.6$.

**Exercice 5.3.** Nous observons une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}([0, \theta])$, où $\theta > 0$ est inconnu. Nous souhaitons tester l'hypothèse $H_0 : \theta \leq \theta_0$ pour un certain $\theta_0 > 0$ fixé.

(a) Trouvez la région de rejet pour le test de niveau $\alpha$, en fonction de $\alpha$ et de $\theta_0$.

(b) Calculez la puissance du test trouvé en (a) en supposant que le vrai paramètre est égal à $\theta_1 > \theta_0$, en fonction de $\alpha$, $\theta_0$ et $\theta_1$.

**Exercice 5.4.** Nous observons une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. Nous souhaitons tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ pour un certain $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

(a) Trouvez la région de rejet pour le test bilatéral de niveau $\alpha$, en fonction de $\alpha$ et de $\theta_0$.

(b) Calculez la puissance du test trouvé en (a) en supposant que le vrai paramètre est égal à $\theta_1$, en fonction de $\alpha$, $\theta_0$ et $\theta_1$.

**Exercice 5.5.** Le voltage recommandé sur un circuit électrique est de 130. Le voltage réel est une variable aléatoire normale d'espérance $\mu$ et d'écart-type connu égal à 10.

(a) Un échantillon de 36 lectures indépendantes révèle un voltage moyen de 129.2. Peut-on conclure au niveau 5% que $\mu \leq 130$? Quelle est la p-valeur?

(b) Supposons qu'avant de tirer l'échantillon, on sait qu'un voltage de 128 ou moins peut être dangereux pour ce circuit. Quelle est la puissance du test utilisé en (a) si le vrai voltage était de 128?

(c) Quelle aurait dû être la taille échantillonnale afin que la puissance du test soit d'au moins 90%?

**Exercice 5.6.** Il existe une forte relation entre intervalles de confiance et tests d'hypothèse. Dans cette question, on verra qu'un intervalle peut être utilisé pour construire un test. Sachez qu'à l'inverse, un test d'hypothèse peut également être "inversé" afin de construire un intervalle de confiance valide.

(a) Soit $[\hat{\theta}_I; \hat{\theta}_S]$ un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre $\theta$. Considérez le test d'hypothèse pour $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta \neq \theta_0$ qui consiste à rejeter $H_0$ si l'intervalle ne contient pas $\theta_0$. Quel est le niveau de ce test?

(b) Rappelez vous de la forme d'un intervalle de confiance bilatéral pour l'espérance dans un échantillon Gaussien (avec variance connue). Vérifiez que le test obtenu à partir de cet intervalle en appliquant la stratégie développé en (a) est équivalent au test d'hypothèse bilatéral que nous avons vu dans le présent chapitre.

(c) Vérifier que tout comme dans le cas bilatéral, les intervalles de confiance unilatéraux peuvent être utilisés pour construire des tests d'hypothèse bilatéraux.

**Exercice 5.7.** Une usine doit produire en moyenne 800 tonnes d'un certain produit chimique quotidiennement. La production des cinq derniers jours, qu'on suppose bien modélisée par une loi normale, a été de 785, 805, 790, 793, et 802 tonnes, respectivement.

(a) Peut-on conclure, avec un risque d'erreur de type I de 5%, que la production quotidienne moyenne est inférieure à 800 tonnes?

(b) Supposons que des études antérieures nous apprennent que la variance de la production quotidienne est de 25 tonnes$^2$. Cela affecte-t-il votre conclusion?

(c) Vous êtes sceptique à propos de l'information selon laquelle la variance de la production quotidienne est égale à 25. Sur la base des données observées, pouvez-vous rejeter cette hypothèse?

**Exercice 5.8.** Une étude en didactique souhaite comparer deux programmes (A et B) d'enseignement de la lecture aux étudiants de niveau primaire. Les méthodes sont testées sur deux échantillons indépendants. Dans le premier échantillon, la méthode A est utilisée sur $n_X = 11$ enfants alors que dans le deuxième échantillon, la méthode B est utilisée sur $n_Y = 14$ enfants. Dans un test de lecture à la fin de l'étude, le premier groupe obtient un score moyen de 64 avec variance 52, alors que deuxième groupe obtient un score moyen de 69 avec variance 71.

(a) Peut-on conclure, avec un risque d'erreur de type I de 10%, que les méthodes sont différentes?

(b) Peut-on conclure, avec un risque d'erreur de type I de 10%, que la méthode B est meilleure que la méthode A?

(c) Quelle hypothèse avez-vous dû faire pour répondre aux questions (a) et (b)?

**Exercice 5.9.** Dans une étude clinique sur les effets secondaires d'un onguent analgésique, un $n = 10$ patients se voient appliquer le variant A de l'onguent sur un de leur bras, et le variant B de longuent sur l'autre bras. On mesure par la suite (sur une certaine échelle quantitative) la rougeur sur chaque zone touchée. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant. En supposant les observations normalement distribuées, peut-on conclure avec un risque d'erreur de type I de 5% que l'une des deux variantes cause plus de rougeur?

| Patient | Variant A | Variant B |
|---|---|---|
| 1 | 15.2 | 13.9 |
| 2 | 21.7 | 18.2 |
| 3 | 16.6 | 12 |
| 4 | 16.3 | 13.9 |
| 5 | 15.7 | 14.4 |
| 6 | 18.6 | 18.4 |
| 7 | 16.7 | 17.1 |
| 8 | 10.3 | 10.7 |
| 9 | 10.5 | 9.3 |
| 10 | 14.4 | 15.4 |

**Exercice 5.10.** La consommation maximale d'oxygène (communément appelée $VO_2$max) est mesurée chez échantillon de joueurs professionnels de hockey et de football. Les résultats sont rapportés dans le tableau suivant. On s'intéresse à la variabilité de cette mesure dans chacun des deux sports. En admettant une probabilité d'erreur de type I de 10%, peut-on conclure que la variance est plus grande parmi les joueurs de hockey? Et si on n'admet qu'une probabilité d'erreur de 5%?

| Sport | Taille de l'échantillon | Moyenne | Écart-type |
|---|---|---|---|
| Football | 15 | 17.4 | 4.5 |
| Hockey | 21 | 17.8 | 6.9 |