Fiche d'exercices - Chapitre 4

STT 1000 - Automne 2025

Exercice 4.1. Soit une seule observation $X \sim \mathscr{U}([0,\theta])$, où $\theta > 0$. Dans cet exercice, on vise à utiliser X pour construire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$, pour un niveau de risque $\alpha \in (0,1)$ fixé.

(a) Déterminez la loi de $\Delta = X/\theta$ et vérifiez qu'elle ne dépend pas de θ.

(b) On peut donc utiliser Δ comme pivot. Trouvez des nombres d_I et d_S tels que

$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1-\alpha.$$

(c) Déduisez-en un intervalle de confiance bilatéral pour θ.

Exercice 4.2. Dans le contexte de la question précédente, utilisez le même pivot Δ pour construire

(a) un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour θ;

(b) un intervalle de confiance unilatéral à droite pour θ.

Exercice 4.3. Soit une seule observation $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Dans cet exercice, on vise à utiliser X pour construire un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$, pour un niveau de risque $\alpha \in (0,1)$ fixé.

(a) Déterminez la loi de $\Delta = \lambda X$ et vérifiez qu'elle ne dépend pas de λ.

(b) On peut donc utiliser Δ comme pivot. Trouvez des nombres d_I et d_S tels que

$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1-\alpha.$$

(c) Déduisez-en un intervalle de confiance bilatéral pour λ.

Exercice 4.4. Dans le contexte de la question précédente, utilisez le même pivot Δ pour construire

(a) un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour λ;

(b) un intervalle de confiance unilatéral à droite pour λ.

Exercice 4.5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de la loi $\mathscr{U}([0,\theta])$, où $\theta > 0$.

(a) Déterminez la fonction de répartition de $\Delta = \frac{1}{\theta}\max\{X_1, \ldots, X_n\}$. **Indice:** pensez à utiliser le résultat de l'Exercice 1.12 de la série 1.

(b) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour θ.

(c) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance unilatéral à droite pour θ.

(d) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance bilatéral pour θ.

Exercice 4.6. La longueur de la carapace de jeunes homards est de loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$. Dans un échantillon aléatoire de dix tels homards, les longueurs de carapace suivantes ont été mesurées:

$$78,\ 66,\ 65,\ 63,\ 60,\ 60,\ 58,\ 56,\ 52,\ 50.$$

(a) Supposons que l'on sait que $\sigma^2 = 40$. Calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour μ.

(b) Supposons maintenant que σ^2 est inconnu. Calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour μ.

(c) En supposant que $\mu = 60$, calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour σ^2.

(d) Si μ est inconnu, calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour σ^2.

Exercice 4.7. La température corporelle au repos d'un adulte en santé peut être considérée comme une variable aléatoire de loi normale. Dans un échantillon de 130 personnes tirées aléatoirement, on a observé une température moyenne de 36.8 et un écart-type de 0.41 (en degrés Celsius).

(a) Calculez et interprétez des intervalles de confiance bilatéraux de niveau 90%, 95%, 98%, et 99% pour μ.

(b) Votre intervalle de niveau 99% contient-il la valeur de 37 degrés Celsius, souvent citée comme température corporelle normale?

Exercice 4.8. 740 étudiantes et étudiants, séparés en deux groupes, subissent un test de mathématiques. Chaque groupe à suivi l'un de deux programmes d'étude, que l'on souhaite comparer. Les résultats (notés sur 20) sont résumés dans le tableau suivant.

Groupe	Taille échantillonnale	Moyenne	Variance
A	372	15.3	31.3
B	368	14.2	29.7

(a) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 99% pour la moyenne dans chacun des deux groupes.

(b) Vos intervalles en (a) se chevauchent-ils?

(c) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 99% pour la différence entre la moyenne dans le groupe A et la moyenne dans le groupe B.

(d) Votre intervalle en (c) contient-il 0? Que pouvez-vous en conclure?

Exercice 4.9. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon iid de la loi $\mathscr{B}(p)$, où $p \in (0,1)$.

(a) En utilisant le fait que $X_i \in \{0,1\}$, montrez que la variance échantillonnale satisfait

$$S^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1},$$

où $\hat{p} = \bar{X}_n$ dénote la proportion échantillonnale de la modalité 1.

(b) Trouvez un pivot Δ qui ne dépend des observations qu'à travers $\hat{p}$ et dont la loi asymptotique est $\mathcal{N}(0,1)$.

(c) Trouvez des nombres d_I et d_S tels que, sous l'approximation Gaussienne,

$$\mathbb{P}(d_I \leq \Delta \leq d_S) = 1 - \alpha$$

et déduisez-en un intervalle de confiance bilatéral pour p.

(d) Trouvez un nombre d_S tels que, sous l'approximation Gaussienne,

$$\mathbb{P}(\Delta \leq d_S) = 1 - \alpha$$

et déduisez-en un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour p.

(e) Trouvez un nombre d_I tels que, sous l'approximation Gaussienne,

$$\mathbb{P}(\Delta \geq d_I) = 1 - \alpha$$

et déduisez-en un intervalle de confiance unilatéral à droite pour p.

Exercice 4.10. Un sondage indique que parmi 800 personnes sondées, 55% indiquent croire que la qualité des films à grand budget américains tend à diminuer avec les années.

(a) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 98% pour la proportion de la population qui croît que la qualité des films diminue.

(b) Pouvez-vous affirmer que plus de la moitié de la population partage cet opinion?

(c) Votre conclusion aurait-elle changé si vous aviez plutôt calculé un intervalle unilatéral à gauche de niveau 98%?

(d) Quelle taille échantillonnale aurait été nécessaire pour être certain que la demi-largeur (ou précision) de l'intervalle calculé en (a) n'excède pas 3 points de pourcentage (c'est-à-dire 0.03)?

Exercice 4.11. Un échantillon aléatoire de 500 patients d'un certain hôpital montre que la durée moyenne de leur séjour est de 5.4 jours, avec un écart-type de 3.1 jours. Calculez des intervalles de confiance bilatéraux de niveau 99% pour l'espérance et la variance de la durée du séjour d'un patient dans cet hôpital.

Remarque: il pourra être admit que l'approximation

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

est asymptotiquement valide si S^2 est la variance échantillonnale basée sur un échantillon de taille n dont la vraie variance est σ^2.

Exercice 4.12. Une étude vise à déterminer l'apport quotidien en potassium des femmes adultes canadiennes, selon leur province. Un échantillon de 140 femmes habitant au Québec et de 190 habitant en Ontario a été collecté. Parmi les Québécoises sondées, l'apport quotidien en potassium est en moyenne 3432mg avec un écart-type de 950mg. Parmi les Ontariennes, on note un apport moyen de 3309 avec un écart-type de 720mg. L'apport quotidien peut-être supposé de loi Gaussienne dans les deux échantillons.

(a) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour l'apport moyen en potassium chez les femmes habitant au Québec, puis faites de même pour les femmes habitant en Ontario. Dans les deux cas, votre intervalle contient-il la valeur de 3510mg (qui est la dose quotidienne recommandée par l'Organisation Mondiale de la Santé)?

(b) En supposant que les variances des deux populations sont égales, calculez un intervalle unilatéral à gauche de niveau 95% pour la différence $\mu_Q - \mu_O$ entre les apports moyens au Québec et en Ontario. Votre intervalle contient-il la valeur 0? Pouvez-vous en conclure quelque chose?

(c) Répondez à la même question qu'en (b), mais en supposant maintenant qu'il est connu que les écart-types parmi les populations québécoise et ontarienne sont $\sigma_Q = 890$ et $\sigma_O = 730$. Votre conclusion change-t-elle?

Exercice 4.13. On teste un nouveau médicament qui vise à réduire la douleur chez des patients atteint d'un certain type d'inflammation. Pour ce faire, 12 patients tirés aléatoirement on noté leur niveau de douleur avant et après la prise du médicament. La douleur rapportée par chaque patient avant et après la prise du médicament est rapportée dans le tableau suivant:

Numéro du patient	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Avant la prise du médicament	4.5	9.1	5.7	5.3	3.8	6.1	2.7	2.5	6.7	6.8	7.1	4.2
Après la prise du médicament	2.8	7.3	8.4	4.1	4.1	4.8	2.4	4.3	7.7	8.1	6	2

(a) Calculez un intervalle de confiance de niveau 90% pour l'effet du médicament, c'est-à-dire la différence entre la douleur avant et après qu'il ait été consommé.

(b) Supposons maintenant qu'un médicament alternatif ait été donné à 9 autres patients choisis aléatoirement et indépendamment de la même population, pour lesquels la douleur moyenne rapportée après la prise du médicament fut de 4.7 avec un écart-type de 1.8. Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 90% pour le ratio de variances σ_1^2/σ_2^2, où σ_1^2 représente la variance de la douleur après la prise du médicament de la question (a), alors que σ_2^2 représente la variance de la douleur après la prise du médicament alternatif.