Computerorientierte Physik, SS 2013, Übung 2

Christof Gattringer

Das Runge Kutta Verfahren vierter Ordnung (RK4) erlaubt es das Differenzialgleichungssystem

$$\dot{\vec{y}}(t) \;=\; \vec{F}(\,\vec{y}(t), t\,)\;, \tag{1}$$

zu lösen. Dabei wird die Zeit in diskrete Schritte

$$t_n \;=\; \epsilon\, n \quad \text{ mit } \; n = 0, 1, 2, \,... \tag{2}$$

eingeteilt. Man erhält den Lösungsvektor $\vec{y}(t_{n+1})$ zum Zeitpunkt t_{n+1} aus dem Vektor zum vorhergehenden Zeipunkt t_n durch

$$\vec{y}(t_{n+1}) \;=\; \vec{y}(t_n) \,+\, \frac{\epsilon}{6}\left[\vec{k}_1 \,+\, 2\,\vec{k}_2 \,+\, 2\,\vec{k}_3 \,+\, \vec{k}_4\right] \,+\, \mathcal{O}(\epsilon^5)\;, \tag{3}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 \;&=\; \vec{F}(\,\vec{y}(t_n)\,,\, t_n\,)\;,\\
\vec{k}_2 \;&=\; \vec{F}(\,\vec{y}(t_n) + \epsilon \vec{k}_1/2\,,\, t_n + \epsilon/2\,)\;,\\
\vec{k}_3 \;&=\; \vec{F}(\,\vec{y}(t_n) + \epsilon \vec{k}_2/2\,,\, t_n + \epsilon/2\,)\;,\\
\vec{k}_4 \;&=\; \vec{F}(\,\vec{y}(t_n) + \epsilon \vec{k}_3\,,\, t_n + \epsilon\,)\;.
\end{aligned} \tag{4}$$

Schreiben Sie ein Computerprogramm, welches das Runge Kutta Verfahren implementiert. Testen Sie Ihr Programm für den harmonischen Oszillator,

$$\ddot{x}(t) \;=\; -\,\omega^2\, x(t)\;, \tag{5}$$

der in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung der Form (1) umgeschrieben werden kann, wobei

$$\vec{y}(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \;\;,\;\; \vec{F}(\,\vec{y}(t), t\,) \;=\; \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\omega^2 y_1(t) \end{pmatrix}\;. \tag{6}$$

Versuchen Sie damit bespielsweise die (analytisch bekannte) Lösung

$$x(t) \;=\; \cos(t) \;\;,\;\; \dot{x}(t) \;=\; -\sin(t)\;, \tag{7}$$

zur Anfangsbedingung $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ zu reproduzieren (für das Beispiel wurde hier $\omega = 1$ gesetzt).