Chapitre 1 - Notions de Probabilité

Marouane Il Idrissi
il_idrissi.marouane@uqam.ca

STT 1000 - Automne 2025

Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal

Plan du chapitre

Sommaire

Variable Aléatoire - Généralités

Une **variable aléatoire** (v.a.) est **une modélisation mathématique** d'un **phénomène incertain**:

- Lancer de dé
- Durée de vie d'une ampoule
- Bénéfice net journalier d'une entreprise

Son **support** est la **plage de valeur** qu'elle peut prendre:

- Lancer de dé $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Durée de vie d'une ampoule $\rightarrow [0, \infty)$
- Bénéfice net d'une entreprise $\rightarrow \mathbb{R}$

On dit qu'une variable aléatoire est:

- **Discrète** si son support est **dénombrable** ($\{0, 1\}$, $\{\text{Bleu}, \text{Rouge}\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$).
- **Continue** si son support est **indénombrable** ($[0, 1]$, $(0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

Dans ce cours, les **variables aléatoires sont notées en MAJUSCULES**:
$X, Y, X_1, X_n, \overline{X}_n, S, S^2, T \dots$

Variable Aléatoire - Observation/Réalisation

Une **observation** est **la réalisation** du **phénomène incertain** modélisé par la **variable aléatoire**:

- Lancer de dé $\rightarrow 3$
- Durée de vie d'une ampoule $\rightarrow$ 37 528h
- Bénéfice net journalier d'une entreprise $-$367 449$

Dans ce cours, les **observations/réalisations sont notées <u>en minuscules</u>**: $x, y, x_1, x_n, \overline{x}_n, s, s^2, t\ldots$

☞ **Une variable aléatoire n'est pas un nombre**

☞ **Une observation est un nombre**

Variable Aléatoire - Caractérisation

On peut **caractériser** une **variable aléatoire** de différentes manières.

Par sa **loi**

☞ Par ex. $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, ou encore $Y \sim \mathcal{B}(0.7)$

Par sa **fonction de densité** (**continue**) ou **fonction de masse de probabilité** (**discret**)

☞ Par ex. $f_X(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ ou encore $f_Y(t) = \begin{cases} 0.7 & \text{si } t = 1, \\ 0.3 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par sa **fonction de répartition**, définie, pour une variable aléatoire Z, par

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} f_Z(t)dt & \text{si Z est une variable aléatoire continue} \\ \sum_{j \leq z} \mathbb{P}(Z = j) & \text{si Z est une variable aléatoire discrète} \end{cases}$$

☞ Par ex. $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ ou encore $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.3 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Variable Aléatoire - Espérance

L'**espérance** d'une **variable aléatoire** X est définie par ★

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt & \text{si } X \text{ est continue} \\ \sum_t t \times \mathbb{P}(X = t) & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Plus généralement, pour toute fonction g **intégrable**, on a ★

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt & \text{si } X \text{ est continue} \\ \sum_t g(t) \times \mathbb{P}(X = t) & \text{si } X \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Résultat *(L'espérance est linéaire)*. ★

Soient X et Y deux variables aléatoires, et $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois nombres réels. Alors,

$$\mathbb{E}[a + bX + cY] = a + b\mathbb{E}[X] + c\mathbb{E}[Y]$$

☞ **L'espérance d'une variable aléatoire est un nombre**

La **variance** d'une **variable aléatoire** X est définie par ★

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$$

L'**ecart-type** d'une **variable aléatoire** X est la **racine carrée de sa variance**, i.e., $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$

La **covariance** entre deux **variables aléatoires** X et Y est définie par ★

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Résultat *(La variance est quadratique)*. ★

Soient X et Y deux variables aléatoires, et $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois nombres réels. Alors,

$$\mathbb{V}(a + bX + cY) = b^2\mathbb{V}(X) + c^2\mathbb{V}(Y) + 2bc\mathrm{Cov}(X, Y)$$

☞ **La variance d'une variable aléatoire est un nombre <u>positif</u>**

Variable Aléatoire - Quantiles

Le **quantile** d'ordre $\alpha \in [0, 1]$ d'une **variable aléatoire** X est le **nombre** q_α tel que ★

$$\mathbb{P}(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

☞ On a une probabilité de 50% d'observer des nombres inférieurs ou égaux à $q_{0.5}$ (médiane)

La **fonction de quantile** d'une **variable aléatoire** X est la fonction

$$Q_X(\alpha) = \inf \{q : F_X(q) = \alpha\}$$

où, de manière équivalente, c'est **l'inverse de la fonction de répartition** de X

☞ **L'ordre α d'un quantile est un nombre entre 0 et 1**
☞ **Un quantile de X est un nombre dans le support de X**

Sommaire

Lois discrètes usuelles - Bernoulli

Une v.a. X qui suit une **loi de Bernoulli** est une v.a. discrète ayant comme **support** $\{0,1\}$ (échec, succès)

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$, **paramétrée** par la **probabilité de succès** $p = \mathbb{P}(X=1) \in [0,1]$

Elle modélise un phénomène qui n'a que **deux issues** possibles
Pile ou face, réussir un examen, présence de défaut...

Caractéristiques *(Loi de Bernoulli)*. ★

- $f_X(t) = \mathbb{P}(X=t) = p^t(1-p)^{1-t}$ pour $t \in \{0,1\}$ ✍
- $\mathbb{E}[X] = p$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$ ✍

☞ **Une v.a. ayant $\{0,1\}$ comme support est forcément une v.a. de Bernoulli**

Lois discrètes usuelles - Binomiale

Une v.a. de **loi binomiale** modélise **le nombre de succès** obtenus lors de la réalisation de plusieurs expériences aléatoires **identiques et indépendantes**

Elle est **paramétrée** par:

- Le **nombre d'expériences réalisées**: $n \in \mathbb{N}$
- La **probabilité de succès de chaque expérience**: $p \in [0, 1]$

Elle modélise le **nombre de succès** suite à une **répétition** de phénomènes à **deux issues**

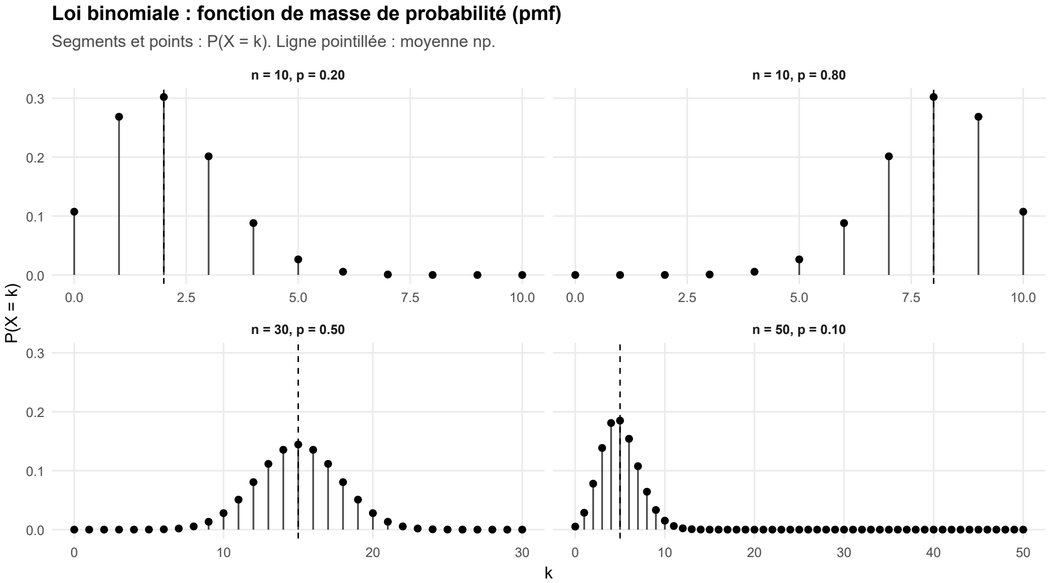
Plusieurs pile ou face, nombre d'étudiant.es passant un examen, nombre de pièces défectueuses...

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, et son **support** est $\{0, \dots, n\}$

Caractéristiques *(Loi binomiale)*. ★

- $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $t \in \{0, \dots, n\}$ ✍
- $\mathbb{E}[X] = np$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ ✍

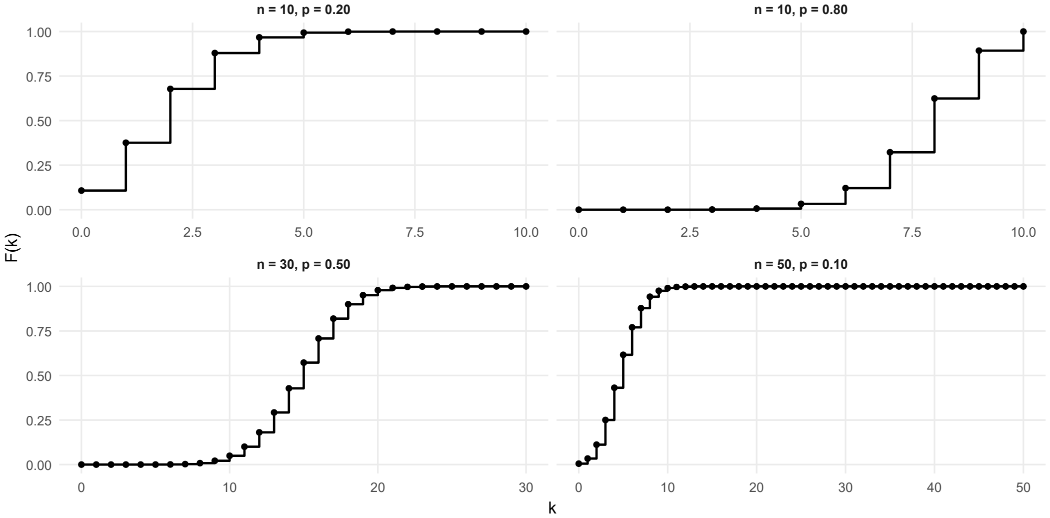
☞ **Une v.a. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$** ✍



Loi binomiale : fonction de masse de probabilité (pmf)
Segments et points : P(X = k). Ligne pointillée : moyenne np.
n = 10, p = 0.20
n = 10, p = 0.80
n = 30, p = 0.50
n = 50, p = 0.10
P(X = k)
k
0.0
0.1
0.2
0.3
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
0
10
20
30
40
50

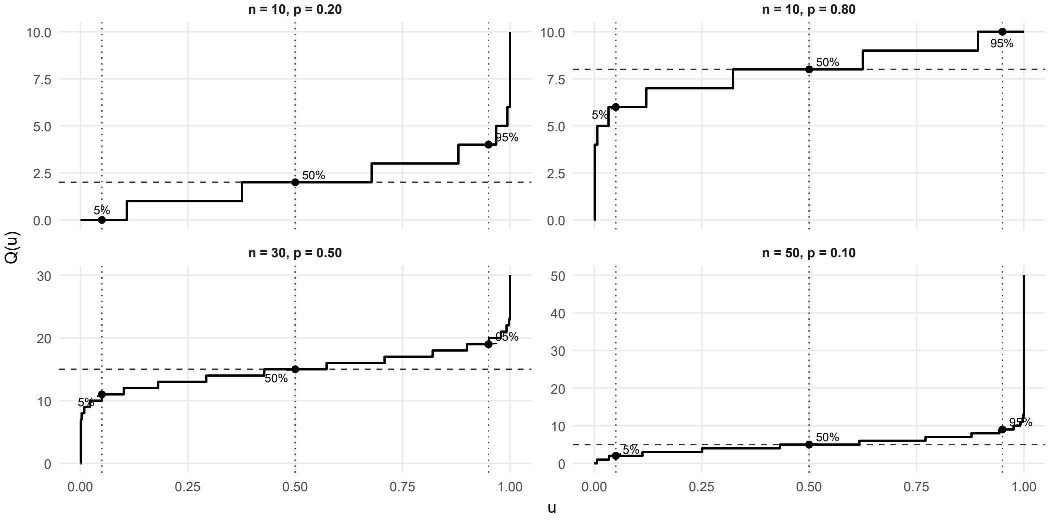
Loi binomiale : fonction de répartition (cdf)

Marche discrète : $F(k) = P(X \le k)$.



Loi binomiale : fonction quantile

Courbe en escalier : Q(u). Lignes verticales : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne np.



Bernoulli et binomiale - Exemple

Example *(Compagnie d'assurance).* ✍

Une compagnie d'assurance reçoit des réclamations.
Chaque réclamation à une probabilité de 0.2 de dépasser 2000\$.
☞ **Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive au moins une réclamation dépassant** 2000\$ **parmi les 10 premières?**

1. Identifier la loi du phénomène "Réclamation dépassant 2000\$"
2. Identifier la loi du phénomène "Nombre de réclamations dépassant 2000\$ parmi les 10 premières"
3. Reformuler l'évènement "au moins une réclamation dépasse 2000\$"
4. Répondre à la question

Rappel: Pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $\mathbb{P}(X=t) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$

Solution: $X \sim \mathcal{B}(10, 0.2)$, et $1 - \mathbb{P}(X=0) = 1 - 0.8^{10} \approx 0.893$

Une v.a. de **loi uniforme discrète** modélise un phénomène où **toutes les issues sont équiprobables**

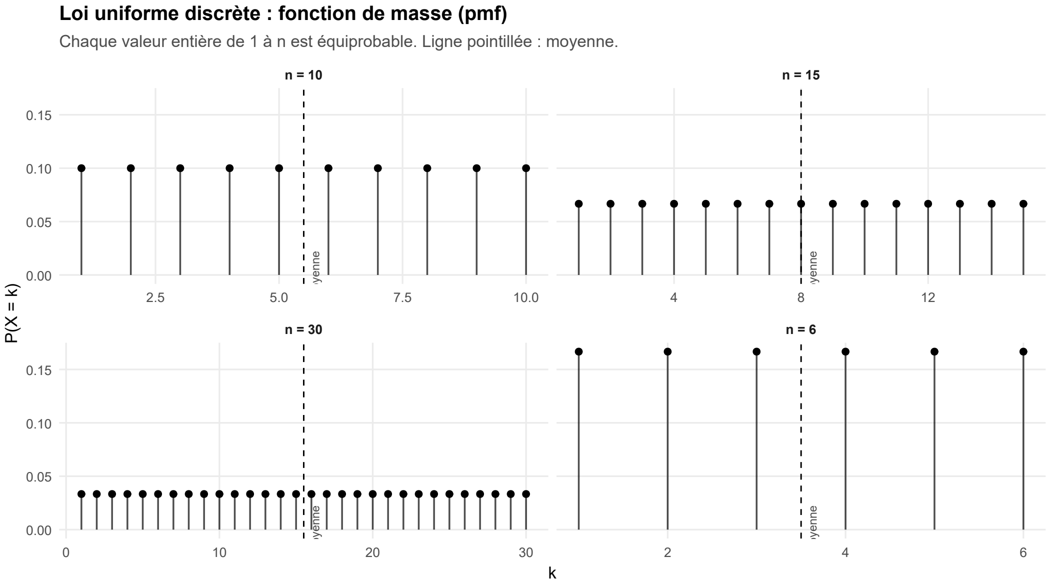
Elle est paramétrée par $n \in \mathbb{N}$, **le nombre d'issues du phénomène étudié**
Lancer de dé (non-pipé), tirer une carte, répondre au hasard à un QCM...

On note $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$ et son **support** est $\{1, \ldots, n\}$

Caractéristiques *(Loi uniforme discrète)*. ★

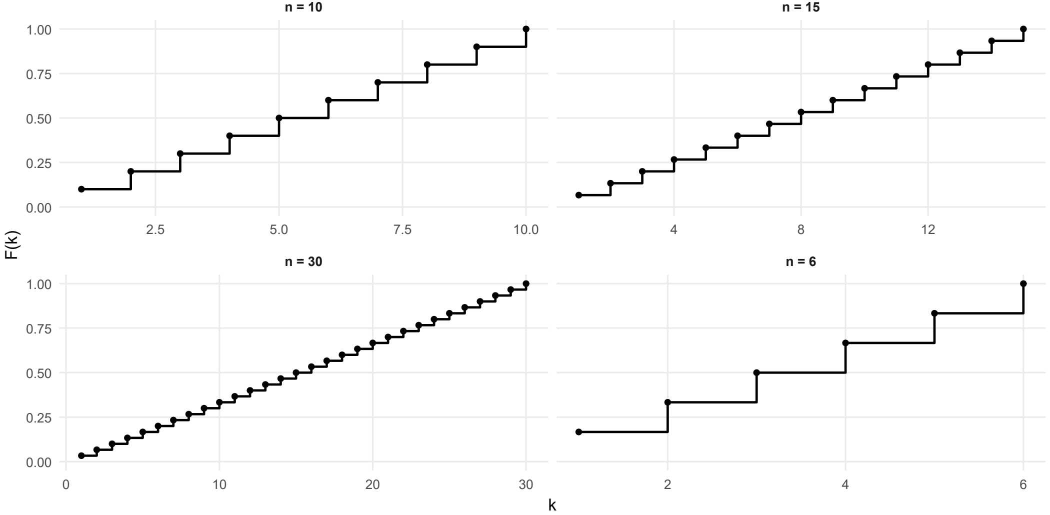
- $f_X(t) = \mathbb{P}(X = t) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{1,\ldots,n\}}(t)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$ ✍

☞ **Une v.a. de loi Uniforme de paramètre $n = 2$ est une v.a. de Bernoulli $\mathcal{B}(0.5)$** ✍


Loi uniforme discrète : fonction de masse (pmf)
Chaque valeur entière de 1 à n est équiprobable. Ligne pointillée : moyenne.
n = 10
n = 15
n = 30
n = 6
P(X = k)
k
0.00
0.05
0.10
0.15
2.5
5.0
7.5
10.0
4
8
12
0
10
20
30
2
4
6

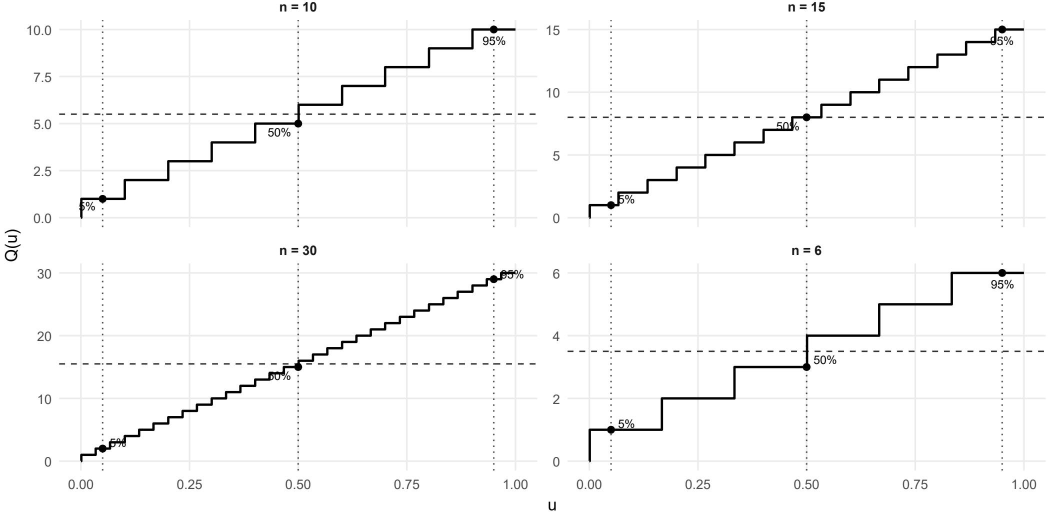
Loi uniforme discrète : fonction de répartition (cdf)

Marche discrète : F(k) = P(X ≤ k).



Loi uniforme discrète : fonction quantile (inverse cdf)

Courbe en escalier : Q(u). Lignes verticales : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne.



Sommaire

Lois continues usuelles - Uniforme

Une v.a. de **loi uniforme continue** modélise un phénomène à **issue réelle et équiprobable**

Elle est paramétrée par **un intervalle** $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < \infty$
Temps d'attente d'un ascenseur, roue de la fortune...

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et son **support** est l'intervalle $[a, b]$

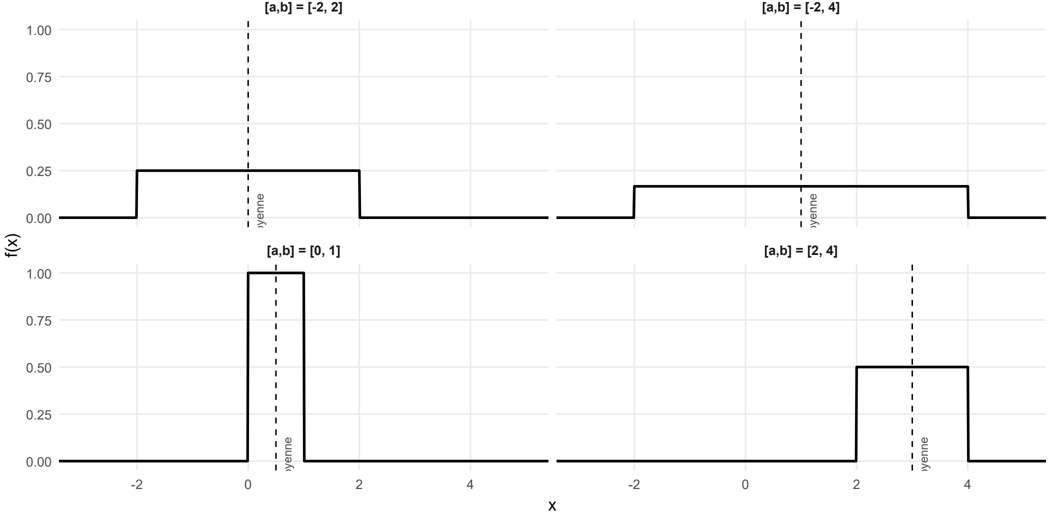
Caractéristiques *(Loi uniforme continue)*. ★

- $f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ✍

☞ **Une v.a. de loi uniforme continue généralise la loi uniforme discrète à un intervalle**

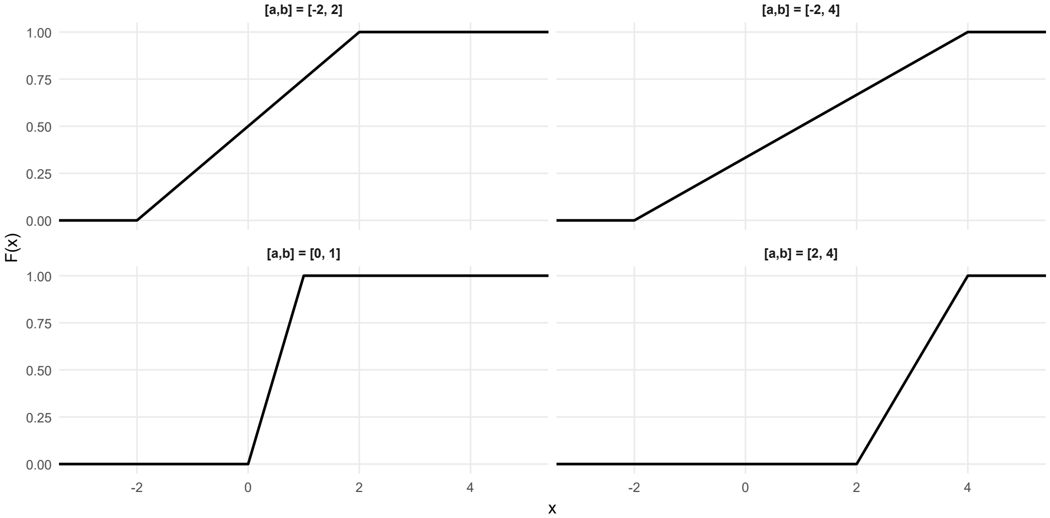
Loi uniforme continue : densité (pdf)

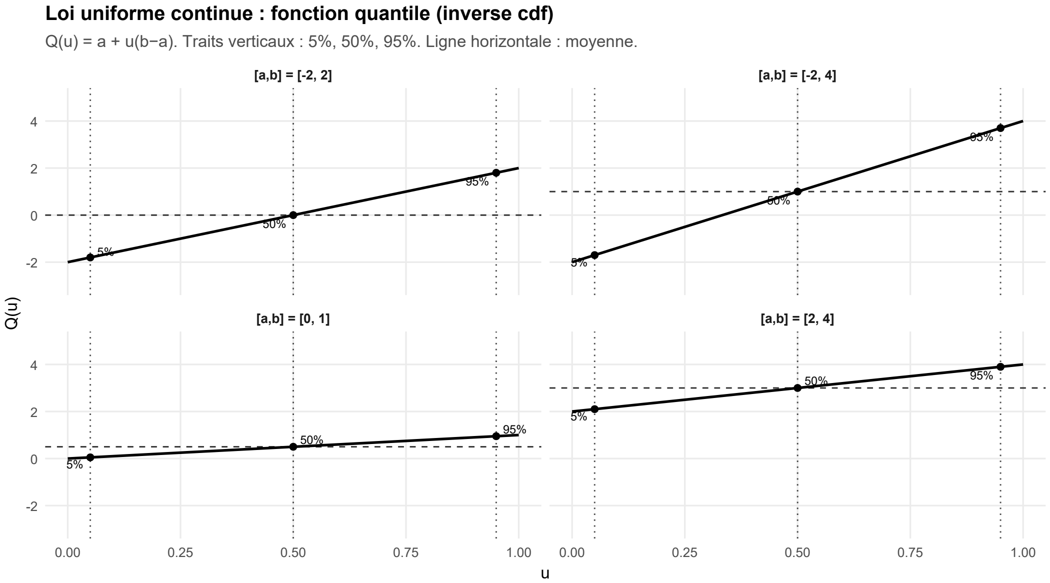
Segment horizontal sur [a,b] de hauteur 1/(b−a). Ligne pointillée : moyenne.



Loi uniforme continue : fonction de répartition (cdf)

0 pour x<a, linéaire sur [a,b], 1 pour x>b.




Loi uniforme continue : fonction quantile (inverse cdf)
Q(u) = a + u(b−a). Traits verticaux : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne.
[a,b] = [-2, 2]
[a,b] = [-2, 4]
[a,b] = [0, 1]
[a,b] = [2, 4]
5%
50%
95%
4
2
0
-2
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
Q(u)
u

Lois continues usuelles - Exponentielle

Une v.a. de **loi exponentielle** modélise un phénomène à **issue réelle positive** (temps d'attente)

Durée de vie d'une ampoule, temps entre deux tremblements de terre...

Elle est paramétrée par $\lambda \in (0, \infty)$, généralement appelée **intensité**

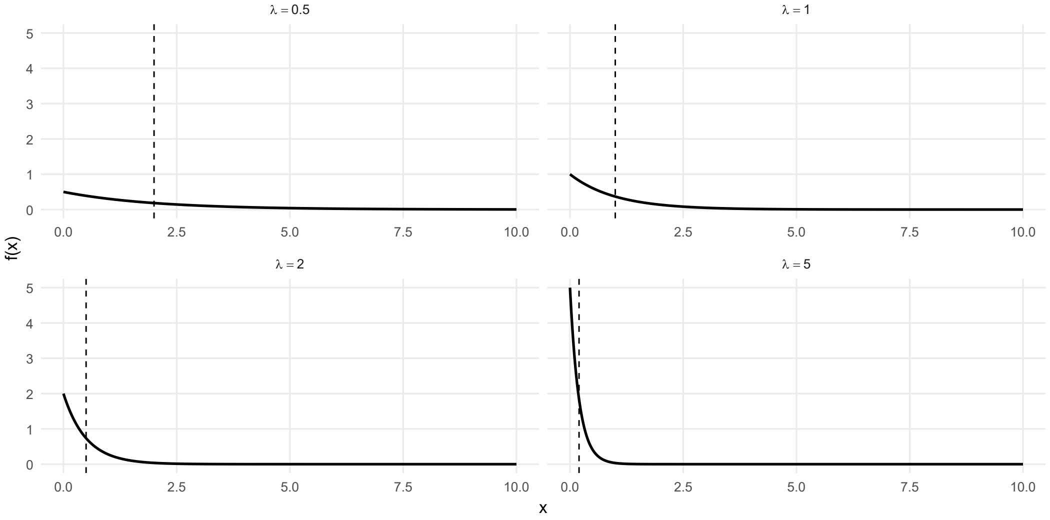
On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, et son **support** est $[0, \infty)$

Caractéristiques *(Loi exponentielle)*. ★

- $f_X(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ pour $t \in [0, \infty)$
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ✍

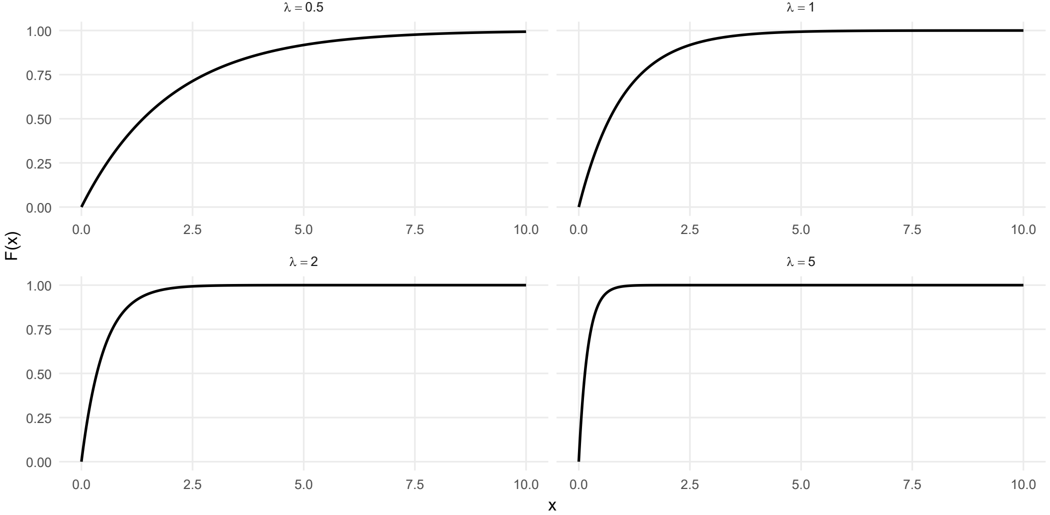
Loi exponentielle : densité (pdf)

Courbe décroissante. Ligne pointillée : moyenne = 1/lambda.



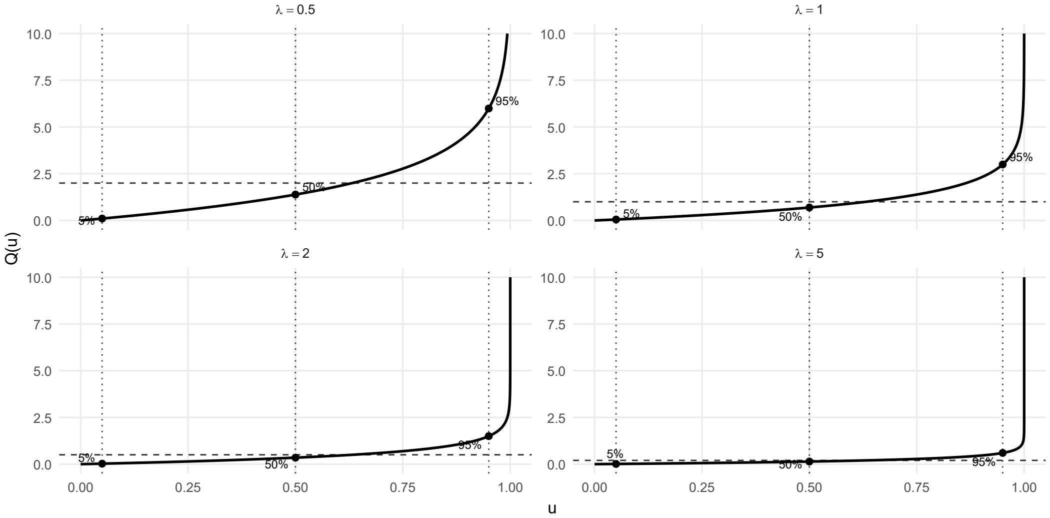
Loi exponentielle : fonction de répartition (cdf)

F(x) = 1 - exp(-lambda * x).



Loi exponentielle : fonction quantile (inverse cdf)

Q(u) = -log(1-u)/lambda. Traits verticaux : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne.



Une v.a. de **loi normale** (v.a. **Gaussienne**, ou **loi de Gauss**) modélise un phénomène à **issue réelle**

Poids des nouveaux-nés, erreurs de mesures...

Elle est paramétrée par son **espérance** $\mu \in \mathbb{R}$ et sa **variance** $\sigma^2 \in (0, \infty)$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et son **support** est $\mathbb{R}$ tout entier

La v.a. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est dite **standard** ou **centrée-réduite**

Caractéristiques *(Loi normale)*. ★

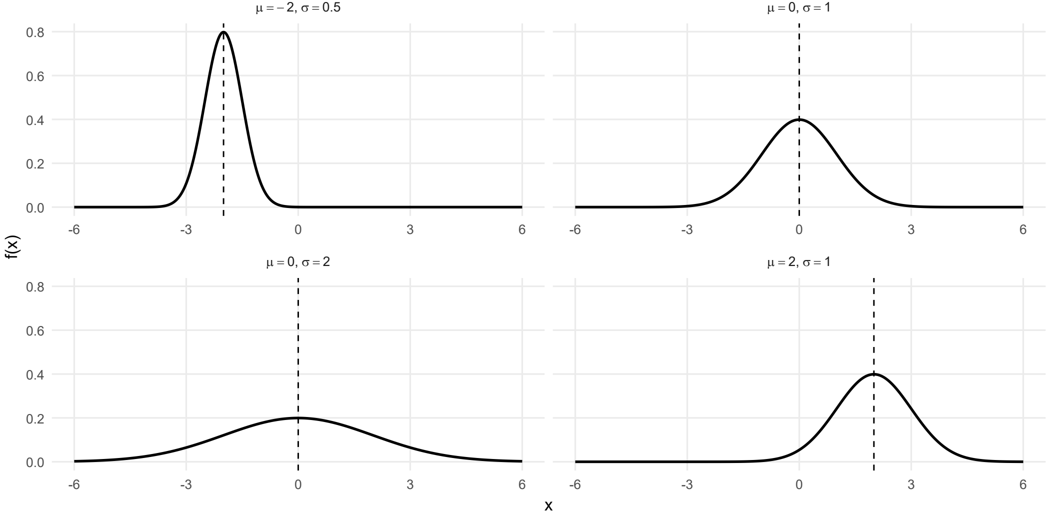
- $f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}[X] = \mu$ ✍
- $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ ✍
- La v.a. $T = a + bX \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

☞ **C'est la loi la plus utilisée pour ses propriétés, et la plus importante dans ce cours**

On verra qu'elle est primordiale pour la plupart des **résultats asymptotiques en statistique**

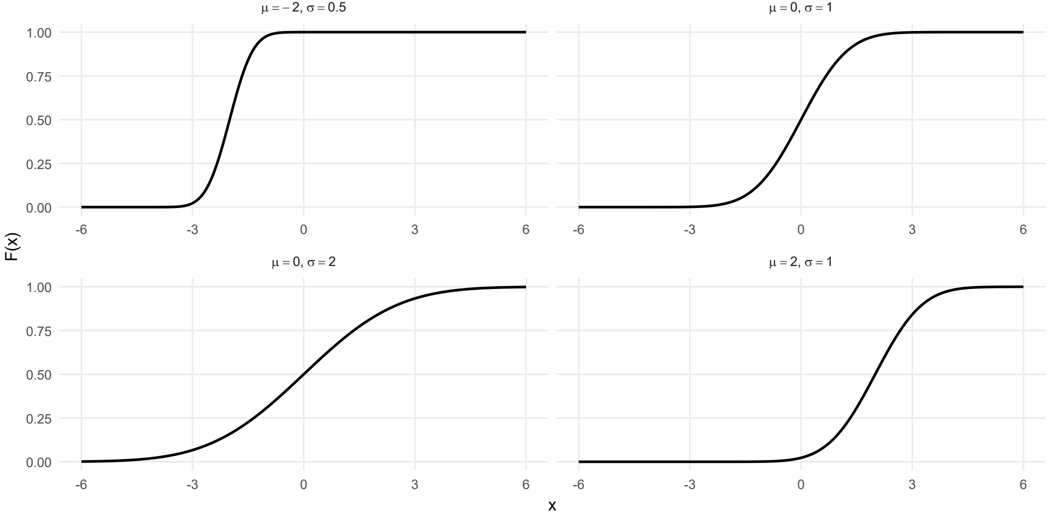
Loi normale : densité (pdf)

Courbe en cloche. Ligne pointillée : moyenne μ.



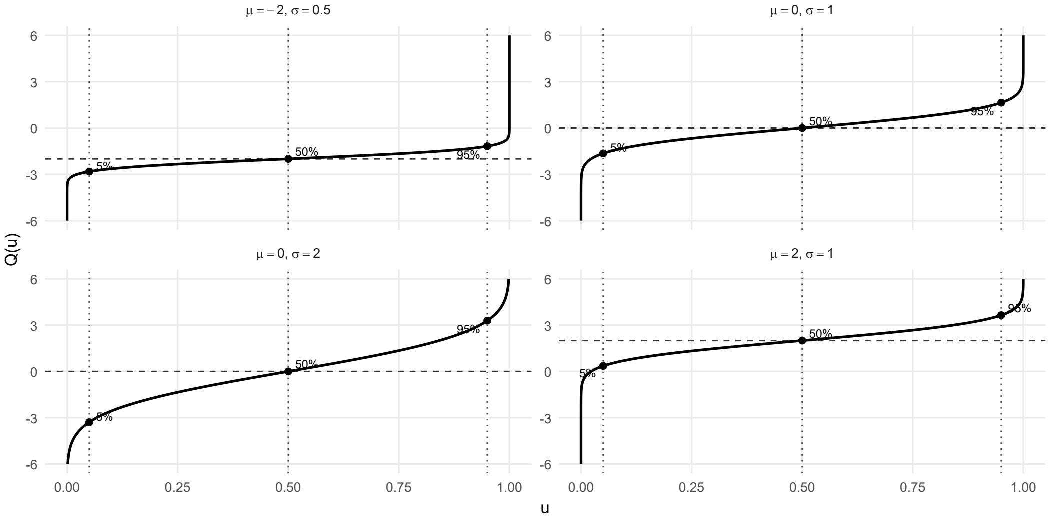
Loi normale : fonction de répartition (cdf)

$F(x) = P(X \le x) = \text{pnorm}(x; \mu, \sigma)$.



Loi normale : fonction quantile (inverse cdf)

Q(u) = qnorm(u; μ, σ). Traits verticaux : 5%, 50%, 95%. Ligne horizontale : moyenne μ.



Loi normale - Exemple

Example *(Taille des plantes)*. ✍

On s'intéresse à la taille de jeunes plants de tomates après 2 mois de croissance.
On sait que la taille moyenne d'un plant est de 30 cm, avec un écart-type de 4 cm.
☞ **Quelle est la probabilité qu'un plant choisi au hasard mesure plus de 35 cm ?**

1. Modélisez le phénomène "Taille d'un plant de tomate" par une loi normale
2. Standardiser la variable pour pouvoir utiliser la loi normale standard

Rappel: Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $a + bX \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

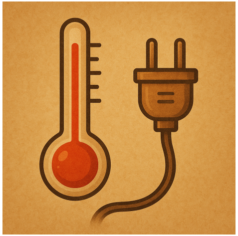
3. Reformuler l'évènement "taille supérieure à 35 cm"
4. Répondre à la question

Rappel: Pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = \Phi(z)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Solution: Si $X \sim \mathcal{N}(30, 4^2)$, alors
$\mathbb{P}(X > 35) = 1 - \Phi\left(\frac{35-30}{4}\right) = 1 - \Phi(1.25) \approx 0.106.$

Sommaire

Couple de variables aléatoires



Jusqu'à maintenant, on a modélisé des **phénomènes univariés**...
Mais il est possible de modéliser **deux phénomènes conjointement**!

Très utile quand ils **dépendent l'un de l'autre**
Taille et poids, température et conso d'électricité, temps d'étude et note...

Supposons que l'on modélise un phénomène par X et un autre par Y

Le **vecteur aléatoire bivarié** (X, Y) modélise conjointement ces deux phénomènes

Le **support** de (X, Y) est le **produit cartésien** du support de X et de celui de Y
☞ Si X et Y sont de loi normale, le support de (X, Y) est le plan $\mathbb{R}^2$
☞ Si X et de Bernoulli et Y de loi exponentielle, le support de (X, Y) est l'ensemble $\{0, 1\} \times [0, \infty)$

☞ **Une réalisation d'un vecteur bivarié, c'est <u>deux</u> nombres**

Densité jointe, densités marginales

Un **vecteur aléatoire** (X, Y) est caractérisé par sa **fonction de densité jointe**
C'est une fonction $f_{(X,Y)}(s,t)$, telle que:

- Elle est **positive**

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad f_{(X,Y)}(s,t) \geq 0$$

- Son **intégrale est égale à 1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s,t) ds dt = 1$$

Pris séparément, X et Y restent des variables aléatoires
Leurs densités f_X et f_Y sont appelées les **densités marginales** du **vecteur aléatoire** (X, Y)

Il est possible de les **retrouver à partir de la densité jointe**:

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s,t) dt, \quad f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(s,t) ds$$

Indépendance

Or, deux phénomènes peuvent **ne pas dépendre l'un de l'autre**

Score à Tetris et la température à Montréal, jour des premières couleurs et résultat d'un tirage au loto...

Dans ce cas là, on **modélise ces deux phénomènes** par des **v.a. indépendantes**

X et Y sont **indépendantes** (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) **si et seulement si la densité jointe du vecteur aléatoire** (X, Y) **est le produit des densités marginales**

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longleftrightarrow \quad f_{(X,Y)}(s,t) = f_X(s) \times f_Y(t)$$

Propriétés *(Indépendance).* ★

Si X et Y sont deux v.a. ***indépendantes*** *($X \perp\!\!\!\perp Y$), alors ($\Longrightarrow$)*

- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$
- $\mathcal{C}ov(X,Y) = 0$
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$

☞ **Ce sont des implications et pas des équivalences**

Sommaire

Propriétés *(Somme de deux v.a. Gaussiennes).* ★

Soit $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ *et* $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

- *La v.a.* $T = a + bX \sim \mathcal{N}(\underbrace{a + b\mu_X}_{\mathbb{E}[T]}, \underbrace{b^2\sigma_X^2}_{\mathbb{V}(T)})$
- *Si* $X \perp\!\!\!\perp Y$*, alors la v.a.* $H = X + Y \sim \mathcal{N}(\underbrace{\mu_X + \mu_Y}_{\mathbb{E}[H]}, \underbrace{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}_{\mathbb{V}(H)})$

☞ Quelle est la loi de $aX + bY$? ✍

On vu précédemment que pour **n'importe quel couple de v.a.** X et Y

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$$

Or, si X et Y **sont Gaussiennes**, on a que

$$X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$$

☞ **Ce n'est valide que pour deux v.a. Gaussiennes**

Le coefficient de corrélation entre $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ est défini par

$$\rho_{(X,Y)} = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

☞ Dans la suite, on notera $\rho = \rho_{(X,Y)}$

Un **vecteur Gaussien bivarié** (X, Y), avec $-1 < \rho < 1$ a comme densité jointe

$$f_{(X,Y)}(s,t) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{s-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{t-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{s-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{t-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right)$$

☞ Montrons que lorsque $\rho = 0$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ✍

Variables aléatoires Gaussiennes - Combinaisons linéaires

Supposons maintenant que l'on ait **une séquence** $X_1, \ldots, X_k$ de $k \in \mathbb{N}$ **v.a. Gaussiennes indépendantes deux à deux**, où $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \ldots, k$

La **loi jointe** du **vecteur aléatoire multivarié** $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{k} f_{X_i}(t_i)$$

Propriétés *(Combinaison linéaire de Gaussiennes indépendantes).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_k$ de $k \in \mathbb{N}$ une séquence de v.a. Gaussiennes indépendantes deux à deux avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \ldots, k$. Soit des coefficients réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu_j, \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j \sigma_j)^2\right)$$

☞ **Ce résultat va être primordial à partir du Chapitre 4**

Sommaire

Rappels sur les limites

Étudier le **comportement asymptotique** d'une fonction, ça revient à étudier **sa limite**.
☞ **L'approximation des valeurs de la fonction** quand la variable **se rapproche de l'infini**

Par exemple:

- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$

Si la limite d'une fonction est un réel, on dit que **la limite existe**, et que la fonction **converge**
Si ce n'est pas le cas, on dit que **la limite n'existe pas**, et que la fonction **diverge**

On peut également noter la limite autrement

$$\frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$$

☞ **Pas de "n" à droite de la flèche!!!**

Théorème de la limite centrale

Théorème *(Théorème de la limite centrale (TLC)).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.s ***i) indépendantes****,* ***ii) ayant toutes la même loi iii) avec*** $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu \in \mathbb{R}$***,*** ***et*** $\mathbb{V}\left(X_i\right) = \sigma^2 < \infty$.

Alors la fonction (de n) suivante admet comme limite

$$\sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- La limite de $T_n = \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma}\right)$ **existe** et donc elle **converge** vers une v.a. Z
- La **loi de** Z est **normale standard**

Interprétation alternative: La fonction de répartition de T_n converge vers celle d'une Gaussienne standard, c-à-d, $\mathbb{P}(T_n \leq t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(t)$

☞ Plus de détails dans le cours STT2000

☞ **Ce théorème est le meilleur ami du statisticien et nous sera très utile à partir du Chapitre 4**

Quand n est "grand", on peut **approcher la loi de T_n par une loi normale**

Approximation binomiale

Illustration du TLC dans le **cas de v.a. de Bernoulli**: Planche de Galton

A chaque clou, la bille **part à gauche (échec) ou à droite (succès)**

On modélise le passage par le clou i par une v.a. de **Bernoulli**: $X_i \sim \mathcal{B}(0.5)$

Après avoir traversé n rangées, le **nombre de pas à droite** est modélisé par une **v.a. binomiale**: $\sum_{i=1}^{n} X_i = Y \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$

☞ **Le nombre de pas à droite correspond à la case d'arrivée**

On répète cette expérience plusieurs fois: on lance plusieurs billes

☞ **Histogramme** pour représenter la distribution de Y (Chap 2)

Théorème *(Théorème de De-Moivre Laplace).* ★

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$, et $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Approximation binomiale - Correction pour la continuité

Utilisation de l'approximation d'une **loi binomiale par une loi normale**:

1. Vérifier les **conditions d'acceptabilité**: (n assez grand)

$$np - 3\sqrt{np(1-p)} > 0 \quad \text{et} \quad n > np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

☞ Conditions vérifiées: on se situe dans **le régime asymptotique**

2. On **choisit d'approximer** la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$
3. Ainsi, si une v.a. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, on peut **approcher sa loi** par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

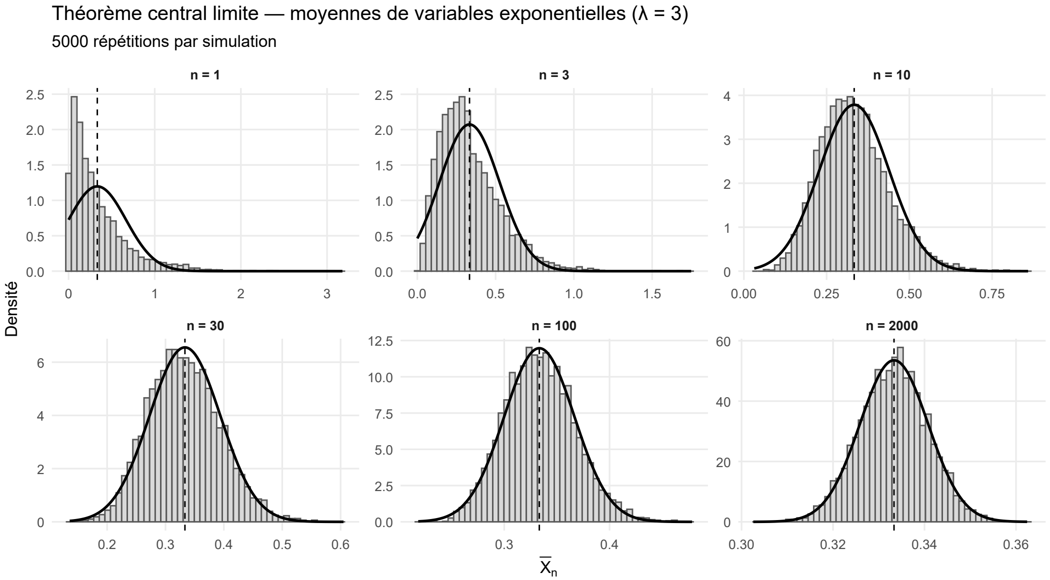
☞ Dans bien des cas, les calculs deviennent plus faciles

Petit problème:

La loi $\mathcal{B}(n,p)$ est **discrète**, alors que la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ est **continue**

Pour corriger cet effet, on applique la **correction pour la continuité** ($t, a, b \in \{0, \dots, n\}$):

Quantité ($\mathcal{B}(n,p)$)	Quantité approchée corrigée ($\mathcal{N}(np, np(1-p))$)
$\mathbb{P}(X = t)$	$\mathbb{P}(t - 1/2 \leq X \leq t + 1/2)$
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$	$\mathbb{P}(a - 1/2 \leq X \leq b + 1/2)$



Théorème central limite — moyennes de variables exponentielles (λ = 3)
5000 répétitions par simulation
n = 1
n = 3
n = 10
n = 30
n = 100
n = 2000
Densité
$\overline{X}_n$

Théorème central limite — moyennes de variables Uniforme(0,1)

5000 répétitions par simulation