

## Fiche d'exercices - Chapitre 4

### STT 1000 - Automne 2025

---

**Exercice 4.1.** Soit une seule observation  $X \sim \mathcal{U}([0, \theta])$ , où  $\theta > 0$ . Dans cet exercice, on vise à utiliser  $X$  pour construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$ , pour un niveau de risque  $\alpha \in (0, 1)$  fixé.

- (a) Déterminez la loi de  $\Delta = X/\theta$  et vérifiez qu'elle ne dépend pas de  $\theta$ .
- (b) On peut donc utiliser  $\Delta$  comme pivot. Trouvez des nombres  $d_l$  et  $d_s$  tels que

$$\mathbb{P}(d_l \leq \Delta \leq d_s) = 1 - \alpha.$$

- (c) Déduisez-en un intervalle de confiance bilatéral pour  $\theta$ .

**Exercice 4.2.** Dans le contexte de l'intervalle précédent, utilisez le même pivot  $\Delta$  pour construire

- (a) un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour  $\theta$ ;
- (b) un intervalle de confiance unilatéral à droite pour  $\theta$ .

**Exercice 4.3.** Soit une seule observation  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ , où  $\lambda > 0$ . Dans cet exercice, on vise à utiliser  $X$  pour construire un intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$ , pour un niveau de risque  $\alpha \in (0, 1)$  fixé.

- (a) Déterminez la loi de  $\Delta = \lambda X$  et vérifiez qu'elle ne dépend pas de  $\lambda$ .
- (b) On peut donc utiliser  $\Delta$  comme pivot. Trouvez des nombres  $d_l$  et  $d_s$  tels que

$$\mathbb{P}(d_l \leq \Delta \leq d_s) = 1 - \alpha.$$

- (c) Déduisez-en un intervalle de confiance bilatéral pour  $\lambda$ .

**Exercice 4.4.** Dans le contexte de l'intervalle précédent, utilisez le même pivot  $\Delta$  pour construire

- (a) un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour  $\lambda$ ;
- (b) un intervalle de confiance unilatéral à droite pour  $\lambda$ .

**Exercice 4.5.** Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon iid de la loi  $\mathcal{U}([0, \theta])$ , où  $\theta > 0$ .

- (a) Déterminez la fonction de répartition de  $\Delta = \frac{1}{\theta} \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . **Indice:** pensez à utiliser le résultat de l'Exercice 1.12 de la série 1.
- (b) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance unilatéral à gauche pour  $\theta$ .
- (c) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance unilatéral à droite pour  $\theta$ .
- (d) Utilisez le résultat en (a) pour construire un intervalle de confiance bilatéral pour  $\theta$ .

**Exercice 4.6.** La longueur de la carapace de jeunes homards est de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dans un échantillon aléatoire de dix tels homards, les longueurs de carapace suivantes ont été mesurées:

$$78, 66, 65, 63, 60, 60, 58, 56, 52, 50.$$

- (a) Supposons que l'on sait que  $\sigma^2 = 40$ . Calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour  $\mu$ .
- (b) Supposons maintenant que  $\sigma^2$  est inconnu. Calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour  $\mu$ .
- (c) En supposant que  $\mu = 60$ , calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour  $\sigma^2$ .
- (d) Si  $\mu$  est inconnu, calculez et interprétez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 95% pour  $\sigma^2$ .

**Exercice 4.7.** La température corporelle au repos d'un adulte en santé peut être considérée comme une variable aléatoire de loi normale. Dans un échantillon de 130 personnes tirées aléatoirement, on a observé une température moyenne de 36.8 et un écart-type de 0.41 (en degrés Celsius).

- (a) Calculez et interprétez des intervalles de confiance bilatéraux de niveau 90%, 95%, 98%, et 99% pour  $\mu$ .
- (b) Votre intervalle de niveau 99% contient-il la valeur de 37 degrés Celsius, souvent citée comme température corporelle normale?

**Exercice 4.8.** 740 étudiantes et étudiants, séparés en deux groupes, subissent un test de mathématiques. Chaque groupe à suivi l'un de deux programmes d'étude, que l'on souhaite comparer. Les résultats (notés sur 20) sont résumés dans le tableau suivant.

Groupe	Taille échantillonnale	Moyenne	Variance
A	372	15.3	31.3
B	368	14.2	29.7

- (a) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 99% pour la moyenne dans chacun des deux groupes.
- (b) Vos intervalles en (a) se chevauchent-ils?
- (c) Calculez un intervalle de confiance bilatéral de niveau 99% pour la différence entre la moyenne dans le groupe A et la moyenne dans le groupe B.
- (d) Votre intervalle en (c) contient-il 0? Que pouvez-vous en conclure?